

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

COMPACTIFICAÇÃO DE POINCARÉ DE CAMPOS POLINOMIAIS

Francisco Braun

SÃO CARLOS  
2007

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

COMPACTIFICAÇÃO DE POINCARÉ DE CAMPOS POLINOMIAIS

Francisco Braun

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Ruidival Soares dos Santos Filho.

SÃO CARLOS  
2007

*Para meus pais Inácio e Elice*

**“Um pouco de geometria:**

A curva é o caminho mais agradável entre dois pontos.”

(Mário Quintana)

# Agradecimentos

Agradeço a Deus;

ao Inácio e à Elice — meus pais —, por terem sempre me incentivado e auxiliado na minha formação;

ao Professor Ruidival — meu orientador —, por ter me guiado até aqui e por ter aceito me conduzir também na próxima etapa: o Doutorado;

a todos os professores que tive até agora (desde o primário);

à Camila;

aos demais amigos (em especial ao “Achoôm” — meu colega de república —) e familiares que me deram força;

e à Capes pelo apoio financeiro.

# Resumo

Neste trabalho, apresentamos a Compactificação de Poincaré de campos vetoriais polinomiais e provamos uma série de propriedades dela, principalmente para campos vetoriais hamiltonianos.

**Palavras-chave:** Análise Matemática. Campos vetoriais. Campos polinomiais.

# Abstract

In this work, we present the Poincaré Compactification of polynomial vector fields and prove some properties of it, mainly to hamiltonian vector fields.

**Keywords:** Mathematical Analysis. Vector fields. Polinomial fields.

# Sumário

<b>0</b>	<b>Introdução</b>	<b>8</b>
<b>1</b>	<b>Preliminares</b>	<b>11</b>
1.1	Variedades . . . . .	11
1.1.1	Primeiras definições . . . . .	11
1.1.2	O Teorema de Sard . . . . .	14
1.1.3	Variedades com fronteira . . . . .	19
1.1.4	Homotopia e Isotopia . . . . .	22
1.1.5	Variedades orientáveis e o grau de uma transformação . . . . .	24
1.1.6	O Teorema da “Esfera Cabeluda” . . . . .	28
1.2	Compactificações . . . . .	28
<b>2</b>	<b>A técnica da Compactificação de Poincaré</b>	<b>33</b>
2.1	A Compactificação de Poincaré de um campo vetorial polinomial . . . . .	33
2.2	Particularização para um campo vetorial polinomial hamiltoniano . . . . .	40
2.3	O fluxo no infinito . . . . .	45
2.4	Propriedades genéricas . . . . .	47
<b>3</b>	<b>Considerações finais e exemplos</b>	<b>54</b>
3.1	Observações sobre a compactificação de Poincaré . . . . .	54
3.2	Exemplos . . . . .	56
3.2.1	O caso planar no infinito . . . . .	56
3.2.2	O caso monomial no infinito . . . . .	59
3.2.3	Mais alguns exemplos . . . . .	61
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>63</b>



# Capítulo 0

## Introdução

A Compactificação de Poincaré de campos vetoriais polinomiais, segundo o artigo “Poincaré compactification of Hamiltonian polynomial vector fields” de J. Delgado, E. A. Lacomba, J. Llibre e E. Pérez ([2]), surge pela primeira vez no trabalho [1], em que ela é usada para dar uma classificação completa do comportamento no infinito de campos polinomiais de grau três do plano cujas órbitas são limitadas. Devido ao grande auxílio que essa técnica prestou neste e também em trabalhos posteriores (como [3] e [4] da área de Mecânica celeste, onde os campos hamiltonianos têm um grande papel), aparece então o já citado artigo [2] para estudar mais especificamente a Compactificação de Poincaré, extraindo propriedades dela, principalmente quando aplicada a campos polinomiais hamiltonianos. É este artigo que seguiremos na maior parte do trabalho.

Nosso intuito em estudar esta técnica é, principalmente, caracterizar propriedades de campos de vetores de  $\mathbb{R}^n$  através da sua Compactificação de Poincaré e, assim, procurar descrever formas normais globais que satisfazem uma dada propriedade. Em especial, pretendemos observar quando campos polinomiais tais como aqueles descritos em [9] são globalmente resolúveis. Tais campos aparecem quando procuramos garantir injetividade global de aplicações.

Existem muitas formas de — acrescentando elementos — “compactificar”  $\mathbb{R}^n$ , fazendo com que ele se torne um espaço topológico compacto. Talvez a forma mais conhecida é, através da Projeção Estereográfica, identificar  $\mathbb{R}^n$  com  $S^n$  menos o pólo norte e depois unir um elemento  $\infty$  a  $\mathbb{R}^n$  de tal forma que  $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$  seja homeomorfo a  $S^n$ , sendo, portanto, um espaço compacto. Seguindo as idéias de Poincaré, que trabalhou desta forma em  $\mathbb{R}^2$ , tomaremos uma compactificação de  $\mathbb{R}^n$  que é homeomorfa ao hemisfério norte (hemisfério sul) unido com o equador da esfera  $S^n$ , sendo que este corresponde ao infinito de  $\mathbb{R}^n$ . Tal compactificação é naturalmente obtida através da seguinte construção, a *projeção central*: Identificando  $\mathbb{R}^n$  com o plano  $\pi$ , tangente ao pólo norte  $N$  de  $S^n$ , formemos retas  $r$  passando pela origem de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Cada reta  $r$  corta  $S^n$  em dois pontos, e tais retas, quando não estiverem contidas no plano  $y_{n+1} = 0$ , cortam  $\pi$  em um ponto. Basta, então, identificarmos o ponto de  $\pi$  com o ponto de  $S^n$  que estiver no hemisfério norte e também com o ponto que estiver no hemisfério sul (chamemos os respectivos difeomorfismos de  $\Phi^+$

e de  $\Phi^-$ ). Observando a figura 0.0.1, fica natural de perceber o porquê do infinito de  $\mathbb{R}^n$  corresponder ao equador de  $S^n$ . Cada hemisfério unido com o equador  $S^{n-1}$

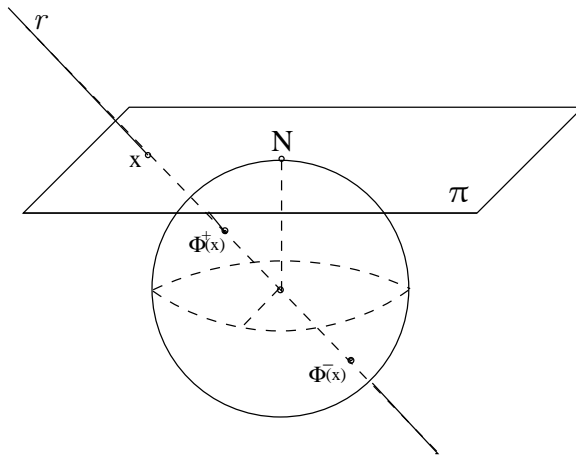


Figura 0.0.1: Projeção central.

de  $S^n$  é homeomorfo a uma compactificação de  $\mathbb{R}^n$ . Agora, dado um campo polinomial  $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , quando o levamos por  $\Phi^+$  ( $\Phi^-$ ) para ser definido no hemisfério norte (sul), ele não tem extensão contínua para o equador. O que fazemos então é multiplicar o campo por uma função especial, obtendo assim um campo analítico  $\tilde{X}$  não somente em cada hemisfério unido com o equador, mas em toda a esfera  $S^n$ . Dizemos que o campo  $\tilde{X}$  é a *Compactificação de Poincaré de  $X$* .

Veremos propriedades gerais do campo  $\tilde{X}$ , como por exemplo: “Se  $X$  não se anula em  $\mathbb{R}^n$ , então  $\tilde{X}$  se anula em algum ponto do equador de  $S^n$ ” (Proposição 2.1.3). Também daremos as expressões de  $\tilde{X}$  em coordenadas locais. Depois, restringindo-nos a campos polinomiais hamiltonianos, provaremos que se  $H : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}$  for a função que define o campo hamiltoniano  $X_H$ , os níveis de energia  $\{H = h\}$  se estendem a um mesmo conjunto invariante (pela Compactificação de Poincaré  $\tilde{X}$ ) do equador. Mais ainda, mostraremos que, genericamente, na *topologia fraca*, esse tal conjunto invariante é uma variedade de dimensão  $n - 2$  e, também genericamente, que todos os pontos singulares da Compactificação de Poincaré de  $X_H$  são hiperbólicos. Isso tudo é feito no Capítulo 2.

No Capítulo 3, daremos uma condição para que um campo polinomial definido no hemisfério norte da esfera  $S^n$  seja múltiplo da Compactificação de Poincaré de um campo polinomial em  $\mathbb{R}^n$ . Analizaremos como os campos polinomiais em  $S^n$  podem, sob certas hipóteses, ser transformados em campos homogêneos, e daremos uma série de exemplos da teoria desenvolvida.

No intuito de tornar o trabalho o mais auto-suficiente possível, apresentamos uma grande quantidade de preliminares no Capítulo 1. A Seção 1.1 dá uma introdução ao estudo das variedades sob o enfoque de [7], isto é, variedades mergulhadas em  $\mathbb{R}^n$ . Nesta mesma seção, o conceito de grau de função é introduzido,

bem como toda a teoria necessária para fundamentá-lo (variedades com fronteira, variedades orientáveis, homotopia e isotopia de aplicações entre variedades). Essa teoria é essencial para uma demonstração rápida do *Teorema da “Esfera Cabeluda”*, que será utilizado para a demonstração da Proposição 2.1.3. A Seção 1.2 introduz os conceitos de compactificação de um espaço topológico: são apresentados alguns resultados e alguns exemplos, culminando com a Compactificação de Stone-Čech.

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1 Variedades

Procuramos nesta secção fazer um estudo auto suficiente da teoria de variedades (pensadas aqui como mergulhadas em  $\mathbb{R}^n$ ). Veremos as definições básicas, o conceito de Valor Regular e o Teorema de Sard. Depois veremos Variedades com fronteira e os conceitos de Homotopia e Isotopia. Por fim, veremos Variedades orientáveis e definiremos o Grau de uma transformação, que, depois da definição de Campo Vetorial, nos auxiliará na demonstração do Teorema da “Esfera Cabeluda”.

#### 1.1.1 Primeiras definições

Daremos as definições básicas para o estudo de variedades.

**Definição 1.1.1** Dizemos que uma função contínua  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^l$ , com  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k$  aberto, é suave se  $\partial^\alpha f$  existe e é contínua  $\forall \alpha \in \mathbb{N}^k$  tal que  $|\alpha| = n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Mais geralmente, dizemos que  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^l$ , com  $X \subset \mathbb{R}^k$  um subconjunto qualquer, é suave se existem  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k$  aberto e  $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^l$  suave, tais que  $F|_{\mathcal{U} \cap X} = f|_{\mathcal{U} \cap X}$ .

**Observação:** Se  $\text{int}X \neq \emptyset$ , então  $\partial^\alpha f$  é unicamente determinada em  $\partial X$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{N}^k$  tal que  $|\alpha| = n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Definição 1.1.2** Dizemos que uma função  $f : X \rightarrow Y$ , com  $X \subset \mathbb{R}^k$  e  $Y \subset \mathbb{R}^l$ , é um difeomorfismo se  $f$  é um homeomorfismo e  $f$  e  $f^{-1}$  são suaves.

Neste caso, dizemos que  $X$  e  $Y$  são difeomorfos.

**Definição 1.1.3 (Variedade)** Dizemos que  $M \subset \mathbb{R}^k$  é uma variedade de dimensão  $m$  (ou uma  $m$ -variedade) se, para todo  $x \in M$ , existem uma vizinhança  $V_x \subset M$  de  $x$  e um aberto  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$  que são difeomorfos.

Se  $g : V_x \rightarrow \mathcal{U}$  é um difeomorfismo, dizemos que  $g$  é uma parametrização da vizinhança  $V_x$  e que o par  $(V_x, g)$  é uma carta local de  $M$ .

**Observação:**  $M$  é uma *variedade de dimensão zero* se cada  $x \in M$  tem uma vizinhança que consiste de  $x$  somente. Neste caso, tais vizinhanças são difeomorfas a  $\mathbb{R}^0$ .

**Exemplos:**

1. A esfera  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  é uma variedade de dimensão 2.
2. De fato,

$$f(x, y) = \left(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right)$$

mapeia o disco  $x^2 + y^2 < 1$  na calota superior  $z > 0$  de  $S^2$ . Notemos que  $f$  é suave (pois  $1 - x^2 - y^2 > 0$ ). Além disso,

$$f^{-1}(x, y, z) = (x, y)$$

é suave (pois é a restrição da projeção no plano). Agora, colocando na terceira coordenada  $-\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ , mapeamos a calota inferior. Depois, basta trocar os papéis de  $x$ ,  $y$  e  $z$ , e obteremos 6 funções que “cobrirão” toda a esfera no sentido da definição.

2. *Mais geralmente, a esfera  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  é uma variedade de dimensão  $n - 1$ .* Podemos mostrar isso generalizando a demonstração feita no exemplo anterior.
3. *O conjunto  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ e } y = \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\}$  é uma 1-variedade.* Isto será um caso particular do próximo exemplo.
4. *Se  $A \subset \mathbb{R}^n$  é aberto e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  é suave, então*

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mid x \in A \text{ e } y = f(x)\}$$

*é uma  $n$ -variedade.* De fato,  $F : A \rightarrow G_f$ , definida por  $F(x) = (x, f(x))$  é suave (pois suas funções coordenadas são suaves). Além disso,  $F^{-1}(x, y) = x$  é suave por ser a restrição a  $G_f$  da função projeção  $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , que é suave. Tal  $F$  faz com que  $G_f$  e  $A$  sejam difeomorfos, provando que  $G_f$  é uma  $n$ -variedade.

5. *Qualquer aberto  $A \subset \mathbb{R}^n$  é uma  $n$ -variedade.*

Vamos passar a definir espaços tangentes e derivadas de funções entre variedades. Assumiremos os conhecimentos elementares de Cálculo Avançado.

Seja  $M \subset \mathbb{R}^k$  uma variedade de dimensão  $m$ . Dado  $x \in M$ , a Definição 1.1.3 garante que existem  $V_x$  vizinhança de  $x$  e  $U \subset \mathbb{R}^m$  aberto que são difeomorfos. Seja  $g : U \rightarrow V_x$  um tal difeomorfismo (o inverso de uma parametrização de  $V_x$ ). Como  $g$  é suave, podemos calcular sua derivada no ponto  $u = g^{-1}(x) \in U$ :

$$dg_u(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(x + th) - g(x)}{t}, \quad \forall h \in \mathbb{R}^m,$$

e teremos a

**Definição 1.1.4** Definimos o espaço tangente de  $M$  no ponto  $x$ , denotado por  $TM_x$ , por

$$TM_x \doteq dg_u(\mathbb{R}^m) .$$

**Observação:**  $TM_x$  está bem definido e é um espaço vetorial  $m$ -dimensional. De fato, devemos ver que a definição não depende da vizinhança  $V_x$  e nem do difeomorfismo  $g$ . Se  $h : U' \rightarrow V'_x$  é outra parametrização (na verdade, o inverso de uma parametrização) de uma vizinhança  $V'_x$  de  $x$ , e  $v = h^{-1}(x)$ , tomando  $A = g(U) \cap h(U')$ ,  $L_1 = g^{-1}(A)$  e  $L_2 = h^{-1}(A)$ , temos que  $g = g|_{L_1}$  e  $h = h|_{L_2}$  são inversas de parametrizações de  $A$ . Logo,  $h^{-1} \circ g : L_1 \rightarrow L_2$  é um difeomorfismo entre abertos de  $\mathbb{R}^m$ , e, portanto,  $d(h^{-1} \circ g)_u$  é um isomorfismo em  $\mathbb{R}^m$ . Então, pela regra da cadeia,

$$dg_u(\mathbb{R}^m) = d(h \circ (h^{-1} \circ g))_u(\mathbb{R}^m) = dh_v \circ d(h^{-1} \circ g)_u(\mathbb{R}^m) = dh_v(\mathbb{R}^m),$$

o que mostra que  $TM_x$  está bem definido. Além disso, desde que  $g^{-1} : V_x \rightarrow U$  é suave, temos da Definição 1.1.1 que existe  $W$ , aberto de  $\mathbb{R}^k$ , contendo  $x$ , e  $F : W \rightarrow \mathbb{R}^m$  suave, que coincide com  $g^{-1}$  em  $V_x \cap W$ . Sendo  $U_0 = g^{-1}(W \cap V_x) \subset \mathbb{R}^m$ , temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} W & & \\ \uparrow g & \searrow F & \\ U_0 & \xrightarrow{\text{inclusao}} & \mathbb{R}^m \end{array} ,$$

e, tomando derivadas, ficamos com:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^k & & \\ \uparrow dg_u & \searrow dF_x & \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\text{identidade}} & \mathbb{R}^m \end{array} ,$$

o que mostra que  $dg_u$  é injetora. Logo,  $\dim(dg_u(\mathbb{R}^m)) = m$ , o que encerra a demonstração da observação.

Definiremos agora a derivada de funções entre variedades. Sejam  $M \subset \mathbb{R}^k$  e  $N \subset \mathbb{R}^l$  duas variedades de dimensões  $m$  e  $n$ , respectivamente, e  $f : M \rightarrow N$  uma função suave. Sabemos então, da Definição 1.1.1, que existem  $W \subset \mathbb{R}^k$  aberto e  $F : W \rightarrow \mathbb{R}^l$  suave, tais que  $F|_{M \cap W} = f|_{M \cap W}$ . Se  $x \in M$ , seja  $y = f(x)$ .

**Definição 1.1.5** Definimos a derivada de  $f$  no ponto  $x \in M$ ,  $df_x : TM_x \rightarrow TN_y$ , por

$$df_x(v) \doteq dF_x(v), \quad \forall v \in TM_x.$$

**Observação:**  $df_x$  está bem definida, isto é, não depende do aberto  $W$  e nem de  $F$ , além disso,  $dF_x(TM_x) \subset TN_y$ . De fato, escolhendo funções  $g : U \rightarrow M$  e  $h : V \rightarrow N$  como as inversas de parametrizações de vizinhanças  $g(U)$  e  $h(V)$  de  $x$  e  $y$ , respectivamente, com  $u = g^{-1}(x)$  e  $v = h^{-1}(y)$ , podemos assumir que  $g(U) \subset W$

e  $f(g(\mathbf{U})) \subset h(\mathbf{V})$ . Daí, teremos os seguintes diagramas, em que o segundo é obtido tomando derivadas no primeiro:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{W} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^l \\ \uparrow g & & \uparrow h \\ \mathbf{U} & \xrightarrow{h^{-1} \circ f \circ g} & \mathbf{V} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^k & \xrightarrow{dF_x} & \mathbb{R}^l \\ \uparrow dg_u & & \uparrow dh_v \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{d(h^{-1} \circ f \circ g)_u} & \mathbb{R}^n \end{array} .$$

Deles, notamos que

$$dF_x(\mathbf{TM}_x) = dF_x \circ dg_u(\mathbb{R}^m) \subset dh_v(\mathbb{R}^n) = \mathbf{TN}_y,$$

além disso, como  $dg_u : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbf{TM}_x$  é invertível (como visto na observação anterior), e, por definição,  $df_x \circ dg_u = dh_v \circ d(h^{-1} \circ f \circ g)_u$ , segue a independência na definição de  $df_x$ .

### 1.1.2 O Teorema de Sard

Aqui, daremos as definições de pontos e valores regulares de funções entre variedades. Apresentaremos também o Teorema de Sard e um seu corolário. Por fim, com a Proposição 1.1.5, aprenderemos a construir variedades como imagens inversas de valores regulares.

**Definição 1.1.6** *Seja  $f : M \rightarrow N$  uma função suave entre variedades  $M$  e  $N$  de mesma dimensão,  $n$ . Dizemos que  $x \in M$  é um ponto regular de  $f$  se a derivada  $df_x$  é não singular.*

**Observação:** *Se  $x \in M$  é um ponto regular, então  $f$  leva uma vizinhança de  $x$  em  $M$  difeomorficamente em um aberto de  $N$ . De fato, como  $f$  é suave e  $M$  e  $N$  são  $n$ -variedades, existem abertos  $W \subset \mathbb{R}^k$  e  $W' \subset \mathbb{R}^l$ , vizinhanças de  $x$  e de  $y = f(x)$ , respectivamente, bem como abertos  $U, V \subset \mathbb{R}^n$ , tais que o seguinte diagrama é comutativo (com tais abertos sutilmente modificados)*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{W} & \xrightarrow{F} & \mathbf{W}' \\ \uparrow g & & \uparrow h \\ \mathbf{U} & \xrightarrow{h^{-1} \circ f \circ g} & \mathbf{V} \end{array} ,$$

onde  $F$  é uma função dada na Definição 1.1.1 e  $g$  e  $h$  são dadas na Definição 1.1.3. Pela regra da cadeia, tal diagrama é “transformado” no seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^k & \xrightarrow{dF_x} & \mathbb{R}^l \\ \uparrow dg_u & & \uparrow dh_v \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{d(h^{-1} \circ f \circ g)_u} & \mathbb{R}^m \end{array} ,$$

onde  $\mathbf{u} = g^{-1}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{v} = h^{-1}(\mathbf{y})$ . Desde que  $\mathbf{d}f_{\mathbf{x}} = \mathbf{d}F_{\mathbf{x}}|_{(\mathbf{d}g_{\mathbf{u}}(\mathbb{R}^m))}$ , segue que  $\mathbf{d}f_{\mathbf{x}} = \mathbf{d}h_{\mathbf{v}} \circ \mathbf{d}(h^{-1} \circ f \circ g)|_{\mathbf{u}} \circ (\mathbf{d}g_{\mathbf{u}})^{-1}$ . Daí, segue que  $\mathbf{d}(h^{-1} \circ f \circ g)|_{\mathbf{u}}$  é isomorfismo (pois  $\mathbf{d}f_{\mathbf{x}}$ ,  $\mathbf{d}h_{\mathbf{v}}$  e  $(\mathbf{d}g_{\mathbf{u}})^{-1}$  o são). Logo, pelo teorema da função inversa,  $l : \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , definida por  $l = h^{-1} \circ f \circ g$ , é um difeomorfismo entre abertos  $\mathbf{U}'$  e  $\mathbf{V}'$ , vizinhanças de  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ , respectivamente. Seguindo daí que  $f = h \circ l \circ g^{-1}$  é um difeomorfismo entre os abertos  $g(\mathbf{U}')$  e  $h(\mathbf{V}')$ .

**Definição 1.1.7** Dizemos que  $\mathbf{y} \in \mathbf{N}$  é um valor regular de  $f$  se  $f^{-1}\{\mathbf{y}\}$  contém somente pontos regulares.

Se  $\mathbf{d}f_{\mathbf{x}}$  é singular, dizemos que  $\mathbf{x}$  é um ponto crítico de  $f$  e  $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$  é um valor crítico de  $f$ .

**Proposição 1.1.1** Se  $\mathbf{M}$  é compacto e  $\mathbf{y} \in \mathbf{N}$  é um valor regular, então  $f^{-1}\{\mathbf{y}\}$  é um conjunto finito (podendo ser vazio).

*Demonstração:*  $f^{-1}\{\mathbf{y}\}$  é compacto, pois é um fechado dentro do compacto  $\mathbf{M}$ . Além disso,  $f^{-1}\{\mathbf{y}\}$  é discreto, pois, como vimos na observação anterior,  $f$  é injetora numa vizinhança de  $\mathbf{x}$ .

Daí, sabendo que um conjunto compacto e discreto é finito, segue o resultado. ■

**Proposição 1.1.2** Com as mesmas hipóteses da Proposição 1.1.1, a função  $\#f^{-1}\{\mathbf{y}\} = \text{“cardinalidade de } f^{-1}\{\mathbf{y}\} \text{”}$ , definida somente em valores regulares de  $f$ , é localmente constante.

*Demonstração:* Se  $\mathbf{y} \in \mathbf{N}$  é dado, seja  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_s\} = f^{-1}\{\mathbf{y}\}$ . Tomemos vizinhanças  $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_s$  de  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_s$ , respectivamente, de tal forma que sejam disjuntas e sejam mapeadas difeomorficamente em  $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_s$ , vizinhanças de  $\mathbf{y}$ , em  $\mathbf{N}$ . Definamos  $\mathbf{V} = (\mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2 \cap \dots \cap \mathbf{V}_s) \setminus f(\mathbf{M} \setminus (\mathbf{U}_1 \cup \dots \cup \mathbf{U}_s))$ , que é um aberto (uma vez que  $\mathbf{M} \setminus (\mathbf{U}_1 \cup \dots \cup \mathbf{U}_s)$  é um compacto). Se  $\mathbf{y}' \in \mathbf{V}$ , então em cada  $\mathbf{U}_i$  existe um único  $\mathbf{x}'_i$ , tal que  $f(\mathbf{x}'_i) = \mathbf{y}'$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ , seguindo que  $\#f^{-1}\{\mathbf{y}\} = \#f^{-1}\{\mathbf{y}'\}$ . ■

Consideremos agora uma função suave  $f : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{N}$ , em que  $\mathbf{M}$  é uma  $m$ -variedade e  $\mathbf{N}$  é uma  $n$ -variedade.

**Definição 1.1.8** Dizemos que

$$\mathbf{C} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{M} \mid \mathbf{d}f_{\mathbf{x}} : \mathbf{T}\mathbf{M}_{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{T}\mathbf{N}_{f(\mathbf{x})} \text{ tem posto menor que } n\}$$

é o conjunto dos pontos críticos de  $f$ .

Além disso, dizemos que  $f(\mathbf{C})$  é o conjunto dos valores críticos de  $f$  e  $\mathbf{N} \setminus f(\mathbf{C})$  é o conjunto dos valores regulares de  $f$ .

Notemos que se  $m = n$ , essa definição coincide com a que demos anteriormente.

No caso particular de  $\mathbf{M} = \mathbf{U}$ , um aberto de  $\mathbb{R}^m$ , e  $\mathbf{N} = \mathbb{R}^p$ , temos o seguinte resultado:

**Teorema 1.1.3 (Teorema de Sard)** Seja  $f : \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ , com  $\mathbf{U}$  aberto e  $f$  suave. Se  $\mathbf{C}$  é o conjunto dos pontos críticos de  $f$ , então  $f(\mathbf{C})$  tem medida de Lebesgue nula.



*Demonstração:* A demonstração será por indução em  $n$  (notemos que o resultado só faz sentido para  $n \geq 0$  e  $p \geq 1$ ). Para  $n = 0$ , o resultado é verdadeiro. Suponhamos que o resultado valha para  $n - 1$  (com  $p$  qualquer). Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ , suave. Definamos  $C_1 \doteq \{x \in U \mid df_x = 0\}$ . Mais ainda, definamos:

$$C_i \doteq \left\{ x \in U \mid \partial^\alpha f_r(x) = 0, \text{ com } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ e } |\alpha| = j, \forall j \leq i, \text{ e } r = 1, \dots, p \right\}.$$

Notemos que  $C \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_i \supset \dots$ . Dividiremos a prova em três passos:

1.  $f(C \setminus C_1)$  tem medida nula;
2.  $f(C_i \setminus C_{i+1})$  tem medida nula;
3.  $\exists k \mid f(C_k)$  tem medida nula.

Com isso, segue o resultado, pois

$$C = (C \setminus C_1) \dot{\cup} C_1 = (C \setminus C_1) \dot{\cup} (C_1 \setminus C_2) \dot{\cup} (C_2 \setminus C_3) \dot{\cup} \dots \dot{\cup} (C_{k-1} \setminus C_k) \dot{\cup} C_k,$$

o que nos mostra que  $f(C)$  tem medida nula.

*Demonstração do passo 1:* Podemos tomar  $p \geq 2$ , pois se  $p = 1$ , então  $C = C_1$ . Para cada  $z \in C \setminus C_1$ , vamos encontrar uma vizinhança  $V \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $f(V \cap C)$  tem medida nula. Daí, como  $C \setminus C_1$  é coberto por uma quantidade enumerável de vizinhanças  $V$ , isto provará que  $f(C \setminus C_1)$  tem medida nula. Como  $z \notin C_1$ , existe uma derivada parcial, digamos  $\partial f_1 / \partial x_1$  (sem perda de generalidade), que não se anula em  $z$ . Consideremos  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por  $h(x) = (f_1(x), x_2, x_3, \dots, x_n)$ . Como  $dh_z$  é injetora, pois

$$dh_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(z) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(z) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(z) \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

o Teorema da Função Inversa garante a existência de uma vizinhança  $V$  de  $z$  que é difeomorfa ao aberto  $V' = h(V) \subset \mathbb{R}^n$ . A função composta  $g = f \circ h^{-1} : V' \rightarrow \mathbb{R}^p$  é suave, e vale o seguinte:  $C'$ , o conjunto dos pontos críticos de  $g$  é igual a  $h(V \cap C)$ . De fato,  $x \in C' \iff dg_x$  é não sobrejetora  $\iff df_{h^{-1}(x)}$  é não sobrejetora (pois  $dg_x = df_{h^{-1}(x)} \circ d(h^{-1})_x$  e  $d(h^{-1})_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é isomorfismo)  $\iff h^{-1}(x) \in V \cap C$  (pois  $C$  é o conjunto de pontos críticos de  $f$ , e  $V$  é a imagem de  $V'$  por  $h^{-1}$ )  $\iff x \in h(V \cap C)$ . Donde segue que

$$g(C') = g \circ h(V \cap C) = f(V \cap C). \quad (1.1.1)$$

Agora, para cada  $(t, x_2, \dots, x_n) \in V'$ ,  $g(t, x_2, \dots, x_n) \in t \times \mathbb{R}^{p-1}$ . Isso porque  $(t, x_2, \dots, x_n) = h(y)$ , com  $y \in V$ , mas  $h(y) = (f_1(y), y_2, \dots, y_n) \implies f_1(y) = t$ ,

daí  $g(\mathbf{t}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = f(\mathbf{y}) = (f_2(\mathbf{y}), \dots, f_p(\mathbf{y}))$ . Isto é,  $g$  leva hiperplano em hiperplano. Denotemos  $g^t : (\mathbf{t} \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V' \rightarrow \mathbf{t} \times \mathbb{R}^{p-1}$ , a restrição de  $g$ .

*Afirmção:* Um ponto de  $\mathbf{t} \times \mathbb{R}^{n-1}$  é um ponto crítico para  $g^t$  se e somente se o é para  $g$ . De fato, basta observar que

$$dg_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_p}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \dots & \frac{\partial g_p}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \# & d(g^t)_{\mathbf{x}} \end{pmatrix},$$

daí,  $dg_{\mathbf{x}}$  é não sobrejetora se e somente se  $d(g^t)_{\mathbf{x}}$  é não sobrejetora (sobre  $\mathbb{R}^{p-1}$ ). Agora, estamos com uma função de um aberto de  $\mathbb{R}^{n-1}$  em  $\mathbb{R}^{p-1}$ , o que, pela hipótese de indução, nos dá que o conjunto de valores críticos de  $g^t$  tem medida nula em  $\mathbf{t} \times \mathbb{R}^{p-1}$ . Logo, o conjunto  $g(C')$  intercepta cada hiperplano  $\mathbf{t} \times \mathbb{R}^{p-1}$  num conjunto de medida nula. Utilizando o *Teorema de Fubini-Tonelli*<sup>1</sup>, temos então que o conjunto mensurável  $g(C')$  tem medida nula. Então, de (1.1.1), segue que  $f(V \cap C)$  tem medida nula.

*Demonstração do passo 2:* Para cada  $z \in C_k \setminus C_{k+1}$ , existe um certo  $r$ , um certo  $s$  e um certo multi-índice  $\alpha$ , com  $|\alpha| = k$ , tal que  $\frac{\partial}{\partial x_s} \partial^\alpha f_r(z) \neq 0$ . Assim, a função

$$w(\mathbf{x}) \doteq \partial^\alpha f_r(\mathbf{x})$$

se anula em  $z$ , mas  $\partial w / \partial x_s$  não. Suponhamos, sem perder a generalidade, que  $s = 1$ , e definamos  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , pondo  $h(\mathbf{x}) = (w(\mathbf{x}), x_2, \dots, x_n)$ . Tal função leva uma vizinhança  $V \subset U$  de  $z$  difeomorficamente sobre um aberto  $V' \subset \mathbb{R}^n$  (para ver isso, podemos usar o mesmo argumento usado no passo 1). Notemos que  $h(V \cap C_k) \subset 0 \times \mathbb{R}^{n-1}$ , e consideremos  $g = f \circ h^{-1} : V' \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Denotemos  $\bar{g} : (0 \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V' \rightarrow \mathbb{R}^p$  a restrição de  $g$ . Pela hipótese de indução, o conjunto dos *valores críticos* de  $\bar{g}$  tem medida nula. Mas,

$$h(V \cap C_k) \subset \bar{C} \doteq \text{Conjunto dos pontos críticos de } \bar{g},$$

pois se  $\mathbf{x} \in h(V \cap C_k)$ ,  $h^{-1}(\mathbf{x}) \in V \cap C_k$  (significando que todas as derivadas até ordem  $k$  de  $f$  são nulas em  $h^{-1}(\mathbf{x})$ )  $\implies d\bar{g}_{\mathbf{x}} = dg_{\mathbf{x}} = df_{h^{-1}(\mathbf{x})} \circ dh_{\mathbf{x}}^{-1} = 0$ . Portanto,  $\bar{g}(h(V \cap C_k))$  tem medida nula. Mas  $\bar{g} \circ h(V \cap C_k) = g \circ h(V \cap C_k) = f(V \cap C_k)$ . Seguindo que, com o mesmo argumento do passo 1,  $f(C_k \setminus C_{k-1})$  tem medida nula.

*Demonstração do passo 3:* Seja  $I^n \subset U$  um cubo de lado  $\delta$ . Se  $k > \frac{n}{p} - 1$ , provaremos que  $f(I^n \cap C_k)$  tem medida nula. Como  $C_k$  pode ser coberto por uma quantidade enumerável de cubos, isso mostrará que  $f(C_k)$  tem medida nula.

Pelo *Teorema de Taylor*<sup>2</sup>, a compacidade de  $I^n$  e a definição de  $C_k$ , vemos que

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + R(\mathbf{x}, \mathbf{h}), \tag{1.1.2}$$

<sup>1</sup>Ver o capítulo 7 de [10]

<sup>2</sup>Olhar o Teorema 8", página 58, de [5].

onde  $|R(x, h)| \leq c|h|^{k+1}$ , para  $x \in I^n \cap C_k$  e  $x + h \in I^n$ , e  $c$  uma constante. Subdividamos  $I^n$  em  $r^n$  cubos de lado  $\delta/r$ , onde  $r \in \mathbb{N}$ . Se  $I_1$  é um cubo da subdivisão que contém  $x \in C_k$ , temos que todo ponto de  $I_1$  pode ser escrito como  $y = x + h$ , com  $|h| \leq \sqrt{n}\delta/r$ . De (1.1.2), segue que  $f(I_1)$  está num cubo de lado  $\alpha/r^{k+1}$ , centrado em  $f(x)$ , com  $\alpha = 2c(\sqrt{n}\delta)^{k+1}$ . Daí,  $f(I^n \cap C_k)$  está na união de, no máximo,  $r^n$  cubos de volume  $(\alpha/r^{k+1})^p$  cada, tendo, portanto, medida menor ou igual a  $M = r^n (\alpha/r^{k+1})^p = \alpha^p r^{n-(k+1)p}$ . Se  $k+1 > n/p$ , como já supomos,  $M \rightarrow 0$  se  $r \rightarrow \infty$ . Logo,  $f(I^n \cap C_k)$  tem medida nula. ■

Algo interessante no estudo de Variedades é o

**Corolário 1.1.4 (Brown)** *Seja  $f : M \rightarrow N$  uma função suave entre variedades de dimensões  $m$  e  $n$  respectivamente. Então o conjunto dos valores regulares de  $f$ ,  $N \setminus f(C)$ , é denso em  $N$ .*

*Demonstração:*

*Passo 1:* Dizemos que um espaço topológico  $X$  é um *espaço de Baire* se dada uma coleção enumerável  $\{A_i\}_{i=1}^\infty$  de abertos densos em  $X$ , a interseção  $\bigcap_{i=1}^\infty A_i$  também é densa em  $X$ . O *Teorema de Baire* para espaços métricos<sup>3</sup> estabelece que todo espaço métrico completo é de Baire. Desde que uma  $n$ -variedade é uma união enumerável de abertos, cada um deles difeomorfos a  $\mathbb{R}^n$ , temos que variedades são espaços de Baire (observando que a imagem por homeomorfismo de um espaço de Baire é de Baire, e que a união enumerável de espaços de Baire é de Baire).

*Passo 2:* Dado  $y \in N$ , temos que existem  $V_y$  uma vizinhança de  $y$  em  $N$ , um aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  e um difeomorfismo  $h : U \rightarrow V_y$ . Para cada  $x \in f^{-1}(V_y)$ , temos que existem uma vizinhança de  $x$ ,  $V_x \subset f^{-1}(V_y)$ , um aberto  $L$  de  $\mathbb{R}^m$  e um difeomorfismo  $k : L \rightarrow V_x$  (tudo isso pela definição 1.1.3 de variedade). A função composta

$$g = h^{-1} \circ f \circ k : L \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$$

é suave. Sendo  $C_x = \{z \in L \mid dg_z \text{ não é sobrejetora}\}$ , o Teorema de Sard garante que  $g(C_x)$  tem medida nula em  $\mathbb{R}^n$ . Mas,  $C_x = k^{-1}(C \cap V_x)$  (basta olhar a definição de  $g$  acima), logo,

$$h^{-1} \circ f(C \cap V_x) = h^{-1} \circ f \circ k(k^{-1}(C \cap V_x))$$

tem medida nula em  $\mathbb{R}^n$ . Agora, para cada  $a \in V_x$ , conseguimos uma vizinhança  $V_a$  tal que  $\overline{V_a}$  é compacto e  $\overline{V_a} \subset V_x$ <sup>4</sup>. Segue que  $h^{-1} \circ f(C \cap \overline{V_a})$  tem medida nula em  $\mathbb{R}^n$ , e daí, que  $U \setminus (h^{-1} \circ f(C \cap \overline{V_a}))$  é denso em  $U$ . Conseqüentemente,  $N \setminus f(C \cap \overline{V_a})$  é denso em  $N$ . Mas, desde que conseguimos uma quantidade enumerável de vizinhanças do tipo  $V_a$ , cobrindo  $f^{-1}(V_y)$ , bem como uma quantidade enumerável de vizinhanças do tipo  $V_y$ , cobrindo  $N$ , temos uma quantidade enumerável de vizinhanças do tipo  $V_a$  que cobrem  $M$ . Isto é, existe uma coleção enumerável  $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  de pontos de  $M$  tais que

$$\bigcup_{i=1}^\infty V_{a_i} = M.$$

<sup>3</sup>Ver, por exemplo, [8], pág 294.

<sup>4</sup>Ver, por exemplo, o lema 8.2 (página 185) de [8].

Temos, então, uma quantidade enumerável de conjuntos  $N \setminus f(C \cup \overline{V_{a_i}})$ , densos em  $N$ . Como cada um deles é aberto (pois  $C \cup \overline{V_{a_i}}$  é compacto  $\implies f(C \cup \overline{V_{a_i}})$  é fechado), segue do passo 1 que  $\bigcap_{i=1}^{\infty} (N \setminus f(C \cup \overline{V_{a_i}}))$  é denso em  $N$ . Daí, as seguintes igualdades encerram a demonstração:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} (N \setminus f(C \cup \overline{V_{a_i}})) = N \setminus \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} f(C \cap \overline{V_{a_i}}) \right) = N \setminus f(C).$$

■

O último resultado desta subsecção nos permitirá definir variedades através de valores regulares.

**Proposição 1.1.5** *Seja  $f : M \rightarrow N$  suave entre variedades de dimensões  $m \geq n$ . Se  $y \in f(M) \subset N$  é um valor regular, então  $f^{-1}\{y\} \subset M$  é uma variedade suave de dimensão  $m - n$ .*

*Demonstração:* Seja  $x \in f^{-1}\{y\}$ . Como  $y$  é valor regular,  $df_x$  é sobrejetora de  $TM_x$  em  $TN_y$ . Do “Teorema do Núcleo e Imagem” de Álgebra Linear, temos que  $\text{Ker}(df_x)$  é um subespaço vetorial de dimensão  $m - n$ . Se  $M \subset \mathbb{R}^k$ , escolhamos  $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{m-n}$  linear, que seja injetora quando restrita a  $\text{Ker}(df_x)$  (isso é possível fazendo  $L$  levar uma base de  $\text{Ker}(df_x)$  em uma base de  $\mathbb{R}^{m-n}$ , e definindo  $L$  como zero em  $\mathbb{R}^k \setminus \text{Ker}(df_x)$ ). Definindo  $F : M \rightarrow N \times \mathbb{R}^{m-n}$  por

$$F(x) = (f(x), L(x)),$$

temos que  $dF_x(v) = (df_x(v), L(v))$ . *Afirmamos que  $dF_x$  é injetora.* De fato, se  $dF_x(v) = 0$ , segue que  $v \in \text{Ker}(df_x)$  e  $L(v) = 0$ , seguindo que  $v = 0$ , uma vez que  $L$  é injetora em  $\text{Ker}(df_x)$ . Como  $N \times \mathbb{R}^{m-n}$  é uma  $m$ -variedade suave, segue que  $x$  é ponto regular de  $F$ , e a observação após a Definição 1.1.6 garante que  $F$  mapeia uma vizinhança de  $x$  difeomorficamente sobre uma vizinhança de  $(y, L(x))$ . Tomando  $F|_{f^{-1}\{y\}}$ , tal função mapeia uma vizinhança de  $x \in f^{-1}\{y\}$  difeomorficamente em um aberto de  $y \times \mathbb{R}^{m-n}$ , que pode ser considerado como aberto de  $\mathbb{R}^{m-n}$ . Isto é, temos que uma vizinhança de  $x$  em  $f^{-1}\{y\}$  é difeomorfa a um aberto de  $\mathbb{R}^{m-n}$ . Fazendo  $x$  “percorrer”  $f^{-1}\{y\}$ , segue que  $f^{-1}\{y\}$  é uma  $m - n$ -variedade. ■

**Exemplo:** *Uma prova fácil de que  $S^{n-1}$  é uma  $(n - 1)$ -variedade.* Definamos  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

e notemos que cada  $y \neq 0$  é valor regular de  $f$ . Daí, é só observar que  $S^{n-1} = f^{-1}\{1\}$ .

### 1.1.3 Variedades com fronteira

Definiremos nesta subsecção o conceito de variedade com *fronteira* (ou *bordo*), extendendo o conceito de variedade que tínhamos até agora. A Proposição 1.1.6 será uma nova versão para a Proposição anterior

Seja  $H^m = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^m \mid x_m \geq 0\}$ . Notemos que a fronteira de  $H^m$  é  $\mathbb{R}^{m-1} \times 0$ .

**Observação:** Se  $f : U \subset H^m \rightarrow V \subset H^m$  é um difeomorfismo entre abertos de  $H^m$ , então  $f$  levará pontos interiores de  $H^m$  em pontos interiores de  $H^m$ , e pontos de  $\partial H^m$  em pontos de  $\partial H^m$ . De fato, se  $x \in \text{int}H^m$ , então, pela nossa definição de difeomorfismo, existe um aberto de  $\mathbb{R}^m$ ,  $A$ , e  $F : A \rightarrow V$  uma função suave tal que  $F|_{A \cap V} = f|_{A \cap V}$ , e resultado análogo vale para  $f^{-1}$  numa vizinhança de  $f(x)$ . Diminuindo  $A$  até que  $A \subset U$  segue, do teorema da função inversa, que  $f : A \rightarrow f(A)$  é um difeomorfismo, com  $f(A)$  aberto de  $\mathbb{R}^m$ . Desde que  $f(A) \subset V$ , segue que  $f(A) \subset \text{int}H^m \implies f(x) \in \text{int}H^m$ . Raciocinando por absurdo sobre pontos de  $\partial H^m$ , segue que pontos de fronteira são levados em pontos de fronteira.

**Definição 1.1.9** Dizemos que  $X \subset \mathbb{R}^k$  é uma  $m$ -variedade com fronteira se cada  $x \in X$  tem uma vizinhança  $U_x \subset X$  que é difeomorfa a um aberto  $V_x$  de  $H^m$ . Definimos a fronteira de  $X$ ,  $\partial X$ , como sendo o conjunto dos pontos de  $X$  correspondentes a  $\partial H^m$  pelos difeomorfismos que definem  $X$ .

**Observação:**  $\partial X$  está bem definida, e, mais ainda: (i) se  $\partial X \neq \emptyset$ , então  $\partial X$  é uma  $m-1$ -variedade e (ii)  $\text{int}X$  é uma  $m$ -variedade. De fato, para ver que  $\partial X$  está bem definida, ela deve ser independente de coordenadas, o que é verdade, pois se  $\phi$  é uma coordenada de uma vizinhança de  $p$ , com  $\phi(p) \in \partial H^m$ , temos que para toda  $\psi$  que mapeia uma vizinhança  $U$  de  $p$  em  $H^m$ , podemos diminuir  $U$  e a vizinhança mapeada por  $\phi$  para um aberto  $L$  de tal forma que  $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(L) \rightarrow \psi(L)$  seja um difeomorfismo entre abertos de  $H^m$ . Daí, pela observação anterior, temos que  $\psi(p) = (\psi \circ \phi^{-1})(\phi(p)) \in \partial H^m$ , mostrando que um ponto  $p$  estar em  $\partial X$  independe de coordenadas. Para ver (i), basta observar que para qualquer ponto  $p$  de  $\partial X$ , existe, pela definição anterior, uma vizinhança  $U_p$  que é difeomorfa a um aberto de  $H^m$ . Daí, pelo que acabamos de ver,  $U_p \cap \partial X$  é difeomorfa a um aberto de  $\partial H^m$ , que pode ser identificado como  $\mathbb{R}^{m-1}$ , seguindo que  $\partial X$  é uma  $m-1$ -variedade. Agora, se  $p \in \text{int}X$ , a vizinhança  $U_p \cap \text{int}X$  de  $p$  será difeomorfa a um aberto de  $\text{int}H^m$ , que é um aberto de  $\mathbb{R}^m$ , mostrando (ii).

**Exemplo:** Se  $M$  é uma  $m$ -variedade sem fronteira, então  $M$  é uma variedade com fronteira. Sua fronteira é o conjunto vazio.

O espaço tangente  $TX_x$  de  $X$  no ponto  $x$  será definido como antes:  $TX_x = dg_u(\mathbb{R}^m)$ , onde  $g$  é um difeomorfismo de um aberto de  $H^m$  (vizinhança de  $u$ ) em uma vizinhança de  $x$  em  $X$  (notemos como podemos fazer tal definição mesmo num ponto de fronteira, lembrando da observação logo depois da definição de difeomorfismo).

O próximo resultado nos ajudará a criar exemplos de variedades com fronteira e será essencial para a demonstração de uma versão da proposição 1.1.5 para variedades com fronteira.

**Lema 1.1.1** Sejam  $M$  uma  $m$ -variedade sem fronteira e  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave que tem  $0$  como valor regular, com  $0 \in g(M)$ . Então  $A = \{x \in M \mid g(x) \geq 0\}$  é uma  $m$ -variedade com fronteira, sendo sua fronteira igual a  $g^{-1}\{0\}$ .

*Demonstração:* Daremos aqui somente uma idéia da demonstração. Para  $x \in A$ , com  $g(x) > 0$ , é fácil provar que há uma vizinhança de  $x$  que é difeomorfa a um aberto de  $\mathbb{R}^m$ . Se  $x$  for tal que  $g(x) = 0$ , mostrar que há uma vizinhança que é difeomorfa a um aberto de  $H^m$  é praticamente seguir a demonstração da proposição 1.1.5. ■

**Exemplo:** O disco unitário  $D_m = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \sum_{i=1}^m x_i^2 \leq 1\}$  é uma  $m$ -variedade com fronteira consistindo de  $S^{m-1}$ . De fato, se definimos  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  por  $g(x) = 1 - \sum_{i=1}^m x_i^2$ , vemos que  $g^{-1}\{0\} = S^{m-1}$  e que 0 é valor regular de  $g$ . Logo, pelo lema anterior,  $D_m = \{x \in \mathbb{R}^m \mid g(x) \geq 0\}$  é uma  $m$ -variedade com fronteira igual a  $S^{m-1}$ .

**Proposição 1.1.6** *Seja  $f : X \rightarrow N$  suave, onde  $X$  é uma  $m$ -variedade com fronteira e  $N$  é uma  $n$ -variedade (com ou sem fronteira), com  $m > n$ . Se  $y \in f(X) \subset N$  é um valor regular para  $f$ , então  $f^{-1}\{y\} \subset X$  é uma  $m - n$ -variedade com fronteira. Mais ainda, sua fronteira é igual a  $f^{-1}\{y\} \cap \partial X$ .*

*Demonstração:* O que devemos provar é local, daí basta provar para  $f : H^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  (pois  $X$  é localmente  $H^m$  e  $M$  é localmente  $\mathbb{R}^m$ ). Dado  $x \in f^{-1}\{y\}$ , se  $x \in \text{int}H^m$ , seja  $U_x$  uma vizinhança de  $x$  tal que  $U_x \subset \text{int}X$ . Então, da proposição 1.1.5, segue que  $f^{-1}\{y\} \cap U_x$  é uma variedade suave de dimensão  $m - n$ . Se não há pontos em  $f^{-1}\{y\} \cap \partial X$ , segue o resultado. Do contrário, se  $x \in \partial H^m$ , precisamos fazer uma construção: sabemos que existe  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  suave, onde  $U$  é uma vizinhança de  $x$  em  $\mathbb{R}^m$  e  $g|_{U \cap H^m} = f|_{U \cap H^m}$ . Como  $f$  não tem pontos críticos em uma vizinhança de  $x$  (por continuidade), podemos assumir (diminuindo  $U$  se necessário) que  $g$  não tem pontos críticos, seguindo que  $g^{-1}\{y\}$  é uma  $m - n$ -variedade (como “subvariedade” de  $\mathbb{R}^m$ ) (pela proposição 1.1.5). Seja  $\pi : g^{-1}\{y\} \rightarrow \mathbb{R}$  a projeção

$$\pi(x_1, \dots, x_m) = x_m .$$

*Afirmamos que  $\pi$  tem 0 como valor regular.* De fato, seja  $z \in g^{-1}\{y\}$  tal que  $\pi(z) = 0$ . Temos  $d\pi_z = (0, 0, \dots, 1)$  como uma função de  $T(g^{-1}\{y\})_z$  em  $\mathbb{R}$ . Devemos mostrar que  $d\pi_z$  não se anula completamente em  $T(g^{-1}\{y\})_z$ , isto é, que existe  $\alpha \in T(g^{-1}\{y\})_z$  tal que  $\alpha_m \neq 0$ , o que é verdade, pois  $T(g^{-1}\{y\})_z$  é o Kernel de  $df_z = dg_z : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  (isso ocorre pois se  $h : A \subset \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow g^{-1}\{y\}$  for um difeomorfismo que define  $g^{-1}\{y\}$  como variedade numa vizinhança  $h(A)$  de  $z$ , onde  $A$  é um aberto, então  $T(g^{-1}\{y\})_z = dh_u(\mathbb{R}^{m-n})$ , onde  $u = h^{-1}(z)$ ; e, calculando  $dg_z$  em  $T(g^{-1}\{y\})_z$ , teremos  $dg_z(dh_u(v)) = d(g \circ h)_u(v) = 0$ ,  $\forall v \in \mathbb{R}^{m-n}$ , pois  $g \circ h = \text{cte} = y$ , seguindo que  $T(g^{-1}\{y\})_z \subset \text{Ker}(dg_z)$ ; daí, por um argumento de dimensão, segue a igualdade), e daí, se não existisse  $\alpha$  tal que  $\alpha_m \neq 0$  em  $T(g^{-1}\{y\})_z$ ,  $T(g^{-1}\{y\})_z \subset \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$ , seguindo que  $\text{Ker}(df_z) = \text{Ker}(dg_z) \subset \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\} = \partial H^m$ , o que significaria que  $y$  não seria valor regular de  $f|_{\partial H^m}$ , um absurdo. Agora,  $f^{-1}\{y\} \cap U = g^{-1}\{y\} \cap H^m$  consiste dos pontos  $z \in g^{-1}\{y\}$  tais que  $\pi(z) \geq 0$ , seguindo da afirmação acima e do lema anterior que  $f^{-1} \cap U$  é uma  $m - 1$ -variedade com fronteira, e sua fronteira consiste de  $\Pi^{-1}\{0\} = f^{-1}\{y\} \cap U \cap \partial H^m$ . Para terminar, basta notar que  $f^{-1}\{y\} \cap U$  é uma vizinhança de  $x$  em  $f^{-1}\{y\}$ , e “percorrer”  $f^{-1}\{y\}$  com  $x$ . ■

### 1.1.4 Homotopia e Isotopia

Seja  $f : M \rightarrow N$  suave, com  $M$  uma  $m$ -variedade compacta sem fronteira e  $N$  uma  $m$ -variedade conexa. Já sabemos da Proposição 1.1.1 que  $\#f^{-1}\{\mathbf{y}\}$ , com  $\mathbf{y}$  valor regular de  $f$ , é finito. Mostraremos que a classe de resíduo módulo 2 de  $\#f^{-1}\{\mathbf{y}\}$  não depende do valor regular  $\mathbf{y}$ .

**Definição 1.1.10 (Homotopia)** *Sejam  $X \subset \mathbb{R}^k$  e  $Y \subset \mathbb{R}^l$  dois subconjuntos quaisquer, e  $f, g : X \rightarrow Y$  duas funções suaves. Dizemos que  $f$  é homotópica a  $g$  se existe uma função suave  $F : X \times [0,1] \rightarrow Y$  tal que*

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x},0) &= f(\mathbf{x}) \\ F(\mathbf{x},1) &= g(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in X. \end{aligned}$$

Neste caso, dizemos que  $F$  é uma homotopia entre  $f$  e  $g$ .

**Observação:** *A relação de homotopia é de equivalência.* De fato, a reflexividade e a simetricidade são óbvias. Para ver a transitividade, devemos usar a existência de uma função suave  $\varphi : [0,1] \rightarrow [0,1]$  tal que  $\varphi(t) = 0$  para  $0 \leq t \leq 1/3$ , e  $\varphi(t) = 1$  para  $2/3 \leq t \leq 1$ . Para obtermos uma tal  $\varphi$ , seja

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ e^{-1/t}, & t > 0, \end{cases}$$

que é sabidamente suave, e  $\varphi(t) = \lambda(t - 1/3)/(\lambda(t - 1/3) + \lambda(2/3 - t))$ , para  $t \in [0,1]$ , faz o que queremos. Daí, se  $F$  é uma homotopia entre  $f$  e  $g$ , a função  $L_1(\mathbf{x},t) = F(\mathbf{x},\varphi(t))$  é tal que

$$\begin{aligned} L_1(\mathbf{x},t) &= f(\mathbf{x}), \quad t \in [0,1/3] \\ L_1(\mathbf{x},t) &= g(\mathbf{x}), \quad t \in [2/3,1]. \end{aligned}$$

Sendo  $G$  uma homotopia entre  $g$  e  $h$ , e tomando  $L_2(\mathbf{x},t) = G(\mathbf{x},\varphi(t))$ , definimos

$$M(\mathbf{x},t) = \begin{cases} L_1(\mathbf{x},2t), & t \in [0,1/2] \\ L_2(\mathbf{x},2t-1), & t \in [1/2,1], \end{cases}$$

e teremos que  $M(\mathbf{x},0) = f(\mathbf{x})$  e  $M(\mathbf{x},1) = h(\mathbf{x})$ . Além disso,  $M$  é suave, pois no intervalo  $(1/2 - 1/6, 1/2 + 1/6)$ ,  $M(\mathbf{x},t) = g(\mathbf{x})$ , para todo  $\mathbf{x}$ . Seguindo que  $f$  e  $h$  são homotópicas.

**Definição 1.1.11 (Isotopia)** *Sejam  $f, g : X \rightarrow Y$  difeomorfismos. Dizemos que  $f$  é isotópica a  $g$  se existe uma homotopia  $F : X \times [0,1] \rightarrow Y$  entre  $f$  e  $g$  tal que para cada  $t \in [0,1]$ , a correspondência*

$$\mathbf{x} \longmapsto F(\mathbf{x},t)$$

*é um difeomorfismo entre  $X$  e  $Y$ .*

**Observação:** *Isotopia também é uma relação de equivalência.*

Antes do próximo resultado, devemos ver primeiro a

**Observação:** Se  $M$  é uma  $m$ -variedade sem fronteira,  $M \times [0,1]$  é uma  $m+1$ -variedade com fronteira  $M \times 0 \cup M \times 1$ .

Além disso, precisaremos do seguinte

**Lema 1.1.2** *Toda 1-variedade compacta com fronteira sempre tem um número par de pontos em sua fronteira.*<sup>5</sup>

**Lema 1.1.3 (da Homotopia)** *Sejam  $f, g : M \rightarrow N$  homotópicas, com  $M$  e  $N$  variedades de mesma dimensão, e  $M$  compacta e sem fronteira. Se  $y$  é um valor regular para  $f$  e para  $g$ , então*

$$\#f^{-1}\{y\} \equiv \#g^{-1}\{y\} \pmod{2}.$$

*Demonstração:* Se  $\#f^{-1}\{y\} = 0 = \#g^{-1}\{y\}$ , então temos o resultado (isso é o que acontece quando  $y$  não está na imagem nem de  $f$  e nem de  $g$ ). Se um dos dois números não for nulo, consideremos  $F : M \times [0,1] \rightarrow N$  uma homotopia entre  $f$  e  $g$ . A prova seguirá em dois casos:

*Caso 1:* Suponhamos que  $y$  é um valor regular para  $F$ . Então, da observação anterior e da Proposição 1.1.6 (as hipóteses da proposição estão satisfeitas pois  $F|_{\partial(M \times [0,1])}$  ou é  $f$  ou é  $g$ ), teremos que  $F^{-1}\{y\}$  é uma 1-variedade com fronteira igual ao conjunto

$$F^{-1}\{y\} \cap (M \times 0 \cup M \times 1) = f^{-1}\{y\} \times 0 \cup g^{-1}\{y\} \times 1.$$

Então o número de pontos na fronteira de  $F^{-1}\{y\}$  é

$$\#f^{-1}\{y\} + \#g^{-1}\{y\}.$$

Do lema 1.1.2, segue que esse número é par, isto é:  $\#f^{-1}\{y\} \equiv \#g^{-1}\{y\} \pmod{2}$ .

*Caso 2:* Se  $y$  não é um valor regular de  $F$ . Temos da proposição 1.1.2 que existem vizinhanças  $V_1$  e  $V_2$  de  $y$ , tais que

$$\#f^{-1}\{y'\} = \#f^{-1}\{y\}, \forall y' \in V_1 \quad \text{e} \quad \#f^{-1}\{y''\} = \#f^{-1}\{y\}, \forall y'' \in V_2. \quad (1.1.3)$$

Mas, pelo corolário 1.1.4, temos que existe um valor regular  $z$  de  $F$  em  $V_1 \cap V_2$  (notemos que  $F^{-1}\{z\}$  não é vazio), seguindo do passo 1 que  $\#f^{-1}\{z\} \equiv \#g^{-1}\{z\} \pmod{2}$ , o que, juntamente com (1.1.3), mostra que  $\#f^{-1}\{y\} \equiv \#g^{-1}\{y\} \pmod{2}$ . ■

**Lema 1.1.4** *Sejam  $y$  e  $z$  pontos arbitrários do interior de uma variedade conexa  $N$ . Então existe um difeomorfismo  $h : N \rightarrow N$  que é isotópico à função identidade e tal que  $h(y) = z$ .*

*Demonstração:* Olhar a página 22 de [7]. ■

Agora, o resultado principal desta subsecção:

<sup>5</sup>Para uma demonstração ver o Apêndice de [7]



**Teorema 1.1.7** *Seja  $f : M \rightarrow N$  suave, com  $M$  compacta sem fronteira e  $N$  conexa,  $M$  e  $N$  de mesma dimensão. Se  $y$  e  $z$  são valores regulares arbitrários de  $f$ , então*

$$\#f^{-1}\{y\} \equiv \#f^{-1}\{z\} \pmod{2}.$$

*Mais ainda, tal classe comum, que denotaremos por  $\deg_2(f)$ , depende somente da classe de homotopia de  $f$ .*

*Demonstração:* Dados  $y$  e  $z$  valores regulares de  $f$ , temos do Lema 1.1.4 que existe  $h : N \rightarrow N$  um difeomorfismo isotópico à identidade que leva  $y$  em  $z$ . Daí,  $z$  é valor regular de  $h \circ f$  (pois  $(h \circ f)^{-1}\{z\} = f^{-1}\{y\}$ , e a sobrejetividade de  $df_x$  garante a sobrejetividade de  $d(h \circ f)_x$ ). Notemos que  $h \circ f$  é homotópica a  $f$  (pois se  $F : N \times [0,1] \rightarrow N$  é uma função de isotopia entre  $h$  e a identidade, definamos  $G : M \times [0,1] \rightarrow M$  pondo  $G(x, t) = F(f(x), t)$ ;  $G$  é suave e  $G(x, 0) = F(f(x), 0) = h \circ f(x)$  e  $G(x, 1) = F(f(x), 1) = f(x)$ ), seguindo do Lema 1.1.3 da Homotopia que

$$\#(h \circ f)^{-1}\{z\} \equiv \#f^{-1}\{z\} \pmod{2}.$$

Mas  $(h \circ f)^{-1}\{z\} = f^{-1}\{y\}$ , seguindo que  $\#f^{-1}\{y\} \equiv \#f^{-1}\{z\} \pmod{2}$ , o que mostra a primeira parte do teorema, e nos permite definir  $\deg_2(f)$  como a classe de  $\#f^{-1}\{y\}$ . Sendo  $g$  homotópica a  $f$ , temos do Corolário 1.1.4 que existe  $y$  um valor regular de  $f$  e  $g$ , seguindo do Lema 1.1.3 que  $\#f^{-1}\{y\} \equiv \#g^{-1}\{y\} \pmod{2}$ . Daí, do que acabamos de mostrar,  $\deg_2(f) = \deg_2(g)$ . ■

**Definição 1.1.12** *Dizemos que  $\deg_2(f)$  é o grau módulo 2 de  $f$ .*

### 1.1.5 Variedades orientáveis e o grau de uma transformação

Para definirmos o grau de uma função como um número inteiro, e não como uma classe de resíduos, introduziremos nesta subsecção o conceito de orientação em nossas variedades.

**Definição 1.1.13** *Seja  $A$  um espaço vetorial real  $n$ -dimensional. Dizemos que duas bases ordenadas  $\beta_1 = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  e  $\beta_2 = \{a_1, \dots, a_n\}$  de  $A$  são equivalentes se a matriz mudança de base de  $\beta_1$  para  $\beta_2$  tem determinante positivo.*

**Observação:** *A relação definida acima é de equivalência.*

**Definição 1.1.14** *Dizemos que duas bases ordenadas  $\beta_1$  e  $\beta_2$  determinam a mesma orientação se são equivalentes.*

$\beta_1$  *determina orientação oposta a  $\beta_2$  se não são equivalentes.*

**Observação:** *Podemos dessa forma colocar uma orientação num espaço vetorial, a orientação correspondente a uma dada base fixada. Dizemos, então, que o espaço está com sua orientação positiva se tomarmos a orientação correspondente a essa determinada base, e está com sua orientação negativa quando seguirmos bases que não determinam a mesma orientação que a base fixada.*

**Observação:** A orientação positiva do  $\mathbb{R}^n$  nós a tomaremos correspondendo à base canônica  $\{e_1, \dots, e_n\}$ , onde  $e_i = (\underbrace{0, \dots, 1}_{i}, 0, \dots, 0)$ .

**Observação:** Para um espaço vetorial de dimensão zero, adotaremos uma orientação com os símbolos  $+1$  ou  $-1$  sempre que for necessário.

**Definição 1.1.15** Dizemos que uma  $m$ -variedade  $M$ , com  $m \geq 1$ , é orientável se é possível definirmos uma orientação em cada espaço tangente  $TM_x$  de tal forma que: para todo  $x \in M$ , existe uma vizinhança  $U \subset M$  e um difeomorfismo  $h$  mapeando  $U$  em um aberto de  $\mathbb{R}^m$ , ou  $H^m$ , que preserva orientação, no seguinte sentido:  $\forall y \in U$ , o isomorfismo  $dh_y : TM_y \rightarrow \mathbb{R}^m$  leva a orientação pré definida de  $TM_y$  na orientação positiva de  $\mathbb{R}^m$ , significando que, se  $\beta$  é uma base de  $TM_y$  com a orientação escolhida em  $TM_y$ , então a base  $\alpha = dh_y\{\beta\}$  tem a mesma orientação da base canônica de  $\mathbb{R}^m$ .

Colocaremos a seguir uma orientação positiva na fronteira de uma variedade orientável  $M$ . Se  $M$  tem fronteira, podemos distinguir três tipos de vetores no espaço tangente  $TM_x$ , em um ponto de fronteira  $x$ :

1. há os vetores tangentes à fronteira formando um espaço  $m - 1$ -dimensional;
2. há os vetores “interiores”, que formam um meio espaço aberto limitado por  $T(\partial M)_x$ ;
3. há os vetores “exteriores”, que formam um meio espaço complementar.

Esses três tipos de vetores são os correspondentes a imagens por  $(dg_x)^{-1}$  dos três tipos de vetores em  $\mathbb{R}^m$ : vetores em  $\partial H^m$ , vetores em  $\text{int}H^m$ , vetores em  $\mathbb{R}^m \setminus H^m$ , respectivamente, onde  $g$  é uma parametrização de uma vizinhança de  $x$  (observemos a figura 1.1.1). Agora, se  $\dim M \geq 2$ , para cada  $x \in \partial M$ , seja  $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  uma

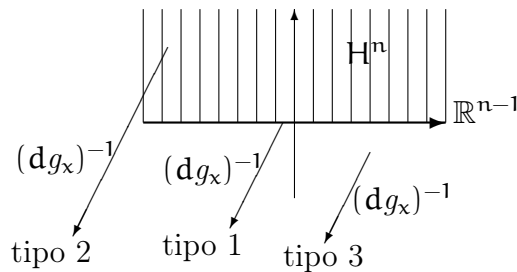


Figura 1.1.1: Os três tipos de vetores.

base de  $TM_x$ , com a orientação positiva de  $TM_x$ , tal que  $v_2, \dots, v_m$  são tangentes à fronteira (isto é, são do primeiro tipo) e tal que  $v_1$  é exterior (sempre é possível fazer isso através de rotações). Então,  $\{v_2, \dots, v_m\}$  determina uma orientação para  $\partial M$  em  $x$ . Se  $\dim M = 1$ , para cada ponto  $x$  em  $\partial M$ , colocamos a orientação  $-1$  ou  $+1$ ,

de acordo com o vetor orientação em  $\mathbf{x}$  ser interior ou exterior, respectivamente. Tal orientação será sempre tomada como positiva para a fronteira de  $M$ , utilizá-la-emos sempre para  $\partial M$ , salvo menção em contrário.

Passaremos a definir o grau de uma função como um número inteiro. Sejam  $M$  e  $N$  variedades orientáveis e sem fronteira de mesma dimensão  $n$ , com  $M$  compacta e  $N$  conexa, e  $f : M \rightarrow N$  uma função suave. Seja  $\mathbf{x} \in M$  um ponto regular de  $f$ , então  $df_{\mathbf{x}} : TM_{\mathbf{x}} \rightarrow TN_{f(\mathbf{x})}$  é um isomorfismo entre espaços vetoriais orientáveis. Definamos o *signal* de  $df_{\mathbf{x}}$  como  $+1$  ou  $-1$  se  $df_{\mathbf{x}}$  preserva ou não a orientação (isto é, se  $df_{\mathbf{x}}$  leva bases com a mesma orientação fixada em  $TM_{\mathbf{x}}$  em bases com a mesma orientação fixada em  $TN_{f(\mathbf{x})}$ , ou não).

**Definição 1.1.16** *Seja  $\mathbf{y}$  um valor regular de  $f$ . Definimos o grau de  $f$  em  $\mathbf{y}$ ,  $\deg(f; \mathbf{y})$ , por*

$$\deg(f; \mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{x} \in f^{-1}\{\mathbf{y}\}} \text{signal } df_{\mathbf{x}}^6.$$

**Observação:**  $\deg(f; \mathbf{y})$  está bem definido. Isso é claro pela compacidade de  $M$  e a Proposição 1.1.1.

**Observação:** Além disso, notemos que quando  $\mathbf{y} \notin f(M)$ ,  $\deg(f; \mathbf{y}) = 0$ .

**Observação:**  $\deg(f; \mathbf{y})$  é localmente constante como uma função de  $\mathbf{y}$  definida no conjunto dos valores regulares de  $f$ . Isso segue da proposição 1.1.2 e da orientabilidade de  $M$  e  $N$ .

**Teorema 1.1.8** *O inteiro  $\deg(f; \mathbf{y})$  não depende da escolha do valor regular  $\mathbf{y}$ .*

Demonstraremos o teorema acima utilizando alguns resultados que ainda iremos estabelecer. Agora, já usando esse teorema, temos a seguinte

**Definição 1.1.17** *Definimos o inteiro dado no teorema anterior por grau de  $f$ , e o denotamos por  $\deg f$ .*

Provaremos ainda o seguinte

**Teorema 1.1.9** *Se  $f$  é homotópica a  $g$ , então  $\deg f = \deg g$ .*

**Lema 1.1.5** *Suponhamos que  $M$  é a fronteira de uma  $m$ -variedade orientável e compacta  $X$ , e que  $M$  está orientada como a fronteira de  $X$  (de acordo com a orientação positiva da fronteira). Se  $f : M \rightarrow N$  estende-se a uma função suave  $F : X \rightarrow N$ , então  $\deg(f; \mathbf{y}) = 0$ , para todo  $\mathbf{y}$  valor regular de  $f$ .*

*Demonstração:* Olhar o lema 1 da página 28 de [7]. ■

**Lema 1.1.6** *Se as duas funções suaves  $f, g : M \rightarrow N$  são homotópicas, então*

$$\deg(f; \mathbf{y}) = \deg(g; \mathbf{y}),$$

*para todo valor regular  $\mathbf{y}$  comum a  $f$  e a  $g$ .*

<sup>6</sup>Para a definição de grau de  $f$  em  $\mathbf{y}$  não foi relevante a conexidade de  $N$ , porém o resultado principal concernente ao grau — sua independência em relação a  $\mathbf{y}$  (teorema 1.1.8) — utilizará tal fato. Assim, já assumimos isso previamente.

*Demonstração:* A variedade  $X \times [0,1]$  pode ser orientada como um produto, onde a fronteira  $M \times 0 \cup M \times 1$  estará orientada com a orientação positiva que estabelecemos ao orientarmos fronteiras. Mas daí, para que isso ocorra, as orientações de  $M \times 0$  e  $M \times 1$  precisam ser opostas (como podemos ver na figura 1.1.2). Se  $F$  for uma

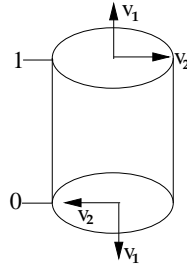


Figura 1.1.2: Orientação da fronteira.

função de homotopia entre  $f$  e  $g$ , com  $F(x,0) = f(x)$  e  $F(x,1) = g(x)$ , temos, por definição, que o grau de  $F|_{\partial(M \times [0,1])}$  em um valor regular  $y$  é o número

$$\deg(g; y) - \deg(f; y) \quad \text{ou} \quad -\deg(g; y) + \deg(f; y) .$$

Pelo Lema 1.1.5, essa diferença é 0, seguindo que  $\deg(g; y) = \deg(f; y)$ . ■

Agora, se  $y$  e  $z$  são ambos valores regulares de  $f : M \rightarrow N$ , seja  $h : N \rightarrow N$  um difeomorfismo que leva  $y$  em  $z$  e é suavemente isotópico à identidade (a existência de  $h$  é garantida pelo Lema 1.1.4). Desde que  $dh_x$  preserva a orientação (se não preservasse,  $\deg(h; y) = -1$  em algum ponto  $y$ , seguindo do lema 1.1.6 que  $\deg(\text{identidade}; y) = -1$ , uma contradição), temos que  $d(h \circ f)_x = dh_{f(x)} \circ df_x$  preserva a orientação se e somente se  $df_x$  preserva, donde segue que

$$\deg(f; y) = \deg(h \circ f; h(y)) . \tag{1.1.4}$$

Mas como  $f$  é homotópica a  $h \circ f$ , o Lema 1.1.6 dá que

$$\deg(h \circ f; z) = \deg(f; z) \tag{1.1.5}$$

Desde que  $h(y) = z$ , temos de (1.1.4) e (1.1.5) que  $\deg(f; y) = \deg(f; z)$ , o que mostra o Teorema 1.1.8. A prova do Teorema 1.1.9 é consequência direta do Teorema 1.1.8 e do Lema 1.1.6.

**Observação:** Convencionaremos que quando  $f$  não tem valor regular,  $\deg f = 0$ .

**Proposição 1.1.10** *Um difeomorfismo  $f : M \rightarrow N$  tem grau  $+1$  ou  $-1$ , conforme  $df_x$  preserva ou não a orientação em algum ponto  $x \in M$ .*

*Demonstração:* A demonstração é imediata se utilizarmos o Teorema 1.1.8 e a definição 1.1.17 de grau de  $f$ . ■

Seja  $r_i : S^n \rightarrow S^n$  a função definida por

$$r_i(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_{n+1}) .$$

É fácil ver que  $r_i$  é um difeomorfismo tal que  $dr_{i,x}$  inverte a orientação. Daí,  $\deg r_i = -1$ . Assim, a função *antipodal*  $a(x) = -x$ , definida em  $S^n$ , tem grau  $(-1)^{n+1}$ , uma vez que  $a(x) = r_1 \circ r_2 \circ \dots \circ r_{n+1}(x)$ . Segue dessa argumentação que, se  $n$  é par, a função antipodal *não* é homotópica à identidade, um fato que não era detectado pelo grau módulo 2.

### 1.1.6 O Teorema da “Esfera Cabeluda”

Daremos a seguir a definição de Campo Vetorial. Além disso, utilizaremos os resultados das subsecções anteriores para provar o Teorema da “Esfera Cabeluda”.

**Definição 1.1.18 (Campo Vetorial)** *Seja  $M \subset \mathbb{R}^k$  uma  $m$ -variedade. Dizemos que uma função suave  $v : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  é um Campo Vetorial se*

$$v(x) \in TM_x, \forall x \in M .$$

**Observação:** *No caso de  $M = S^n$ , a condição de ser campo vetorial significa  $v(x) \bullet x = 0$ ,  $\forall x \in S^n$ .*

**Teorema 1.1.11 (Teorema da “Esfera Cabeluda”)**  *$S^n$  admite um Campo Vetorial que não se anula em nenhum ponto se e somente se  $n$  é ímpar. Em particular, se  $n$  é par, todo Campo Vetorial em  $S^n$  se anula em algum ponto.*

*Demonstração:* Seja  $v$  um Campo Vetorial que não se anula em nenhum ponto de  $S^n$ . Podemos assumir que  $v(x) \bullet v(x) = 1$ ,  $\forall x \in S^n$ , pois senão podemos tomar  $\bar{v}(x) = v(x)/|v(x)|$ . Isto é,  $v$  é uma função de  $S^n$  em  $S^n$ . Definamos  $F : S^n \times [0,1] \rightarrow S^n$ , pondo  $F(x,t) = \cos(\pi t)x + \sin(\pi t)v(x)$ . Notemos que  $F(x,t)$  é suave e “chega” em  $S^n$ , pois  $F(x,t) \bullet F(x,t) = \cos^2(\pi t)|x|^2 + 2 \cos(\pi t)\sin(\pi t)x \bullet v(x) + \sin^2(\pi t)|v(x)|^2 = 1$ , além disso,  $F(x,0) = x$  e  $F(x,1) = -x$ , o que mostra que a função antipodal  $a(x) = -x$  é homotópica à função identidade. Se  $n$  é par, o que vimos no final da última subsecção garante que isso é impossível, demonstrando uma afirmação do teorema — isto é,  $v$  precisa se anular em algum ponto de  $S^n$ . Reciprocamente, sendo  $n = 2k - 1$ , podemos definir  $v(x_1, \dots, x_{2k}) = (x_2, -x_1, x_4, -x_3, \dots, x_{2k}, -x_{2k-1})$ , que é um Campo que não se anula em nenhum ponto de  $S^n$ . ■

## 1.2 Compactificações

Veremos nesta secção uma introdução à teoria de compactificar espaços topológicos. Veremos uma condição suficiente para compactificar um espaço topológico. Por fim, veremos a compactificação de Stone-Čech, que é aquela em que toda função contínua no espaço pode ser estendida continuamente para a sua compactificação.

**Definição 1.2.1** *Seja  $X$  um espaço topológico Hausdorff.  $Y$  é dito uma compactificação de  $X$  se  $Y$  é compacto e Hausdorff,  $X \subset Y^7$  e  $\bar{X} = Y$ .*

<sup>7</sup>Aqui, a topologia de  $X$  deve coincidir com a topologia induzida por  $Y$ .

**Exemplo:** Se  $X = (0, 1)$ , então  $Y = [0, 1]$  é uma compactificação de  $X$ .

Veremos alguns tipos de compactificações. Começaremos com a compactificação a um ponto. Para isso, precisaremos da

**Definição 1.2.2** Um espaço topológico  $X$  é dito localmente compacto se, para todo  $x \in X$ , existem  $C \subset X$  um compacto e  $V \subset X$  uma vizinhança de  $x$ , tais que  $x \in V \subset C$ .

**Exemplo:**  $\mathbb{R}^n$  é localmente compacto.

Seja  $X$  um espaço topológico localmente compacto e Hausdorff. Tomemos um ponto  $\infty \notin X$ , e seja  $Y \doteq X \cup \{\infty\}$ . Definamos a seguinte topologia em  $Y$ :

$$\tau \doteq \{U \subset X \mid U \text{ é aberto de } X\} \cup \{Y \setminus C \mid C \text{ é compacto de } X\}$$

Vejam que  $\tau$  é uma topologia:  $\emptyset \in \tau$ , pois é aberto de  $X$ ,  $Y \in \tau$ , pois  $Y = Y \setminus \emptyset$ , e  $\emptyset$  é compacto. As interseções finitas de elementos de  $\tau$  estão em  $\tau$ , pois, se  $A, B$  estão, então temos três casos: (i) Se  $A$  e  $B$  são abertos de  $X$ , então  $A \cap B$  é aberto de  $X$ , logo está em  $\tau$ ; (ii) Se  $A$  é aberto de  $X$  e  $B = Y \setminus C$ , então  $A \cap B = A \cap (X \setminus C)$ , que é um aberto de  $X$ , pois como  $C$  é compacto no espaço de Hausdorff  $X$ , segue que  $C$  é fechado em  $X$ ; (iii) Se  $A = Y \setminus C_1$  e  $B = Y \setminus C_2$ , então  $A \cap B = Y \setminus (C_1 \cup C_2)$ , que está em  $Y$  porque união finita de compactos é um compacto. As seguintes relações mostram que uniões de elementos de  $\tau$  estão em  $\tau$ :

$$\begin{aligned} \bigcup_{\gamma} U_{\gamma} &= U \in \tau \\ \bigcup_{\gamma} (Y \setminus C_{\gamma}) &= Y \setminus (\bigcap_{\gamma} C_{\gamma}) = Y \setminus C \in \tau \\ (\bigcup_{\gamma} U_{\gamma}) \cup (\bigcup_{\gamma} (Y \setminus C_{\gamma})) &= U \cup (Y \setminus C) = Y \setminus (C \setminus U) \in \tau, \end{aligned}$$

onde a última pertinência vale pois  $C \setminus U$  é um fechado dentro do compacto  $C$ .

**Proposição 1.2.1** Seja  $X$  Hausdorff e localmente compacto, mas não compacto. Se  $Y$  for construído como acima, então  $Y$  é uma compactificação de  $X$ .

*Demonstração:* Mostremos primeiro que a topologia  $\tau$  induz a topologia de  $X$ . De fato, se  $A \in \tau$ , então  $A \cap X$  é aberto de  $X$ , pois: se  $A$  é aberto de  $X$ ,  $A \cap X = A$ ; se  $A = Y \setminus C$ ,  $A \cap X = (Y \setminus C) \cap X = X \setminus C$ , um aberto de  $X$  (pois  $C$  é fechado em  $X$ ). Por outro lado, se  $A$  for aberto de  $X$ , então  $A = A \cap X$  (sendo um elemento da topologia induzida, pois  $A$  está em  $\tau$ ). Além disso, vejamos que  $X$  é denso em  $Y$ . De fato, qualquer vizinhança de  $\infty$  é do tipo  $Y \setminus C$ . Daí, como  $X$  não é compacto, qualquer dessas vizinhanças intercepta  $X$ , e segue que  $\infty \in \bar{X}$ . Como  $X \subset \bar{X}$ , segue que  $Y = \bar{X}$ .  $Y$  é compacto, pois, se  $\mathcal{A}$  é uma cobertura de  $Y$  por abertos, então existe  $A \in \mathcal{A}$  que contém  $\infty$ , sendo por isso  $A = Y \setminus C$ . Da compacidade de  $C$ , segue que existem  $A_1, A_2, \dots, A_n$  em  $\mathcal{A}$ , que cobrem  $C$ . Logo,  $A, A_1, \dots, A_n$  constituem uma subcobertura aberta e finita de  $Y$ . Por fim, vejamos que  $Y$  é Hausdorff: dados  $x \neq y \in Y$ , se ambos estiverem em  $X$ , então são separados por abertos de  $X$  (pois  $X$  é Hausdorff). Se  $y = \infty$ , como  $X$  é localmente compacto, existem  $C$  compacto e  $V_x$  vizinhança de  $x$  tais que  $x \in V_x \subset C$ . Tomando  $Y \setminus C$  como vizinhança de  $y$ , temos que  $(Y \setminus C) \cap V_x = \emptyset$ . ■

**Definição 1.2.3**  $Y$  com a topologia  $\tau$  é dito a compactificação a um ponto de  $X$ .

**Exemplo:** Via projeção estereográfica, é possível mostrar que a compactificação a um ponto de  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  é homeomorfa a  $S^1$ .

A proposição anterior pede que o espaço seja de Hausdorff, localmente compacto, mas não compacto para admitir uma compactificação a um ponto. O Lema 1.2.1 a seguir fornece uma condição suficiente diferente para que o espaço admita alguma compactificação: e esta é construída na demonstração do citado Lema. Observemos primeiro a

**Definição 1.2.4** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos. Uma função injetora e contínua  $h : X \rightarrow Y$  é dita um mergulho se a restrição de  $h$  à sua imagem é um homeomorfismo<sup>8</sup>.

**Lema 1.2.1** Seja  $X$  um espaço topológico Hausdorff. Se existem  $Z$  um espaço compacto e Hausdorff e um mergulho  $h : X \rightarrow Z$ , então  $X$  admite uma compactificação  $Y$ .

*Demonstração:* Sejam  $X_0 = h(X) \subset Z$  e  $Y_0 = \overline{X_0}$ .  $Y_0$  é compacto e Hausdorff, pois é um subconjunto fechado de um espaço compacto e Hausdorff. Seja  $A$  um conjunto disjunto de  $X$ , tal que existe  $k : A \rightarrow Y_0 \setminus X_0$  uma bijeção. Definamos  $Y \doteq X \cup A$  e a bijeção  $H : Y \rightarrow Y_0$  pondo

$$H(x) = \begin{cases} h(x), & x \in X \\ k(x), & x \in A. \end{cases}$$

Coloquemos a seguinte topologia em  $Y$ :

$U \subset Y$  é aberto de  $Y$  se, e somente se,  $H(U)$  é aberto de  $Y_0$ .

Dessa forma,  $H$  é um homeomorfismo. Afirmamos que  $Y$  é uma compactificação de  $X$ . De fato, como  $H$  é homeomorfismo, segue que  $Y = H^{-1}(Y_0)$  é compacto e Hausdorff, pois homeomorfismos preservam tais propriedades. Além disso, a seguinte relação mostra que  $X$  é denso em  $Y$ :

$$H(\overline{X}) = \overline{H(X)} = \overline{X_0} = Y_0 = H(Y).$$

Resta ver que a topologia de  $X$  coincide com a topologia induzida por  $Y$ . De fato, se  $L$  é aberto de  $X$ , então  $H(L) = h(L)$  é aberto de  $X_0$ , seguindo que  $H(L) = M \cap X_0$ , com  $M$  um aberto de  $Y_0$ . Daí,  $N = H^{-1}(M)$  é aberto de  $Y$ , e  $L = N \cap X$ . Por outro lado, se  $L$  for aberto de  $Y$ , então  $H(L)$  é aberto de  $Y_0$ . Daí,  $h(L \cap X) = H(L) \cap h(X) = H(L) \cap X_0 \implies h(L \cap X)$  é aberto de  $X_0 \implies L \cap X$  é aberto de  $X$ . ■

**Observação:**  $Y$  como na proposição é métrico quando  $Z$  for métrico, pois se  $d_Z$  for a métrica de  $Z$ , basta tomar

$$d_Y(y_1, y_2) \doteq d_Z(H(y_1), H(y_2)),$$

<sup>8</sup>Queremos dizer com isso que a função  $h^* : X \rightarrow h(X)$ , definida pela regra  $h^*(x) = h(x)$ , é um homeomorfismo

que  $d_Y$  é uma métrica que induz os abertos de  $Y$ .

Podemos colocar uma hipótese no espaço  $X$  para que ele sempre admita ser mergulhado num espaço compacto e Hausdorff (e portanto, admitir uma compactificação):

**Definição 1.2.5** *Seja  $X$  um espaço topológico. Dizemos que  $X$  é completamente regular se subconjuntos formados por somente um ponto são fechados, e se, dados  $x_0 \in X$  e  $A \subset X$  fechado tal que  $x_0 \notin A$ , então existe  $f : X \rightarrow [0, 1]$  contínua com a seguinte propriedade:*

$$f(x_0) = 1 \text{ e } f(A) = \{0\}.$$

**Corolário 1.2.2** *Subespaço de espaço completamente regular é regular, e produto cartesiano de espaços completamente regulares é completamente regular.*

**Observação:** *Se  $\Gamma$  for um conjunto de índices, denotaremos  $Y^\Gamma$  como sendo o produto cartesiano na topologia produto*

$$\prod_{\gamma \in \Gamma} Z_\gamma, \text{ com } Z_\gamma = Y, \forall \gamma \in \Gamma.$$

**Teorema 1.2.3 (Teorema do Mergulho)** *Seja  $X$  um espaço de Hausdorff. Suponhamos que  $\{f_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  é uma coleção de funções contínuas,  $f_\gamma : X \rightarrow \mathbb{R}$ , satisfazendo: “para cada  $x_0 \in X$  e cada fechado  $A$ , com  $x_0 \notin A$ , existe  $\gamma_0 \in \Gamma$  tal que*

$$f_{\gamma_0}(x_0) > 0 \quad \text{e} \quad f_{\gamma_0}(A) = \{0\} \text{”}.$$

*Então a função  $F : X \rightarrow \mathbb{R}^\Gamma$ , definida por*

$$F(x) \doteq (f_\gamma(x))_{\gamma \in \Gamma}$$

*é um mergulho de  $X$  em  $\mathbb{R}^\Gamma$ .*

*Demonstração:* Ver página 220 de [8].

**Corolário 1.2.4** *Seja  $X$  completamente regular. Então existem um espaço de Hausdorff compacto  $Z$  e um mergulho  $h : X \rightarrow Z$ . Em particular,  $X$  tem uma compactificação.*

*Demonstração:* Basta tomarmos a coleção  $\{f_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  de todas as funções contínuas da Definição 1.2.5 de completamente regular e notar que tal coleção satisfaz as hipóteses do Teorema do Mergulho. Tomando então  $h = F$ , temos um mergulho em  $[0, 1]^\Gamma$ . Além disso, o espaço de Hausdorff  $[0, 1]^\Gamma$  é compacto, pelo *Teorema de Tychonoff*<sup>9</sup>. Em particular, pelo Lema 1.2.1,  $X$  admite uma compactificação. ■

Se  $X$  é um espaço de Hausdorff e  $Y$  é uma sua compactificação, nem sempre é possível estender uma função real contínua definida em  $X$  para uma função que seja contínua em  $Y$ . Como um exemplo, só conseguimos estender uma função  $f$

<sup>9</sup>O Teorema afirma que o produto de espaços compactos é compacto. Ver a Secção 5.1 de [8]



definida em  $(0,1)$  para uma função contínua em  $[0,1]$  se existem  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ . Mas existe uma compactificação que tem essa propriedade (isto é, toda função contínua em  $X$  é estendível continuamente à essa tal compactificação de  $X$ ). Sejam  $X$  completamente regular e  $\{f_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  a coleção de todas as funções contínuas e limitadas  $f_\gamma : X \rightarrow \mathbb{R}$  (notemos que as funções da Definição 1.2.5 de completamente regular estão aí inclusas). Para cada  $\gamma \in \Gamma$ , seja

$$I_\gamma \doteq [\inf f_\gamma(X), \sup f_\gamma(X)].$$

Definamos  $h : X \rightarrow \prod_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma$ , colocando  $h(x) \doteq (f_\gamma(x))_{\gamma \in \Gamma}$ . Pelo Teorema do Mergulho,  $h$  é um mergulho, e, pelo *Teorema de Tychonoff*,  $\prod_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma$  é compacto. Assim, o Lema 1.2.1 e sua demonstração nos dão uma compactificação  $Y$  de  $X$ .

**Definição 1.2.6** Dizemos que  $Y$  acima construída é a compactificação de Stone-Čech de  $X$ . Denotaremos-la por  $\beta(X)$ .

**Teorema 1.2.5** Se  $X$  é completamente regular, então toda função contínua e limitada,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , pode ser unicamente estendida a uma função contínua em  $\beta(X)$ .

*Demonstração:*  $\beta(X)$  é induzida pelo mergulho  $h : X \rightarrow \prod_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma$ . Pelo que vimos,  $h$  se estende a um mergulho  $H : \beta(X) \rightarrow \prod_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma$ . Agora, dada uma função  $f$  real, limitada e contínua em  $X$ , então  $f = f_{\gamma_0}$ , para algum  $\gamma_0 \in \Gamma$ . Seja

$$\pi_{\gamma_0} : \prod_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma \rightarrow I_{\gamma_0}$$

a projeção no intervalo  $I_{\gamma_0}$ . Definamos  $g \doteq \pi_{\gamma_0} \circ H$ . A função  $g$  é contínua e definida em  $\beta(X)$ . Além disso,  $\forall x \in X$ ,  $g(x) = \pi_{\gamma_0}(h(x)) = f_{\gamma_0}(x) = f(x)$ , isto é,  $g$  estende  $f$ . A unicidade vem do

**Lema 1.2.2** Sejam  $A \subset X$  e  $f : A \rightarrow Z$  uma função contínua de  $A$  num espaço de Hausdorff  $Z$ . Então existe no máximo uma extensão contínua de  $f$  a uma função contínua  $g : \bar{A} \rightarrow Z$

*Demonstração:* Suponhamos que  $g, g' : \bar{A} \rightarrow Z$  são duas extensões de  $f$ , e que exista  $x \in \bar{A} \setminus A$  tal que  $g(x) \neq g'(x)$ . Como  $Z$  é Hausdorff, existem  $V$  e  $V'$  abertos disjuntos contendo  $g(x)$  e  $g'(x)$ , respectivamente. Seja  $U = g^{-1}(V) \cap g'^{-1}(V')$ .  $U$  é um aberto de  $\bar{A}$ , que contém  $x$ . Mas  $U$  intercepta  $A$  em um ponto  $y$  (pois  $x$  está no fecho de  $A$ ), daí,  $g(y) = f(y) = g'(y) \in V \cap V'$ , uma contradição. ■

## Capítulo 2

# A técnica da Compactificação de Poincaré

### 2.1 A Compactificação de Poincaré de um campo vetorial polinomial

Introduziremos a Compactificação de Poincaré de um campo vetorial polinomial qualquer e daremos as suas expressões em coordenadas locais. Por último, provaremos um resultado a respeito de campos que não se anulam em  $\mathbb{R}^n$ .

Seja  $X = (P^1, P^2, \dots, P^n)$  um campo vetorial polinomial em  $\mathbb{R}^n$ . Identifiquemos  $\mathbb{R}^n$  com  $\pi = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \mathbf{y}_{n+1} = 1\}$ , que é o plano tangente a  $S^n$  no pólo norte  $N$ . Tal identificação é dada pelo difeomorfismo  $dg_u : \mathbb{R}^n \rightarrow TS_N^n$ , onde  $g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset S^n$  é a inversa de uma parametrização de uma vizinhança  $V$  de  $N$ , e  $u = g^{-1}(N)$ . Tomando uma projeção central, fazemos duas cópias de  $\pi$  em  $S^n$ , uma em  $H^+$  — o hemisfério norte sem o equador — e outra em  $H^-$  — o hemisfério sul sem o equador —, da seguinte forma: considerando  $r$  uma reta que passa por  $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$  e corta  $\pi$  no ponto  $\mathbf{x}$ , temos que  $r$  corta  $S^n$  em dois pontos  $\mathbf{y}_1$  e  $\mathbf{y}_2$ ,  $\mathbf{y}_1 \in H^+$  e  $\mathbf{y}_2 \in H^-$ . Daí, cada ponto  $\mathbf{x} \in \pi$  será relacionado com um ponto em  $H^+$  e com um ponto em  $H^-$  (observemos a figura 0.0.1 na introdução do trabalho). Mais concretamente, definamos  $\Phi^+ : \mathbb{R}^n \rightarrow H^+$  e  $\Phi^- : \mathbb{R}^n \rightarrow H^-$  por

$$\Phi^+(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Delta(\mathbf{x})}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, 1) \quad \text{e} \quad \Phi^-(\mathbf{x}) = \frac{-1}{\Delta(\mathbf{x})}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, 1),$$

com

$$\Delta(\mathbf{x}) = \left(1 + \sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}. \quad (2.1.1)$$

**Proposição 2.1.1**  $\Phi^+$  e  $\Phi^-$  são difeomorfismos.

*Demonstração:*  $\Phi^+$  é uma função  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^n$  em  $H^+ \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Basta, então, mostrar que  $\Phi^+$  tem inversa  $C^\infty$  de  $H^+$  em  $\mathbb{R}^n$ . Para isto, notemos que

$$f^+(z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) \doteq \left(\frac{z_1}{z_{n+1}}, \dots, \frac{z_n}{z_{n+1}}\right),$$

definida em  $H^+$ , é a inversa de  $\Phi^+$ , pois

$$\Phi^+ \circ f^+(z_1, \dots, z_{n+1}) = \frac{1}{\left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{z_i^2}{z_{n+1}^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{z_1}{z_{n+1}}, \dots, \frac{z_n}{z_{n+1}}, 1\right) = (z_1, \dots, z_{n+1}) \text{ e}$$

$$f^+ \circ \Phi^+(x_1, \dots, x_n) = f^+\left(\frac{x_1}{\Delta(x)}, \dots, \frac{x_n}{\Delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)}\right) = (x_1, \dots, x_n).$$

Além disso,  $f^+$  é de classe  $C^\infty$ , pois para cada  $z \in H^+$ , há sempre uma vizinhança  $V_z$  de  $z$  tal que  $y_{n+1} > 0$ ,  $\forall (y_1, \dots, y_{n+1}) \in V$ .

Para  $\Phi^-$ , basta notar que  $f^-(z_1, \dots, z_{n+1}) = (z_1/z_{n+1}, \dots, z_n/z_{n+1})$ , definida em  $H^-$ , é a sua inversa. ■

**Observação:** Notemos que  $S^n \setminus H^+$  e  $S^n \setminus H^-$  são homeomorfos a compactificações (no sentido da Definição 1.2.1) de  $\mathbb{R}^n$ .

Com isso em mãos, podemos fazer  $X$  induzir um campo vetorial  $\hat{X}$  em  $H^+ \cup H^-$ , definido por

$$\hat{X}(y) = \begin{cases} d\Phi_x^+(X(x)), & \text{se } y = \Phi^+(x) \\ d\Phi_x^-(X(x)), & \text{se } y = \Phi^-(x), \end{cases} \quad (2.1.2)$$

que pode ser escrito como

$$\hat{X}(y) = \begin{cases} d\Phi_{(\Phi^+)^{-1}(y)}^+(X((\Phi^+)^{-1}(y))), & \text{se } y \in H^+ \\ d\Phi_{(\Phi^-)^{-1}(y)}^-(X((\Phi^-)^{-1}(y))), & \text{se } y \in H^-, \end{cases} \quad (2.1.2')$$

mostrando que  $\hat{X}$  está bem definido. Observemos que, de fato,  $\hat{X}$  é um campo vetorial, pois é definido por derivadas, satisfazendo a Definição 1.1.18.

**Lema 2.1.1**

$$\hat{X}(y) = y_{n+1} \begin{pmatrix} 1 - y_1^2 & -y_1 y_2 & \cdots & -y_1 y_n \\ -y_2 y_1 & 1 - y_2^2 & \cdots & -y_2 y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -y_n y_1 & -y_n y_2 & \cdots & 1 - y_n^2 \\ -y_{n+1} y_1 & -y_{n+1} y_2 & \cdots & -y_{n+1} y_n \end{pmatrix} \hat{P}(y),$$

onde  $\hat{P} = (\hat{P}^1, \dots, \hat{P}^n)$  e  $\hat{P}^i(y_1, \dots, y_n, y_{n+1}) = P^i\left(\frac{y_1}{y_{n+1}}, \dots, \frac{y_n}{y_{n+1}}\right)$ ,  $i = 1, \dots, n$

*Demonstração:* Calculemos as matrizes

$$d\Phi_x^+ = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1^+}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial \Phi_1^+}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_{n+1}^+}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial \Phi_{n+1}^+}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \text{ e } d\Phi_x^- = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1^-}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial \Phi_1^-}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_{n+1}^-}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial \Phi_{n+1}^-}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}, \quad (2.1.3)$$

com  $\mathbf{x} = (\Phi^+)^{-1}(\mathbf{y})$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbb{H}^+$ , e  $\mathbf{x} = (\Phi^-)^{-1}(\mathbf{y})$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbb{H}^-$ , respectivamente. Para  $i = 1, \dots, n$ , temos que

$$\frac{\partial \Phi_i^+}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\Delta(\mathbf{x}) - x_i^2 \Delta(\mathbf{x})^{-1}}{(\Delta(\mathbf{x}))^2};$$

se  $\mathbf{x} = (y_1/y_{n+1}, \dots, y_n/y_{n+1})$ ,  $\Delta(\mathbf{x}) = 1/|y_{n+1}|$ , e ficamos com

$$\frac{\partial \Phi_i^+}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = |y_{n+1}|(1 - y_i^2) = y_{n+1}(1 - y_i^2),$$

pois aqui,  $y_{n+1} > 0$ . A mesma conta para  $\frac{\partial \Phi_i^-}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ , com  $\mathbf{x} = (\Phi^-)^{-1}(\mathbf{y})$  —  $\mathbf{y} \in \mathbb{H}^-$  —, mostra que

$$\frac{\partial \Phi_i^-}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = -|y_{n+1}|(1 - y_i^2) = y_{n+1}(1 - y_i^2),$$

pois agora  $y_{n+1} < 0$ ; isto é, tanto para  $\mathbf{y} \in \mathbb{H}^+$  como para  $\mathbf{y} \in \mathbb{H}^-$ , temos a mesma expressão para as entradas  $a_{ii}$  das matrizes em (2.1.3). As entradas  $a_{ij}$ , com  $i \neq j$  e  $i \leq n$  serão:

$$\frac{\partial \Phi_i^+}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{-x_i x_j \Delta(\mathbf{x})^{-1}}{\Delta(\mathbf{x})^2} = |y_{n+1}|(-y_i y_j) = y_{n+1}(-y_i y_j)$$

e a mesma expressão para  $\frac{\partial \Phi_i^-}{\partial x_j}(\mathbf{x})$ . Os elementos  $a_{(n+1)j}$  serão  $-y_{n+1}^2 y_j$ , obtidos com cálculos análogos. Agora,

$$\begin{aligned} X(\mathbf{x}) &= \left\{ \begin{array}{l} X((\Phi^+)^{-1}(\mathbf{y})), \quad \mathbf{y} \in \mathbb{H}^+ \\ X((\Phi^-)^{-1}(\mathbf{y})), \quad \mathbf{y} \in \mathbb{H}^- \end{array} \right\} = \\ &= \left( P^1 \left( \frac{y_1}{y_{n+1}}, \dots, \frac{y_n}{y_{n+1}} \right), \dots, P^n \left( \frac{y_1}{y_{n+1}}, \dots, \frac{y_n}{y_{n+1}} \right) \right) = \hat{P}(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Substituindo tudo isso em (2.1.2), segue o lema. ■

O equador  $S^{n-1} = \{\mathbf{y} \in S^n \mid y_{n+1} = 0\}$  de  $S^n$  corresponde ao “infinito” de  $\mathbb{R}^n$  (uma vez que é limite de  $\Phi^+(\mathbf{x})$  quando  $|\mathbf{x}|$  tende a  $\infty$ ), e a propriedade chave do campo  $\hat{X}$ , definido em  $S^n \setminus S^{n-1}$ , é poder de alguma forma ser estendido para  $S^n$ . Daí conseguiremos estudar as órbitas de  $X$  no infinito de  $\mathbb{R}^n$ . Seja, assim,  $m = \max \{\text{grau}(P^1), \dots, \text{grau}(P^n)\}$ . Definamos

$$\tilde{X}(\mathbf{y}) \doteq y_{n+1}^{m-1} \hat{X}(\mathbf{y}). \quad (2.1.4)$$

Daí, colocando

$$\tilde{P}^k(y_1, \dots, y_{n+1}) = y_{n+1}^m \hat{P}^k(y_1, \dots, y_{n+1}), \quad k = 1, \dots, n, \quad (2.1.5)$$

teremos do Lema 2.1.1 que

$$\tilde{X}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 1 - \mathbf{y}_1^2 & -\mathbf{y}_1\mathbf{y}_2 & \cdots & -\mathbf{y}_1\mathbf{y}_n \\ -\mathbf{y}_2\mathbf{y}_1 & 1 - \mathbf{y}_2^2 & \cdots & -\mathbf{y}_2\mathbf{y}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{y}_n\mathbf{y}_1 & -\mathbf{y}_n\mathbf{y}_2 & \cdots & 1 - \mathbf{y}_n^2 \\ -\mathbf{y}_{n+1}\mathbf{y}_1 & -\mathbf{y}_{n+1}\mathbf{y}_2 & \cdots & -\mathbf{y}_{n+1}\mathbf{y}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{P}^1(\mathbf{y}) \\ \tilde{P}^2(\mathbf{y}) \\ \vdots \\ \tilde{P}^n(\mathbf{y}) \end{pmatrix}, \quad (2.1.6)$$

que é um campo analítico em todo  $S^n$ . Que a função  $\tilde{X}$  é analítica em todo  $S^n$  é fácil de ver, uma vez que é polinomial e sua expressão garante sua suavidade em  $S^n$ . Para ver que é um campo vetorial, basta mostrar que  $\tilde{X}(\mathbf{y}) \bullet \mathbf{y} = 0$ ,  $\forall \mathbf{y} \in S^{n-1}$  (de acordo com a Definição de campo vetorial 1.1.18), o que é fato pela continuidade da função produto escalar (pois tal produto é 0 nos pontos de  $S^n \setminus S^{n-1}$ ).

**Definição 2.1.1** Dizemos que o campo  $\tilde{X}$  é a Compactificação de Poincaré do campo  $X$ .

**Observação:** Estudar o campo  $\tilde{X}$  no hemisfério norte sem o equador, em termos de órbitas, é o mesmo que estudar o campo  $\hat{X}$ , pois apenas multiplicamos  $\hat{X}$  pela função sempre positiva  $\mathbf{y}_{n+1}^{m-1}$  (resultando nas mesmas órbitas). Igualmente para  $\tilde{X}$  no hemisfério sul sem o equador (onde multiplicamos  $\hat{X}$  pela função sempre negativa  $\mathbf{y}_{n+1}^{m-1}$ ).

**Definição 2.1.2** Dado um polinômio  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de grau  $l$ , a decomposição em suas partes homogêneas é dada por

$$P = P_0 + P_1 + \cdots + P_l,$$

onde  $P_j$  é seu termo homogêneo de grau  $j$ .

**Observação:**  $\tilde{P}^k(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{n+1})$  definidos em (2.1.5) são polinômios homogêneos de grau  $m$ . De fato, se  $P^k = P_0^k + P_1^k + \cdots + P_m^k$  é a decomposição nas partes homogêneas de  $P^k$ ,

$$\tilde{P}^k(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{n+1}) = \mathbf{y}_{n+1}^m \left( P_0^k \left( \frac{\mathbf{y}_1}{\mathbf{y}_{n+1}}, \dots, \frac{\mathbf{y}_n}{\mathbf{y}_{n+1}} \right) + \cdots + P_m^k \left( \frac{\mathbf{y}_1}{\mathbf{y}_{n+1}}, \dots, \frac{\mathbf{y}_n}{\mathbf{y}_{n+1}} \right) \right),$$

daí, desde que o  $i$ -ésimo termo da soma acima é  $\mathbf{y}_{n+1}^{m-i} P_i^k(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)$ , segue que  $\tilde{P}^k$  é homogêneo de grau  $m$ .

Calcularemos agora  $\tilde{X}$  considerando uma família de cartas locais de  $S^n$ . Cubramos  $S^n$  com  $2(n+1)$  cartas locais  $(\mathbf{U}_i, \Phi_i), (\mathbf{V}_i, \Psi_i)$  com  $i = 1, \dots, n+1$ , onde

$$\begin{cases} \mathbf{U}_i \doteq \{\mathbf{y} \in S^n \mid \mathbf{y}_i > 0\} \\ \mathbf{V}_i \doteq \{\mathbf{y} \in S^n \mid \mathbf{y}_i < 0\}, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \Phi_i : \mathbf{U}_i \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \Psi_i : \mathbf{V}_i \rightarrow \mathbb{R}^n \end{cases}$$

são definidas pela mesma regra

$$(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{n+1}) \mapsto \left( \frac{\mathbf{y}_1}{\mathbf{y}_i}, \dots, \frac{\mathbf{y}_{i-1}}{\mathbf{y}_i}, \frac{\mathbf{y}_{i+1}}{\mathbf{y}_i}, \dots, \frac{\mathbf{y}_{n+1}}{\mathbf{y}_i} \right).$$

Notemos que  $\Phi_i$  e  $\Psi_i$  são difeomorfismos, pois as funções

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \frac{1}{\Delta(x)}(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_n) \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \frac{-1}{\Delta(x)}(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_i, \dots, x_n), \end{aligned}$$

definidas em  $\mathbb{R}^n$ , são suas inversas, respectivamente (os cálculos são análogos aos da Proposição 2.1.1). Observemos que  $(\Phi^+)^{-1} = \Phi_{n+1}$  e  $H^+ = \mathbf{U}_{n+1}$ , e  $(\Phi^-)^{-1} = \Psi_{n+1}$  e  $H^- = \mathbf{V}_{n+1}$ . Escrevamos

$$(z_1, z_2, \dots, z_n) = \Phi_i(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{n+1}) = \left( \frac{\mathbf{y}_1}{\mathbf{y}_i}, \dots, \frac{\mathbf{y}_{i-1}}{\mathbf{y}_i}, \frac{\mathbf{y}_{i+1}}{\mathbf{y}_i}, \dots, \frac{\mathbf{y}_{n+1}}{\mathbf{y}_i} \right)$$

as coordenadas locais em  $\mathbf{U}_i$ , observando que, para cada  $i$ ,  $(z_1, \dots, z_n)$  tem significados distintos.

Calculemos  $\tilde{X}$  em  $\mathbf{U}_1$ , nas coordenadas  $(z_1, \dots, z_n)$ . Seja  $\mathbf{y} \in \mathbf{U}_1$ . Desde que  $\mathbf{d}(\Phi_1)_\mathbf{y}$  está definido em  $\mathbf{T}(\mathbf{U}_1)_\mathbf{y} (= \mathbf{T}(\mathbf{S}^n)_\mathbf{y})$ , o campo  $\tilde{X}$  nas coordenadas  $(z_1, z_2, \dots, z_n)$  será definido por  $\mathbf{d}(\Phi_1)_\mathbf{y}(\tilde{X}(\mathbf{y}))$ , com  $\mathbf{y} = \Phi_1^{-1}(z)$ . Temos então

**Lema 2.1.2** *O campo  $\tilde{X}$  em  $\mathbf{U}_1$ , nas coordenadas  $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ , tem a seguinte expressão:*

$$\frac{1}{\Delta(z)^{m-1}} \left( -z_1 \tilde{P}^1 + \tilde{P}^2, -z_2 \tilde{P}^1 + \tilde{P}^3, \dots, -z_{n-1} \tilde{P}^1 + \tilde{P}^n, -z_n \tilde{P}^1 \right),$$

onde  $\tilde{P}^i = \tilde{P}^i(1, z_1, \dots, z_n)$

*Demonstração:* Se  $\mathbf{y} \in \mathbf{U}_1 \cap H^+$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(\Phi_1)_\mathbf{y}(\tilde{X}(\mathbf{y})) &= \mathbf{d}(\Phi_1)_\mathbf{y}(\mathbf{y}_{n+1}^{m-1} \hat{X}(\mathbf{y})) = \mathbf{y}_{n+1}^{m-1} \mathbf{d}(\Phi_1)_\mathbf{y}(\mathbf{d}(\Phi^+)_\mathbf{x}(X(\mathbf{x}))) = \\ &= \mathbf{y}_{n+1}^{m-1} \mathbf{d}(\Phi_1 \circ \Phi^+)_\mathbf{x}(X(\mathbf{x})), \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

onde  $\mathbf{y} = \Phi_1^{-1}(z) = \Phi^+(\mathbf{x})$ . Mas

$$\Phi_1 \circ \Phi^+(\mathbf{x}) = \Phi_1 \left( \frac{1}{\Delta(x)}(x_1, x_2, \dots, x_n, 1) \right) = \frac{1}{x_1}(x_2, x_3, \dots, x_n, 1),$$

donde segue que

$$\mathbf{d}(\Phi_1 \circ \Phi^+)_\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -x_2/x_1^2 & 1/x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -x_3/x_1^2 & 0 & 1/x_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -x_n/x_1^2 & 0 & 0 & \cdots & 1/x_1 \\ -1/x_1^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

e daí

$$d(\Phi_1 \circ \Phi^+)_x(X(x)) = \frac{1}{x_1^2} (-x_2 P^1 + x_1 P^2, -x_3 P^1 + x_1 P^3, \dots, -x_n P^1 + x_1 P^n, -P^1), \quad (2.1.8)$$

onde  $P^i = P^i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Considerando  $(z_1, \dots, z_n) = (y_2/y_1, \dots, y_{n+1}/y_1)$ , e lembrando que  $(x_1, \dots, x_n) = (y_1/y_{n+1}, \dots, y_n/y_{n+1})$ , temos que

$$x_1 = \frac{y_1}{y_{n+1}} = \frac{1}{z_n}, \quad x_2 = \frac{y_2}{y_{n+1}} = \frac{z_1 y_1}{y_{n+1}} = \frac{z_1}{z_n}, \dots, \quad x_n = \frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{z_{n-1}}{z_n},$$

o que, de (2.1.8), nos dá

$$d(\Phi_1 \circ \Phi^+)_x(X(x)) = z_n (-z_1 P^1 + P^2, -z_2 P^1 + P^3, \dots, -z_{n-1} P^1 + P^n, -z_n P^1),$$

onde  $P^i = P^i(1/z_n, z_1/z_n, \dots, z_{n-1}/z_n)$ . Substituindo a expressão acima em (2.1.7), observando que

$$y_{n+1} = \frac{1}{\Delta(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/z_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} z_i^2/z_n^2}} = \frac{|z_n|}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^n z_i^2}} = \frac{z_n}{\Delta(z)}, \quad (2.1.9)$$

onde a última igualdade se dá porque  $z_n = y_{n+1}/y_1 > 0$ , segue que

$$d(\Phi_1)_y(\tilde{X}(y)) = \frac{z_n^m}{\Delta(z)^{m-1}} (-z_1 P^1 + P^2, -z_2 P^1 + P^3, \dots, -z_{n-1} P^1 + P^n, -z_n P^1),$$

com  $P^i = P^i(1/z_n, z_1/z_n, \dots, z_{n-1}/z_n)$ .

Desde que  $\tilde{P}^i(1, z_1, \dots, z_n) = z_n^m P^i(1/z_n, z_1/z_n, \dots, z_{n-1}/z_n)$ , segue que

$$d(\Phi_1)_y(\tilde{X}(y)) = \frac{1}{\Delta(z)^{m-1}} (-z_1 \tilde{P}^1 + \tilde{P}^2, -z_2 \tilde{P}^1 + \tilde{P}^3, \dots, -z_{n-1} \tilde{P}^1 + \tilde{P}^n, -z_n \tilde{P}^1),$$

com  $\tilde{P}^i = \tilde{P}^i(1, z_1, \dots, z_n)$ .

Se  $y \in \mathbf{U}_1 \cap \mathbf{H}^-$ , teremos a mesma expressão que acima, já que  $d(\Phi_1 \circ \Phi^-)_x(X(x))$  tem a mesma expressão, e

$$y_{n+1} = \frac{-1}{\Delta(x)} = \frac{-|z_n|}{\Delta(z)} = \frac{z_n}{\Delta(z)}, \quad (2.1.10)$$

já que agora  $z_n = y_{n+1}/y_1 < 0$ . Nos pontos  $y \in \mathbf{U}_1 \cap \mathbf{S}^{n-1}$ , a expressão será a mesma por continuidade. ■

Multiplicando a expressão de  $\tilde{X}$  em coordenadas  $z_i$ 's pela função positiva  $\Delta(z)^{m-1}$ , temos uma expressão  $Z(z_1, z_2, \dots, z_n)$ , que definiremos como sendo o *campo*  $\tilde{X}$  em  $\mathbf{U}_1$ , nas coordenadas  $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ .

Com cálculos semelhantes aos do Lema 2.1.2 para as demais cartas locais  $(U_i, \Phi_i)$ ,  $i = 2, \dots, n+1$ , chegamos às seguintes expressões do campo  $\tilde{X}$ , multiplicado pela função  $\Delta(z)^{m-1}$ :

$$\begin{aligned}
 &\text{Em } U_1: \left( -z_1 \tilde{P}^1 + \tilde{P}^2, -z_2 \tilde{P}^1 + \tilde{P}^3, \dots, -z_{n-1} \tilde{P}^1 + \tilde{P}^n, -z_n \tilde{P}^1 \right), \\
 &\quad \text{onde } \tilde{P}^i = \tilde{P}^i(1, z_1, \dots, z_n); \\
 &\text{em } U_2: \left( -z_1 \tilde{P}^2 + \tilde{P}^1, -z_2 \tilde{P}^2 + \tilde{P}^3, \dots, -z_{n-1} \tilde{P}^2 + \tilde{P}^n, -z_n \tilde{P}^2 \right), \\
 &\quad \text{onde } \tilde{P}^i = \tilde{P}^i(z_1, 1, \dots, z_n); \\
 &\text{em } U_3: \left( -z_1 \tilde{P}^3 + \tilde{P}^1, -z_2 \tilde{P}^3 + \tilde{P}^2, -z_3 \tilde{P}^3 + \tilde{P}^4, \dots, -z_{n-1} \tilde{P}^3 + \tilde{P}^n, -z_n \tilde{P}^3 \right), \\
 &\quad \text{onde } \tilde{P}^i = \tilde{P}^i(z_1, z_2, 1, z_3, \dots, z_n); \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad \vdots \\
 &\text{em } U_n: \left( -z_1 \tilde{P}^n + \tilde{P}^1, -z_2 \tilde{P}^n + \tilde{P}^2, \dots, -z_{n-1} \tilde{P}^n + \tilde{P}^{n-1}, -z_n \tilde{P}^n \right), \\
 &\quad \text{onde } \tilde{P}^i = \tilde{P}^i(z_1, z_2, \dots, z_n, 1); \\
 &\text{em } U_{n+1}: (P^1, P^2, \dots, P^n), \\
 &\quad \text{onde } P^i = P^i(z_1, \dots, z_n).
 \end{aligned}$$

Notemos como a expressão em  $U_{n+1}$  é diferente das outras. Seu cálculo foi feito de uma forma bem fácil, pois  $U_{n+1} = H^+$  e  $\Phi_{n+1} = (\Phi^+)^{-1}$ , como já tínhamos observado antes. O que acontece é que o campo tem a mesma expressão que o campo  $X$ . Trataremos com mais detalhes disso no Capítulo 3.

Agora, a expressão de  $\tilde{X}$  na vizinhança  $V_i$  é a mesma que em  $U_i$ , multiplicada por  $(-1)^{m-1}$ . Isso ocorre pois  $\Psi_i$  tem a mesma expressão que  $\Phi_i$ , e, em  $V_i$ ,

$$\mathbf{y}_{n+1}^{m-1} = \left( \frac{-z_n}{\Delta(z)} \right)^{m-1} = (-1)^{m-1} \left( \frac{z_n}{\Delta(z)} \right)^{m-1},$$

onde a primeira igualdade pode ser provada refazendo os cálculos (2.1.9) e (2.1.10), com  $y_1 < 0$ . Dessa forma, temos o campo  $\tilde{X}$  escrito em cada uma das  $2(n+1)$  vizinhanças, nas coordenadas  $(z_1, \dots, z_n)$ , lembrando que em cada vizinhança  $(z_1, \dots, z_n)$ 's têm significados distintos, e que a expressão final está multiplicada pela função  $\Delta(z)^{m-1}$ .

**Definição 2.1.3** Dizemos pontos singulares finitos (infinitos) de  $\tilde{X}$  os pontos singulares que pertencem a  $S^n \setminus S^{n-1}$  ( $S^{n-1}$ ).

**Observação:** Nas vizinhanças  $U_i, V_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , os pontos de  $S^{n-1}$  são levados pelas respectivas parametrizações nas coordenadas  $(z_1, \dots, z_n)$ , com  $z_n = 0$ . Isso ocorre, pois  $z_n = y_{n+1}/y_i$ , daí, se  $y_{n+1} = 0$  segue que  $z_n = 0$ .

**Definição 2.1.4** Seja  $Y : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  um campo de vetores, onde  $M \subset \mathbb{R}^m$  é uma variedade. Dizemos que um conjunto  $A \subset M$  é invariante pelo fluxo de  $Y$ , ou invariante por  $Y$ , se dado um fluxo  $\Phi(t)$  de  $Y$  tal que  $\Phi(t_0) \in A$ , então  $\Phi(t) \in A$ ,  $\forall t \in I$ , em que  $I$  é o intervalo maximal de definição de  $\Phi$ .



**Proposição 2.1.2** *O infinito é invariante por  $\tilde{X}$ .*

*Demonstração:* Seja  $\Phi$  um fluxo de  $\tilde{X}$ , com  $\Phi(t_0) \in S^{n-1}$  (aqui, já consideramos  $\Phi$  em coordenadas  $(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ ). Isso significa que  $\Phi$  satisfaz a equação diferencial determinada por  $\tilde{X}$ , o que nos dá, em particular, que (a menos de uma multiplicação por uma função positiva), nas vizinhanças  $U_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,

$$\Phi'_n(t) = -\Phi_n(t)\tilde{P}^i(\Phi_1(t), \dots, \Phi_{i-1}(t), \Phi_i(t), \dots, \Phi_n(t)), \quad \Phi_n(t_0) = 0,$$

que são EDO's de solução  $\Phi_n(t) = 0$ , mostrando que  $\Phi(t) \in S^{n-1}$ ,  $\forall t \in I$ . Nas vizinhanças  $V_i$ , os cálculos são análogos, a menos de uma multiplicação por  $(-1)^{m-1}$ .

■

**Observação:** *Se  $m$  é ímpar, então  $\tilde{X}$  é simétrico em relação à origem de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Isso ocorre pois se  $y \in U_i$ , por exemplo, o simétrico de  $y$  pela origem é  $-y \in V_i$ ; daí,  $z_j = y_j/y_i = (-y_j)/(-y_i)$  são os mesmos para  $y$  ou para  $-y$ . Logo a única coisa que muda na expressão de  $\tilde{X}$  é uma multiplicação por  $(-1)^{m-1}$  (conforme as considerações acima), daí, sendo  $m$  ímpar, ocorre a simetria. Vale observar também que as órbitas (ou fluxos) de  $\tilde{X}$  são simétricas, só mudando a direção conforme  $m$  é ou não par.*

Um resultado bastante interessante que obtivemos é consequência do Teorema 1.1.6 (da “Esfera Cabeluda”):

**Proposição 2.1.3** *Se  $X(p) \neq 0$ ,  $\forall p \in \mathbb{R}^n$ , então existe  $q \in S^{n-1}$  tal que  $\tilde{X}(q) = 0$ .*

*Demonstração:* De fato, temos que  $\tilde{X}(y) \neq 0$ ,  $\forall y \in H^+ \cup H^- = S^n \setminus S^{n-1}$  (do contrário, pela definição,  $X$  anular-se-ia em  $\mathbb{R}^n$ ). Se  $n = 2d$ , o Teorema da “Esfera Cabeluda” garante que  $\tilde{X}$  precisa se anular em algum ponto de  $S^n$ , seguindo que se anula em algum ponto de  $S^{n-1}$ . Se  $n = 2d + 1$ , o mesmo Teorema garante que  $\tilde{X}$  se anula num ponto de  $S^{n-1}$ , pois, agora,  $n - 1 = 2d$  (observemos que, da Proposição 2.1.2,  $\tilde{X}|_{S^{n-1}}$  continua um campo vetorial).

## 2.2 Particularização para um campo vetorial polinomial hamiltoniano

Particularizaremos agora o estudo feito na secção anterior. Tomaremos um campo específico.

Seja  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função polinomial, com  $n = 2d$ . Nesse caso, diremos que  $H$  é um *polinômio hamiltoniano*. Definamos o *campo vetorial polinomial hamiltoniano associado a  $H$*  como

$$X_H = \left( \frac{\partial H}{\partial y_{d+1}}, \dots, \frac{\partial H}{\partial y_{2d}}, -\frac{\partial H}{\partial y_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial y_d} \right). \quad (2.2.1)$$

Como veremos a seguir, a Compactificação de Poincaré de  $X_H$  será dada em termos das derivadas de  $H$ . Antes, vejamos o

**Lema 2.2.1 (Teorema de Euler)** *Se  $F : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  é um polinômio homogêneo de grau  $s$ , então*

$$\sum_{i=1}^k p_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(p) = sF(p), \quad \forall p \in \mathbb{R}^k.$$

*Demonstração:* Da homogeneidade, temos que

$$F(\gamma p_1, \dots, \gamma p_k) = \gamma^s F(p_1, \dots, p_k), \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}.$$

Derivando esta expressão em relação a  $\gamma$ , teremos

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(\gamma p_1, \dots, \gamma p_k) p_1 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_k}(\gamma p_1, \dots, \gamma p_k) p_k = s\gamma^{s-1} F(p).$$

Fazendo  $\gamma = 1$ , segue o lema. ■

**Proposição 2.2.1** *Se  $H(x_1, \dots, x_n)$  é um polinômio hamiltoniano de grau  $m+1$  em  $n = 2d$  variáveis, então:*

(i) *A Compactificação de Poincaré de  $X_H$ ,  $\widetilde{X}_H$ , tem a seguinte expressão*

$$\left( \frac{\partial H^*}{\partial y_{d+1}} + \lambda y_1, \dots, \frac{\partial H^*}{\partial y_{2d}} + \lambda y_d, -\frac{\partial H^*}{\partial y_1} + \lambda y_{d+1}, \dots, -\frac{\partial H^*}{\partial y_d} + \lambda y_{2d}, \lambda y_{n+1} \right),$$

onde

$$H^*(y_1, \dots, y_{n+1}) = y_{n+1}^{m+1} H\left(\frac{y_1}{y_{n+1}}, \dots, \frac{y_n}{y_{n+1}}\right),$$

e

$$\lambda = \sum_{i=1}^d \left( y_{i+d} \frac{\partial H^*}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial H^*}{\partial y_{i+d}} \right).$$

(ii) *O nível de energia  $\{H^* = 0\} \doteq \{y \in S^{n-1} \mid H^*(y) = 0\}$  é invariante por  $\widetilde{X}_H$ .*

*Demonstração:* Pelo que definimos em (2.1.5) e no Lema 2.1.1, bem como da definição de  $H^*$ , temos que

$$\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial y_i}(y_1, \dots, y_{n+1}) = y_{n+1}^m \frac{\partial H}{\partial y_i}\left(\frac{y_1}{y_{n+1}}, \dots, \frac{y_n}{y_{n+1}}\right) = \frac{\partial H^*}{\partial y_i}(y_1, \dots, y_{n+1}), \quad (2.2.2)$$

para  $i = 1, \dots, n$ , notando que o grau máximo dos polinômios  $\partial H / \partial y_i$  é  $m$ . Da definição da Compactificação de Poincaré (equação (2.1.6)), segue que a primeira coordenada de  $\widetilde{X}_H$  é

$$\frac{\partial H^*}{\partial y_{d+1}} - y_1^2 \frac{\partial H^*}{\partial y_{d+1}} - y_1 y_2 \frac{\partial H^*}{\partial y_{d+2}} - \dots - y_1 y_d \frac{\partial H^*}{\partial y_{2d}} + y_1 y_{d+1} \frac{\partial H^*}{\partial y_1} + \dots + y_1 y_{2d} \frac{\partial H^*}{\partial y_d}.$$

Colocando  $y_1$  em evidência e observando a definição de  $\lambda$ , esta expressão torna-se simplesmente

$$\frac{\partial H^*}{\partial y_{d+1}} + \lambda y_1.$$

Fazendo cálculos análogos para as demais coordenadas, segue (i). Para ver (ii), seja  $\Phi$  uma curva integral do campo  $\widetilde{X}_H$ , isto é:

$$\Phi'_i(t) = \left( \widetilde{X}_H \right)_i (\Phi(t)) , \forall t \in I , i = 1, \dots, n+1 ,$$

onde  $I$  é o intervalo maximal de definição de  $\Phi$ . Considerando  $l(t) = H^*(\Phi(t))$ , calculemos:

$$\begin{aligned} l'(t) &= \sum_{i=1}^d \left( \frac{\partial H^*}{\partial y_i} (\Phi(t)) \Phi'_i(t) + \frac{\partial H^*}{\partial y_{i+d}} (\Phi(t)) \Phi'_{i+d}(t) \right) + \frac{\partial H^*}{\partial y_{n+1}} (\Phi(t)) \Phi'_{n+1}(t) = \\ &= \sum_{i=1}^d \left[ \frac{\partial H^*}{\partial y_i} (\Phi(t)) \left( \frac{\partial H^*}{\partial y_{i+d}} (\Phi(t)) + \lambda \Phi_i(t) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial H^*}{\partial y_{i+d}} (\Phi(t)) \left( -\frac{\partial H^*}{\partial y_i} (\Phi(t)) + \lambda \Phi_{i+d}(t) \right) \right] + \frac{\partial H^*}{\partial y_{n+1}} (\Phi(t)) \lambda \Phi_{n+1}(t) = \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n+1} \left( \frac{\partial H^*}{\partial y_i} (\Phi(t)) \Phi_i(t) \right) = \lambda(m+1)H^*(\Phi(t)) = \lambda(m+1)l(t), \end{aligned}$$

onde na última igualdade utilizamos o fato de  $H^*$  ser um polinômio homogêneo de grau  $m+1$  (o que é fácil de perceber observando a definição de  $H^*$ ) e o Lema 2.2.1. Supondo  $\Phi(t_0) \in \{H^* = 0\}$ , isto é,  $H^*(\Phi(t_0)) = 0$ , a seqüência de igualdades acima nos dá a seguinte EDO:

$$\begin{cases} l'(t) = (m+1)\lambda(t)l(t) \\ l(t_0) = 0 \end{cases} ,$$

que tem solução única  $l(t) = 0$ ,  $\forall t \in I$ , seguindo que  $\Phi(t) \in \{H^* = 0\}$ ,  $\forall t \in I$ . ■

Daremos, agora, as expressões de  $\widetilde{X}_H$  nas cartas locais  $(\mathbf{U}_i, \Phi_i)$ 's e  $(\mathbf{V}_i, \Psi_i)$ 's como na secção anterior. Começemos os cálculos pela vizinhança  $\mathbf{U}_1$ . Da expressão do campo  $\widetilde{X}$  em  $\mathbf{U}_1$  (calculada na secção anterior), e lembrando que  $\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial y_i} = \frac{\partial H^*}{\partial y_i}$  (como calculado em (2.2.2)), segue a expressão do campo  $\widetilde{X}_H$  em coordenadas, na carta  $\mathbf{U}_1$ :

$$\begin{aligned} &\left( -z_1 \frac{\partial H^*}{\partial y_{d+1}} + \frac{\partial H^*}{\partial y_{d+2}}, \dots, -z_{d-1} \frac{\partial H^*}{\partial y_{d+1}} + \frac{\partial H^*}{\partial y_{2d}}, -z_d \frac{\partial H^*}{\partial y_{d+1}} - \frac{\partial H^*}{\partial y_1}, \dots, \right. \\ &\quad \left. -z_{2d-1} \frac{\partial H^*}{\partial y_{d+1}} - \frac{\partial H^*}{\partial y_d}, -z_{2d} \frac{\partial H^*}{\partial y_{d+1}} \right) \Big|_{(1, z_1, \dots, z_n)} . \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Notemos que

$$H^* \left( 1, \frac{y_2}{y_1}, \dots, \frac{y_{n+1}}{y_1} \right) = \left( \frac{y_{n+1}}{y_1} \right)^{m+1} H \left( \frac{y_1}{y_{n+1}}, \dots, \frac{y_n}{y_{n+1}} \right) = \frac{1}{y_1^{m+1}} H^*(y_1, \dots, y_{n+1}).$$

Daí, colocando

$$\Gamma(z_1, \dots, z_n) \doteq H^*(1, z_1, \dots, z_n), \quad (2.2.4)$$

e lembrando que  $z_i = y_{i+1}/y_1$ , teremos

$$H^*(y_1, \dots, y_{n+1}) = y_1^{m+1} \Gamma(z_1, \dots, z_n),$$

o que, derivando em relação a  $y_1$ , nos dá

$$\frac{\partial H^*}{\partial y_1}(y_1, \dots, y_{n+1}) = (m+1)y_1^m \Gamma(z_1, \dots, z_n) + y_1^{m+1} \sum_{i=1}^n \frac{-y_{i+1}}{y_1^2} \frac{\partial \Gamma}{\partial z_i}(z_1, \dots, z_n),$$

e, derivando em relação a  $y_i$ , nos garante

$$\frac{\partial H^*}{\partial y_i}(y_1, \dots, y_{n+1}) = y_1^m \frac{\partial \Gamma}{\partial z_{i-1}}(z_1, \dots, z_n), \quad i = 2, \dots, n.$$

Substituindo as duas últimas expressões em (2.2.3), segue a expressão do campo  $\widetilde{X}_H$  em  $\mathcal{U}_1$ , nas coordenadas  $(z_1, \dots, z_n)$ :

$$\left( -z_1 \frac{\partial \Gamma}{\partial z_d} + \frac{\partial \Gamma}{\partial z_{d+1}}, \dots, -z_{d-1} \frac{\partial \Gamma}{\partial z_d} + \frac{\partial \Gamma}{\partial z_{2d-1}}, -(m+1)\Gamma + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq d}}^n z_i \frac{\partial \Gamma}{\partial z_i}, \right. \\ \left. -z_{d+1} \frac{\partial \Gamma}{\partial z_d} - \frac{\partial \Gamma}{\partial z_1}, \dots, -z_{2d-1} \frac{\partial \Gamma}{\partial z_d} - \frac{\partial \Gamma}{\partial z_{d-1}}, -z_{2d} \frac{\partial \Gamma}{\partial z_d} \right).$$

Em  $\mathcal{U}_2$ , consideremos a função  $H^*$ :

$$H^* \left( \frac{y_1}{y_2}, 1, \frac{y_3}{y_2}, \dots, \frac{y_{n+1}}{y_2} \right) = \frac{1}{y_2^{m+1}} H^*(y_1, \dots, y_{n+1}),$$

o que, definindo

$$\Gamma(z_1, \dots, z_n) \doteq H^*(z_1, 1, \dots, z_n), \quad (2.2.5)$$

nos dá (com cálculos análogos aos que fizemos no caso de  $\mathcal{U}_1$ )

$$H^*(y_1, \dots, y_{n+1}) = y_2^{m+1} \Gamma(z_1, \dots, z_n).$$

(Utilizamos a mesma notação  $\Gamma$  em  $\mathcal{U}_2$ , embora tenha definição diferente de  $\Gamma$  usado antes). Fazendo as contas como antes, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial H^*}{\partial y_1} &= y_2^m \frac{\partial \Gamma}{\partial z_1}, \\ \frac{\partial H^*}{\partial y_2} &= (m+1)y_2^m \Gamma - y_2^{m+1} \left( \frac{\partial \Gamma}{\partial z_1} \frac{y_1}{y_2^2} + \frac{\partial \Gamma}{\partial z_2} \frac{y_3}{y_2^2} + \dots + \frac{\partial \Gamma}{\partial z_n} \frac{y_{n+1}}{y_2^2} \right) \\ \frac{\partial H^*}{\partial y_i} &= y_2^m \frac{\partial \Gamma}{\partial z_{i-1}}, \quad i = 3, \dots, n+1, \end{aligned}$$

o que, substituindo na expressão de  $\tilde{X}$  calculada na secção anterior (lembrando de (2.2.2) que  $\frac{\partial \tilde{H}}{\partial y_i} = \frac{\partial H^*}{\partial y_i}$ ), nos leva a

$$\left( -z_1 \frac{\partial \Gamma}{\partial z_{d+1}} + \frac{\partial \Gamma}{\partial z_d}, -z_2 \frac{\partial \Gamma}{\partial z_{d+1}} + \frac{\partial \Gamma}{\partial z_{d+2}}, \dots, -z_{d-1} \frac{\partial \Gamma}{\partial z_{d+1}} + \frac{\partial \Gamma}{\partial z_{2d-1}}, -z_d \frac{\partial \Gamma}{\partial z_{d+1}} - \frac{\partial \Gamma}{\partial z_1}, -(\mathfrak{m} + 1)\Gamma + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq d+1}}^n z_i \frac{\partial \Gamma}{\partial z_i}, \dots, -z_{2d-1} \frac{\partial \Gamma}{\partial z_{d+1}} - \frac{\partial \Gamma}{\partial z_{d-1}}, -z_{2d} \frac{\partial \Gamma}{\partial z_{d+1}} \right).$$

Em  $\mathcal{U}_3, \mathcal{U}_4, \dots, \mathcal{U}_{d-1}$  temos expressões equivalentes, lembrando que sempre definiremos

$$\Gamma(z_1, \dots, z_n) = H^*(z_1, \dots, z_{i-1}, 1, z_{i+1}, \dots, z_n). \quad (2.2.6)$$

Em  $\mathcal{U}_d$ , a expressão fica:

$$\left( -z_1 \frac{\partial \Gamma}{\partial z_{2d-1}} + \frac{\partial \Gamma}{\partial z_d}, -z_2 \frac{\partial \Gamma}{\partial z_{2d-1}} + \frac{\partial \Gamma}{\partial z_{d+1}}, \dots, -z_{d-1} \frac{\partial \Gamma}{\partial z_{2d-1}} + \frac{\partial \Gamma}{\partial z_{2d-2}}, -z_d \frac{\partial \Gamma}{\partial z_{2d-1}} - \frac{\partial \Gamma}{\partial z_1}, -z_{d+1} \frac{\partial \Gamma}{\partial z_{2d-1}} - \frac{\partial \Gamma}{\partial z_2}, \dots, -(\mathfrak{m} + 1)\Gamma + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 2d-1}}^n z_i \frac{\partial \Gamma}{\partial z_i}, -z_{2d} \frac{\partial \Gamma}{\partial z_{2d-1}} \right).$$

Em  $\mathcal{U}_{d+1}$ , a expressão muda um pouco de característica (mas os cálculos seguem a mesma idéia de antes):

$$\left( (\mathfrak{m} + 1)\Gamma - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 1}}^n z_i \frac{\partial \Gamma}{\partial z_i}, z_2 \frac{\partial \Gamma}{\partial z_1} + \frac{\partial \Gamma}{\partial z_{d+1}}, \dots, z_d \frac{\partial \Gamma}{\partial z_1} + \frac{\partial \Gamma}{\partial z_{2d-1}}, z_{d+1} \frac{\partial \Gamma}{\partial z_1} - \frac{\partial \Gamma}{\partial z_2}, z_{d+2} \frac{\partial \Gamma}{\partial z_1} - \frac{\partial \Gamma}{\partial z_3}, \dots, z_{2d-1} \frac{\partial \Gamma}{\partial z_1} - \frac{\partial \Gamma}{\partial z_d}, z_{2d} \frac{\partial \Gamma}{\partial z_1} \right).$$

Em  $\mathcal{U}_{d+2}, \dots, \mathcal{U}_{2d-1}$  as expressões seguem a mesma idéia.

Em  $\mathcal{U}_{2d}$ , temos:

$$\left( z_1 \frac{\partial \Gamma}{\partial z_d} + \frac{\partial \Gamma}{\partial z_{d+1}}, z_2 \frac{\partial \Gamma}{\partial z_d} + \frac{\partial \Gamma}{\partial z_{d+2}}, \dots, z_{d-1} \frac{\partial \Gamma}{\partial z_d} + \frac{\partial \Gamma}{\partial z_{d-1}}, (\mathfrak{m} + 1)\Gamma - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq d}}^n z_i \frac{\partial \Gamma}{\partial z_i}, z_{d+1} \frac{\partial \Gamma}{\partial z_d} - \frac{\partial \Gamma}{\partial z_1}, \dots, z_{2d-1} \frac{\partial \Gamma}{\partial z_d} - \frac{\partial \Gamma}{\partial z_{d-1}}, z_{2d} \frac{\partial \Gamma}{\partial z_d} \right).$$

Por fim, em  $\mathcal{U}_{2d+1}$ , ficamos com

$$\left( \frac{\partial \Gamma}{\partial z_{d+1}}, \dots, \frac{\partial \Gamma}{\partial z_{2d}}, -\frac{\partial \Gamma}{\partial z_1}, \dots, -\frac{\partial \Gamma}{\partial z_d} \right),$$

notemos que, aqui,  $\Gamma = H$ .

## 2.3 O fluxo no infinito

Estudaremos agora como os níveis de energia  $E_h \doteq H^{-1}(h)$  se comportam quando levados na esfera, e tiraremos alguns resultados de invariância pelo campo  $\widetilde{X}_H$ , principalmente quando restrito a  $S^{n-1}$ . É em  $S^{n-1}$  que um conjunto invariante especial é definido. Vamos mostrar que tal conjunto é uma variedade, sob certas condições, e que todos os pontos singulares infinitos de  $\widetilde{X}_H$  estão neste conjunto.

**Teorema 2.3.1** *Seja  $H : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}$  um polinômio hamiltoniano de grau  $m + 1$  escrito em sua decomposição homogênea  $H = H_0 + H_1 + \dots + H_{m+1}$ . Vale o seguinte:*

(i) *Consideremos  $E_0 = H^{-1}(0)$ . Então os conjuntos*

$$\begin{aligned} E_0^+ &\doteq \Phi^+(E_0) \subset \text{hemisfério norte}, \\ E_0^- &\doteq \Phi^-(E_0) \subset \text{hemisfério sul} \end{aligned}$$

*são invariantes pelo fluxo de  $\widetilde{X}_H$ ;*

(ii) *A restrição de  $\widetilde{X}_H$  a  $S^{n-1}$ ,  $\widetilde{X}_H|_{S^{n-1}}$ , é dada por*

$$\left( \frac{\partial H_{m+1}}{\partial y_{d+1}} + \lambda y_1, \dots, \frac{\partial H_{m+1}}{\partial y_{2d}} + \lambda y_d, -\frac{\partial H_{m+1}}{\partial y_1} + \lambda y_{d+1}, \dots, -\frac{\partial H_{m+1}}{\partial y_d} + \lambda y_{2d} \right),$$

*onde*

$$\lambda = \sum_{i=1}^d \left( y_{i+d} \frac{\partial H_{m+1}}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial H_{m+1}}{\partial y_{i+d}} \right).$$

*Aqui, consideramos  $y \in S^{n-1} \iff y = (y_1, \dots, y_n)$ . Notemos ainda que a última coordenada de  $\widetilde{X}_H|_{S^{n-1}}$ , que é zero (como podemos ver em (2.1.6)), foi retirada.*

(iii) *O conjunto*

$$\begin{aligned} E^\infty &= \{y \in S^{n-1} \mid H_{m+1}(y_1, \dots, y_n) = 0\} = \\ &= \{y \in S^{n-1} \mid H^*(y_1, \dots, y_n, 0) = 0\} \end{aligned}$$

*é invariante pelo fluxo de  $\widetilde{X}_H$ .*

(iv) *As fronteiras<sup>1</sup> de  $E_0^+$  e  $E_0^-$  estão contidas em  $E^\infty$ .*

(v) *Se 0 é valor regular de  $H_{m+1}|_{S^{n-1}}$ , então  $E^\infty$  é uma  $(n - 2)$ -variedade.*

(vi) *Os pontos singulares de  $\widetilde{X}_H|_{S^{n-1}}$  estão em  $E^\infty$ .*

<sup>1</sup>Aqui é o conceito de fronteira de variedades, como na Definição 1.1.9.

*Demonstração de (i):* Seja  $\gamma$  uma curva integral de  $\widetilde{X}_H$  tal que  $\gamma(\mathbf{t}_0) \in E_0^+$ . Mostremos que  $\gamma(\mathbf{t}) \in E_0^+, \forall \mathbf{t}$ . Consideremos a função real  $s(\mathbf{t}) = H((\Phi^+)^{-1}(\gamma(\mathbf{t})))$  e sua derivada:

$$\begin{aligned} s'(\mathbf{t}) &= dH_{(\Phi^+)^{-1}(\gamma(\mathbf{t}))} \cdot d(\Phi^+)_{\gamma(\mathbf{t})}^{-1} \cdot \gamma'(\mathbf{t}) = dH_{(\Phi^+)^{-1}(\gamma(\mathbf{t}))} \cdot d(\Phi^+)_{\gamma(\mathbf{t})}^{-1} \cdot \widetilde{X}_H(\gamma(\mathbf{t})) = \\ &= dH_{(\Phi^+)^{-1}(\gamma(\mathbf{t}))} \cdot d(\Phi^+)_{\gamma(\mathbf{t})}^{-1} \cdot \left[ \gamma_{n+1}^m(\mathbf{t}) d\Phi_{(\Phi^+)^{-1}(\gamma(\mathbf{t}))}^+ \cdot X_H((\Phi^+)^{-1}(\gamma(\mathbf{t}))) \right] = \\ &= \gamma_{n+1}^m(\mathbf{t}) dH_{(\Phi^+)^{-1}(\gamma(\mathbf{t}))} \cdot X_H((\Phi^+)^{-1}(\gamma(\mathbf{t}))) = 0, \end{aligned}$$

onde na terceira igualdade utilizamos a definição de  $\widetilde{X}_H$  (conforme (2.1.2') e (2.1.4)) e, na última, a definição de  $X_H$  (conforme (2.2.1)). Daí, desde que  $s(\mathbf{t}_0) = 0$ , segue que  $s(\mathbf{t}) = 0, \forall \mathbf{t}$ , o que significa que  $\gamma(\mathbf{t}) \in E_0^+, \forall \mathbf{t}$ . Um raciocínio análogo mostra a invariância de  $E_0^-$ .

*Demonstração de (ii):* Da definição de  $H^*$  (conforme (i) da Proposição 2.2.1), temos que

$$H^*(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n, 0) = H_{m+1}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n), \quad (2.3.1)$$

daí, segue que

$$\frac{\partial H^*}{\partial \mathbf{y}_i}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n, 0) = \frac{\partial H_{m+1}}{\partial \mathbf{y}_i}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n), \quad i = 1, \dots, n.$$

Substituindo em (i) da Proposição 2.2.1, segue o resultado desejado.

*Demonstração de (iii):* Notemos que de (2.3.1) a igualdade de conjuntos ocorre. Como já sabemos da Proposição 2.1.2 que  $S^{n-1}$  é invariante por  $\widetilde{X}_H$ , e de (ii) da proposição 2.2.1 que  $\{H^* = 0\}$  também é invariante por  $\widetilde{X}_H$ , segue o resultado.

*Demonstração de (iv):* Seja  $\mathbf{y} \in E_0^+$ . Então

$$\mathbf{y} = \Phi^+(\mathbf{x}) = \left( \frac{x_1}{\Delta(\mathbf{x})}, \dots, \frac{x_n}{\Delta(\mathbf{x})}, \frac{1}{\Delta(\mathbf{x})} \right),$$

com  $H(\mathbf{x}) = 0$ . Aplicando  $H^*$ , temos que

$$H^*(\mathbf{y}) = \left( \frac{1}{\Delta(\mathbf{x})} \right)^{m+1} H(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Como  $H^*$  é uma função contínua em  $S^n$ , o raciocínio acima mostra que fazer  $\mathbf{y}$  tender a um ponto  $\mathbf{z} \in \partial E_0^+$  por pontos de  $E_0^+$ , faz com que  $H^*(\mathbf{z}) = 0$ . Daí,  $H^*(\partial E_0^+) = 0$ . Desde que  $\partial E_0^+ \subset S^{n-1}$ , isso mostra que  $\partial E_0^+ \subset E^\infty$  (por (iii)). Analogamente se mostra que  $\partial E_0^- \subset E^\infty$ .

*Demonstração de (v):* De (iii), é claro que

$$E^\infty = (H_{m+1}|_{S^{n-1}})^{-1}\{0\}.$$

Então, como  $H_{m+1}|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave e 0 é um seu valor regular, a Proposição 1.1.5 garante que  $E^\infty$  é uma variedade de dimensão  $(n-1) - 1 = n-2$ .

*Demonstração de (vi):* De acordo com (ii), os pontos singulares infinitos satisfazem

$$\frac{\partial H_{m+1}}{\partial \mathbf{y}_{d+i}}(\mathbf{y}) + \lambda \mathbf{y}_i = 0 = \frac{\partial H_{m+1}}{\partial \mathbf{y}_i}(\mathbf{y}) - \lambda \mathbf{y}_{d+i}, \quad i = 1, \dots, d.$$

Multiplicando a equação do lado esquerdo por  $\mathbf{y}_{i+d}$  e a do lado direito por  $\mathbf{y}_i$ , para cada  $i$ , e somando, ficamos com

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i \frac{\partial H_{m+1}}{\partial \mathbf{y}_i} = 0.$$

Como  $H_{m+1}$  é homogêneo, o Lema 2.2.1 e a última equação garantem que  $(m+1)H_{m+1}(\mathbf{y}) = 0$ . Seguindo, da definição de  $E^\infty$ , que todo ponto singular infinito está em  $E^\infty$ .

■

**Corolário 2.3.2** *Dado  $H : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}$  polinomial, escrito em sua decomposição homogênea  $H = H_0 + H_1 + \dots + H_{m+1}$ , vale o seguinte:*

(i) *Se  $E_{\mathbf{h}} \doteq H^{-1}(\mathbf{h})$ , para  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}$ , então*

$$E_{\mathbf{h}}^+ \doteq \Phi^+(E_{\mathbf{h}}) \quad e \quad E_{\mathbf{h}}^- \doteq \Phi^-(E_{\mathbf{h}})$$

*são invariantes por  $\widetilde{X}_H$ .*

(ii) *As fronteiras de  $E_{\mathbf{h}}^+$  e  $E_{\mathbf{h}}^-$  estão contidas em  $E^\infty$*

*Demonstração:* Escrevendo  $H' = -\mathbf{h} + H_0 + H_1 + \dots + H_{m+1}$ , temos que

$$(H')^{-1}(0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid H'(\mathbf{x}) = 0\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid H(\mathbf{x}) = \mathbf{h}\} = E_{\mathbf{h}}.$$

Daí, repetimos a demonstração de (i) do Teorema anterior para  $H'$ , observando que o resultado não depende de  $\mathbf{h}$ . Isso mostra (i). Para (ii), basta olhar a demonstração de (iv) do Teorema anterior e observar que  $(H')^*|_{S^{n-1}} = H^*|_{S^{n-1}}$ . ■

**Corolário 2.3.3** *Se  $H = \mathbf{h} + H_1 + \dots + H_{m+1}$ , o nível de energia  $\{H^* = 0\}$  intercepta o equador de  $S^n$  no mesmo conjunto  $E^\infty$  para qualquer valor de  $\mathbf{h}$*

*Demonstração:* Trivial, uma vez que o conjunto  $E^\infty$  só depende de  $H_{m+1}$ , como podemos ver em (iii) do Teorema anterior. ■

## 2.4 Propriedades genéricas

**Definição 2.4.1** *Seja  $P$  uma propriedade sobre elementos de um conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $P$  é genérica, ou  $P$  vale genericamente, se o conjunto*

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid P(\mathbf{x}) \text{ é verdadeira} \}$$

*é denso em  $A$ .*



**Exemplo:** Seja  $Q$  uma propriedade em  $\mathbb{R}^n$  que vale q.t.p.. Então  $Q$  é genérica. Isso é claro, pois o conjunto dos pontos onde  $Q$  vale tem complementar de medida nula, logo é denso.

Mostraremos nesta Secção que, *genericamente*, o conjunto  $E^\infty$  (definido em (iii) do Teorema 2.3.1) é uma variedade de dimensão  $n - 2$  e que todos os pontos singulares (finitos ou infinitos) de  $\widetilde{X}_H$  são hiperbólicos. *Genericamente*, aqui, será em relação à seguinte identificação:

Seja  $\mathcal{H}^{m+1}$  = “conjunto dos polinômios hamiltonianos de grau exatamente  $m + 1$  nas variáveis  $(y_1, \dots, y_n)$ ”. Identifiquemos  $\mathcal{H}^{m+1}$  com um conjunto aberto de  $\mathbb{R}^N$ , onde  $N$  é o número máximo de coeficientes dos polinômios de  $\mathcal{H}^{m+1}$ . Mais precisamente, seja  $\Phi : \mathcal{H}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^N$  uma função que associa cada polinômio de  $\mathcal{H}^{m+1}$  com seu vetor de coeficientes numa pré-determinada ordem. Assim, cada polinômio  $H$  será identificado com seu vetor de coeficientes  $\Phi(H) \in \mathbb{R}^N$ .

**Observação 1:** Não podemos identificar todo  $\mathbb{R}^N$ , uma vez que pelo menos um dos coeficientes dos termos de grau  $m + 1$  precisa ser não nulo.

**Observação 2:**  $\Phi(\mathcal{H}^{m+1})$  é aberto. De fato, se na parte homogênea de grau  $m + 1$  tivermos  $k$  termos, então

$$\Phi(\mathcal{H}^{m+1}) = \bigcup_{i=1}^k \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{N-k} \times \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}}_i \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} ,$$

que é um aberto por ser união de abertos.

Coloquemos em  $\mathcal{H}^{m+1}$  a topologia fraca induzida por  $\Phi$ , isto é, os abertos de  $\mathcal{H}^{m+1}$  são

$$\{ \Phi^{-1}(A) \mid A \text{ é aberto de } \Phi(\mathcal{H}^{m+1}) \subset \mathbb{R}^N \} .$$

Provaremos que a propriedade “ $H \in \mathcal{H}^{m+1}$  tal que  $E^\infty$  é uma  $(n - 2)$ -variedade” vale *genericamente* em  $\mathcal{H}^{m+1}$ , identificando  $\mathcal{H}^{m+1}$  com  $\Phi(\mathcal{H}^{m+1}) \subset \mathbb{R}^N$  e usando a Definição 2.4.1 neste conjunto.

O teorema seguinte mostrará mais, mostrará que o conjunto

$$\mathcal{G}^{m+1} = \{ H \in \mathcal{H}^{m+1} \mid E^\infty \text{ é uma variedade suave} \}$$

é tal que  $\Phi(\mathcal{H}^{m+1} \setminus \mathcal{G}^{m+1}) \subset \mathcal{R}^{-1}(0)$ , onde  $\mathcal{R} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função polinomial não nula. Como conseqüência, desde que  $\mathbb{R}^N \setminus \mathcal{R}^{-1}(0)$  é denso em  $\mathbb{R}^N$ , seguirá que  $\Phi(\mathcal{H}^{m+1}) \setminus \mathcal{R}^{-1}\{0\}$  será denso em  $\Phi(\mathcal{H}^{m+1})$ , donde  $\Phi(\mathcal{G}^{m+1})$  será denso em  $\Phi(\mathcal{H}^{m+1})$ . Mostrando assim que  $E^\infty$  é uma variedade genericamente.

Antes do teorema, vamos introduzir o conceito de *resultante* entre dois polinômios, que nos será útil. Sejam  $P(x)$  e  $Q(x)$  dois polinômios na variável  $x$  e coeficientes em  $\mathbb{R}$ . A resultante entre  $P$  e  $Q$ ,  $\text{Res}_x(P, Q)$ , será um número (obtido como função polinomial dos coeficientes de  $P$  e  $Q$ ), tal que se  $P$  e  $Q$  tiverem uma raiz em comum, então  $\text{Res}_x(P, Q) = 0$ . Precisamente, se

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \\ Q(x) &= b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m , \end{aligned}$$



*Demonstração:* Se  $H \notin \mathcal{G}^{m+1}$ , então de (v) do Teorema 2.3.1, segue que 0 não é valor regular de  $H_{m+1}|_{S^{n-1}}$ . Daí, da Definição 1.1.7, segue que existe um ponto crítico de  $H_{m+1}|_{S^{n-1}}$ ,  $(\mathbf{y}_1^*, \dots, \mathbf{y}_n^*)$  em  $S^{n-1}$  (notemos que, novamente, estamos olhando  $\mathbf{y} \in S^{n-1} \subset S^n$  sem a sua última coordenada — que é zero —). Do *Teorema dos Multiplicadores de Lagrange*<sup>2</sup>, temos que existe  $\mu \in \mathbb{R}$  tal que

$$\frac{\partial H_{m+1}}{\partial \mathbf{y}_i}(\mathbf{y}_1^*, \dots, \mathbf{y}_n^*) + \mu \mathbf{y}_i^* = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.4.1)$$

(uma vez que estamos olhando um ponto crítico da função  $H_{m+1}$  na esfera  $S^{n-1}$ , que é obtida como no exemplo do final da Subsecção 1.1.2). Multiplicando a  $i$ -ésima equação por  $\mathbf{y}_i^*$ , para cada  $i$ , e somando, teremos

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i^* \frac{\partial H_{m+1}}{\partial \mathbf{y}_i} + \mu \sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i^*)^2 = 0. \quad (2.4.2)$$

Como  $H_{m+1}$  é homogêneo de grau  $m+1$ , o Lema 2.2.1 garante que

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i^* \frac{\partial H_{m+1}}{\partial \mathbf{y}_i}(\mathbf{y}_1^*, \dots, \mathbf{y}_n^*) = (m+1)H_{m+1}(\mathbf{y}_1^*, \dots, \mathbf{y}_n^*),$$

e daí, como  $(\mathbf{y}_1^*, \dots, \mathbf{y}_n^*) \in S^{n-1} \cap H_{m+1}^{-1}(0)$ , segue de (2.4.2) que  $\mu = 0$ . Dessa forma, (2.4.1) nos dá que o sistema polinomial

$$\begin{cases} \frac{\partial H_{m+1}}{\partial \mathbf{y}_1}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial H_{m+1}}{\partial \mathbf{y}_n}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) = 0 \end{cases} \quad (2.4.3)$$

tem uma solução não nula  $(\mathbf{y}_1^*, \dots, \mathbf{y}_n^*) \in S^{n-1}$ . Tomando  $L_k \doteq \partial H_{m+1} / \partial \mathbf{y}_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , definamos

$$R_k(\mathbf{y}_3, \dots, \mathbf{y}_n) \doteq \text{Res}_{\mathbf{y}_2}(L_1(1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \dots, \mathbf{y}_n), L_k(1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \dots, \mathbf{y}_n)) \\ k = 2, 3, \dots, n, \quad (2.4.4)$$

onde  $\text{Res}_{\mathbf{y}_2}(L_1(1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \dots, \mathbf{y}_n), L_k(1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \dots, \mathbf{y}_n)) = \text{Res}_{\mathbf{y}_2}(P(\mathbf{y}_2), Q(\mathbf{y}_2))$ , com

$$P(\mathbf{y}_2) = L_1(1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n) \quad \text{e} \\ Q(\mathbf{y}_2) = L_k(1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n).$$

---

<sup>2</sup>Ver página 171 de [6]

Mais ainda, definamos indutivamente

$$\begin{aligned}
R_{2k}(\mathbf{y}_4, \dots, \mathbf{y}_n) &\doteq \text{Res}_{\mathbf{y}_3} (R_2(\mathbf{y}_3, \dots, \mathbf{y}_n), R_k(\mathbf{y}_3, \dots, \mathbf{y}_n)) \\
&\quad k = 3, 4, \dots, n, \\
R_{23k}(\mathbf{y}_5, \dots, \mathbf{y}_n) &\doteq \text{Res}_{\mathbf{y}_4} (R_{23}(\mathbf{y}_4, \dots, \mathbf{y}_n), R_{2k}(\mathbf{y}_4, \dots, \mathbf{y}_n)) \\
&\quad k = 4, 5, \dots, n, \\
R_{234k}(\mathbf{y}_6, \dots, \mathbf{y}_n) &\doteq \text{Res}_{\mathbf{y}_5} (R_{234}(\mathbf{y}_5, \dots, \mathbf{y}_n), R_{23k}(\mathbf{y}_5, \dots, \mathbf{y}_n)) \\
&\quad k = 5, \dots, n, \\
&\quad \vdots \\
R_{23\dots n} &\doteq \text{Res}_{\mathbf{y}_n} (R_{23\dots(n-2)(n-1)}(\mathbf{y}_n), R_{23\dots(n-2)n}(\mathbf{y}_n)).
\end{aligned}$$

Notemos que no último passo,  $R_{23\dots n}$  é um número (na verdade, é uma função polinomial nos coeficientes do polinômio  $H$ , pois, por construção,  $R_k(\mathbf{y}_3, \dots, \mathbf{y}_n)$  é um polinômio em  $\mathbf{y}_3, \dots, \mathbf{y}_n$  e nos coeficientes dos polinômios  $\partial H_{m+1}/\partial \mathbf{y}_1$  e  $\partial H_{m+1}/\partial \mathbf{y}_k$ , que têm coeficientes como múltiplos dos coeficientes de  $H_{m+1}$ . Daí, pode ser considerado como polinomial em  $\mathbf{y}_3, \dots, \mathbf{y}_n$  e nos coeficientes do polinômio  $H$ . Indutivamente, chegamos que  $R_{23\dots n}$  é polinomial nos coeficientes de  $H$ ). *Afirmamos que se a solução  $(\mathbf{y}_1^*, \dots, \mathbf{y}_n^*)$  do sistema (2.4.3) for tal que  $\mathbf{y}_1^* \neq 0$ , então  $R_{23\dots n} = 0$ .* De fato, se  $\mathbf{y}_1^* \neq 0$ , tomando  $\bar{\mathbf{y}}_k = \mathbf{y}_k^*/\mathbf{y}_1^*$ ,  $k = 2, \dots, n$ , os polinômios

$$\xi \longmapsto L_i(1, \xi, \bar{\mathbf{y}}_3, \dots, \bar{\mathbf{y}}_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

têm  $\bar{\xi} = \bar{\mathbf{y}}_2$  como raiz comum, pois da homogeneidade de  $L_i$  (que vem do Lema 2.4.1), segue que

$$L_i(1, \bar{\mathbf{y}}_2, \dots, \bar{\mathbf{y}}_n) = L_i\left(\frac{1}{\mathbf{y}_1^*}(\mathbf{y}_1^*, \mathbf{y}_2^*, \dots, \mathbf{y}_n^*)\right) = \left(\frac{1}{\mathbf{y}_1^*}\right)^m L_i(\mathbf{y}_1^*, \dots, \mathbf{y}_n^*) = 0.$$

Então, da propriedade chave de resultante (conforme a observação antes do teorema), segue que  $R_k(\bar{\mathbf{y}}_3, \dots, \bar{\mathbf{y}}_n) = 0$ , para  $k = 2, \dots, n$ . Daí,  $R_k(\xi, \bar{\mathbf{y}}_4, \dots, \bar{\mathbf{y}}_n)$ ,  $k = 2, \dots, n$  têm a raiz  $\xi = \bar{\mathbf{y}}_3$  em comum, seguindo que  $R_{2k}(\bar{\mathbf{y}}_4, \dots, \bar{\mathbf{y}}_n) = 0$ . Repetindo tal argumento indutivamente, chegamos que  $R_{23\dots n} = 0$ . Definamos

$$\mathcal{R}_1 \doteq R_{23\dots n},$$

que é uma função polinomial nos coeficientes de  $H$ , não identicamente nula (pela observação 2 após a Definição 2.4.2), com a propriedade de que se  $H \notin \mathcal{G}^{m+1}$  e o ponto crítico  $(\mathbf{y}_1^*, \dots, \mathbf{y}_n^*)$  tiver a primeira coordenada não nula, então  $\mathcal{R}_1(\Phi(H)) = 0$ . Mas nem sempre teremos  $\mathbf{y}_1^* \neq 0$ , a única garantia é que existe  $j$  tal que  $\mathbf{y}_j^* \neq 0$  (pois  $\mathbf{y}^* \in \mathbf{S}^{n-1}$ ). Neste caso, basta definir  $\mathcal{R}_j$  de maneira análoga à  $\mathcal{R}_1$ , onde em (2.4.4) devemos trocar  $L_k(1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n)$  por

$$L_k(\underbrace{\mathbf{y}_1, \dots, 1}_j, \dots, \mathbf{y}_n).$$

Por fim, basta definir

$$\mathcal{R} \doteq \prod_{i=1}^n \mathcal{R}_i,$$

que é uma função polinomial não identicamente nula nos coeficientes dos polinômios de  $\mathcal{H}^{m+1}$ , com a propriedade de que se  $H \notin \mathcal{G}^{m+1}$ ,  $\mathcal{R}(\Phi(H)) = 0$ . ■

**Definição 2.4.3** *Seja  $Y : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo de vetores, onde  $M \subset \mathbb{R}^n$  é uma  $m$ -variedade. Dizemos que um ponto singular  $\mathbf{y}$  de  $Y$  é hiperbólico se todos os autovalores de  $dY_{\mathbf{y}}$  têm parte real não nula (com  $Y$  escrito em um sistema de coordenadas).*

*Mais ainda, dizemos que  $\mathbf{y}$  é um nó se tais autovalores têm parte real de mesmo sinal: nó estável se o sinal for positivo e nó instável se o sinal for negativo.*

**Observação:** *Observemos que essa definição não depende do sistema de coordenadas.*

No mesmo sentido de antes, mostraremos agora que, genericamente em  $\mathcal{H}^{m+1}$ , todos os pontos singulares (tanto finitos como infinitos) de  $\widetilde{X}_H$  são hiperbólicos. Isso será consequência do próximo teorema. Antes, vejamos o

**Lema 2.4.2** *Dado um polinômio real  $q(x)$ , definamos os polinômios reais  $q_1(x)$  e  $q_2(x)$  por  $q(ix) = q_1(x) + iq_2(x)$ . Então os coeficientes de  $q_j(x)$ ,  $j = 1, 2$ , são funções polinomiais dos coeficientes de  $q(x)$ , e, se  $q(x)$  tem uma raiz puramente imaginária  $ib$ , então  $\text{Res}_x(q_1, q_2) = 0$ .*

*Demonstração:* Que  $q_1$  e  $q_2$  estão bem definidos e que seus coeficientes são funções polinomiais dos coeficientes de  $q$  pode ser visto trivialmente decompondo o número complexo  $q(ix)$  em suas partes real e imaginária. Se  $q(ib) = 0$ , então  $q_1(b) + iq_2(b) = 0 \iff q_1(b) = q_2(b) = 0$ , isto é,  $b$  é raiz comum entre  $q_1$  e  $q_2$ , seguindo da nossa propriedade chave de resultante que  $\text{Res}_x(q_1, q_2) = 0$ . ■

Seja

$$\mathcal{J}^{m+1} = \left\{ H \in \mathcal{H}^{m+1} \mid \text{ todos os pontos singulares de } \widetilde{X}_H \text{ são hiperbólicos} \right\}.$$

**Teorema 2.4.2** *Existe  $\widetilde{\mathcal{R}} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , uma função polinomial não identicamente nula, tal que, se  $H \in \mathcal{H}^{m+1} \setminus \mathcal{J}^{m+1}$ , então  $\widetilde{\mathcal{R}}(\Phi(H)) = 0$ .*

*Demonstração:* Consideremos as equações que definem os pontos singulares de  $\widetilde{X}_H$  na carta local  $(U_1, \Phi_1)$ , com as coordenadas  $(z_1, \dots, z_n)$  (conforme a Secção 2.1):

$$Z_i(z_1, \dots, z_n) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

e seja  $q(t)$  o polinômio característico de  $dZ_z$  (dependendo de  $z = (z_1, \dots, z_n)$ ). O Lema 2.4.2 nos dá  $q_1$  e  $q_2$  polinômios reais definidos em função de  $q$ . Consideremos,

então, o novo sistema de equações, que tem coeficientes que são funções polinomiais dos coeficientes de  $H$ :

$$\begin{cases} Z_1(z_1, \dots, z_n) = 0 \\ \vdots \\ Z_n(z_1, \dots, z_n) = 0 \\ q_1(z_1, \dots, z_n, t) = 0 \\ q_2(z_1, \dots, z_n, t) = 0 \end{cases} \quad (2.4.5)$$

Se  $H \notin \mathcal{J}^{m+1}$ , então existe um ponto singular de  $\widetilde{X}_H$ ,  $z^* = (z_1^*, \dots, z_n^*)$ , que não é hiperbólico. Se  $z^* \in \mathbf{U}_1$ , isto significa que existe um autovalor  $\lambda$  de  $dZ_z$  que é da forma  $\lambda = ib$ . Do Lema 2.4.2 então segue que  $(z_1^*, \dots, z_n^*, b)$  é uma solução do sistema (2.4.5). Usando uma construção quase análoga à usada na demonstração do Teorema 2.4.1, temos que existe uma função polinomial  $\widetilde{\mathcal{R}}_1$ , nos coeficientes dos polinômios de  $\mathcal{H}^{m+1}$ , tal que  $\widetilde{\mathcal{R}}_1(\Phi(H)) = 0$ . Os detalhes da construção seguem: Chamando  $z_{n+1} \doteq t$ ,  $L_i \doteq Z_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  e  $L_{n+1} \doteq q_1$  e  $L_{n+2} \doteq q_2$ , definamos indutivamente

$$\begin{aligned} R_k(z_2, \dots, z_{n+1}) &\doteq \text{Res}_{z_1}(L_1(z_1, \dots, z_{n+1}), L_k(z_1, \dots, z_{n+1})) \\ &\quad k = 2, \dots, n+2, \\ R_{2k}(z_3, \dots, z_{n+1}) &\doteq \text{Res}_{z_2}(R_2(z_2, \dots, z_{n+1}), R_k(z_2, \dots, z_{n+1})) \\ &\quad k = 3, \dots, n+2, \\ R_{23k}(z_4, \dots, z_{n+1}) &\doteq \text{Res}_{z_3}(R_{23}(z_3, \dots, z_{n+1}), R_{2k}(z_3, \dots, z_{n+1})) \\ &\quad k = 4, \dots, n+2, \\ &\quad \vdots \\ R_{234 \dots (n+2)} &\doteq \text{Res}_{z_{n+1}}(R_{23 \dots n(n+1)}(z_{n+1}), R_{23 \dots n(n+2)}(z_{n+1})). \end{aligned}$$

Basta colocar

$$\widetilde{\mathcal{R}}_1 \doteq R_{234 \dots (n+2)}.$$

Daí,  $L_1(z_1, z_2^*, \dots, z_n^*, b)$  e  $L_k(z_1, z_2^*, \dots, z_n^*, b)$  olhados como polinômios em  $z_1$  têm a raiz  $z_1^*$  em comum, seguindo que  $R_k(z_2^*, \dots, z_n^*, b) = 0$ , e assim sucesivamente até que  $R_{234 \dots (n+2)} = 0$ . Logo,  $\widetilde{\mathcal{R}}_1(\Phi(H)) = 0$ . Por fim, basta colocar

$$\widetilde{\mathcal{R}} \doteq \prod_{i=1}^{n+1} \widetilde{\mathcal{R}}_i,$$

onde os  $\widetilde{\mathcal{R}}_j$  são construídos da mesma forma, considerando  $\widetilde{X}_H$  em  $\mathbf{U}_j$ . Daí, se o ponto crítico  $z^* \in \mathbf{U}_j$ , segue que  $\widetilde{\mathcal{R}}_j(\Phi(H)) = 0$ . Como a união dos  $\mathbf{U}_i$ 's cobrem  $S^n$ , segue o resultado. ■

# Capítulo 3

## Considerações finais e exemplos

### 3.1 Observações sobre a compactificação de Poincaré

A compactificação de Poincaré não é uma aplicação injetora, como podemos ver no

**Lema 3.1.1** *Seja  $X_k = \Delta(x)^{2k}(P^1, \dots, P^n)$ , com os  $P^i$ 's polinomiais e  $\Delta$  como em (2.1.1). Então  $\tilde{X}_i = \tilde{X}_j$ , para todos  $i, j \in \mathbb{N}$ .*

*Demonstração:* Basta observar que o grau de  $X_k$  é  $m + 2k$ , onde  $m$  é o máximo dos graus dos  $P^i$ 's, e que  $\Delta((\Phi^+)^{-1}(y)) = 1/y_{n+1}$ . Daí vemos que  $\tilde{X}_k = \tilde{P}$ , onde  $P = (P^1, \dots, P^n)$ . Isso porque de (2.1.2) e (2.1.4), temos

$$\tilde{X}_k = y_{n+1}^{m+2k-1} \left( \frac{1}{y_{n+1}} \right)^{2k} \begin{cases} d\Phi_x^+(P) \\ d\Phi_x^-(P) \end{cases} = \tilde{P}.$$

■

O próximo teorema coloca uma condição suficiente em um campo definido no hemisfério norte  $H^+$  para que ele seja um múltiplo da compactificação de Poincaré de um campo polinomial definido em  $\mathbb{R}^n$ :

**Teorema 3.1.1** *Seja  $Y = (Y^1, \dots, Y^{n+1})$  um campo polinomial definido em  $H^+ \subset S^n$  com os graus das partes homogêneas de todos  $Y^i$ 's congruos módulo 2, isto é: "os graus das componentes homogêneas não nulas de  $Y^i$  são todos pares, para todo  $i = 1, \dots, n+1$ , ou são todos ímpares". Então existe um inteiro  $k \geq -1$  tal que*

$$Y = y_{n+1}^k \tilde{X}|_{H^+},$$

onde  $\tilde{X}$  é a compactificação de Poincaré de algum campo polinomial  $X$  de  $\mathbb{R}^n$ .

*Demonstração:* Utilizando a notação da demonstração da Proposição 2.1.1, temos que

$$df_y^+ = \begin{pmatrix} 1/y_{n+1} & 0 & \cdots & 0 & -y_1/y_{n+1}^2 \\ 0 & 1/y_{n+1} & \cdots & 0 & -y_2/y_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/y_{n+1} & -y_n/y_{n+1}^2 \end{pmatrix},$$

e, se  $\mathbf{y} = (x_1/\Delta(\mathbf{x}), \dots, x_n/\Delta(\mathbf{x}), 1/\Delta(\mathbf{x}))$ , com  $\Delta$  definida em (2.1.1),

$$df_{\mathbf{y}}^+ = \Delta(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -x_n \end{pmatrix}. \quad (3.1.1)$$

Agora, colocando

$$m = \max \{ \text{grau}(Y^1), \dots, \text{grau}(Y^{n+1}) \},$$

definamos

$$X(x_1, \dots, x_n) = \Delta(\mathbf{x})^{m-1} df_{\mathbf{y}}^+(Y(\mathbf{y})),$$

com  $\mathbf{y} = \Phi^+(\mathbf{x})$ . *Afirmamos que  $X$  é polinomial, com*

$$l \doteq \max \{ \text{grau}(X^1), \dots, \text{grau}(X^n) \} \leq m + 1. \quad (3.1.2)$$

De fato, se definirmos

$$A(\mathbf{x}) \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -x_n \end{pmatrix},$$

temos de (3.1.1) que

$$X(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x}) \left( \Delta(\mathbf{x})^m Y \left( \frac{x_1}{\Delta(\mathbf{x})}, \dots, \frac{x_n}{\Delta(\mathbf{x})}, \frac{1}{\Delta(\mathbf{x})} \right) \right),$$

e, se  $Y_j^i$  for a parte homogênea de grau  $j$  de  $Y^i$ ,

$$\Delta(\mathbf{x})^m Y_j^i \left( \frac{x_1}{\Delta(\mathbf{x})}, \dots, \frac{x_n}{\Delta(\mathbf{x})}, \frac{1}{\Delta(\mathbf{x})} \right) = \Delta(\mathbf{x})^{m-j} Y^i(x_1, \dots, x_n, 1),$$

que é uma expressão polinomial (pois  $m - j$  é par) com grau  $\leq m$ , seguindo que  $X$  é polinomial de “grau”  $l \leq m + 1$ . Agora, compactificando, temos

$$\begin{aligned} \tilde{X}(\mathbf{y}) &= \mathbf{y}_{n+1}^{l-1} d\Phi_{\mathbf{x}}^+(X(\mathbf{x})) = \mathbf{y}_{n+1}^{l-1} d(f^{+^{-1}})_x (\Delta(\mathbf{x})^{m-1} df_{\mathbf{y}}^+(Y(\mathbf{y}))) = \\ &= \mathbf{y}_{n+1}^{l-1} \Delta(\mathbf{x})^{m-1} Y(\mathbf{y}) = \mathbf{y}_{n+1}^{l-m} Y(\mathbf{y}), \end{aligned}$$

(onde na última igualdade fizemos o seguinte cálculo:  $\Delta(\mathbf{y}_1/\mathbf{y}_{n+1}, \dots, \mathbf{y}_n/\mathbf{y}_{n+1}) = \sqrt{(\sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{y}_i^2)}/\mathbf{y}_{n+1}^2 = 1/\mathbf{y}_{n+1}$ , observando que estamos olhando somente  $\mathbf{y}_{n+1} > 0$ ), seguindo que  $Y(\mathbf{y}) = \mathbf{y}_{n+1}^{m-l} \tilde{X}(\mathbf{y})$ . Chamando  $k = m - l$ , temos de (3.1.2) que  $k \geq -1$ . ■



**Observação:** A compactificação de Poincaré de um campo  $X$  satisfaz a condição colocada no teorema acima, isto é, os graus das partes homogêneas de todas as coordenadas de  $X$  são côngruos módulo 2. Para ver isso, basta observar a expressão (2.1.6).

Observemos ainda que um campo vetorial definido em  $S^n$  pode não ter uma única forma de escrita, por exemplo, em  $S^1$ , seja o campo  $Y = (Y_1, Y_2)$ , com

$$Y_1 = y_1^2 - 1.$$

Desde que vale  $y_1^2 + y_2^2 = 1$ , podemos também escrever

$$Y_1 = -y_2^2.$$

Assim, a formulação do teorema acima depende fortemente da maneira em que o campo está escrito. Além disso, quando analisamos a expressão de um campo polinomial em  $S^n$ , não podemos afirmar “à primeira vista” se ele tem ou não uma representação homogênea, isto é, se ele tem uma representação em que todas as suas coordenadas tenham mesmo grau. Desde que  $1 - y_i^2 = \sum_{j \neq i}^{n+1} y_j^2$ , a expressão (2.1.6) garante que a compactificação de Poincaré de um campo polinomial tem uma representação homogênea. Dessa forma, se um campo satisfaz as hipóteses do teorema acima, ele tem uma representação homogênea, ou tem uma representação em que é homogêneo multiplicado por  $y_{n+1}^{-1}$ . Isso dá o seguinte

**Corolário 3.1.2** *Se  $Y$  for um campo polinomial em  $H^+$  com a hipótese do Teorema 3.1.1, então ele tem uma representação em que suas coordenadas são todas homogêneas de mesmo grau, ou ele é da forma  $(y_{n+1}^{-1} \times \text{“homogêneo”})$ .*

## 3.2 Exemplos

Nesta secção apresentaremos alguns exemplos.

### 3.2.1 O caso planar no infinito

Consideraremos aqui polinômios hamiltonianos  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , de grau  $m + 1$ . Só que vamos considerar outro sistema de coordenadas em  $S^2$ : *as coordenadas cilíndricas*. Se  $(y_1, y_2, y_3) \in S^2$ , para cada  $-1 < y_3 < 1$  fixo, consideremos a circunferência  $(\sqrt{1 - y_3^2} \cos \theta, \sqrt{1 - y_3^2} \sin \theta)$  que circunda  $S^2$  na altura  $y_3$ . Se  $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ , isso dá uma parametrização da vizinhança

$$A_1 = S^2 \setminus \{(y_1, 0, y_3) \mid 0 \leq y_1 \leq 1 \text{ e } -1 \leq y_3 \leq 1\}.$$

Mais precisamente, seja

$$B = \left\{ (\theta, y_3) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ e } -1 < y_3 < 1 \right\}$$

e  $L : B \rightarrow A_1$ , definida por

$$L(\theta, \mathbf{y}_3) = \left( \sqrt{1 - \mathbf{y}_3^2} \cos \theta, \sqrt{1 - \mathbf{y}_3^2} \sin \theta, \mathbf{y}_3 \right).$$

Desde que  $T : A_1 \rightarrow B$  definida por

$$T(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3) = \left( \arctan \left( \frac{\mathbf{y}_2}{\mathbf{y}_1} \right), \mathbf{y}_3 \right)$$

é a inversa de  $L$ , segue que  $T$  é uma parametrização para a vizinhança  $A_1$ . (Para ver que uma é a inversa da outra, basta perceber que, em  $A_1$ ,

$$\arccos \left( \frac{\mathbf{y}_1}{\sqrt{1 - \mathbf{y}_3^2}} \right) = \arcsen \left( \frac{\mathbf{y}_2}{\sqrt{1 - \mathbf{y}_3^2}} \right) = \arctan \left( \frac{\mathbf{y}_2}{\mathbf{y}_1} \right),$$

pois, se  $\mathbf{y}_1 = \sqrt{1 - \mathbf{y}_3^2} \cos \theta$ , então  $\mathbf{y}_2 = \sqrt{1 - \mathbf{y}_1^2 - \mathbf{y}_3^2} = \sqrt{(1 - \mathbf{y}_3^2)(1 - \cos^2 \theta)} = \sqrt{1 - \mathbf{y}_3^2} \sin \theta$ , seguindo que  $\theta = \arcsen \left( \mathbf{y}_2 / \sqrt{1 - \mathbf{y}_3^2} \right)$  e, dividindo adequadamente, que  $\theta = \arctan(\mathbf{y}_2 / \mathbf{y}_1)$ . Trocando-se os papéis de  $\mathbf{y}_3$  com  $\mathbf{y}_2$ , por exemplo, e tomando  $\mathbf{y}_1$  com cuidado, conseguimos outra vizinhança e cobrimos a esfera. Os resultados a seguir serão feitos para a vizinhança  $A_1$  (uma vez que somente uma semi-circunferência é deixada fora), mas podem ser feitos analogamente para a outra vizinhança.

**Lema 3.2.1** *O campo  $\widetilde{X}_H$  escrito nas coordenadas  $(\theta, \mathbf{y}_3)$  tem a seguinte expressão:*

$$Z(\theta, \mathbf{y}_3) = \left( \mathbf{y}_3 \frac{\partial R}{\partial \mathbf{y}_3}(\theta, \mathbf{y}_3) - (m + 1)R(\theta, \mathbf{y}_3), -\mathbf{y}_3 \frac{\partial R}{\partial \theta}(\theta, \mathbf{y}_3) \right),$$

onde

$$R(\theta, \mathbf{y}_3) = H^* \circ T^{-1}(\theta, \mathbf{y}_3) = H^* \left( \sqrt{1 - \mathbf{y}_3^2} \cos \theta, \sqrt{1 - \mathbf{y}_3^2} \sin \theta, \mathbf{y}_3 \right), \quad (3.2.1)$$

e  $H^*(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3)$  é definida em (i) da Proposição 2.2.1.

*Demonstração:* Como já fizemos anteriormente, o campo  $\widetilde{X}_H$  nas coordenadas  $(\theta, \mathbf{y}_3)$  será calculado por  $Z(\theta, \mathbf{y}_3) = dT_{\mathbf{y}} \circ \widetilde{X}_H(\mathbf{y})$ , com  $\mathbf{y} = T^{-1}(\theta, \mathbf{y}_3)$ :

$$dT_{\mathbf{y}} \circ \widetilde{X}_H(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_1} (\arctan(\mathbf{y}_2/\mathbf{y}_1)) & \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_2} (\arctan(\mathbf{y}_2/\mathbf{y}_1)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y}'_1 \\ \mathbf{y}'_2 \\ \mathbf{y}'_3 \end{pmatrix},$$

onde

$$(\mathbf{y}'_1, \mathbf{y}'_2, \mathbf{y}'_3) = \widetilde{X}_H(\mathbf{y}) = \left( \frac{\partial H^*}{\partial \mathbf{y}_2} + \lambda \mathbf{y}_1, -\frac{\partial H^*}{\partial \mathbf{y}_1} + \lambda \mathbf{y}_2, \lambda \mathbf{y}_3 \right),$$

com  $\lambda = y_2 \partial H^* / \partial y_1 - y_1 \partial H^* / \partial y_2$ , conforme (i) da Proposição 2.2.1. Seguindo daí que

$$\begin{aligned} Z(\theta, y_3) &= \left( -\frac{y_2 y_1'}{1 - y_3^2} + \frac{y_1 y_2'}{1 - y_3^2}, y_3' \right) = \\ &= \left( -\frac{1}{1 - y_3^2} \left( y_2 \frac{\partial H^*}{\partial y_2} + y_1 \frac{\partial H^*}{\partial y_1} \right), y_3 \left( y_2 \frac{\partial H^*}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial H^*}{\partial y_2} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Agora, como

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial y_3}(\theta, y_3) &= -\frac{\partial H^*}{\partial y_1} \cdot (1 - y_3^2)^{-\frac{1}{2}} y_3 \cos \theta - \frac{\partial H^*}{\partial y_2} \cdot (1 - y_3^2)^{-\frac{1}{2}} y_3 \sin \theta + \frac{\partial H^*}{\partial y_3} = \\ &= -\frac{y_1 y_3}{1 - y_3^2} \frac{\partial H^*}{\partial y_1} - \frac{y_2 y_3}{1 - y_3^2} \frac{\partial H^*}{\partial y_2} + \frac{\partial H^*}{\partial y_3}, \end{aligned}$$

usando o Lema 2.2.1 em  $H^*$ , temos

$$\begin{aligned} y_3 \frac{\partial R}{\partial y_3} - (m + 1)R &= -\frac{1}{1 - y_3^2} \left( y_1 y_3^2 \frac{\partial H^*}{\partial y_1} + y_2 y_3^2 \frac{\partial H^*}{\partial y_2} \right) + y_3 \frac{\partial H^*}{\partial y_3} - \\ &\quad - \frac{1}{1 - y_3^2} \left( y_1 (1 - y_3^2) \frac{\partial H^*}{\partial y_1} + y_2 (1 - y_3^2) \frac{\partial H^*}{\partial y_2} \right) - y_3 \frac{\partial H^*}{\partial y_3} = \\ &= -\frac{1}{1 - y_3^2} \left( y_2 \frac{\partial H^*}{\partial y_2} + y_1 \frac{\partial H^*}{\partial y_1} \right). \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} y_3 \frac{\partial R}{\partial \theta} &= y_3 \left( \frac{\partial H^*}{\partial y_1} \sqrt{1 - y_3^2} \sin \theta - \frac{\partial H^*}{\partial y_2} \sqrt{1 - y_3^2} \cos \theta \right) = \\ &= y_3 \left( y_2 \frac{\partial H^*}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial H^*}{\partial y_2} \right). \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Substituindo (3.2.3) e (3.2.4) em (3.2.2), temos que

$$Z(\theta, y_3) = \left( y_3 \frac{\partial R}{\partial y_3}(\theta, y_3) - (m + 1)R(\theta, y_3), -y_3 \frac{\partial R}{\partial \theta}(\theta, y_3) \right).$$

■

As propriedades de  $\widetilde{X}_H$  no infinito estão resumidas no seguinte

**Teorema 3.2.1** (i) *O conjunto dos pontos singulares infinitos é  $E^\infty$ .*

(ii) *Os pontos singulares infinitos são dados pelas raízes da função periódica de período  $2\pi$ ,  $R(\theta, 0)$ .*

(iii) *Se  $(\theta^*, 0)$  é um ponto singular, então  $(\theta^* + \pi, 0)$  também o é. O que significa que os pontos singulares aparecem aos pares.*

(iv) Se  $\theta^*$  é uma raiz simples de  $R(\theta, 0)$ , então o ponto singular  $(\theta^*, 0)$  é um nó. Neste caso, temos duas possibilidades:

- (a) se  $m + 1$  é par e  $(\theta^*, 0)$  é um nó estável, então  $(\theta^* + \pi, 0)$  também é um nó estável;
- (b) se  $m + 1$  é ímpar e  $(\theta^*, 0)$  é um nó estável, então  $(\theta^* + \pi, 0)$  é um nó instável, e vice e versa.

*Demonstração:* Já sabemos do Teorema 2.3.1 que os pontos singulares estão em  $E^\infty$ . Se existe  $x \in E^\infty$  que não é ponto singular de  $Z = \widetilde{X}_H$ , então o fluxo  $\Phi$  que passa por  $x$  tem dimensão 1 e está em  $E^\infty$  (uma vez que (iii) do Teorema 2.3.1 garante que  $E^\infty$  é invariante por  $\widetilde{X}_H$ ). Mas isso é uma contradição, pois na Seção 2.4 mostramos que  $E^\infty$  é uma variedade de dimensão  $n - 2 = 0$ . Isso mostra (i). Como  $E^\infty = (H^*)^{-1}(0) \cap \{(\theta, 0)\}$ , a definição de  $R$  em (3.2.1) e o que acabamos de ver garantem que os pontos singulares são todos dados por  $R(\theta, 0) = 0$ , provando (ii). Da homogeneidade de  $H^*$ , segue que

$$\begin{aligned} R(\theta, 0) &= H^*(\cos \theta, \sin \theta, 0) = (-1)^{m+1} H^*(\cos(\theta + \pi), \sin(\theta + \pi), 0) = \\ &= (-1)^{m+1} R(\theta + \pi, 0), \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

o que, juntamente com (ii), mostra (iii). Para provar (iv), observemos a matriz jacobiana de  $Z = \widetilde{X}_H$  num ponto singular  $(\theta^*, 0)$  (a expressão de  $Z$  foi dada no Lema 3.2.1 acima):

$$\begin{pmatrix} -(m+1) \frac{\partial R}{\partial \theta}(\theta^*, 0) & \# \\ 0 & -\frac{\partial R}{\partial \theta}(\theta^*, 0) \end{pmatrix}.$$

Seus autovalores são  $-(m+1) \frac{\partial R}{\partial \theta}(\theta^*, 0)$  e  $-\frac{\partial R}{\partial \theta}(\theta^*, 0)$ . Assim, se  $\theta^*$  é uma raiz simples,  $\frac{\partial R}{\partial \theta}(\theta^*, 0) \neq 0$ , o que mostra que  $(\theta^*, 0)$  é um ponto singular hiperbólico, de fato, um nó, uma vez que os autovalores têm parte real de mesmo sinal. Mais ainda, da relação (3.2.5), segue

$$\frac{\partial R}{\partial \theta}(\theta^*, 0) = (-1)^{m+1} \frac{\partial R}{\partial \theta}(\theta^* + \pi, 0).$$

Então, sendo  $m + 1$  par e  $(\theta^*, 0)$  um nó estável (instável), segue que  $(\theta^* + \pi, 0)$  também é do mesmo tipo. Se  $m + 1$  for ímpar,  $(\theta^*, 0)$  e  $(\theta^* + \pi, 0)$  têm estabilidades opostas, como podemos ver. ■

### 3.2.2 O caso monomial no infinito

Consideraremos aqui um polinômio hamiltoniano  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , de grau  $m + 1$ , tal que sua parte homogênea de maior grau tenha a forma

$$H_{m+1}(x_1, \dots, x_n) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

onde  $\alpha_j \in \mathbb{N}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , e  $\sum \alpha_j = m + 1$ . Daremos uma descrição completa de  $E^\infty$  e do fluxo invariante em  $E^\infty$ . Seja

$$S_j^{n-2} = \{(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) \in S^{n-1} \mid \mathbf{y}_j = 0\} .$$

**Proposição 3.2.2** (i)  $E^\infty = \bigcup_{\alpha_j \geq 1} S_j^{n-2}$ .

(ii) Se  $\alpha_j \geq 2$ , então  $S_j^{n-2}$  consiste inteiramente de pontos singulares (isto é,  $S_j^{n-2} \subset \mathcal{P}$ , onde  $\mathcal{P}$  é o conjunto dos pontos singulares de  $\widetilde{X}_H$ ).

(iii) Se  $\alpha_j, \alpha_k \geq 1$ ,  $j \neq k$ , e  $n \geq 4$ , então  $S_j^{n-2} \cap S_k^{n-2}$  é uma esfera formada por pontos singulares.

(iv) Se  $\alpha_j = 1$ , então em  $S_j^{n-2}$  não há mais pontos críticos do que os descritos em (iii). Mais ainda:

(a) se  $\alpha_{j+d} \geq 1$ , então toda solução começa em alguma esfera de pontos singulares  $S_j^{n-2} \cap S_j^{n-2}$  e termina em  $S_j^{n-2} \cap S_{j+d}^{n-2}$ ;

(b) se  $\alpha_{j+d} = 0$ , então toda solução começa e termina em alguma esfera de pontos singulares  $S_j^{n-2} \cap S_k^{n-2}$ .

*Demonstração:*  $E^\infty \subset S^{n-1}$  está definido pela equação  $H_{n+1}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) = 0$ , isto é:  $\mathbf{y}_1^{\alpha_1} \cdots \mathbf{y}_n^{\alpha_n} = 0$ , que tem solução exatamente em

$$\bigcup_{\alpha_j \geq 1} S_j^{n-2} ,$$

o que mostra (i). De (ii) do Teorema 2.3.1, temos que  $\widetilde{X}_H|_{S^{n-1}}$  tem as seguintes entradas

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'_i &= \frac{\partial H_{m+1}}{\partial \mathbf{y}_{i+d}} + \lambda \mathbf{y}_i \\ \mathbf{y}'_{i+d} &= -\frac{\partial H_{m+1}}{\partial \mathbf{y}_i} + \lambda \mathbf{y}_{i+d}, \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

para  $i = 1, \dots, d$ , e

$$\lambda = \sum_{i=1}^d \left( \mathbf{y}_{i+d} \frac{\partial H_{m+1}}{\partial \mathbf{y}_i} - \mathbf{y}_i \frac{\partial H_{m+1}}{\partial \mathbf{y}_{i+d}} \right).$$

Se  $\alpha_j \geq 2$ , em  $\partial H_{m+1}/\partial \mathbf{y}_i$ , para cada  $i = 1, \dots, n$ , existe uma potência positiva de  $\mathbf{y}_j$ , ou  $\partial H_{m+1}/\partial \mathbf{y}_i = 0$ . Daí, se  $\mathbf{y}_j = 0$ , todas as entradas de  $\widetilde{X}_H|_{S^{n-1}}$  se anulam, como podemos observar nas equações acima. Portanto, se  $\mathbf{y} \in S_j^{n-2}$ , segue que  $\mathbf{y}$  é ponto singular, o que mostra (ii). Para ver (iii), basta observar que em  $\partial H_{m+1}/\partial \mathbf{y}_j$  existe uma potência positiva de  $\mathbf{y}_i$  ou de  $\mathbf{y}_k$  (ou  $\partial H_{m+1}/\partial \mathbf{y}_j = 0$ ). Daí, se  $\mathbf{y}_i = \mathbf{y}_k = 0$ ,

segue que  $\widetilde{X}_H = 0$ . Para demonstrar (iv), vamos primeiro observar duas coisas. A primeira delas é que  $\forall k$ , com  $\alpha_k \geq 1$ ,  $S_k^{n-2}$  é invariante, pois para  $k \leq d$ , se  $\Phi$  é um fluxo de  $\widetilde{X}_H|_{S^{n-1}}$ , com  $\Phi_k(t_0) = 0$ , de acordo com as equações (3.2.6), temos que

$$\Phi'_k(t) = \Phi_1(t)^{\alpha_1} \dots \Phi_k(t)^{\alpha_k} \dots \Phi_{k+d}(t)^{\alpha_{k+d}-1} \dots \Phi_n(t)^{\alpha_n} + \lambda \Phi_k(t),$$

seguinto que  $\Phi_k(t) = 0, \forall t$ , o que significa que  $\Phi(t) \in S^{n-2}, \forall t$ . O mesmo raciocínio segue se  $k > d$ . A segunda coisa a ser vista é que se  $\alpha_j = 1$ , para  $j \leq d$ , as expressões do campo  $\widetilde{X}_H|_{S^{n-1}}$  restrito a  $S_j^{n-2}$  são

$$\begin{aligned} y'_{j+d} &= (-1 + y_{j+d}^2) \frac{\partial H_{m+1}}{\partial y_j} \\ y'_k &= y_{j+d} y_k \frac{\partial H_{m+1}}{\partial y_j}, \quad k \neq j + d, \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

o que segue do seguinte: se  $y \in S_j^{n-2}$ ,  $\lambda = y_{j+d} \partial H_{m+1} / \partial y_j$  (como se vê facilmente da definição de  $\lambda$ ), seguindo de (3.2.6) que se  $k \leq d$ ,  $y'_k = y_{j+d} y_k \partial H_{m+1} / \partial y_j$ . Se  $k = i + d$ , com  $i \neq j$ , segue que  $y'_k = y_{j+d} y_k \partial H_{m+1} / \partial y_j$ . Agora, se  $k = j + d$ ,  $y_{j+d} = -\partial H_{m+1} / \partial y_j + y_{j+d} \partial H_{m+1} / \partial y_j y_{j+d} = (-1 + y_{j+d}^2) \partial H_{m+1} / \partial y_j$ . Dessa forma, de (3.2.7), os pontos singulares estão somente em alguma esfera  $S_j^{n-2} \cap S_k^{n-2}$ . Mais ainda, se temos um fluxo com condição inicial  $\Phi(t_0) \notin S_j^{n-2} \cap S_k^{n-2}$  para todo  $k$ , segue que no intervalo  $-1 < y_{j+d} < 0$  nenhuma coordenada  $\Phi_k(t)$  se anula (senão  $\Phi(t) \in S_j^{n-2} \cap S_k^{n-2}, \forall t$ , pela invariância vista acima). Daí, se  $\alpha_{j+d} = 0$ , a solução não pára em  $S_j^{n-2} \cap S_{j+d}^{n-2}$ , seguindo para  $S_j^{n-2} \cap S_k^{n-2}$  (pois o campo só será zero se  $y_k = 0$ , como podemos ver nas equações (3.2.7)). Se  $\alpha_{j+d} \geq 1$ , é fácil de ver que a solução pára em  $S_j^{n-2} \cap S_{j+d}^{n-2}$ . ■

### 3.2.3 Mais alguns exemplos

**Exemplo (Compactificação de Poincaré para um campo gradiente):** Seja  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  um polinômio de grau  $m + 1$ . O campo gradiente de  $H$  é

$$\nabla H(x) = \left( \frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_n} \right).$$

Utilizando a expressão (2.1.6), onde

$$\widetilde{P}^i(y) = y_{n+1}^m \frac{\partial H}{\partial x_i} \left( \frac{y_1}{y_{n+1}}, \dots, \frac{y_n}{y_{n+1}} \right) = \frac{\partial H^*}{\partial y_i}(y), \quad i = 1, \dots, n,$$

em que  $H^*$  é como definido em (i) da Proposição 2.2.1, temos que a primeira coordenada da Compactificação de Poincaré de  $\nabla H$ ,  $\widetilde{\nabla H}$ , é

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla H}_1 &= \frac{\partial H^*}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial H^*}{\partial y_1} y_1 - y_1 \frac{\partial H^*}{\partial y_2} y_2 - \dots - y_1 \frac{\partial H^*}{\partial y_n} y_n = \\ &= \frac{\partial H^*}{\partial y_1} + y_1 \left( -(m+1)H^*(y) + \frac{\partial H^*}{\partial y_{n+1}} y_{n+1} \right), \end{aligned}$$

onde utilizamos a homogeneidade de  $H^*$  e o *Teorema de Euler* (Lema 2.2.1). Com considerações análogas nas demais coordenadas, chegamos ao seguinte:

$$\widetilde{\nabla}H = \left( \frac{\partial H^*}{\partial \mathbf{y}_1} + \lambda' \mathbf{y}_1, \dots, \frac{\partial H^*}{\partial \mathbf{y}_n} + \lambda' \mathbf{y}_n, \lambda' \mathbf{y}_{n+1} \right), \quad (3.2.8)$$

onde

$$\lambda' = -(\mathfrak{m} + 1)H^* + \mathbf{y}_{n+1} \frac{\partial H^*}{\partial \mathbf{y}_{n+1}}.$$

Uma observação interessante que pode ser feita é que, embora em  $\mathbb{R}^2$  temos que

$$\nabla H = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X_H,$$

não existe nenhuma transformação linear entre  $\widetilde{X}_H$  e  $\widetilde{\nabla}H$ , como podemos ver tomando algum polinômio particular, ou mesmo para um  $H$  qualquer observando as expressões destes dois campos em  $S^2$  (em (i) da proposição 2.2.1 e em (3.2.8)).

Em (ii) da Proposição 2.2.1, provamos que  $\{H^* = 0\}$  é invariante por  $\widetilde{X}_H$ . O próximo exemplo mostra que isso não ocorre para  $\widetilde{\nabla}H$ .

**Exemplo:**  $\{H^* = 0\}$  não é invariante por  $\widetilde{\nabla}H$ , pois seja  $H(x_1, x_2) = x_1$ . Temos que  $H^*(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3) = \mathbf{y}_1$  e  $\lambda' = -\mathbf{y}_1$ , logo

$$\widetilde{\nabla}H = (1 - \mathbf{y}_1^2, -\mathbf{y}_1 \mathbf{y}_2, -\mathbf{y}_1 \mathbf{y}_3).$$

Mas, seja  $\Phi(t) = (\tanh(t), \Phi_2(t), \Phi_3(t))$ , de tal forma que  $\Phi$  seja fluxo de  $\widetilde{\nabla}H$ . Notemos que  $\Phi_1(0) = \tanh(0) = 0$ , seguindo que  $H^*(\Phi(0)) = 0$ , porém  $H^*(\Phi(t)) = \Phi_1(t) = \tanh(t) \neq 0 \Leftrightarrow t \neq 0$ .

**Observação:** Este mesmo exemplo também nos diz que  $E^\infty$  não é invariante por  $\widetilde{\nabla}H$ .

Com uma pequena variação neste exemplo, também segue que  $\{H^* = c\}$  não é invariante por  $\widetilde{\nabla}H$  para nenhuma constante  $c$ . Agora, mesmo para  $\widetilde{X}_H$ , temos o seguinte

**Exemplo:** Para toda constante  $c \neq 0$ ,  $\{H^* = c\}$  não é invariante por  $\widetilde{X}_H$ , pois, em  $\mathbb{R}^2$ , tomemos  $H(x_1, x_2) = x_1$ . Aqui,  $H^*(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3) = \mathbf{y}_1$  e  $\lambda = \mathbf{y}_2$ , seguindo que

$$\widetilde{X}_H = (\mathbf{y}_1 \mathbf{y}_2, -1 + \mathbf{y}_2^2, \mathbf{y}_2 \mathbf{y}_3). \quad (3.2.9)$$

Se  $\{H^* = c\}$  fosse invariante por  $\widetilde{X}_H$ , um fluxo  $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$  de  $\widetilde{X}_H$  tal que  $l(t_0) = H^*(\Phi(t_0)) = c$  (onde  $l = H^* \circ \Phi$ ), teria que manter  $l(t) = c, \forall t$ . Daí  $0 = l'(t) = \lambda l(t) = \Phi_2(t)c, \forall t$  (podemos ver a segunda igualdade com cálculos análogos aos da prova de (ii) da Proposição 2.2.1), seguindo que  $\Phi_2(t) = 0, \forall t$ . Mas  $\Phi(t) = (\Phi_1(t), 0, \Phi_3(t))$  não pode ser fluxo de  $\widetilde{X}_H$ , como podemos ver em (3.2.9).

# Referências Bibliográficas

- [1] CIMA, A.; LLIBRE, J. *Bounded polynomial vector fields*. **Transactions of the American Mathematical Society**. v. 318, n. 2, 1990. p. 557-579.
- [2] DELGADO, J.; LACOMBA, E. A.; LLIBRE, J.; PÉREZ, E. *Poincaré compactification of Hamiltonian polynomial vector fields*. In: HAMILTONIAN DYNAMICAL SYSTEMS, 1992, Cincinnati, OH. **Proceedings...** New York: Springer, 1995. p. 99-114.
- [3] DELGADO, J.; LACOMBA, E. A.; LLIBRE, J.; PÉREZ, E. *Poincaré compactification of the collinear three body problem*. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON HAMILTONIAN SYSTEMS AND CELESTIAL MECHANICS, 1991, Guanajuato, México. **Proceedings...** River Edge, NJ: World Sci. Publ., 1993. p. 85-100.
- [4] DELGADO, J.; LACOMBA, E. A.; LLIBRE, J.; PÉREZ, E. *Poincaré compactification of the Kepler and the collinear three body problem*. In: SEMINAR ON DYNAMICAL SYSTEMS, 1991, Saint Petersburg, Russia. **Proceedings...** Basel: Birkhäuser, 1994. p. 117-128.
- [5] LIMA, E. L. **Análise no espaço  $\mathbb{R}^n$** . Brasília-DF: Editora Universidade de Brasília, 1970. 98p.
- [6] LIMA, E. L. **Curso de Análise Volume 2**. Sexta Edição. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPQ, 2000. 547p.
- [7] MILNOR, J. W. **Topology from the differentiable viewpoint**. Seventh printing. Charlottesville: The University Press of Virginia, 1988. 64p.
- [8] MUNKRES, J. R. **Topology: a first course**. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1975. 413p.
- [9] DOS SANTOS FILHO, J. R. S. *Injective mappings and solvable vector fields of Euclidian spaces*. **Topology and its Applications**, v. 136, n. 1-3, 2004, p. 261-274.
- [10] RUDIN, W. **Real and Complex Analysis**. New York: McGraw-Hill, 1966. 412p.