

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**ANALITICIDADE, NA VARIÁVEL ESPACIAL,  
DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE CAUCHY  
PARA A EQUAÇÃO DE KdV**

Márcio Luís Miotto

São Carlos – SP

Março de 2006

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS**  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Analiticidade, na variável espacial, da solução do  
Problema de Cauchy para a equação de KdV**

Márcio Luís Miotto

Orientador: Prof. Dr. Gerson Petronilho

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

São Carlos – SP

Março de 2006

**Orientador**

---

**Prof. Dr. Gerson Petronilho**

**Banca Examinadora**

---

**Prof. Dr. Gerson Petronilho**

---

**Prof. Dr. Wagner Vieira Leite Nunes**

---

**Prof. Dr. Luís Antônio Carvalho dos Santos**

# Agradecimentos

A Deus, pela dádiva da vida.

Aos meus pais, Anselmo e Lourdes, pela educação, por todo amor, compreensão, pelo constante incentivo e apoio. Vocês possuem grande parte do mérito desta conquista.

Ao Prof. Dr. Gerson Petronilho, pelos ensinamentos matemáticos, bem como por sua orientação.

Aos meus irmãos, Eder e Anderson, bem como a Ana, pela força, paciência, pelo encorajamento e incentivo.

À minha noiva Taísa, por todo amor, alegrias, pela paciência, apoio, tolerância, por sua inesgotável atenção e disposição em me ajudar.

A todos os meus familiares. Em especial, ao “nono” José e a “nona” Teonésta, pela constante presença e apoio.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFSCar, em especial ao professor Luís, por todo o seu empenho e presteza em me auxiliar.

Aos amigos e professores da Universidade Federal do Paraná e da CEU, em especial ao professor Xavier, pelas oportunidades, por sua enorme atenção e incentivo.

Aos amigos do DM, Ana Claudia, Angelo, Bruno, Claudete, Cristina, Elaine, Elisa, Fabíolo, Fernanda, Francisco, Gustavo, Irma, Jacson, Jamil, João, Márcia, Paulo, Ricardo, Tiago.

A CAPES pelo apoio financeiro.

# Resumo

Neste trabalho usamos estimativas bilineares e teorema do ponto fixo para mostrar que a solução do Problema de Cauchy para a equação de Korteweg-de Vries, com dado inicial analítico periódico, é analítica e periódica na variável espacial.

# Abstract

In this work we use bilinear estimates and point fix theorem to show that the solution to the initial value problem for the Korteweg-de Vries equation with analytic periodic initial data is analytic and periodic in the space variable.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>5</b>
<b>O Problema de Cauchy para a equação de KdV</b>	<b>7</b>
1.1 Infinitas equações . . . . .	7
1.2 Os Espaços $\mathcal{X}^s$ e $\mathcal{Y}^s$ . . . . .	11
1.3 O espaço $\mathcal{A}(\mathcal{Y}^s)$ . . . . .	18
1.4 Estimativas . . . . .	20
1.5 Demonstração do Teorema 1.1 . . . . .	24
<b>Apêndice</b>	<b>26</b>
2.1 Demonstração da Proposição 1.1 . . . . .	26
2.2 Demonstração da Proposição 1.2 . . . . .	46
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>50</b>



# Introdução

O nosso trabalho baseia-se no artigo de Gorsky e Himonas [GH], o qual apresenta um estudo sobre o Problema de Cauchy, com dado inicial periódico, para a equação de Korteweg-de Vries (KdV),

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \frac{1}{2} \partial_x(u^2) = 0, & x \in \mathbb{T}, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \varphi \in C^\omega(\mathbb{T}), \widehat{\varphi}(0) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

onde  $C^\omega(\mathbb{T})$  denota o conjunto das funções analíticas periódicas e  $\widehat{\varphi}$  denota o coeficiente de Fourier de  $\varphi$ .

O nosso objetivo neste trabalho é demonstrar o seguinte resultado.

**Teorema 1.1** *A solução  $u(\cdot, t)$  do problema de valor inicial (1)–(2) pertence a  $C^\omega(\mathbb{T})$ , para  $t$  próximo de 0.*

A demonstração deste resultado será feita utilizando estimativas bilineares e um teorema do ponto fixo.

Lembremos que o Teorema 1.1 foi primeiramente demonstrado por Trubowitz [Tr] usando a técnica do espalhamento. Vários autores têm estudado a equação de KdV, dentre eles podemos citar Bourgain [B], Byers e Himonas [BH], Korteweg e de Vries [KdV], Kenig, Ponce e Vega [KPV1], [KPV2], [KPV3] e Sjöberg [Sj].

Gostaríamos de salientar que embora o dado inicial seja analítico, em geral a solução não preserva esta propriedade na variável  $t$  como acontece com a variável  $x$ . Em [BH], encontra-se a construção de um exemplo em que o dado inicial é

um função analítica periódica, mas  $u(0, \cdot) \notin C^\omega(\mathbb{R})$ . Finalmente salientamos que embora a solução possa não ser analítica na variável  $t$ , mostra-se que a mesma pertence ao espaço de Gevrey  $G^3(\mathbb{R})$  na variável  $t$  para  $x$  fixado e próximo de zero, (ver Himonas e Petronilho [HP]).

# O Problema de Cauchy para a equação de KdV

Este capítulo está dividido em cinco partes. Na primeira, iniciamos a demonstração do Teorema 1.1 transformando o problema (1)–(2) em infinitas equações. Na segunda seção, introduzimos dois espaços de funções, os quais serão de extrema importância para o que segue. Na terceira parte, exibimos condições para que uma função periódica de classe  $C^\infty$  seja uma função analítica. Nesta seção ainda definimos um espaço natural para expressar a analiticidade na variável  $x$ . Na quarta seção, obtemos algumas estimativas que são úteis para demonstrarmos o Teorema 1.1 e finalizamos este capítulo fazendo a demonstração do referido teorema.

## 1.1 Infinitas equações

Nesta seção iremos começar a demonstração do Teorema 1.1 e para isto começamos diferenciando formalmente as equações (1)–(2),  $k$  vezes com respeito a  $x$ , donde obtemos os seguintes problemas

$$\begin{cases} \partial_t (\partial_x^k u) + \partial_x^3 (\partial_x^k u) + \frac{1}{2} \partial_x [\partial_x^k (u \cdot u)] = 0, & (1.3) \\ \partial_x^k u(x, 0) = \partial_x^k \varphi(x), \quad k = 0, 1, \dots & (1.4) \end{cases}$$

Definindo  $B_k(v, v) \doteq \frac{1}{2} \partial_x [\partial_x^k (v \cdot v)]$  e usando a fórmula de Leibniz, obtemos

que

$$B_k(v, v) = \frac{1}{2} \partial_x \sum_{j=0}^k \frac{k!}{j!(k-j)!} \partial_x^{k-j} v \partial_x^j v.$$

Por simplicidade, neste trabalho denotaremos  $\partial_x^k v = v_k$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Devido a notação utilizada, podemos reescrever  $B_k(v, v)$  da seguinte forma

$$B_k(v, v) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \partial_x (v_{k-j} v_j).$$

Portanto podemos reescrever o problema de valor inicial (1.3)–(1.4) da seguinte maneira

$$\begin{cases} \partial_t u_k + \partial_x^3 u_k + B_k(u, u) = 0, & (1.5) \\ u_k(x, 0) = \varphi_k(x), \quad k = 0, 1, \dots. & (1.6) \end{cases}$$

Desse modo, caso  $u : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  seja tal que  $u_k$  é solução do problema de valor inicial (1.5)–(1.6), para todo  $k = 0, 1, \dots$ , então a função  $u_0 = u$  será solução do problema de valor inicial (1)–(2).

Agora, com o objetivo de encontrar as soluções do problema de valor inicial (1.5)–(1.6), definimos o operador  $W$ , onde para cada função  $h \in C^\infty(\mathbb{T})$  temos

$$W(t)h(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{inx} e^{in^3 t} \widehat{h}(n).$$

O operador  $W$  é frequentemente denotado por  $e^{-t\partial_x^3}$ .

É interessante ressaltar que  $W(0)h(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{inx} \widehat{h}(n) = h(x)$  e ainda que

$$\partial_t (W(t)h(x)) = -\partial_x^3 (W(t)h(x)),$$

para todo  $x \in \mathbb{T}$ , pois

$$\begin{aligned} \partial_t (W(t)h(x)) &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{inx} e^{in^3 t} in^3 \widehat{h}(n) \\ &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} -\partial_x^3 (e^{inx}) e^{in^3 t} \widehat{h}(n) \\ &= -\partial_x^3 \left( \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{inx} e^{in^3 t} \widehat{h}(n) \right) \\ &= -\partial_x^3 (W(t)h(x)). \end{aligned}$$

Como o nosso objetivo é encontrar as soluções do problema de valor inicial (1.5)–(1.6), definimos para cada  $k = 0, 1, \dots$ ,

$$v_k(x, t) = W(t)\varphi_k(x) - \int_0^t W(t - \tau)B_k(v, v)(x, \tau) d\tau,$$

Fixado  $k \in \mathbb{N}$  qualquer, mostremos que  $v_k(x, t)$  satisfaz o problema de valor inicial (1.5)–(1.6).

De fato, se  $x \in \mathbb{T}$  então temos que

$$v_k(x, 0) = W(0)\varphi_k(x) = \varphi_k(x).$$

Como

$$\begin{aligned} \partial_t v_k(x, t) &= \partial_t \left( W(t)\varphi_k(x) - \int_0^t W(t - \tau)B_k(v, v)(x, \tau) d\tau \right) \\ &= \partial_t(W(t)\varphi_k(x)) - W(0)B_k(v, v)(x, t) \\ &\quad - \int_0^t \partial_t(W(t - \tau)B_k(v, v)(x, \tau)) d\tau \\ &= -B_k(v, v)(x, t) - \partial_x^3(W(t)\varphi_k(x)) \\ &\quad - \int_0^t -\partial_x^3(W(t - \tau)B_k(v, v)(x, \tau)) d\tau \\ &= -B_k(v, v)(x, t) - \partial_x^3 \left( W(t)\varphi_k(x) - \int_0^t W(t - \tau)B_k(v, v)(x, \tau) d\tau \right) \\ &= -B_k(v, v)(x, t) - \partial_x^3 v_k(x, t), \end{aligned}$$

então temos que

$$\partial_t v_k(x, t) + \partial_x^3 v_k(x, t) + B_k(v, v)(x, t) = 0,$$

o que mostra o desejado.

Portanto caso encontrarmos uma função  $u : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de modo que

$$u_k(x, t) = W(t)\varphi_k(x) - \int_0^t W(t - \tau)B_k(u, u)(x, \tau) d\tau, \quad (1.7)$$

para qualquer  $k = 0, 1, \dots$ , então teremos que  $u_k$  é solução do problema de valor inicial (1.5)–(1.6) e conseqüentemente a função  $u_0 = u$  será solução do problema de valor inicial (1)–(2).

Usando série de Fourier e transformada de Fourier podemos reescrever a equação (1.7) da seguinte maneira

$$u_k(x, t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i(nx+n^3t)} \widehat{\varphi}_k(n) + i \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i(nx+n^3t)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\lambda-n^3)t} - 1}{\lambda - n^3} \widehat{B}_k(u, u)(n, \lambda) d\lambda, \quad (1.8)$$

para qualquer  $k \in \mathbb{N}$ , pois devido a definição do operador  $W$  temos que

$$\begin{aligned} u_k(x, t) &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{inx} e^{in^3t} \widehat{\varphi}_k(n) - \int_0^t \left( \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{inx} e^{in^3(t-\tau)} \widehat{B}_k(u, u)^x(n, \tau) \right) d\tau \\ &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i(nx+n^3t)} \widehat{\varphi}_k(n) - \int_0^t \left[ \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{inx} e^{in^3(t-\tau)} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{i\tau\lambda} \widehat{B}_k(u, u)^{x,\tau}(n, \lambda) d\lambda \right) \right] d\tau \\ &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i(nx+n^3t)} \widehat{\varphi}_k(n) + \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i(nx+n^3t)} \left[ \int_{\mathbb{R}} \left( \int_0^t -e^{i\tau(\lambda-n^3)} d\tau \right) \widehat{B}_k(u, u)(n, \lambda) d\lambda \right] \\ &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i(nx+n^3t)} \widehat{\varphi}_k(n) + \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i(nx+n^3t)} \left[ \int_{\mathbb{R}} \left( -\frac{e^{i\tau(\lambda-n^3)}}{i(\lambda-n^3)} \right) \Big|_{\tau=0}^t \widehat{B}_k(u, u)(n, \lambda) d\lambda \right] \\ &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i(nx+n^3t)} \widehat{\varphi}_k(n) + \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i(nx+n^3t)} \left[ \int_{\mathbb{R}} \left( -\frac{e^{it(\lambda-n^3)} - 1}{i(\lambda-n^3)} \right) \widehat{B}_k(u, u)(n, \lambda) d\lambda \right] \\ &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i(nx+n^3t)} \widehat{\varphi}_k(n) + i \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i(nx+n^3t)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\lambda-n^3)t} - 1}{\lambda - n^3} \widehat{B}_k(u, u)(n, \lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

Como estamos interessados em mostrar que a solução do problema de valor inicial (1)–(2) é analítica na variável  $x$ , apenas para  $t$  próximo de zero, a seguir escolhemos uma função  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  infinitamente diferenciável, com suporte contido no intervalo  $(-1, 1)$ , onde  $0 \leq \psi(t) \leq 1$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$  e ainda  $\psi(t) \equiv 1$  se  $|t| < \frac{1}{2}$ .

Fixado  $0 < \delta < 1$  qualquer, definimos a função  $\psi_\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde para cada  $t \in \mathbb{R}$  temos  $\psi_\delta(t) = \psi(\frac{t}{\delta})$ .

Agora, substituindo na equação (1.7) a função  $u_k$  por  $\psi_\delta u_k$  e multiplicando a expressão resultante pela função  $\psi$ , obtemos que

$$\begin{aligned} \psi(t) \psi_\delta(t) u_k(x, t) &= \psi(t) W(t) \varphi_k(x) - \psi(t) \int_0^t W(t-\tau) B_k(\psi_\delta u, \psi_\delta u)(x, \tau) d\tau \quad (1.9) \\ &\doteq T_k^\delta(u_0, u_1, \dots, u_k). \end{aligned}$$

Então se encontrarmos uma função  $u$  de modo que  $T_k^\delta(u_0, u_1, \dots, u_k)$  satisfaz a equação (1.9) para todo  $k$ , então  $T_0^\delta(u_0) = u_0(x, t)$  será a solução do problema

de valor inicial (1)–(2), desde que  $|t| < \frac{\delta}{2}$ .

Demonstraremos o Teorema 1.1 garantindo a existência de tal função  $u$  e mostrando que a função  $T_0^\delta(u_0)$  é analítica na variável  $x$ . Para tanto, necessitamos de alguns espaços de funções especiais.

## 1.2 Os Espaços $\mathcal{X}^s$ e $\mathcal{Y}^s$

Antes de definirmos tais espaços, demonstramos um resultado que nos fornece uma propriedade da solução  $u$  do problema de valor inicial (1)–(2).

**Lema 1.1** *Se  $u : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  for solução do problema de valor inicial (1)–(2), então temos que*

$$\widehat{u}^x(0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} u(x, t) dx = \widehat{\varphi}(0) = 0,$$

para todo  $t$  em  $\mathbb{R}$ , onde  $\widehat{u}^x$  denota o coeficiente de Fourier de  $u$  com relação a variável  $x$ .

**Demonstração:** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $f(t) = \int_{\mathbb{T}} u(x, t) dx$  para cada  $t \in \mathbb{R}$ .

Devido a relação (2) temos que

$$f(0) = \int_{\mathbb{T}} u(x, 0) dx = \int_{\mathbb{T}} \varphi(x) dx = 2\pi\widehat{\varphi}(0) = 0.$$

Então para concluir a demonstração, basta mostrar que  $f'(t) = 0$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Devido a relação (1) temos que

$$\begin{aligned} f'(t) &= \int_{\mathbb{T}} \partial_t u(x, t) dx \\ &= \int_{\mathbb{T}} -\partial_x^3 u(x, t) - \frac{1}{2} \partial_x u^2(x, t) dx \\ &= - \left( \partial_x^2 u(x, t) + \frac{1}{2} u^2(x, t) + C(t) \right) \Big|_{x=0}^{2\pi} \\ &= \partial_x^2 u(0, t) - \partial_x^2 u(2\pi, t) + \frac{1}{2} u^2(0, t) - \frac{1}{2} u^2(2\pi, t) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois  $\partial_x^2 u(\cdot, t)$  e  $u^2(\cdot, t)$  são  $2\pi$ -periódicas na variável  $x$ . ■

Observe que se  $\hat{u}^x(0, t) = 0$  para qualquer  $t \in \mathbb{R}$ , então temos para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  que  $\hat{u}(0, \lambda) = 0$ .

Portanto se  $u$  é solução do problema de valor inicial (1)–(2) então  $\hat{u}(0, \lambda) = 0$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Devido ao Teorema 5 em ([B], p.221) e ao fato que  $\varphi \in H^s(\mathbb{T})$  para qualquer  $s \geq 0$ , sabemos que o problema de valor inicial (1)–(2) possui uma única solução global (ver definição abaixo) para todo  $s \geq 0$ . Logo a solução  $u$  do problema de valor inicial (1)–(2) é  $C^\infty$  na variável  $x$ .

Lembremos que o problema de valor inicial para a KdV é localmente (globalmente) **bem-posto** em um espaço  $X$  se dado  $u_0 \in X$  existe  $T = T(u_0)$  (para todo  $T$ ) tal que existe uma única  $u$  resolvendo a equação integral associada a KdV, como em (1.7), com  $u \in C([-T, T]; X)$  e a aplicação

$$u_0 \rightarrow u \in C([-T, T]; X)$$

é contínua.

Motivados por esta propriedade, definimos a seguir o espaço de funções  $\mathcal{X}^s$ , o qual foi usado por diversos autores, ver por exemplo [KPV2], [KPV3].

**Definição 1.1** *Dado  $s \geq 0$ , definimos por  $\mathcal{X}^s$ , o espaço das funções  $u \in L^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ , onde para qualquer  $\lambda \in \mathbb{R}$  temos  $\hat{u}(0, \lambda) = 0$ , com  $u(\cdot, t) \in C^\infty(\mathbb{T})$  para qualquer  $t \in \mathbb{R}$  e ainda*

$$\| \| u \| \|_{\mathcal{X}^s} = \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} \int_{\mathbb{R}} (1 + |\lambda - n^3|) |\hat{u}(n, \lambda)|^2 d\lambda \right)^{1/2} < \infty. \quad (1.10)$$

Temos que  $(\mathcal{X}^s, \| \cdot \|_{\mathcal{X}^s})$  é um espaço vetorial normado completo.

Para provar a analiticidade na variável  $x$  necessitamos do seguinte espaço.



**Definição 1.2** Fixado  $s \geq 0$ , definimos por  $\mathcal{Y}^s$  o espaço das funções  $u \in \mathcal{X}^s$ , onde

$$\|u\|_{\mathcal{Y}^s} = \|u\|_{\mathcal{X}^s} + \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}(n, \lambda)| d\lambda \right)^2 \right)^{1/2} < \infty. \quad (1.11)$$

Temos que  $(\mathcal{Y}^s, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}^s})$  é um espaço vetorial normado completo.

Observe ainda que  $\mathcal{Y}^s \subset \mathcal{X}^s$ , para qualquer  $s \geq 0$ .

Os espaços  $\mathcal{Y}^s$  foram primeiramente introduzidos por Colliander, Keel, Staffilani, Takaoka e Tao [CKSTT] para se estudar a bem postura global do problema de valor inicial para a equação de KdV quando  $s \geq -1/2$ .

Observe que as normas  $\|u\|_{\mathcal{Y}^s}$  e  $\|u\|_{\mathcal{X}^s}$  diferem apenas pela quantidade  $\left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}(n, \lambda)| d\lambda \right)^2 \right)^{1/2}$ . Esta quantidade foi acrescentada com o objetivo de garantir que se  $u \in \mathcal{Y}^s$ , então  $u(\cdot, t) \in H^s(\mathbb{T})$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , fixado. Vejamos tal resultado.

**Lema 1.2** Sendo  $s \geq 0$  qualquer e  $u \in \mathcal{Y}^s$  então para todo  $t \in \mathbb{R}$ , fixado, temos que

$$\|u(\cdot, t)\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq \|u\|_{\mathcal{Y}^s}.$$

**Demonstração:** Fixemos  $t \in \mathbb{R}$  qualquer. Como para cada  $n \in \mathbb{Z}$  temos que

$$\widehat{u}^x(n, t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t} \widehat{u}(n, \lambda) d\lambda, \text{ então}$$

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t)\|_{H^s(\mathbb{T})} &= \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} |\widehat{u}^x(n, t)|^2 \right)^{1/2} \\ &= \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{it \cdot \lambda} \widehat{u}(n, \lambda) d\lambda \right|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} |e^{it \cdot \lambda} \widehat{u}(n, \lambda)| d\lambda \right)^2 \right)^{1/2} \\ &= \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}(n, \lambda)| d\lambda \right)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \|u\|_{\mathcal{Y}^s}, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. ■

A seguir apresentamos um resultado que nos garante que dada uma função  $\psi(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  qualquer, então  $\psi u \in \mathcal{Y}^s$  para toda  $u \in \mathcal{Y}^s$ , ou seja, o espaço  $\mathcal{Y}^s$  é invariante pela multiplicação de funções na variável  $t$  que são infinitamente diferenciável e que possuem suporte compacto.

**Lema 1.3** *Dada  $\psi(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ , então existe  $C = C(\psi) > 0$ , de modo que,*

$$\|\psi u\|_{\mathcal{Y}^s} \leq C \|u\|_{\mathcal{Y}^s},$$

para toda  $u \in \mathcal{Y}^s$ .

**Demonstração:** Nestas condições evidentemente que  $\psi u \in \mathcal{Y}^s$ . Definimos a função  $g : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , onde  $g(x, t) = \psi(t)u(x, t)$ . Então se  $n \in \mathbb{Z}$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , temos

$$\widehat{g}(n, \lambda) = \widehat{\psi}^t(\lambda) * \widehat{u}^{x,t}(n, \lambda) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}^t(\tau) \widehat{u}^{x,t}(n, \lambda - \tau) d\tau.$$

Como  $1 + |\lambda - n^3| \leq (1 + |\tau|)(1 + |\lambda - \tau - n^3|)$ , para quaisquer  $n \in \mathbb{Z}$  e  $\lambda, \tau \in \mathbb{R}$ , então temos que

$$\begin{aligned} \|\psi u\|_{\mathcal{X}^s}^2 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} (1 + |\lambda - n^3|) \left| \int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}^t(\tau) \widehat{u}^{x,t}(n, \lambda - \tau) d\tau \right|^2 d\lambda \right) \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} \int_{\mathbb{R}} (1 + |\lambda - n^3|) \left( \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{\psi}^t(\tau) \widehat{u}^{x,t}(n, \lambda - \tau) \right| d\tau \right)^2 d\lambda \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} (1 + |\tau|)^{1/2} (1 + |\lambda - \tau - n^3|)^{1/2} \left| \widehat{\psi}^t(\tau) \widehat{u}^{x,t}(n, \lambda - \tau) \right| d\tau \right)^2 d\lambda \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} (1 + |\tau|)^{1/2} (1 + |\lambda - \tau - n^3|)^{1/2} \left| \widehat{\psi}^t(\tau) \widehat{u}^{x,t}(n, \lambda - \tau) \right|^2 d\lambda \right)^{1/2} d\tau \right)^2 \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}} (1 + |\tau|) \left| \widehat{\psi}^t(\tau) \right|^2 d\tau \right)^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} (1 + |\mu - n^3|) |\widehat{u}(n, \mu)|^2 d\mu \right) \\ &\leq C \|u\|_{\mathcal{X}^s}^2, \end{aligned}$$

onde a terceira desigualdade decorre da desigualdade de Minkowski para Integrais e

a última segue do fato de que a função  $\psi$  pertence ao espaço de Schwartz. Note que

$$\begin{aligned}
\sum_{n \in \mathbf{Z}} |n|^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}(n, \lambda)| d\lambda \right)^2 &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} |n|^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}^t(\tau) \widehat{u}^{x,t}(n, \lambda - \tau) d\tau \right| d\lambda \right)^2 \\
&\leq \sum_{n \in \mathbf{Z}} |n|^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\psi}(\tau) \widehat{u}(n, \lambda - \tau)| d\tau d\lambda \right)^2 \\
&= \sum_{n \in \mathbf{Z}} |n|^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\psi}(\tau)| \int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}(n, \lambda - \tau)| d\lambda d\tau \right)^2 \\
&= \sum_{n \in \mathbf{Z}} |n|^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\psi}(\tau)| d\tau \int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}(n, \lambda)| d\lambda \right)^2 \\
&= \left( \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\psi}(\tau)| d\tau \right)^2 \sum_{n \in \mathbf{Z}} |n|^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}(n, \lambda)| d\lambda d\tau \right)^2 \\
&\leq C \sum_{n \in \mathbf{Z}} |n|^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}(n, \lambda)| d\lambda d\tau \right)^2,
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade decorre do fato de  $\psi$  pertencer ao espaço de Schwartz.

Pelo fato de

$$\|\psi u\|_{\mathcal{Y}^s} = \|\psi u\|_{\mathcal{X}^s} + \left( \sum_{n \in \mathbf{Z}} |n|^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}(n, \lambda)| d\lambda \right)^2 \right)^{1/2},$$

obtemos então que  $\|\psi u\|_{\mathcal{Y}^s} \leq C \|u\|_{\mathcal{Y}^s}$ , o que conclui a demonstração.  $\blacksquare$

Na sequência demonstraremos um resultado que tem por objetivo caracterizar, através da norma  $\|\cdot\|_{H^s(\mathbb{T})}$ , as funções analíticas periódicas. Para tanto, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , denotemos  $\varphi_k \doteq \partial^k \varphi$ .

**Lema 1.4** *Seja  $\varphi \in C^\omega(\mathbb{T})$  qualquer, então para cada  $s \geq 0$  existe  $M(s, \varphi) > 0$  e  $C_\varphi = C(\varphi) > 0$ , tal que*

$$\|\varphi_k\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq M(s, \varphi) \left( \frac{1}{2C_\varphi} \right)^k k!,$$

para cada  $k \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração:** Fixemos  $k \in \mathbb{N}$  e  $s \geq 0$  quaisquer. Pelo fato de  $\varphi \in C^\omega(\mathbb{T})$ , temos que existem constantes  $C, \varepsilon > 0$ , de modo que  $|\widehat{\varphi}(n)| \leq C e^{-\varepsilon|n|}$ , para todo

$n \in \mathbb{Z}$ . Portanto obtemos que

$$\begin{aligned}
\|\varphi_k\|_{H^s(\mathbb{T})}^2 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} |\widehat{\varphi}_k(n)|^2 \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} |n|^{2k} |\widehat{\varphi}(n)|^2 \\
&\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} |n|^{2k} C^2 e^{-2\varepsilon|n|} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} C^2 |n|^{2s} e^{-\varepsilon|n|} |n|^{2k} e^{-\varepsilon|n|}.
\end{aligned}$$

Como o intuito de limitarmos  $|n|^{2k} e^{-\varepsilon|n|}$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , definimos a função  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $f(t) = t^{2k} e^{-\varepsilon t}$ , para todo  $t \in [0, \infty)$ .

Pelo fato da função  $f$  ter como ponto de máximo  $t_0 = \frac{2k}{\varepsilon}$ , obtemos que  $f(|n|) \leq f\left(\frac{2k}{\varepsilon}\right)$  para cada  $n$  em  $\mathbb{Z}$ , ou seja,

$$|n|^{2k} e^{-\varepsilon|n|} \leq \left(\frac{2k}{\varepsilon}\right)^{2k} e^{-2k} = \left[\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^k k^k e^{-k}\right]^2 \leq \left[\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^k k!\right]^2,$$

para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , onde a última desigualdade decorre do fato de  $k^k e^{-k} \leq k!$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ .

Como a série  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} C^2 |n|^{2s} e^{-\varepsilon|n|}$  converge, existe uma constante  $M(s, \varphi) < \infty$ , de modo que  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} C^2 |n|^{2s} e^{-\varepsilon|n|} \leq M(s, \varphi)^2$ .

Então devido a majoração acima de  $\|\varphi_k\|_{H^s(\mathbb{T})}^2$ , obtemos que

$$\|\varphi_k\|_{H^s(\mathbb{T})}^2 \leq \left[M(s, \varphi) \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^k k!\right]^2.$$

Tomando  $C_\varphi = \frac{\varepsilon}{4}$  e pelo fato das constantes  $M(s, \varphi), C_\varphi > 0$  independentem do valor de  $k \in \mathbb{N}$  então obtemos que

$$\|\varphi_k\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq M(s, \varphi) \left(\frac{1}{2C_\varphi}\right)^k k!,$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ , o que conclui a demonstração. ■

Na sequência deste trabalho, denotaremos por  $C_\varphi > 0$ , a constante obtida pelo Lema 1.4, onde  $\varphi \in C^\omega(\mathbb{T})$  é a condição inicial do problema (1)–(2). Ainda nos

referindo a condição inicial do problema (1)–(2), denotamos para cada  $s \geq 0$ ,

$$\llbracket \varphi \rrbracket_s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_\varphi^k}{k!} \|\varphi_k\|_{H^s(\mathbb{T})}.$$

A seguir, apresentamos um resultado que nos dá uma condição para que uma função  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T})$  seja uma função analítica em  $\mathbb{T}$ .

**Lema 1.5** *Seja  $\varphi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função infinitamente diferenciável. Se existem constantes  $s \geq 0$ ,  $M(s, \varphi) \geq 0$  e  $C_\varphi > 0$ , onde para qualquer  $k \in \mathbb{N}$  temos*

$$\|\varphi_k\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq M(s, \varphi) \left( \frac{1}{2C_\varphi} \right)^k k!, \quad (1.12)$$

então  $\varphi \in C^\omega(\mathbb{T})$ .

**Demonstração:** Sabemos que  $\varphi \in C^\omega(\mathbb{T})$  se, e somente se,  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T})$  e existem constantes positivas  $C$  e  $\varepsilon$ , de modo que  $|\widehat{\varphi}(n)| \leq Ce^{-\varepsilon|n|}$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

Pela relação (1.12) obtemos para qualquer  $k \in \mathbb{N}$  que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} |\widehat{\varphi}_k(n)|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} |n|^{2k} |\widehat{\varphi}(n)|^2 \leq M(s, \varphi)^2 \left( \frac{1}{2C_\varphi} \right)^{2k} (k!)^2,$$

donde resulta que

$$|n|^{2s} |n|^{2k} |\widehat{\varphi}(n)|^2 \leq M(s, \varphi)^2 \left( \frac{1}{2C_\varphi} \right)^{2k} (k!)^2,$$

para quaisquer  $k \in \mathbb{N}$  e  $n \in \mathbb{Z}$ . Temos que a última relação é equivalente a,

$$|n|^s |n|^k |\widehat{\varphi}(n)| \leq M(s, \varphi) \left( \frac{1}{2C_\varphi} \right)^k k!,$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$  e  $n \in \mathbb{Z}$ , ou ainda,

$$\frac{C_\varphi^k |n|^k}{k!} |\widehat{\varphi}(n)| \leq M(s, \varphi) \left( \frac{1}{2} \right)^k,$$

para quaisquer  $k \in \mathbb{N}$  e  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , donde resulta que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(C_\varphi |n|)^k}{k!} |\widehat{\varphi}(n)| \leq M(s, \varphi) \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^k,$$

para todo  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , ou seja,

$$e^{C_\varphi|n|}|\widehat{\varphi}(n)| \leq 2M(s, \varphi),$$

para todo  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

Tomando  $C = \max\{2M(s, \varphi), |\widehat{\varphi}(0)|\}$  e  $\varepsilon = C_\varphi$ , obtemos então que  $|\widehat{\varphi}(n)| \leq Ce^{-\varepsilon|n|}$  para qualquer  $n \in \mathbb{Z}$ , o que conclui a demonstração. ■

### 1.3 O espaço $\mathcal{A}(\mathcal{Y}^s)$

Como o nosso objetivo é mostrar que a solução  $u$ , do problema de valor inicial (1)–(2), é analítica na variável  $x$ , desde que  $t$  esteja próximo de zero, então vamos introduzir um espaço especial para tornar isto possível.

Como já visto no Lema 1.4 o fato de  $\varphi \in C^\omega(\mathbb{T})$  pode ser traduzido em termos das normas  $H^s$  por

$$\|\varphi_k\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq M(s, \varphi) \left(\frac{1}{2C_\varphi}\right)^k k!,$$

para cada  $k \in \mathbb{N}$ . Portanto se definirmos

$$\{\varphi_k\} \doteq (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots), \quad \varphi_k = \partial_x^k \varphi$$

e definirmos

$$\llbracket \{\varphi_k\} \rrbracket_s \doteq \llbracket \varphi \rrbracket_s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_\varphi^k}{k!} \|\varphi_k\|_{H^s(\mathbb{T})},$$

então pela definição de  $\llbracket \varphi \rrbracket_s$ , temos que

$$\llbracket \{\varphi_k\} \rrbracket_s < \infty.$$

Motivados por este resultado, a seguir iremos definir um espaço natural para expressar a analiticidade na variável  $x$ .

**Definição 1.3** Fixado  $s \geq 0$ , definimos  $\mathcal{A}(\mathcal{Y}^s)$  como o conjunto das seqüências  $\{v_k\} \doteq (v_0, v_1, v_2, \dots)$ , onde  $v_k \in \mathcal{Y}^s$  para cada  $k \in \mathbb{N}$  e ainda

$$\|\|\{v_k\}\|\|_s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_\varphi^k}{k!} \|v_k\|_{\mathcal{Y}^s} < \infty. \quad (1.13)$$

Temos que  $(\mathcal{A}(\mathcal{Y}^s), \|\|\cdot\|\|_s)$  é um espaço vetorial normado completo.

Mostraremos a seguir porque este espaço é apropriado para mostrarmos a analiticidade pretendida.

**Lema 1.6** Se  $\{v_k\} \in \mathcal{A}(\mathcal{Y}^s)$  para algum  $s \geq 0$ , então  $v(\cdot, t) \in C^\omega(\mathbb{T})$ , para qualquer  $t \in \mathbb{R}$  fixo.

**Demonstração:** Pelo fato de existir  $s \geq 0$  de modo que

$$\|\|\{v_k\}\|\|_s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_\varphi^k}{k!} \|v_k\|_{\mathcal{Y}^s} < \infty,$$

então existe uma constante  $M = M(s, v)$ , de modo que

$$\frac{C_\varphi^k}{k!} \|v_k\|_{\mathcal{Y}^s} \leq M,$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Mas isso é equivalente a afirmar que se  $k \in \mathbb{N}$ , então

$$\|v_k\|_{\mathcal{Y}^s} \leq M \left( \frac{1}{C_\varphi} \right)^k k!.$$

Fixado  $t \in \mathbb{R}$  qualquer, pelo fato das hipóteses do Lema 1.2 serem satisfeitas, obtemos então que

$$\|v_k(\cdot, t)\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq \|v_k\|_{\mathcal{Y}^s} \leq M \left( \frac{1}{C_\varphi} \right)^k k!,$$

para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Como as hipóteses do Lema 1.5 são satisfeitas, concluímos que  $v(\cdot, t) \in C^\omega(\mathbb{T})$ . Pelo fato de  $t \in \mathbb{R}$  ser qualquer, temos então que  $v(\cdot, t) \in C^\omega(\mathbb{T})$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , o que conclui a demonstração. ■

Na seqüência deste trabalho denotaremos por  $B_s[0, r]$  o conjunto das seqüências  $\{v_k\} \in \mathcal{A}(\mathcal{Y}^s)$ , onde  $\|\|\{v_k\}\|\|_s \leq r$ .

Temos que o espaço  $\mathcal{A}(\mathcal{Y}^s)$  é extremamente útil para demonstrarmos o Teorema 1.1, pois para cada  $s \geq 0$  fixo, vamos garantir a existência de  $0 < \delta < 1$  e de  $\{v_k\} \in \mathcal{A}(\mathcal{Y}^s)$ , de modo que  $T_k^\delta(v_0, v_1, \dots, v_k)$  satisfaz a equação (1.9) para cada  $k \in \mathbb{N}$ . Isso implica que se  $|t| < \frac{\delta}{2}$ , então a função  $T^\delta(v_0) = v(x, t)$  é uma solução do problema de valor inicial (1)–(2) e pelo fato de  $\{v_k\} \in \mathcal{A}(\mathcal{Y}^s)$  temos então que a função  $v$  é analítica na variável  $x$ .

Como iremos demonstrar o Teorema 1.1 utilizando a técnica do ponto fixo, então para cada  $0 < \delta < 1$ , definimos o operador  $T^\delta : \mathcal{A}(\mathcal{Y}^s) \rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{Y}^s)$ , onde

$$T^\delta(\{v_k\}) = (T_0^\delta(v_0), T_1^\delta(v_0, v_1), \dots, T_k^\delta(v_0, v_1, \dots, v_k), \dots) = \{T_k^\delta(v_0, v_1, \dots, v_k)\}.$$

Na sequência veremos alguns resultados técnicos que serão úteis para mostrarmos que a aplicação  $T^\delta$  é uma contração em um subconjunto apropriado de  $\mathcal{A}(\mathcal{Y}^s)$ .

## 1.4 Estimativas

Esta seção tem por objetivo encontrar, para cada  $s \geq 0$  fixo, condições sobre  $0 < \delta < 1$  e  $r > 0$ , de modo que o operador  $T^\delta$  seja uma contração em  $B_s[0, r]$ .

A princípio, enunciaremos um resultado que é fundamental para mostrarmos que  $T^\delta$  é uma contração em uma bola apropriada de  $\mathcal{A}(\mathcal{Y}^s)$ . A demonstração desta proposição não foi redigida nesta seção devido ao sua extensão, mas está inteiramente contida no Apêndice.

**Proposição 1.1** *Fixado  $0 < \delta < 1$ , existe uma constante  $C > 0$ , de modo que*

$$\| \|T_k^\delta(v_0, v_1, v_2, \dots, v_k)\| \|_{\mathcal{Y}^s} \leq C\delta^{1/24} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \| \|v_{k-j}\| \|_{\mathcal{Y}^s} \| \|v_j\| \|_{\mathcal{Y}^s} + C\|\varphi_k\|_{H^s(\mathbb{T})},$$

para quaisquer  $v_0, v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathcal{Y}^s$ .

A seguir, enunciaremos uma generalização da Proposição 1.1, cuja demonstração também pode ser encontrada no Apêndice.



**Proposição 1.2** *Se  $0 < \delta < 1$ , então existe uma constante  $C > 0$ , de modo que*

$$\begin{aligned} & \|\|T_k^\delta(w_0, w_1, \dots, w_k) - T_k^\delta(v_0, v_1, \dots, v_k)\|\|_{\mathcal{Y}^s} \\ & \leq C\delta^{1/24} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \|\|w_{k-j} + v_{k-j}\|\|_{\mathcal{Y}^s} \|\|w_j - v_j\|\|_{\mathcal{Y}^s}, \end{aligned}$$

para quaisquer  $w_0, v_0, w_1, v_1, \dots, w_k, v_k \in \mathcal{Y}^s$ .

Na sequência, demonstraremos um resultado que nos dá, mediante o uso das estimativas obtidas pelas Proposições 1.1 e 1.2, uma estimativas para  $\|\|T^\delta(\{v_k\})\|\|_s$ .

**Lema 1.7** *Fixado  $0 < \delta < 1$ , existe uma constante  $C > 0$ , de modo que*

$$\|\|T^\delta(\{w_k\})\|\|_s \leq C\delta^{1/24} \|\|\{w_k\}\|\|_s^2 + C\|\|\varphi\|\|_s, \quad (1.14)$$

e ainda

$$\|\|T^\delta(\{w_k\}) - T^\delta(\{v_k\})\|\|_s \leq C\delta^{1/24} \|\|\{w_k\} + \{v_k\}\|\|_s \cdot \|\|\{w_k\} - \{v_k\}\|\|_s, \quad (1.15)$$

para quaisquer  $\{w_k\}$  e  $\{v_k\}$  que pertencem a  $\mathcal{A}(\mathcal{Y}^s)$ .

**Demonstração:** Seja  $\{w_k\} \in \mathcal{A}(\mathcal{Y}^s)$ . Devido a Proposição 1.1, obtemos que

$$\begin{aligned} \|\|T^\delta(\{w_k\})\|\|_s &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_\varphi^k}{k!} \|\|T_k^\delta(w_0, w_1, \dots, w_k)\|\|_{\mathcal{Y}^s} \\ &\leq C\delta^{1/24} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_\varphi^k}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \|\|w_{k-j}\|\|_{\mathcal{Y}^s} \|\|w_j\|\|_{\mathcal{Y}^s} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_\varphi^k}{k!} C\|\|\varphi_k\|\|_{H^s(\mathbb{T})} \\ &= C\delta^{1/24} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_\varphi^k}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \|\|w_{k-j}\|\|_{\mathcal{Y}^s} \|\|w_j\|\|_{\mathcal{Y}^s} + C\|\|\varphi\|\|_s. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Observemos agora que

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{\varphi}^k}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \|\|w_{k-j}\|\|_{\mathcal{Y}^s} \|\|w_j\|\|_{\mathcal{Y}^s} \tag{1.17} \\
&= C_{\varphi}^0 \left( \frac{1}{0!} \|\|w_0\|\|_{\mathcal{Y}^s} \|\|w_0\|\|_{\mathcal{Y}^s} \right) + \\
& C_{\varphi}^1 \left( \frac{1}{1!} \|\|w_1\|\|_{\mathcal{Y}^s} \|\|w_0\|\|_{\mathcal{Y}^s} + \frac{1}{1!} \|\|w_0\|\|_{\mathcal{Y}^s} \|\|w_1\|\|_{\mathcal{Y}^s} \right) + \\
& C_{\varphi}^2 \left( \frac{1}{2!} \|\|w_2\|\|_{\mathcal{Y}^s} \|\|w_0\|\|_{\mathcal{Y}^s} + \frac{1}{1!} \|\|w_1\|\|_{\mathcal{Y}^s} \|\|w_1\|\|_{\mathcal{Y}^s} + \frac{1}{2!} \|\|w_0\|\|_{\mathcal{Y}^s} \|\|w_2\|\|_{\mathcal{Y}^s} \right) + \\
& C_{\varphi}^3 \left( \frac{1}{3!} \|\|w_3\|\|_{\mathcal{Y}^s} \|\|w_0\|\|_{\mathcal{Y}^s} + \frac{1}{2!} \|\|w_2\|\|_{\mathcal{Y}^s} \|\|w_1\|\|_{\mathcal{Y}^s} + \frac{1}{2!} \|\|w_1\|\|_{\mathcal{Y}^s} \|\|w_2\|\|_{\mathcal{Y}^s} + \frac{1}{3!} \|\|w_0\|\|_{\mathcal{Y}^s} \|\|w_3\|\|_{\mathcal{Y}^s} \right) + \\
& \vdots \\
&= C_{\varphi}^0 \left( \frac{1}{0!} \|\|w_0\|\|_{\mathcal{Y}^s} \|\|w_0\|\|_{\mathcal{Y}^s} \right) + \\
& C_{\varphi}^1 \left( \frac{1}{1!} \|\|w_0\|\|_{\mathcal{Y}^s} \|\|w_1\|\|_{\mathcal{Y}^s} + \frac{1}{1!} \|\|w_1\|\|_{\mathcal{Y}^s} \|\|w_0\|\|_{\mathcal{Y}^s} \right) + \\
& C_{\varphi}^2 \left( \frac{1}{2!} \|\|w_0\|\|_{\mathcal{Y}^s} \|\|w_2\|\|_{\mathcal{Y}^s} + \frac{1}{1!} \|\|w_1\|\|_{\mathcal{Y}^s} \|\|w_1\|\|_{\mathcal{Y}^s} + \frac{1}{2!} \|\|w_2\|\|_{\mathcal{Y}^s} \|\|w_0\|\|_{\mathcal{Y}^s} \right) + \\
& C_{\varphi}^3 \left( \frac{1}{3!} \|\|w_0\|\|_{\mathcal{Y}^s} \|\|w_3\|\|_{\mathcal{Y}^s} + \frac{1}{2!} \|\|w_1\|\|_{\mathcal{Y}^s} \|\|w_2\|\|_{\mathcal{Y}^s} + \frac{1}{2!} \|\|w_2\|\|_{\mathcal{Y}^s} \|\|w_1\|\|_{\mathcal{Y}^s} + \frac{1}{3!} \|\|w_3\|\|_{\mathcal{Y}^s} \|\|w_0\|\|_{\mathcal{Y}^s} \right) + \\
& \vdots \\
&= C_{\varphi}^0 \|\|w_0\|\|_{\mathcal{Y}^s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{\varphi}^k}{k!} \|\|w_k\|\|_{\mathcal{Y}^s} + C_{\varphi}^1 \frac{\|\|w_1\|\|_{\mathcal{Y}^s}}{1!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{\varphi}^{k-1}}{(k-1)!} \|\|w_{k-1}\|\|_{\mathcal{Y}^s} + \\
& C_{\varphi}^2 \frac{\|\|w_2\|\|_{\mathcal{Y}^s}}{2!} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{C_{\varphi}^{k-2}}{(k-2)!} \|\|w_{k-2}\|\|_{\mathcal{Y}^s} + C_{\varphi}^3 \frac{\|\|w_3\|\|_{\mathcal{Y}^s}}{3!} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{C_{\varphi}^{k-3}}{(k-3)!} \|\|w_{k-3}\|\|_{\mathcal{Y}^s} + \dots \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{C_{\varphi}^j}{j!} \|\|w_j\|\|_{\mathcal{Y}^s} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{C_{\varphi}^{k-j}}{(k-j)!} \|\|w_{k-j}\|\|_{\mathcal{Y}^s} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{C_{\varphi}^j}{j!} \|\|w_j\|\|_{\mathcal{Y}^s} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_{\varphi}^l}{l!} \|\|w_l\|\|_{\mathcal{Y}^s},
\end{aligned}$$

onde a antepenúltima igualdade é obtida da igualdade anterior somando em colunas.

Segue de (1.16) e da última igualdade que

$$\begin{aligned}
\|T^{\delta}(\{w_k\})\|_s &\leq C\delta^{1/24} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{C_{\varphi}^j}{j!} \|\|w_j\|\|_{\mathcal{Y}^s} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_{\varphi}^l}{l!} \|\|w_l\|\|_{\mathcal{Y}^s} + C[\varphi]_s \\
&= C\delta^{1/24} \|\|\{w_k\}\|_s^2 + C[\varphi]_s,
\end{aligned}$$

o que prova a relação (1.14).

A seguir mostraremos que a relação (1.15) é satisfeita. Devido a definição de  $\|\cdot\|_s$ , Proposição 1.2 e a igualdade (1.17), obtemos que

$$\begin{aligned}
& \|T^\delta(\{w_k\}) - T^\delta(\{v_k\})\|_s \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_\varphi^k}{k!} \|T_k^\delta(w_0, w_1, \dots, w_k) - T_k^\delta(v_0, v_1, \dots, v_k)\|_{\mathcal{Y}^s} \\
&\leq C\delta^{1/24} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_\varphi^k}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \|w_{k-j} + v_{k-j}\|_{\mathcal{Y}^s} \|w_j - v_j\|_{\mathcal{Y}^s} \\
&= C\delta^{1/24} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{C_\varphi^j}{j!} \|w_j + v_j\|_{\mathcal{Y}^s} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_\varphi^l}{l!} \|w_l - v_l\|_{\mathcal{Y}^s} \\
&= C\delta^{1/24} \|\{w_k\} + \{v_k\}\|_s \cdot \|\{w_k\} - \{v_k\}\|_s,
\end{aligned}$$

o que demonstra a relação (1.15) e conclui a demonstração do Lema 1.7.  $\blacksquare$

O resultado a seguir exhibe condições sobre  $0 < \delta < 1$  e  $r > 0$  para que o operador  $T^\delta$  seja uma contração em  $B_s[0, r]$ .

**Proposição 1.3** *Se tomarmos  $r = 2C\llbracket\varphi\rrbracket_s$  e  $0 < \delta < \min\left\{1, \frac{\llbracket\varphi\rrbracket_s^{24}}{(2r^2)^{24}}\right\}$ , onde  $C$  é a constante obtida no Lema 1.7, então  $T^\delta : B_s[0, r] \rightarrow B_s[0, r]$  é uma contração. Mais precisamente, temos que  $\|T^\delta(\{w_k\})\|_s \leq r$ , para todo  $\{w_k\} \in B_s[0, r]$  e ainda*

$$\|T^\delta(\{w_k\}) - T^\delta(\{v_k\})\|_s \leq \frac{1}{2} \|\{w_k\} - \{v_k\}\|_s,$$

para qualquer  $\{w_k\}, \{v_k\} \in B_s[0, r]$ .

**Demonstração:** Devido ao Lema 1.7 e as condições impostas sobre  $r$  e  $\delta$  obtemos

$$\|T^\delta(\{w_k\})\|_s \leq C\delta^{1/24} \|\{w_k\}\|_s^2 + C\llbracket\varphi\rrbracket_s < C\frac{\llbracket\varphi\rrbracket_s}{2r^2} r^2 + \frac{r}{2} = \frac{3r}{4} < r,$$

para qualquer  $\{w_k\}$  em  $B_s[0, r]$ .

Fixados  $\{w_k\}, \{v_k\} \in B_s[0, r]$  quaisquer, ainda pelo Lema 1.7 e pelo fato de  $\|\cdot\|_s$  ser uma norma sobre  $\mathcal{A}(\mathcal{Y}^s)$ , temos que

$$\begin{aligned}
\|T^\delta(\{w_k\}) - T^\delta(\{v_k\})\|_s &\leq C\delta^{1/24} \|\{w_k\} + \{v_k\}\|_s \cdot \|\{w_k\} - \{v_k\}\|_s \\
&< C \frac{\|\varphi\|_s}{2r^2} \|\{w_k\} + \{v_k\}\|_s \cdot \|\{w_k\} - \{v_k\}\|_s \\
&\leq C \frac{\|\varphi\|_s}{2r^2} (\|\{w_k\}\|_s + \|\{v_k\}\|_s) \cdot \|\{w_k\} - \{v_k\}\|_s \\
&\leq \frac{r}{2} \frac{2r}{2r^2} \|\{w_k\} - \{v_k\}\|_s \\
&= \frac{1}{2} \|\{w_k\} - \{v_k\}\|_s,
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. ■

A seguir enunciaremos o Lema da Contração, resultado este que nos garantirá a existência de um único elemento  $\{v_k\} \in \mathcal{A}(\mathcal{Y}^s)$  de modo que  $T_k^\delta(v_0, v_1, \dots, v_k)$  satisfaz a equação (1.9) para qualquer  $k \in \mathbb{N}$ . A demonstração deste Lema pode ser encontrada em ([St], p.12).

**Lema 1.8** *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico completo e  $F : X \rightarrow X$  uma contração. Então existe um único ponto fixo  $p$ , isto é,  $F(p) = p$ . Mais ainda,  $p$  é um atrator de  $F$ , isto é, dado qualquer  $x \in X$ , temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = p$ , onde  $x_1 = F(x)$  e  $x_{n+1} = F(x_n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .*

## 1.5 Demonstração do Teorema 1.1

Seja  $s \geq 0$  fixado. Se tomarmos  $r$  e  $\delta$  satisfazendo as hipóteses da Proposição 1.3, então pelo fato de  $(B_s[0, r], \|\cdot\|_s)$  ser um espaço normado completo e a aplicação  $T^\delta$  ser uma contração sobre  $B_s[0, r]$ , temos pelo Lema 1.8 que existe um único elemento  $\{v_k\} \in \mathcal{A}(\mathcal{Y}^s)$ , de modo que  $\{v_k\} = T^\delta(\{v_k\})$ .

Segue desta última igualdade e da definição do operador  $T^\delta$  que para todo  $k \in \mathbb{N}$  temos

$$v_k(x, t) = T_k^\delta(v_0, v_1, \dots, v_k).$$

Assim para  $|t| < \frac{\delta}{2}$ , temos para cada  $k \in \mathbb{N}$  que

$$\psi(t)\psi_\delta(t)v_k(x, t) = T_k^\delta(v_0, v_1, \dots, v_k).$$

Logo, pelo fato da função  $v$  satisfazer a relação (1.9) para qualquer  $k \in \mathbb{N}$ , obtemos então que  $v$  é solução do problema de valor inicial (1)–(2), desde que  $|t| < \frac{\delta}{2}$ .

Agora devido o fato de  $\{v_k\} \in \mathcal{A}(\mathcal{Y}^s)$ , temos então que a função  $v$  é analítica na variável  $x$ . Portanto, temos que a solução  $v(x, t) = T_0^\delta(v_0)$  do problema de valor inicial (1)–(2) é analítica na variável  $x$  desde que  $|t| < \frac{\delta}{2}$ , o que conclui a demonstração do Teorema 1.1. ■

# Apêndice

Neste apêndice o nosso objetivo será demonstrar alguns dos resultados que foram omitidos durante a demonstração do Teorema 1.1.

## 2.1 Demonstração da Proposição 1.1

A seguir faremos a demonstração da Proposição 1.1, resultado este de grande valia, pois nos dá uma estimativa para o valor de  $\|T_k^\delta(u_0, u_1, \dots, u_k)\|_{\mathcal{Y}^s}$  para quaisquer  $0 < \delta < 1$  e  $k \in \mathbb{N}$ . Esta estimativa possui um papel fundamental para mostrarmos que  $T^\delta$  é uma contração em um conjunto apropriado de  $\mathcal{A}(\mathcal{Y}^s)$ . Na sequência enunciamos a referida proposição novamente.

**Proposição 2.1** *Fixado  $0 < \delta < 1$ , existe uma constante  $C > 0$ , de modo que*

$$\|T_k^\delta(u_0, u_1, \dots, u_k)\|_{\mathcal{Y}^s} \leq C\delta^{1/24} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \|u_{k-j}\|_{\mathcal{Y}^s} \|u_j\|_{\mathcal{Y}^s} + C\|\varphi_k\|_{H^s(\mathbb{T})},$$

para quaisquer  $u_0, u_1, \dots, u_k \in \mathcal{Y}^s$ .

Fixemos  $k \in \mathbb{N}$  qualquer. Antes de começarmos a demonstração do resultado acima, iremos buscar uma outra caracterização de  $T_k^\delta(u_0, u_1, \dots, u_k)$ .

Para simplificar a notação utilizada convencionamos que

$$B_k^\delta \doteq B_k(\psi_\delta u, \psi_\delta u) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \partial_x (\psi_\delta u_{k-j} \cdot \psi_\delta u_j).$$

Segue da definição de  $T_k^\delta$ , relação (1.9) e da definição do operador  $W$  que

$$\begin{aligned} T_k^\delta(u_0, u_1, \dots, u_k) &= \psi(t)W(t)\varphi_k(x) - \psi(t) \int_0^t W(t-\tau)B_k(\psi_\delta u, \psi_\delta u)(x, \tau) d\tau \\ &= \psi(t)W(t)\varphi_k(x) - \psi(t) \int_0^t W(t-\tau)B_k^\delta(x, \tau) d\tau \\ &= \psi(t) \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i(nx+n^3t)} \widehat{\varphi}_k(n) - \psi(t) \int_0^t \left( \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i[nx+n^3(t-\tau)]} \widehat{B}_k^\delta(n, \tau) \right) d\tau. \end{aligned}$$

Como  $\widehat{B}_k^\delta(n, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} \widehat{B}_k^\delta(n, \lambda) d\lambda$ , para quaisquer  $n \in \mathbb{Z}$  e  $\tau \in \mathbb{R}$ , segue da igualdade acima que

$$\begin{aligned} T_k^\delta(u_0, u_1, \dots, u_k) &= \psi(t) \sum_{n \in \mathbf{Z}} \widehat{\varphi}_k(n) e^{i(nx+n^3t)} \\ &\quad - \psi(t) \int_0^t \left( \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i[nx+n^3(t-\tau)]} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} \widehat{B}_k^\delta(n, \lambda) d\lambda \right) d\tau \\ &= \psi(t) \sum_{n \in \mathbf{Z}} \widehat{\varphi}_k(n) e^{i(nx+n^3t)} \\ &\quad - \psi(t) \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i(nx+n^3t)} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\lambda-n^3)\tau} \widehat{B}_k^\delta(n, \lambda) d\lambda d\tau \\ &= \psi(t) \sum_{n \in \mathbf{Z}} \widehat{\varphi}_k(n) e^{i(nx+n^3t)} \\ &\quad - \psi(t) \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i(nx+n^3t)} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{B}_k^\delta(n, \lambda) \int_0^t e^{i(\lambda-n^3)\tau} d\tau d\lambda \\ &= \psi(t) \sum_{n \in \mathbf{Z}} \widehat{\varphi}_k(n) e^{i(nx+n^3t)} \\ &\quad - \psi(t) \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i(nx+n^3t)} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{B}_k^\delta(n, \lambda) \left( \frac{e^{i(\lambda-n^3)\tau}}{i(\lambda-n^3)} \right) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} d\lambda \\ &= \psi(t) \sum_{n \in \mathbf{Z}} \widehat{\varphi}_k(n) e^{i(nx+n^3t)} \\ &\quad - \psi(t) \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i(nx+n^3t)} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{B}_k^\delta(n, \lambda) \left( -i \frac{e^{it(\lambda-n^3)} - 1}{\lambda - n^3} \right) d\lambda \\ &= \psi(t) \sum_{n \in \mathbf{Z}} \widehat{\varphi}_k(n) e^{i(nx+n^3t)} \end{aligned}$$

$$+ i\psi(t) \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i(nx+n^3t)} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{e^{it(\lambda-n^3)} - 1}{\lambda - n^3} \right) \widehat{B}_k^\delta(n, \lambda) d\lambda.$$

Como  $1 = \psi(\lambda - n^3) + 1 - \psi(\lambda - n^3) = \psi(\lambda - n^3) + (1 - \psi)(\lambda - n^3)$  e ainda para quaisquer  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{Z}$  temos que

$$\frac{e^{it(\lambda-n^3)} - 1}{\lambda - n^3} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{i^j}{j!} t^j (\lambda - n^3)^{j-1},$$

então obtemos que

$$\begin{aligned} & T_k^\delta(u_0, u_1, \dots, u_k) \\ &= \psi(t) \sum_{n \in \mathbf{Z}} \widehat{\varphi}_k(n) e^{i(nx+n^3t)} \\ & \quad + i\psi(t) \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i(nx+n^3t)} \int_{-\infty}^{\infty} [\psi(\lambda - n^3) + (1 - \psi)(\lambda - n^3)] \left( \frac{e^{it(\lambda-n^3)} - 1}{\lambda - n^3} \right) \widehat{B}_k^\delta(n, \lambda) d\lambda \\ &= \psi(t) \sum_{n \in \mathbf{Z}} \widehat{\varphi}_k(n) e^{i(nx+n^3t)} \\ & \quad + i\psi(t) \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i(nx+n^3t)} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\lambda - n^3) \left( \frac{e^{it(\lambda-n^3)} - 1}{\lambda - n^3} \right) \widehat{B}_k^\delta(n, \lambda) d\lambda \\ & \quad + i\psi(t) \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i(nx+n^3t)} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \psi)(\lambda - n^3) \left( \frac{e^{it(\lambda-n^3)} - 1}{\lambda - n^3} \right) \widehat{B}_k^\delta(n, \lambda) d\lambda \\ &= \psi(t) \sum_{n \in \mathbf{Z}} \widehat{\varphi}_k(n) e^{i(nx+n^3t)} \\ & \quad + i\psi(t) \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i(nx+n^3t)} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\lambda - n^3) \left( \sum_{j=1}^{\infty} \frac{i^j}{j!} t^j (\lambda - n^3)^{j-1} \right) \widehat{B}_k^\delta(n, \lambda) d\lambda \\ & \quad + i\psi(t) \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i(nx+n^3t)} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \psi)(\lambda - n^3) \left( \frac{e^{it\lambda} e^{-itn^3}}{\lambda - n^3} \right) \widehat{B}_k^\delta(n, \lambda) d\lambda \\ & \quad - i\psi(t) \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i(nx+n^3t)} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \psi)(\lambda - n^3) \left( \frac{1}{\lambda - n^3} \right) \widehat{B}_k^\delta(n, \lambda) d\lambda \\ &= \psi(t) \sum_{n \in \mathbf{Z}} \widehat{\varphi}_k(n) e^{i(nx+n^3t)} \tag{2.18} \end{aligned}$$

$$+ i \sum_{j=1}^{\infty} \frac{i^j}{j!} t^j \psi(t) \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i(nx+n^3t)} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\lambda - n^3) (\lambda - n^3)^{j-1} \widehat{B}_k^\delta(n, \lambda) d\lambda \tag{2.19}$$



$$+i\psi(t) \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-\psi)(\lambda-n^3)}{\lambda-n^3} e^{it\lambda} \widehat{B}_k^\delta(n, \lambda) d\lambda \quad (2.20)$$

$$-i\psi(t) \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i(nx+n^3t)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-\psi)(\lambda-n^3)}{\lambda-n^3} \widehat{B}_k^\delta(n, \lambda) d\lambda. \quad (2.21)$$

Como o nosso intuito é obter uma estimativa para  $\|T_k^\delta(u_0, u_1, \dots, u_k)\|_{\mathcal{Y}^s}$ , a nossa estratégia será estimar os valores de  $\|(2.18)\|_{\mathcal{Y}^s}$ ,  $\|(2.19)\|_{\mathcal{Y}^s}$ ,  $\|(2.20)\|_{\mathcal{Y}^s}$  e  $\|(2.21)\|_{\mathcal{Y}^s}$ .

**Estimativa de  $\|(2.18)\|_{\mathcal{Y}^s}$ .**

Por conveniência definimos  $f : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , onde se  $x \in \mathbb{T}$  e  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$(2.18) = f(x, t) = \psi(t) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\varphi}_k(n) e^{i(nx+n^3t)}.$$

Basta então encontrarmos uma estimativa para  $\|f\|_{\mathcal{Y}^s}$ .

Fixados  $m \in \mathbb{Z}$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , afirmamos que

$$\widehat{f}(m, \lambda) = \widehat{\varphi}_k(m) \widehat{\psi}(\lambda - m^3).$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned} \widehat{f}(m, \lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{T}} e^{-it\lambda} e^{-ix\cdot m} \psi(t) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\varphi}_k(n) e^{i(nx+n^3t)} dx dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi(t) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\varphi}_k(n) e^{-it(\lambda-n^3)} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} e^{ix\cdot(n-m)} dx dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi(t) e^{-it(\lambda-m^3)} \widehat{\varphi}_k(m) dt \\ &= \widehat{\varphi}_k(m) \widehat{\psi}(\lambda - m^3). \end{aligned}$$

Então obtemos que

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{Y}^s} &= \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} \int_{\mathbb{R}} (1 + |\lambda - n^3|) |\widehat{f}(n, \lambda)|^2 d\lambda \right)^{1/2} \\ &\quad + \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(n, \lambda)| d\lambda \right)^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \sum_{n \in \dot{\mathbf{Z}}} |n|^{2s} \int_{\mathbb{R}} (1 + |\lambda - n^3|) \left| \widehat{\varphi}_k(n) \widehat{\psi}(\lambda - n^3) \right|^2 d\lambda \right)^{1/2} \\
&\quad + \left( \sum_{n \in \dot{\mathbf{Z}}} |n|^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{\varphi}_k(n) \widehat{\psi}(\lambda - n^3) \right| d\lambda \right)^2 \right)^{1/2} \\
&= \left( \sum_{n \in \dot{\mathbf{Z}}} |n|^{2s} |\widehat{\varphi}_k(n)|^2 \int_{\mathbb{R}} (1 + |\lambda - n^3|) \left| \widehat{\psi}(\lambda - n^3) \right|^2 d\lambda \right)^{1/2} \\
&\quad + \left( \sum_{n \in \dot{\mathbf{Z}}} |n|^{2s} |\widehat{\varphi}_k(n)|^2 \left( \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{\psi}(\lambda - n^3) \right| d\lambda \right)^2 \right)^{1/2} \\
&= \|\varphi_k\|_{H^s(\mathbb{T})} \left[ \left( \int_{\mathbb{R}} (1 + |\lambda'|) \left| \widehat{\psi}(\lambda') \right|^2 d\lambda' \right)^{1/2} + \left( \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{\psi}(\lambda') \right| d\lambda' \right) \right] \\
&\leq C \|\varphi_k\|_{H^s(\mathbb{T})},
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue do fato da função  $\psi$  pertencer ao espaço de Schwartz.

Portanto, temos que existe  $C > 0$ , de modo que

$$\| (2.18) \|_{\mathcal{Y}^s} \leq C \|\varphi_k\|_{H^s(\mathbb{T})}. \quad (2.22)$$

**Estimativa de  $\| (2.19) \|_{\mathcal{Y}^s}$ .**

No intuito de obter estimativas para  $\| (2.19) \|_{\mathcal{Y}^s}$ , então para cada  $j \in \mathbb{N}^*$ , definimos  $f_j : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , onde para qualquer  $x \in \mathbb{T}$  e  $t \in \mathbb{R}$ , temos

$$f_j(x, t) = t^j \psi(t) \sum_{n \in \dot{\mathbf{Z}}} e^{i(nx+n^3t)} \int_{\mathbb{R}} \psi(\tau - n^3) (\tau - n^3)^{j-1} \widehat{B}_k^\delta(n, \tau) d\tau.$$

Pela definição das funções  $f_j$ , temos então para qualquer  $x \in \mathbb{T}$  e  $t \in \mathbb{R}$  que

$$(2.19) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^{j+1}}{j!} f_j(x, t).$$

Buscaremos então estimativas para  $\| f_j \|_{\mathcal{Y}^s}$ .

Fixado  $j \in \mathbb{N}^*$  qualquer, afirmamos que

$$\widehat{f}_j(m, \lambda) = \widehat{t^j \psi}(\lambda - m^3) \int_{\mathbb{R}} \psi(\tau - m^3) (\tau - m^3)^{j-1} \widehat{B}_k^\delta(m, \tau) d\tau,$$

para quaisquer  $m \in \mathbb{Z}$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

De fato, fixados  $m \in \mathbb{Z}$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  quaisquer, temos que

$$\begin{aligned} & \widehat{f}_j(m, \lambda) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{T}} t^j \psi(t) \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-i[x \cdot (m-n) + t \cdot (\lambda - n^3)]} \int_{\mathbb{R}} \psi(\tau - n^3) (\tau - n^3)^{j-1} \widehat{B}_k^\delta(n, \tau) d\tau dx dt \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} e^{-it \cdot (\lambda - n^3)} t^j \psi(t) \int_{\mathbb{R}} \psi(\tau - n^3) (\tau - n^3)^{j-1} \widehat{B}_k^\delta(n, \tau) d\tau \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} e^{-ix \cdot (m-n)} dx dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-it \cdot (\lambda - m^3)} t^j \psi(t) \int_{\mathbb{R}} \psi(\tau - m^3) (\tau - m^3)^{j-1} \widehat{B}_k^\delta(m, \tau) d\tau dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-it \cdot (\lambda - m^3)} t^j \psi(t) dt \int_{\mathbb{R}} \psi(\tau - m^3) (\tau - m^3)^{j-1} \widehat{B}_k^\delta(m, \tau) d\tau \\ &= \widehat{t^j \psi}(\lambda - m^3) \int_{\mathbb{R}} \psi(\tau - m^3) (\tau - m^3)^{j-1} \widehat{B}_k^\delta(m, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Na sequência encontraremos uma estimativa para  $\|f_j\|_{\mathcal{Y}^s}$ .

$$\begin{aligned} & \|f_j\|_{\mathcal{Y}^s} \\ &= \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} \int_{\mathbb{R}} (1 + |\lambda - n^3|) \left| \widehat{t^j \psi}(\lambda - n^3) \right|^2 \right. \\ & \quad \cdot \left. \left| \int_{\mathbb{R}} \psi(\tau - n^3) (\tau - n^3)^{j-1} \widehat{B}_k^\delta(n, \tau) d\tau \right|^2 d\lambda \right)^{1/2} \\ & \quad + \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{t^j \psi}(\lambda - n^3) \int_{\mathbb{R}} \psi(\tau - n^3) (\tau - n^3)^{j-1} \widehat{B}_k^\delta(n, \tau) d\tau \right|^2 d\lambda \right)^{1/2} \right)^{1/2} \\ &= \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} \int_{\mathbb{R}} (1 + |\lambda'|) \left| \widehat{t^j \psi}(\lambda') \right|^2 \cdot \left| \int_{\mathbb{R}} \psi(\tau - n^3) (\tau - n^3)^{j-1} \widehat{B}_k^\delta(n, \tau) d\tau \right|^2 d\lambda' \right)^{1/2} \\ & \quad + \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{t^j \psi}(\lambda') \int_{\mathbb{R}} \psi(\tau - n^3) (\tau - n^3)^{j-1} \widehat{B}_k^\delta(n, \tau) d\tau \right|^2 d\lambda' \right)^{1/2} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \int_{\mathbb{R}} (1 + |\lambda'|) \left| \widehat{t^j \psi}(\lambda') \right|^2 d\lambda' \right)^{1/2} \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} \left| \int_{\mathbb{R}} \psi(\tau - n^3) (\tau - n^3)^{j-1} \widehat{B}_k^\delta(n, \tau) d\tau \right|^2 \right)^{1/2} \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{t^j \psi}(\lambda) \right| d\lambda \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} \psi(\tau - n^3) (\tau - n^3)^{j-1} \widehat{B}_k^\delta(n, \tau) d\tau \right)^2 \right)^{1/2} \\
&= \left( \left\| (1 + |\lambda|) \left| \widehat{t^j \psi}(\lambda) \right|^2 \right\|_{L^1(\mathbb{R})}^{1/2} + \left\| \widehat{t^j \psi}(\lambda) \right\|_{L^1(\mathbb{R})} \right) \cdot \\
&\quad \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} \left| \psi(\tau - n^3) (\tau - n^3)^{j-1} \widehat{B}_k^\delta(n, \tau) \right| d\tau \right)^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Como  $1 + |\lambda| \leq 2(1 + |\lambda|^2)$ , para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  e por  $\psi$  pertencer a  $C_0^\infty(-1, 1)$ , onde  $0 \leq \psi(t) \leq 1$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , obtemos que existe  $C = C(\psi) > 0$ , tal que

$$\begin{aligned}
\left\| (1 + |\lambda|) \left| \widehat{t^j \psi}(\lambda) \right|^2 \right\|_{L^1(\mathbb{R})}^{1/2} &\leq 2 \left( \int_{\mathbb{R}} (1 + |\lambda|^2) \left| \widehat{t^j \psi}(\lambda) \right|^2 d\lambda \right)^{1/2} \\
&= 2 \left\| t^j \psi \right\|_{H^1(\mathbb{R})} \\
&= 2 \left( \left\| t^j \psi \right\|_{H^0(\mathbb{R})} + \left\| (t^j \psi)' \right\|_{H^0(\mathbb{R})} \right) \\
&\leq 2 \left( \left\| t^j \psi \right\|_{L^2(\mathbb{R})} + \left\| j t^{j-1} \psi \right\|_{L^2(\mathbb{R})} + \left\| t^j \psi' \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \right) \\
&\leq C \cdot j.
\end{aligned}$$

Analogamente, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e desigualdade acima, obtemos que existe  $C = C(\psi) > 0$ , tal que

$$\begin{aligned}
\left\| \widehat{t^j \psi}(\lambda) \right\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{(1 + |\lambda|)} (1 + |\lambda|) \widehat{t^j \psi}(\lambda) \right| d\lambda \\
&\leq \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1 + |\lambda|)^2} d\lambda \right)^{1/2} \cdot \left( \int_{\mathbb{R}} (1 + |\lambda|)^2 \left| \widehat{t^j \psi}(\lambda) \right|^2 d\lambda \right)^{1/2} \\
&\leq C \left( \int_{\mathbb{R}} (1 + |\lambda|^2 + 2|\lambda|) \left| \widehat{t^j \psi}(\lambda) \right|^2 d\lambda \right)^{1/2} \\
&\leq C \left( \int_{\mathbb{R}} (1 + |\lambda|^2) \left| \widehat{t^j \psi}(\lambda) \right|^2 d\lambda \right)^{1/2} \\
&= C \left\| t^j \psi \right\|_{H^1(\mathbb{R})} \\
&\leq C \cdot j.
\end{aligned}$$

Portanto, devido as relações acima, nós obtemos para qualquer  $j \in \mathbb{N}^*$ , que existe  $C = C(\psi) > 0$ , onde

$$\|f_j\|_{\mathcal{Y}^s} \leq C \cdot j \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} |\psi(\tau - n^3) (\tau - n^3)^{j-1} \widehat{B}_k^\delta(n, \tau)| d\tau \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Novamente pelo fato de  $\psi \in C_0^\infty(-1, 1)$ , onde  $0 \leq \psi(t) \leq 1$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , então  $\psi(\tau - n^3) = 0$ , se  $|\tau - n^3| > 1$  e ainda  $|\psi(\tau - n^3)| |\tau - n^3|^{j-1} \leq 1$  se  $|\tau - n^3| \leq 1$ . Então obtemos para qualquer  $j \in \mathbb{N}^*$  que

$$\begin{aligned} \|f_j\|_{\mathcal{Y}^s} &\leq C \cdot j \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} |\psi(\tau - n^3) (\tau - n^3)^{j-1}| |\widehat{B}_k^\delta(n, \tau)| d\tau \right)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C \cdot j \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} \left( \int_{|\tau - n^3| \leq 1} |\widehat{B}_k^\delta(n, \tau)| d\tau \right)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C \cdot j \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} \left( \int_{|\tau - n^3| \leq 1} \frac{|\widehat{B}_k^\delta(n, \tau)|}{1 + |\tau - n^3|} d\tau \right)^2 \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde a última desigualdade decorre do fato que  $1 \leq \frac{2}{1 + |\tau - n^3|}$ , sempre que  $|\tau - n^3| \leq 1$ .

Pelo fato de (2.19) =  $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^{j+1}}{j!} f_j(x, t)$ , por  $\|\cdot\|_{\mathcal{Y}^s}$  ser norma e pela relação (2.23) obtemos que existe  $C > 0$ , tal que

$$\begin{aligned} \|(2.19)\|_{\mathcal{Y}^s} &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \|f_j\|_{\mathcal{Y}^s} \\ &\leq C \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{j!} \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} \left( \int_{|\tau - n^3| \leq 1} \frac{|\widehat{B}_k^\delta(n, \tau)|}{1 + |\tau - n^3|} d\tau \right)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} \left( \int_{|\tau - n^3| \leq 1} \frac{|\widehat{B}_k^\delta(n, \tau)|}{1 + |\tau - n^3|} d\tau \right)^2 \right)^{1/2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{j!} \\ &= C \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} \left( \int_{|\tau - n^3| \leq 1} \frac{|\widehat{B}_k^\delta(n, \tau)|}{1 + |\tau - n^3|} d\tau \right)^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

pois a série  $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}$  é convergente.

Portanto, obtemos existe  $C > 0$ , de modo que

$$\| (2.19) \|_{\mathcal{Y}^s} \leq C \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{B}_k^\delta(n, \tau)|}{1 + |\tau - n^3|} d\tau \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (2.24)$$

**Estimativa de**  $\| (2.20) \|_{\mathcal{Y}^s}$ .

Com o objetivo de obter uma estimativa para  $\| (2.20) \|_{\mathcal{Y}^s}$  e o intuito de simplificar a notação, definimos  $f : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , onde para quaisquer  $x \in \mathbb{T}$  e  $t \in \mathbb{R}$

$$f(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inx} \int_{\mathbb{R}} \frac{(1 - \psi)(\tau - n^3)}{\tau - n^3} e^{i\tau t} \widehat{B}_k^\delta(n, \tau) d\tau.$$

Devido a definição da função  $f$ , temos que  $(2.20) = i\psi(t)f(x, t)$ , para quaisquer  $x \in \mathbb{T}$  e  $t \in \mathbb{R}$ . Logo

$$\| (2.20) \|_{\mathcal{Y}^s} = \| i\psi f \|_{\mathcal{Y}^s} = \| \psi f \|_{\mathcal{Y}^s}.$$

Devido ao fato de  $\psi \in C_0^\infty(-1, 1)$ , temos então pelo Lema 1.3 que existe uma constante  $C = C(\psi) > 0$  de modo que  $\| \psi f \|_{\mathcal{Y}^s} \leq C \| f \|_{\mathcal{Y}^s}$ . Portanto para obter uma estimativa para  $\| (2.20) \|_{\mathcal{Y}^s}$ , basta encontrar uma estimativa para  $\| f \|_{\mathcal{Y}^s}$ .

Temos que  $\widehat{f}(m, \lambda) = \frac{(1 - \psi)(\lambda - m^3)}{\lambda - m^3} \widehat{B}_k^\delta(m, \lambda)$ , para todo  $m \in \mathbb{Z}$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

De fato, sendo  $m \in \mathbb{Z}$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  quaisquer, obtemos que

$$\begin{aligned} \widehat{f}(m, \lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{T}} e^{-ix \cdot m} e^{-it \cdot \lambda} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inx} \int_{\mathbb{R}} \frac{(1 - \psi)(\tau - n^3)}{\tau - n^3} e^{i\tau t} \widehat{B}_k^\delta(n, \tau) d\tau dx dt \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} e^{-it \cdot \lambda} \int_{\mathbb{R}} \frac{(1 - \psi)(\tau - n^3)}{\tau - n^3} e^{i\tau t} \widehat{B}_k^\delta(n, \tau) d\tau \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} e^{-ix \cdot (m-n)} dx dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-it \cdot \lambda} \int_{\mathbb{R}} \frac{(1 - \psi)(\tau - m^3)}{\tau - m^3} e^{i\tau t} \widehat{B}_k^\delta(m, \tau) d\tau dt \\ &= \frac{(1 - \psi)(\lambda - m^3)}{\lambda - m^3} \widehat{B}_k^\delta(m, \lambda). \end{aligned}$$

A seguir, iremos encontrar uma estimativa de  $\| f \|_{\mathcal{Y}^s}$ . Pelo fato da função  $\psi \in C_0^\infty(-1, 1)$ , onde  $0 \leq \psi(t) \leq 1$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  e ainda  $\psi(t) = 1$  se  $|t| < \frac{1}{2}$ ,

temos que  $(1 - \psi)(t) = 0$  se  $|t| < \frac{1}{2}$  e ainda  $|(1 - \psi)(t)| \leq 1$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , logo

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\mathcal{Y}^s} &= \left( \sum_{n \in \mathbf{Z}} |n|^{2s} \int_{\mathbb{R}} (1 + |\tau - n^3|) \left| \frac{(1 - \psi)(\tau - n^3)}{\tau - n^3} \widehat{B}_k^\delta(n, \tau) \right|^2 d\tau \right)^{1/2} \\
&\quad + \left( \sum_{n \in \mathbf{Z}} |n|^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{(1 - \psi)(\tau - n^3)}{\tau - n^3} \widehat{B}_k^\delta(n, \tau) \right| d\tau \right)^2 \right)^{1/2} \\
&= \left( \sum_{n \in \mathbf{Z}} |n|^{2s} \int_{|\tau - n^3| \geq \frac{1}{2}} (1 + |\tau - n^3|) \frac{|(1 - \psi)(\tau - n^3)|^2}{|\tau - n^3|^2} \left| \widehat{B}_k^\delta(n, \tau) \right|^2 d\tau \right)^{1/2} \\
&\quad + \left( \sum_{n \in \mathbf{Z}} |n|^{2s} \left( \int_{|\tau - n^3| \geq \frac{1}{2}} \frac{|(1 - \psi)(\tau - n^3)|}{|\tau - n^3|} \left| \widehat{B}_k^\delta(n, \tau) \right| d\tau \right)^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \left( \sum_{n \in \mathbf{Z}} |n|^{2s} \int_{|\tau - n^3| \geq \frac{1}{2}} \frac{(1 + |\tau - n^3|)}{|\tau - n^3|^2} \left| \widehat{B}_k^\delta(n, \tau) \right|^2 d\tau \right)^{1/2} \\
&\quad + \left( \sum_{n \in \mathbf{Z}} |n|^{2s} \left( \int_{|\tau - n^3| \geq \frac{1}{2}} \frac{\left| \widehat{B}_k^\delta(n, \tau) \right|}{|\tau - n^3|} d\tau \right)^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Se  $|\tau - n^3| \geq \frac{1}{2}$ , então  $1 + |\tau - n^3| \leq 2|\tau - n^3| + |\tau - n^3| = 3|\tau - n^3|$  donde resulta que  $\frac{1}{|\tau - n^3|} \leq \frac{3}{1 + |\tau - n^3|}$  e ainda  $\frac{1}{|\tau - n^3|^2} \leq \frac{9}{(1 + |\tau - n^3|)^2}$ . Portanto temos que existe  $C > 0$ , tal que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\mathcal{Y}^s} &\leq C \left( \sum_{n \in \mathbf{Z}} |n|^{2s} \int_{|\tau - n^3| \geq \frac{1}{2}} \frac{\left| \widehat{B}_k^\delta(n, \tau) \right|^2}{1 + |\tau - n^3|} d\tau \right)^{1/2} \\
&\quad + C \left( \sum_{n \in \mathbf{Z}} |n|^{2s} \left( \int_{|\tau - n^3| \geq \frac{1}{2}} \frac{\left| \widehat{B}_k^\delta(n, \tau) \right|}{1 + |\tau - n^3|} d\tau \right)^2 \right)^{1/2} \\
&\leq C \left( \sum_{n \in \mathbf{Z}} |n|^{2s} \int_{\mathbb{R}} \frac{\left| \widehat{B}_k^\delta(n, \tau) \right|^2}{1 + |\tau - n^3|} d\tau \right)^{1/2} \\
&\quad + C \left( \sum_{n \in \mathbf{Z}} |n|^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{\left| \widehat{B}_k^\delta(n, \tau) \right|}{1 + |\tau - n^3|} d\tau \right)^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Devido ao fato de  $\| (2.20) \|_{\mathcal{Y}^s} \leq C \| f \|_{\mathcal{Y}^s}$ , obtemos existe  $C > 0$ , tal que

$$\begin{aligned} \| (2.20) \|_{\mathcal{Y}^s} &\leq C \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{B}_k^\delta(n, \tau)|^2}{1 + |\tau - n^3|} d\tau \right)^{1/2} \\ &\quad + C \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{B}_k^\delta(n, \tau)|}{1 + |\tau - n^3|} d\tau \right)^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

**Estimativa de  $\| (2.21) \|_{\mathcal{Y}^s}$ .**

Com o objetivo de simplificar a notação, definimos  $f : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , onde

$$f(x, t) = \psi(t) \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i(nx+n^3t)} \int_{\mathbb{R}} \frac{(1-\psi)(\tau-n^3)}{(\tau-n^3)} \widehat{B}_k^\delta(n, \tau) d\tau,$$

para quaisquer  $x \in \mathbb{T}$  e  $t \in \mathbb{R}$ . Devido a definição da função  $f$ , temos para todo  $x \in \mathbb{T}$  e  $t \in \mathbb{R}$  que

$$(2.21) = -if(x, t).$$

Portanto

$$\| (2.21) \|_{\mathcal{Y}^s} = \| if \|_{\mathcal{Y}^s} = \| f \|_{\mathcal{Y}^s}.$$

Então para obter uma estimativa de  $\| (2.21) \|_{\mathcal{Y}^s}$  basta encontrar uma majoração para  $\| f \|_{\mathcal{Y}^s}$ .

Afirmamos que  $\widehat{f}(m, \lambda) = \widehat{\psi}(\lambda - m^3) \int_{\mathbb{R}} \frac{(1-\psi)(\tau - m^3)}{(\tau - m^3)} \widehat{B}_k^\delta(m, \tau) d\tau$ , para quaisquer  $m \in \mathbb{Z}$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

De fato, pois fixados  $m \in \mathbb{Z}$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , obtemos que

$$\begin{aligned} \widehat{f}(m, \lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{T}} e^{-ix \cdot m} e^{-it \cdot \lambda} \psi(t) \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i(nx+n^3t)} \int_{\mathbb{R}} \frac{(1-\psi)(\tau - n^3)}{(\tau - n^3)} \widehat{B}_k^\delta(n, \tau) d\tau dx dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-it \cdot \lambda} \psi(t) \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in^3t} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} e^{-ix \cdot (m-n)} dx \int_{\mathbb{R}} \frac{(1-\psi)(\tau - n^3)}{(\tau - n^3)} \widehat{B}_k^\delta(n, \tau) d\tau dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-it \cdot (\lambda - m^3)} \psi(t) \int_{\mathbb{R}} \frac{(1-\psi)(\tau - m^3)}{(\tau - m^3)} \widehat{B}_k^\delta(m, \tau) d\tau dt \\ &= \widehat{\psi}(\lambda - m^3) \int_{\mathbb{R}} \frac{(1-\psi)(\tau - m^3)}{(\tau - m^3)} \widehat{B}_k^\delta(m, \tau) d\tau. \end{aligned}$$



Na seqüência encontraremos uma estimativa para  $\|f\|_{\mathcal{Y}^s}$ ,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\mathcal{Y}^s} &= \left( \sum_{n \in \dot{\mathbf{Z}}} |n|^{2s} \int_{\mathbb{R}} (1 + |\lambda - n^3|) \left| \widehat{\psi}(\lambda - n^3) \int_{\mathbb{R}} \frac{(1 - \psi)(\tau - n^3)}{\tau - n^3} \widehat{B}_k^\delta(n, \tau) d\tau \right|^2 d\lambda \right)^{1/2} \\
&\quad + \left( \sum_{n \in \dot{\mathbf{Z}}} |n|^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{\psi}(\lambda - n^3) \int_{\mathbb{R}} \frac{(1 - \psi)(\tau - n^3)}{\tau - n^3} \widehat{B}_k^\delta(n, \tau) d\tau \right|^2 d\lambda \right)^2 \right)^{1/2} \\
&= \left( \int_{\mathbb{R}} (1 + |\lambda'|) \left| \widehat{\psi}(\lambda') \right|^2 d\lambda' \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{n \in \dot{\mathbf{Z}}} |n|^{2s} \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{(1 - \psi)(\tau - n^3)}{\tau - n^3} \widehat{B}_k^\delta(n, \tau) d\tau \right|^2 \right)^{1/2} \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{\psi}(\lambda') \right| d\lambda' \left( \sum_{n \in \dot{\mathbf{Z}}} |n|^{2s} \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{(1 - \psi)(\tau - n^3)}{\tau - n^3} \widehat{B}_k^\delta(n, \tau) d\tau \right|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq C \left( \sum_{n \in \dot{\mathbf{Z}}} |n|^{2s} \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{(1 - \psi)(\tau - n^3)}{\tau - n^3} \widehat{B}_k^\delta(n, \tau) d\tau \right|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq C \left( \sum_{n \in \dot{\mathbf{Z}}} |n|^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{(1 - \psi)(\tau - n^3)}{\tau - n^3} \widehat{B}_k^\delta(n, \tau) \right|^2 d\tau \right)^2 \right)^{1/2},
\end{aligned}$$

onde a penúltima desigualdade decorre do fato que a função  $\psi$  pertence ao espaço de Schwartz.

Pelo fato de  $0 \leq \psi(t) \leq 1$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$  e  $\psi(\tau - n^3) \equiv 1$ , sempre que  $|\tau - n^3| < \frac{1}{2}$ , obtemos então que  $|(1 - \psi)(\tau - n^3)| = 0$ , se  $|\tau - n^3| < \frac{1}{2}$ . Usando este fato, por  $|(1 - \psi)(t)| \leq 1$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$  e ainda que  $\frac{1}{|\tau - n^3|} \leq \frac{3}{1 + |\tau - n^3|}$  se  $|\tau - n^3| \geq \frac{1}{2}$ , obtemos então que existe  $C > 0$ , onde

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\mathcal{Y}^s} &\leq C \left( \sum_{n \in \dot{\mathbf{Z}}} |n|^{2s} \left( \int_{|\tau - n^3| \geq \frac{1}{2}} \frac{|\widehat{B}_k^\delta(n, \tau)|}{|\tau - n^3|} d\tau \right)^2 \right)^{1/2} \\
&\leq C \left( \sum_{n \in \dot{\mathbf{Z}}} |n|^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{B}_k^\delta(n, \tau)|}{1 + |\tau - n^3|} d\tau \right)^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Portanto, existe  $C > 0$  de modo que

$$\| (2.21) \|_{\mathcal{Y}^s} \leq C \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{B}_k^\delta(n, \tau)|}{1 + |\tau - n^3|} d\tau \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (2.26)$$

A partir das relações (2.22), (2.24), (2.25) e (2.26) obtemos o seguinte resultado.

**Proposição 2.2** *Fixado  $0 < \delta < 1$  qualquer, então existe  $C > 0$  de modo que*

$$\begin{aligned} \| T_k^\delta(u_0, u_1, \dots, u_k) \|_{\mathcal{Y}^s} &\leq C \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{B}_k^\delta(n, \tau)|^2}{1 + |\tau - n^3|} d\tau \right)^{1/2} + C \|\varphi_k\|_{H^s(\mathbb{T})} \\ &+ C \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{B}_k^\delta(n, \tau)|}{1 + |\tau - n^3|} d\tau \right)^2 \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

para quaisquer  $u_0, u_1, \dots, u_k \in \mathcal{Y}^s$ .

Devido a definição de  $B_k^\delta$ , faremos uso de duas estimativas bilineares, cuja demonstração pode ser encontrada em ([B], p.214).

**Proposição 2.3** *Existe  $C > 0$ , de modo que para quaisquer  $f, g \in \mathcal{X}^s$ , com  $t$ -suporte no intervalo  $[-\delta, \delta]$ , temos*

$$\left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{w}_{fg}(n, \tau)|^2}{1 + |\tau - n^3|} d\tau \right)^{1/2} \leq C \delta^{1/12} \|f\|_{\mathcal{X}^s} \|g\|_{\mathcal{X}^s}, \quad (2.28)$$

$$\left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{w}_{fg}(n, \tau)|}{1 + |\tau - n^3|} d\tau \right)^2 \right)^{1/2} \leq C \delta^{1/12} \|f\|_{\mathcal{X}^s} \|g\|_{\mathcal{X}^s}, \quad (2.29)$$

onde  $w_{fg} = \partial_x(f \cdot g)$ .

Portanto, para qualquer  $0 < \delta < 1$  e  $u_0, u_1, \dots, u_k \in \mathcal{Y}^s$ , temos que existe  $C > 0$ , tal que

$$\begin{aligned}
& \left( \sum_{n \in \dot{\mathbf{Z}}} |n|^{2s} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{B}_k^\delta(n, \tau)|^2}{1 + |\tau - n^3|} d\tau \right)^{1/2} \\
&= \left( \sum_{n \in \dot{\mathbf{Z}}} |n|^{2s} \int_{\mathbb{R}} \frac{\left| \frac{1}{2} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} [\partial_x (\psi_\delta u_{k-j} \cdot \psi_\delta u_j)] \widehat{\phantom{u}}(n, \tau) \right|^2}{1 + |\tau - n^3|} d\tau \right)^{1/2} \\
&\leq C \sum_{j=0}^k \left( \sum_{n \in \dot{\mathbf{Z}}} |n|^{2s} \int_{\mathbb{R}} \frac{\left| [\partial_x \left( \binom{k}{j} \psi_\delta u_{k-j} \cdot \psi_\delta u_j \right)] \widehat{\phantom{u}}(n, \tau) \right|^2}{1 + |\tau - n^3|} d\tau \right)^{1/2} \\
&\leq \sum_{j=0}^k C \delta^{1/12} \left\| \binom{k}{j} \psi_\delta u_{k-j} \right\|_{\mathcal{X}^s} \left\| \psi_\delta u_j \right\|_{\mathcal{X}^s} \\
&= C \delta^{1/12} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left\| \psi_\delta u_{k-j} \right\|_{\mathcal{X}^s} \left\| \psi_\delta u_j \right\|_{\mathcal{X}^s}.
\end{aligned}$$

Ainda devido a Proposição 2.3, obtemos que existe  $C > 0$ , de modo que

$$\begin{aligned}
& \left( \sum_{n \in \dot{\mathbf{Z}}} |n|^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{B}_k^\delta(n, \tau)|}{1 + |\tau - n^3|} d\tau \right)^2 \right)^{1/2} \\
&= \left( \sum_{n \in \dot{\mathbf{Z}}} |n|^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{\left| \frac{1}{2} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} [\partial_x (\psi_\delta u_{k-j} \cdot \psi_\delta u_j)] \widehat{\phantom{u}}(n, \tau) \right|^2}{1 + |\tau - n^3|} d\tau \right)^2 \right)^{1/2} \\
&\leq C \sum_{j=0}^k \left( \sum_{n \in \dot{\mathbf{Z}}} |n|^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{\left| [\partial_x \left( \binom{k}{j} \psi_\delta u_{k-j} \cdot \psi_\delta u_j \right)] \widehat{\phantom{u}}(n, \tau) \right|^2}{1 + |\tau - n^3|} d\tau \right)^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \sum_{j=0}^k C \delta^{1/12} \left\| \binom{k}{j} \psi_\delta u_{k-j} \right\|_{\mathcal{X}^s} \left\| \psi_\delta u_j \right\|_{\mathcal{X}^s} \\
&= C \delta^{1/12} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left\| \psi_\delta u_{k-j} \right\|_{\mathcal{X}^s} \left\| \psi_\delta u_j \right\|_{\mathcal{X}^s},
\end{aligned}$$

para quaisquer  $u_0, u_1, \dots, u_k \in \mathcal{Y}^s$ .

Logo pela relação (2.27) e as desigualdades acima, obtemos para qualquer  $0 < \delta < 1$  que existe  $C > 0$ , de modo que

$$\| \|T_k^\delta(u_0, u_1, \dots, u_k)\| \|_{\mathcal{Y}^s} \leq C\delta^{1/12} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \| \psi_\delta u_{k-j} \| \|_{\mathcal{X}^s} \| \psi_\delta u_j \| \|_{\mathcal{X}^s} + C \| \varphi_k \| \|_{H^s(\mathbb{T})}, \quad (2.30)$$

onde  $u_0, u_1, \dots, u_k \in \mathcal{Y}^s$  são quaisquer.

O Lema a seguir é extremamente essencial para finalizarmos a demonstração da Proposição 1.1, pois ele nos garante, para cada  $0 < \delta < 1$ , que existe uma constante  $C = C(\frac{1}{48})$  positiva, onde  $\| \psi_\delta v \| \|_{\mathcal{X}^s} \leq C\delta^{-1/48} \| v \| \|_{\mathcal{X}^s}$  para qualquer  $v \in \mathcal{X}^s$ . Na demonstração deste resultado será utilizado alguns argumentos de interpolação.

**Lema 2.1** *Seja  $0 < \delta < 1$  qualquer. Então para qualquer  $0 < \varepsilon < 1$  existe uma constante  $C = C(\varepsilon) > 0$ , de modo que para qualquer  $u \in \mathcal{X}^s$  temos*

$$\| \psi_\delta u \| \|_{\mathcal{X}^s} \leq C\delta^{-\varepsilon} \| u \| \|_{\mathcal{X}^s}. \quad (2.31)$$

**Demonstração:** Fixemos  $0 < \varepsilon < 1$  qualquer. Pelo fato que

$$\| v \| \|_{\mathcal{X}^s} = \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^{2s} \int_{\mathbb{R}} (1 + |\lambda - n^3|) |\widehat{v}(n, \lambda)|^2 d\lambda \right)^{1/2},$$

para qualquer  $v \in \mathcal{X}^s$ , então para que a relação (2.31) seja válida basta mostrar que existe  $C > 0$ , de modo que para qualquer  $n \in \mathbb{Z}$  e  $u \in \mathcal{X}^s$

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |\lambda - n^3|) \left| \widehat{\psi_\delta u}(n, \lambda) \right|^2 d\lambda \leq C\delta^{-2\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} (1 + |\lambda - n^3|) |\widehat{u}(n, \lambda)|^2 d\lambda. \quad (2.32)$$

Fixemos então  $u \in \mathcal{X}^s$  qualquer. Temos que a relação (2.32) é equivalente à seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} (1 + |\tau|) \left| \left[ e^{-in^3 t} \psi_\delta(t) \widehat{u}^x(n, t) \right]^{\widehat{\tau}}(\tau) \right|^2 d\tau \\ & \leq C\delta^{-2\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} (1 + |\tau|) \left| \left[ e^{-in^3 t} \widehat{u}^x(n, t) \right]^{\widehat{\tau}}(\tau) \right|^2 d\tau, \end{aligned} \quad (2.33)$$

para qualquer  $n \in \mathbb{Z}$ .

Fixado  $n \in \mathbb{Z}$  qualquer, definimos para cada  $t \in \mathbb{R}$  a função  $h_n$  onde  $h_n(t) = \widehat{u}^x(n, t)$ , então a desigualdade (2.33) pode ser reescrita como

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |\tau|) \left| \left[ e^{-in^3t} \psi_\delta(t) h_n(t) \right]^\wedge(\tau) \right|^2 d\tau \leq C\delta^{-2\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} (1 + |\tau|) \left| \left[ e^{-in^3t} h_n(t) \right]^\wedge(\tau) \right|^2 d\tau,$$

ou seja,

$$\left\| e^{-in^3t} \psi_\delta(t) h_n(t) \right\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})}^2 \leq C\delta^{-2\varepsilon} \left\| e^{-in^3t} h_n(t) \right\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})}^2. \quad (2.34)$$

No intuito de demonstrar que a relação (2.34) é satisfeita, utilizaremos alguns argumentos de interpolação.

Sendo  $b = \frac{1 + \varepsilon}{2}$ , então para qualquer  $0 \leq \rho \leq 1$  definimos  $\mathcal{A}_\rho \doteq H^{\rho b}(\mathbb{R})$ . Observe que  $\mathcal{A}_0 = L^2(\mathbb{R})$  e pelo fato de  $H^s(\mathbb{R})$  ser um espaço de Banach para qualquer  $s \geq 0$ , obtemos então que  $\mathcal{A}_\rho$  é um espaço de Banach para qualquer  $0 \leq \rho \leq 1$ .

A seguir citaremos um resultado apenas para referência futura. Este resultado nos dá uma condição para que os elementos de  $H^s(\mathbb{R}^n)$  sejam funções contínuas.

**Lema 2.2** *Seja  $s > \frac{n}{2}$ . Então  $H^s(\mathbb{R}^n)$  pode ser imerso continuamente em  $C_\infty(\mathbb{R}^n)$  (a coleção das funções contínuas de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{C}$  que tendem a zero quando  $|x| \rightarrow \infty$ ) e vale a seguinte desigualdade*

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^s} d\xi \right)^{1/2} \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

A demonstração deste lema pode ser encontrada em ([I], p.340).

Em ([SW], p.211) encontramos o seguinte resultado.

**Lema 2.3** *Sendo  $\mathcal{A}_0$  e  $\mathcal{A}_1$  dois espaços de Banach e  $T$  é um operador linear de  $\mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1$  em  $\mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1$ , onde  $T$  leva  $\mathcal{A}_j$  em  $\mathcal{A}_j$ , para  $j = 0, 1$  e ainda existem constantes  $M_0$  e  $M_1$ , de modo que  $\|Ta\|_{\mathcal{A}_j} \leq M_j \|a\|_{\mathcal{A}_j}$ ,  $j = 0, 1$  e  $a \in \mathcal{A}_j$ , então  $T$  leva  $\mathcal{A}_\rho$  em  $\mathcal{A}_\rho$  e ainda  $\|Ta\|_{\mathcal{A}_\rho} \leq M_0^{(1-\rho)} M_1^\rho \|a\|_{\mathcal{A}_\rho}$ , para qualquer  $0 \leq \rho \leq 1$  e  $a \in \mathcal{A}_\rho$ .*

Com o objetivo mostrar que a relação (2.34) é satisfeita, iremos aplicar o Lema acima com  $T$  sendo o operador multiplicação por  $\psi_\delta$ , mais precisamente,  $T(f)(t) = \psi_\delta(t)f(t)$ , para qualquer função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Claramente  $T$  é linear.

Seja  $f \in L^2(\mathbb{R})$  qualquer, pelo fato de  $\psi_\delta \in C_0^\infty(-\delta, \delta)$ , onde  $0 \leq \psi_\delta(t) \leq 1$ , temos que

$$\|Tf\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{[\psi_\delta f]}(t) \right|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |\psi_\delta f(t)|^2 dt \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2. \quad (2.35)$$

Portanto o operador  $T$  leva  $\mathcal{A}_0$  em  $\mathcal{A}_0$ .

A seguir mostraremos que existe  $C > 0$  de modo que para qualquer  $f \in \mathcal{A}_1$  é válida a seguinte estimativa

$$\|Tf\|_{\mathcal{A}_1} \leq C\delta^{2(1-2b)}\|f\|_{\mathcal{A}_1},$$

donde resulta que  $T$  leva  $\mathcal{A}_1$  em  $\mathcal{A}_1$ .

Fixemos  $f \in \mathcal{A}_1$  qualquer. Devido o fato que  $\frac{1}{2} < b < 1$ , obtemos então que  $(1 + |\tau|)^{2b} \leq (1 + 2^b)(1 + |\tau|^{2b})$ , para qualquer  $\tau \in \mathbb{R}$ . Portanto temos que

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{\mathcal{A}_1}^2 &= \int_{\mathbb{R}} (1 + |\tau|)^{2b} \left| \widehat{Tf}(\tau) \right|^2 d\tau \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}} (1 + |\tau|^{2b}) \left| \widehat{[\psi_\delta f]}(\tau) \right|^2 d\tau \\ &= C \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{[\psi_\delta f]}(\tau) \right|^2 d\tau \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$+ C \int_{\mathbb{R}} |\tau|^{2b} \left| \widehat{[\psi_\delta f]}(\tau) \right|^2 d\tau. \quad (2.37)$$

Nosso objetivo então é obter majorações para as relações (2.36) e (2.37).

Devido a relação (2.35), obtemos que

$$(2.36) \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

Pelo fato que  $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{\mathcal{A}_1}$  para qualquer  $f \in \mathcal{A}_1$  e como  $1 < \delta^{2(1-2b)}$ , então obtemos que

$$(2.36) \leq C\delta^{2(1-2b)}\|f\|_{\mathcal{A}_1}^2. \quad (2.38)$$

Com o objetivo de obter uma estimativa para a relação (2.37), para qualquer  $g \in H^b(\mathbb{R})$  definimos  $D^b g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde para todo  $x \in \mathbb{R}$  temos

$$D^b g(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix \cdot \lambda} |\lambda|^b \widehat{g}(\lambda) d\lambda.$$

Temos então para qualquer  $\tau \in \mathbb{R}$  que

$$\widehat{D^b g}(\tau) = |\tau|^b \widehat{g}(\tau).$$

Portanto

$$\begin{aligned} (2.37) &= C \int_{\mathbb{R}} |\tau|^{2b} \left| \widehat{[\psi_\delta f]}(\tau) \right|^2 d\tau \\ &= C \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{[D^b(\psi_\delta f)]}(\tau) \right|^2 d\tau \\ &= C \|D^b(\psi_\delta f)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2, \end{aligned} \tag{2.39}$$

então o nosso objetivo então será encontrar uma estimativa para a relação (2.39).

Em ([KPV1], p.614) pode ser encontrada a demonstração do seguinte resultado.

**Lema 2.4** *Caso  $0 < \alpha < 1$  e  $1 < p < \infty$ , então*

$$\|D^\alpha(gh) - hD^\alpha g - gD^\alpha h\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|D^\alpha h\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Aplicando o Lema acima com  $\alpha = b$ ,  $p = 2$ ,  $g = \psi_\delta$  e  $h = f$ , obtemos que

$$\begin{aligned} &\|D^b(\psi_\delta f)\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq C \|\psi_\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|D^b f\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|f D^b \psi_\delta\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\psi_\delta D^b f\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Pelo fato que  $\psi_\delta \in C_0^\infty(-\delta, \delta)$ , onde  $0 \leq \psi_\delta(t) \leq 1$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , resulta que  $\|\psi_\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 1$  e ainda  $\|\psi_\delta\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C$ .

Então decorre da desigualdade de Hölder que

$$\|\psi_\delta D^b f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|\psi_\delta\|_{L^2(\mathbb{R})} \|D^b f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C \|D^b f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Devido a definição de  $D^b f$ , temos então que

$$\|D^b f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left( \int_{\mathbb{R}} |\tau|^{2b} |\widehat{f}(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} \leq \left( \int_{\mathbb{R}} (1 + |\tau|)^{2b} |\widehat{f}(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} = \|f\|_{\mathcal{A}_1}.$$

Portanto devido as relações acima obtemos que

$$\|D^b(\psi_\delta f)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C \|f\|_{\mathcal{A}_1} + \|f D^b \psi_\delta\|_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (2.41)$$

A seguir buscaremos uma estimativa para  $\|f D^b \psi_\delta\|_{L^2(\mathbb{R})}$ .

Devido o fato de  $f \in H^b(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_1$  com  $\frac{1}{2} < b < 1$ , temos pelo Lema 2.2 que existe  $C = C(\frac{1}{2}) > 0$  de modo que

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C \|f\|_{\mathcal{A}_1}.$$

Portanto obtemos que

$$\|f D^b \psi_\delta\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|D^b \psi_\delta\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C \|f\|_{\mathcal{A}_1} \|D^b \psi_\delta\|_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (2.42)$$

Usando o fato que  $\widehat{\psi_\delta}(\tau) = \delta \widehat{\psi}(\delta\tau)$  para todo  $\tau \in \mathbb{R}$ , temos então que existe  $C = C(\psi) > 0$ , tal que

$$\begin{aligned} \|D^b \psi_\delta\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \int_{\mathbb{R}} |\tau|^{2b} |\widehat{\psi_\delta}(\tau)|^2 d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\tau|^{2b} |\delta \widehat{\psi}(\delta\tau)|^2 d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\mu}{\delta} \right|^{2b} \delta |\widehat{\psi}(\mu)|^2 d\mu \\ &\leq \delta^{(1-2b)} \int_{\mathbb{R}} (1 + |\mu|^2) |\widehat{\psi}(\mu)|^2 d\mu \\ &\leq C \delta^{2(1-2b)}, \end{aligned}$$

pois a função  $\psi$  pertence ao espaço de Schwartz e  $1 < \delta^{(1-2b)}$ .

Logo devido a relação (2.42) e a última desigualdade, obtemos que

$$\|f D^b \psi_\delta\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C \delta^{(1-2b)} \|f\|_{\mathcal{A}_1}. \quad (2.43)$$

Usando o fato que  $1 < \delta^{(1-2b)}$  e devido as relações (2.41) e (2.43) temos que

$$\|D^b(\psi_\delta f)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq C \delta^{2(1-2b)} \|f\|_{\mathcal{A}_1}^2. \quad (2.44)$$



Segue então das relações (2.38), (2.39) e (2.44) que

$$\|Tf\|_{\mathcal{A}_1}^2 \leq C\delta^{2(1-2b)}\|f\|_{\mathcal{A}_1}^2.$$

Novamente usando o fato que  $1 < \delta^{(1-2b)}$  obtemos que

$$\|Tf\|_{\mathcal{A}_1} \leq C\delta^{2(1-2b)}\|f\|_{\mathcal{A}_1}. \quad (2.45)$$

Pelo fato das hipóteses do Lema 2.3 estarem satisfeitas, onde as constantes  $M_0$  e  $M_1$  são respectivamente 1 e  $C\delta^{2(1-2b)}$ , temos então que

$$\left\| e^{-in^3t}\psi_\delta(t)h_n(t) \right\|_{\mathcal{A}_\rho} \leq C\delta^{2(1-2b)\rho} \left\| e^{-in^3t}h_n(t) \right\|_{\mathcal{A}_\rho},$$

para qualquer  $0 \leq \rho \leq 1$ .

Tomando  $\rho = \frac{1}{2b}$ , temos que  $\rho b = \frac{1}{2}$  e pelo fato que  $\delta^{\frac{-2\varepsilon}{(1+\varepsilon)}} \leq \delta^{-2\varepsilon}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \left\| e^{-in^3t}\psi_\delta(t)h_n(t) \right\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} &\leq C\delta^{\frac{(1-2b)}{b}} \left\| e^{-in^3t}h_n(t) \right\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \\ &= C\delta^{\frac{2(1-1-\varepsilon)}{1+\varepsilon}} \left\| e^{-in^3t}h_n(t) \right\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \\ &= C\delta^{\frac{-2\varepsilon}{(1+\varepsilon)}} \left\| e^{-in^3t}h_n(t) \right\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})} \\ &\leq C\delta^{-2\varepsilon} \left\| e^{-in^3t}h_n(t) \right\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

donde resulta que a relação (2.34) é satisfeita.

Pelo fato de  $n \in \dot{\mathbb{Z}}$  ser qualquer, temos que a relação (2.34) é satisfeita para todo  $n \in \dot{\mathbb{Z}}$ , donde resulta que é válida a relação (2.32) para qualquer  $n \in \dot{\mathbb{Z}}$ , ou seja, existe  $C = C(\varepsilon) > 0$  de modo que

$$\|\psi_\delta u\|_{\mathcal{X}^s} \leq C\delta^{-\varepsilon}\|u\|_{\mathcal{X}^s},$$

o que conclui demonstração do Lema 2.1.

Devido a relação (2.30) e ao Lema 2.1 aplicado com  $\varepsilon = \frac{1}{48}$  obtemos para qualquer  $0 < \delta < 1$ , que existe  $C > 0$  de modo que

$$\begin{aligned}
\|T_k^\delta(u_0, u_1, \dots, u_k)\|_{\mathcal{Y}^s} &\leq C\delta^{1/12} \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \|\psi_\delta u_{k-j}\|_{\mathcal{X}^s} \|\psi_\delta u_j\|_{\mathcal{X}^s} + C\|\varphi_k\|_{H^s(\mathbb{T})} \\
&\leq C\delta^{1/12} \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \delta^{-1/24} \|u_{k-j}\|_{\mathcal{X}^s} \|u_j\|_{\mathcal{X}^s} + C\|\varphi_k\|_{H^s(\mathbb{T})} \\
&\leq C\delta^{1/24} \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \|u_{k-j}\|_{\mathcal{Y}^s} \|u_j\|_{\mathcal{Y}^s} + C\|\varphi_k\|_{H^s(\mathbb{T})}
\end{aligned}$$

para quaisquer  $u_0, u_1, \dots, u_k \in \mathcal{Y}^s$ , pois  $\|\cdot\|_{\mathcal{X}^s} \leq \|\cdot\|_{\mathcal{Y}^s}$ , desse modo concluindo a demonstração da Proposição 1.1.

## 2.2 Demonstração da Proposição 1.2

Esta seção tem por objetivo demonstrar a Proposição 1.2, cujo resultado, juntamente com a Proposição 1.1, foi essencial para demonstrarmos o Lema 1.7, e consequentemente, concluir que o operador  $T^\delta$  é uma contração em um conjunto apropriado de  $\mathcal{A}(\mathcal{Y}^s)$ . A princípio vamos enunciar novamente a referida proposição.

**Proposição 2.4** *Se  $0 < \delta < 1$ , então existe uma constante  $C > 0$ , de modo que*

$$\begin{aligned}
&\|T_k^\delta(w_0, w_1, \dots, w_k) - T_k^\delta(v_0, v_1, \dots, v_k)\|_{\mathcal{Y}^s} \\
&\leq C\delta^{1/24} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \|w_{k-j} + v_{k-j}\|_{\mathcal{Y}^s} \|w_j - v_j\|_{\mathcal{Y}^s},
\end{aligned}$$

para quaisquer  $w_0, v_0, w_1, v_1, \dots, w_k, v_k \in \mathcal{Y}^s$ .

**Demonstração:** Fixado  $k \in \mathbb{N}$  qualquer, temos então que

$$\begin{aligned}
&T_k^\delta(w_0, w_1, \dots, w_k) - T_k^\delta(v_0, v_1, \dots, v_k) \\
&= - \int_0^t W(t-\tau) B_k^\delta(w, w)(x, \tau) d\tau + \int_0^t W(t-\tau) B_k^\delta(v, v)(x, \tau) d\tau \\
&= - \int_0^t W(t-\tau) (B_k^\delta(w, w) - B_k^\delta(v, v))(x, \tau) d\tau. \tag{2.46}
\end{aligned}$$

Com objetivo de reescrever a relação acima de outra forma, temos que

$$\begin{aligned}
& B_k^\delta(w, w) - B_k^\delta(v, v) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \partial_x (\psi_\delta w_{k-j} \psi_\delta w_j) - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \partial_x (\psi_\delta v_{k-j} \psi_\delta v_j) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \partial_x [\psi_\delta^2 (w_{k-j} w_j - v_{k-j} v_j)] \\
&= \frac{1}{2} \partial_x \left[ \psi_\delta^2 (w_k w_0 - w_k v_0 + v_k w_0 - v_k v_0 + k(w_{k-1} w_1 - w_{k-1} v_1 + v_{k-1} w_1 - v_{k-1} v_1) \right. \\
&\quad + \frac{k(k-1)}{2} (w_{k-2} w_2 - w_{k-2} v_2 + v_{k-2} w_2 - v_{k-2} v_2) + \dots \\
&\quad + \frac{k(k-1)}{2} (w_2 w_{k-2} - w_2 v_{k-2} + v_2 w_{k-2} - v_2 v_{k-2}) \\
&\quad \left. + k(w_1 w_{k-1} - w_1 v_{k-1} + v_1 w_{k-1} - v_1 v_{k-1}) + w_0 w_k - w_0 v_k + v_0 w_k - v_0 v_k \right] \\
&= \frac{1}{2} \partial_x \left[ \psi_\delta^2 ((w_k + v_k)(w_0 - v_0) + k(w_{k-1} + v_{k-1})(w_1 - v_1) \right. \\
&\quad + \frac{k(k-1)}{2} (w_{k-2} + v_{k-2})(w_2 - v_2) + \dots + \frac{k(k-1)}{2} (w_2 + v_2)(w_{k-2} - v_{k-2}) \\
&\quad \left. + k(w_1 + v_1)(w_{k-1} - v_{k-1}) + (w_0 + v_0)(w_k - v_k) \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \partial_x [\psi_\delta (w_{k-j} + v_{k-j}) \cdot \psi_\delta (w_j - v_j)] \\
&= B_k^\delta(w_{k-j} + v_{k-j}, w_j - v_j) \\
&\doteq \tilde{B}_k^\delta.
\end{aligned}$$

Portanto, pela relaao (2.46) e a igualdade acima, temos que

$$T_k^\delta(w_0, w_1, \dots, w_k) - T_k^\delta(v_0, v_1, \dots, v_k) = - \int_0^t W(t - \tau) \tilde{B}_k^\delta(x, \tau) d\tau. \quad (2.47)$$

Procedendo de maneira anloga  demonstracao da Proposicao 1.1, podemos reescrever a relaao (2.47) da seguinte maneira,

$$T_k^\delta(w_0, w_1, \dots, w_k) - T_k^\delta(v_0, v_1, \dots, v_k) \\ = +i \sum_{j=1}^{\infty} \frac{i^j}{j!} t^j \psi(t) \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i(nx+n^3t)} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\lambda - n^3) (\lambda - n^3)^{j-1} \widehat{B}_k^\delta(n, \lambda) d\lambda \quad (2.48)$$

$$+i\psi(t) \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{inx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-\psi)(\lambda - n^3)}{\lambda - n^3} e^{it\lambda} \widehat{B}_k^\delta(n, \lambda) d\lambda \quad (2.49)$$

$$-i\psi(t) \sum_{n \in \mathbf{Z}} e^{i(nx+n^3t)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-\psi)(\lambda - n^3)}{\lambda - n^3} \widehat{B}_k^\delta(n, \lambda) d\lambda, \quad (2.50)$$

onde a seguinte estimativa é satisfeita,

$$\begin{aligned} & \|(2.48)\|_{\mathcal{Y}^s} + \|(2.49)\|_{\mathcal{Y}^s} + \|(2.50)\|_{\mathcal{Y}^s} \\ & \leq C \left( \sum_{n \in \mathbf{Z}} |n|^{2s} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{B}_k^\delta(n, \tau)|^2}{1 + |\tau - n^3|} d\tau \right)^{1/2} \\ & \quad + C \left( \sum_{n \in \mathbf{Z}} |n|^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{B}_k^\delta(n, \tau)|}{1 + |\tau - n^3|} d\tau \right)^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Portanto, obtemos que é válida a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} & \|T_k^\delta(w_0, w_1, \dots, w_k) - T_k^\delta(v_0, v_1, \dots, v_k)\|_{\mathcal{Y}^s} \\ & \leq C \left( \sum_{n \in \mathbf{Z}} |n|^{2s} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{B}_k^\delta(n, \tau)|^2}{1 + |\tau - n^3|} d\tau \right)^{1/2} \quad (2.51) \end{aligned}$$

$$+ C \left( \sum_{n \in \mathbf{Z}} |n|^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{B}_k^\delta(n, \tau)|}{1 + |\tau - n^3|} d\tau \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (2.52)$$

A seguir o nosso objetivo será obter estimativas para as relações (2.51) e (2.52).

Devido a definição de  $\widehat{B}_k^\delta$  e a Proposição 2.3, temos que

$$\begin{aligned}
& \left( \sum_{n \in \dot{\mathbf{Z}}} |n|^{2s} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{B}_k^\delta(n, \tau)|^2}{1 + |\tau - n^3|} d\tau \right)^{1/2} \\
&= \left( \sum_{n \in \dot{\mathbf{Z}}} |n|^{2s} \int_{\mathbb{R}} \frac{\left| \frac{1}{2} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left[ \partial_x (\psi_\delta(w_{k-j} + v_{k-j}) \cdot \psi_\delta(w_j - v_j)) \right] \widehat{\phantom{B}}(n, \tau) \right|^2}{1 + |\tau - n^3|} d\tau \right)^{1/2} \\
&\leq C \sum_{j=0}^k \left( \sum_{n \in \dot{\mathbf{Z}}} |n|^{2s} \int_{\mathbb{R}} \frac{\left| \left[ \partial_x \left( \binom{k}{j} \psi_\delta(w_{k-j} + v_{k-j}) \cdot \psi_\delta(w_j - v_j) \right) \right] \widehat{\phantom{B}}(n, \tau) \right|^2}{1 + |\tau - n^3|} d\tau \right)^{1/2} \\
&\leq \sum_{j=0}^k C \delta^{1/12} \left\| \binom{k}{j} \psi_\delta(w_{k-j} + v_{k-j}) \right\|_{\mathcal{X}^s} \left\| \psi_\delta(w_j - v_j) \right\|_{\mathcal{X}^s} \\
&= C \delta^{1/12} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left\| \psi_\delta(w_{k-j} + v_{k-j}) \right\|_{\mathcal{X}^s} \left\| \psi_\delta(w_j - v_j) \right\|_{\mathcal{X}^s}.
\end{aligned}$$

Ainda pela definição de  $\widetilde{B}_k^\delta$  e a Proposição 2.3, obtemos que

$$\begin{aligned}
& \left( \sum_{n \in \dot{\mathbf{Z}}} |n|^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{B}_k^\delta(n, \tau)|}{1 + |\tau - n^3|} d\tau \right)^2 \right)^{1/2} \\
&= \left( \sum_{n \in \dot{\mathbf{Z}}} |n|^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{\left| \frac{1}{2} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left[ \partial_x (\psi_\delta(w_{k-j} + v_{k-j}) \cdot \psi_\delta(w_j - v_j)) \right] \widehat{\phantom{B}}(n, \tau) \right|^2}{1 + |\tau - n^3|} d\tau \right)^2 \right)^{1/2} \\
&\leq C \sum_{j=0}^k \left( \sum_{n \in \dot{\mathbf{Z}}} |n|^{2s} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{\left| \left[ \partial_x \left( \binom{k}{j} \psi_\delta(w_{k-j} + v_{k-j}) \cdot \psi_\delta(w_j - v_j) \right) \right] \widehat{\phantom{B}}(n, \tau) \right|^2}{1 + |\tau - n^3|} d\tau \right)^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \sum_{j=0}^k C \delta^{1/12} \left\| \binom{k}{j} \psi_\delta(w_{k-j} + v_{k-j}) \right\|_{\mathcal{X}^s} \left\| \psi_\delta(w_j - v_j) \right\|_{\mathcal{X}^s} \\
&\leq C \delta^{1/12} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left\| \psi_\delta(w_{k-j} + v_{k-j}) \right\|_{\mathcal{X}^s} \left\| \psi_\delta(w_j - v_j) \right\|_{\mathcal{X}^s},
\end{aligned}$$

Portanto para quaisquer  $w_0, v_0, w_1, v_1, \dots, w_k, v_k \in \mathcal{Y}^s$  e  $0 < \delta < 1$ , obtemos que existe  $C > 0$  de modo que

$$\begin{aligned} & \left\| T_k^\delta(w_0, w_1, \dots, w_k) - T_k^\delta(v_0, v_1, \dots, v_k) \right\|_{\mathcal{Y}^s} \\ & \leq C \delta^{1/12} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left\| \psi_\delta(w_{k-j} + v_{k-j}) \right\|_{\mathcal{X}^s} \left\| \psi_\delta(w_j - v_j) \right\|_{\mathcal{X}^s}. \end{aligned}$$

Agora utilizando o Lema 2.1, aplicado com  $\varepsilon = \frac{1}{48}$ , temos que para cada  $0 \leq j \leq k$  que

$$\left\| \psi_\delta(w_j + v_j) \right\|_{\mathcal{X}^s} \leq \delta^{-1/48} \left\| w_j + v_j \right\|_{\mathcal{X}^s},$$

e também que

$$\left\| \psi_\delta(w_j - v_j) \right\|_{\mathcal{X}^s} \leq \delta^{-1/48} \left\| w_j - v_j \right\|_{\mathcal{X}^s}.$$

Devido as relações acima e o fato que  $\left\| \cdot \right\|_{\mathcal{X}^s} \leq \left\| \cdot \right\|_{\mathcal{Y}^s}$ , obtemos então para cada  $0 < \delta < 1$  fixo, que existe uma constante  $C > 0$ , de modo que a seguinte desigualdade é satisfeita

$$\begin{aligned} & \left\| T_k^\delta(w_0, w_1, \dots, w_k) - T_k^\delta(v_0, v_1, \dots, v_k) \right\|_{\mathcal{Y}^s} \\ & \leq C \delta^{1/24} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \left\| w_{k-j} + v_{k-j} \right\|_{\mathcal{Y}^s} \left\| w_j - v_j \right\|_{\mathcal{Y}^s}, \end{aligned}$$

para quaisquer  $w_0, v_0, w_1, v_1, \dots, w_k, v_k \in \mathcal{Y}^s$ , desse modo concluindo a demonstração da Proposição 1.2.

# Referências Bibliográficas

- [B] Bourgain, J.: Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations, Part II: The KdV–Equation, **Geom. Funct. Anal.**, 3, (1993), 209–262.
- [BH] BYERS, P.; e HIMONAS, A. A.: Non-analytic solutions of the KdV equation, **Abstract and Appl. Anal.**, 6, (2004), 453–460.
- [CKSTT] COLLIANDER, J.; KEEL, M.; STAFFILANI, G.; TAKAOKA, H.; e TAO, T.: Sharp global well-posedness for KdV and modified KdV on  $\mathbb{R}$  and  $\mathbb{T}$ , **J. Amer. Math. Soc.**, 16, (2003), 705–749.
- [GH] GORSKY, J.; e HIMONAS, A. A.: On analyticity in space variable of solutions to the KdV equation, **Contemporary Mathematics of AMS**, 368, (2005), 233–247.
- [HP] HIMONAS, A. A.; e PETRONILHO, G.: Gevrey regularity in time for generalized KdV type equations, a aparecer em **Contemporary Mathematics of AMS**.
- [I] IÓRIO Jr., R. J.; e IÓRIO, V.: **Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução**, IMPA, Rio de Janeiro, (1988).
- [KPV1] KENIG, C. E.; PONCE, G.; e VEGA, L.: Well-Posedness and Scattering Results for the Generalized Korteweg-de Vries Equation via Contraction Principle, **Comm. Pure Appl. Math.**, 46, (1993), 527–620.

- [KPV2] KENIG, C. E.; PONCE, G.; e VEGA, L.: The Cauchy problem for the Korteweg–de Vries equation in Sobolev spaces of negative indices, **Duke Math. J.**, 71, (1993), 1–21.
- [KPV3] KENIG, C. E.; PONCE, G.; e VEGA, L.: A Bilinear Estimate with applications to the KdV Equation, **J. Amer. Math. Soc.**, 9, (1996), 573–603.
- [KdV] KORTEWEG, D.J.; e de VRIES, G.: On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, **Phil. Mag.**, 39, (1895), 422–443.
- [Sj] SJÖBERG, A.: On the Korteweg–de Vries equation: existence and uniqueness, **J. Math. Anal. Appl.**, 29, (1970), 569–579.
- [St] SOTOMAYOR, J.: **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**, IMPA, Rio de Janeiro, (1979).
- [SW] STEIN, E.; e WEISS, G.: **Fourier Analysis in Euclidean Space**, Princeton University Press, New Jersey, (1971).
- [Tr] TRUBOWITZ, E.: The inverse problem for periodic potentials, **Comm. Pure Appl. Math.**, 30, (1977), 321–337.