

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CCET-CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Marcela Duarte da Silva

**Germes de funções sobre
variedades analíticas**

São Carlos - SP

2006

Marcela Duarte da Silva

Germes de funções sobre variedades analíticas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação de Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Nivaldo Tomazella

São Carlos - SP

2006

**Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da
Biblioteca Comunitária da UFSCar**

S586gf

Silva, Marcela Duarte da.
Germes de funções sobre variedades analíticas / Marcela
Duarte da Silva. -- São Carlos : UFSCar, 2006.
65 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São
Carlos, 2006.

1. Geometria - topologia. 2. Germes de funções. 3.
Variedades analíticas. 4. Campos logarítmicos. 5.
Determinação finita. I. Título.

CDD: 516 (20^a)

Agradecimentos

Ao meu orientador e amigo Prof. Tomazella por acreditar e me fazer acreditar.

À minha família pelo apoio emocional. Em especial, à minha Mãe e ao Tiago, pelo amor e compreensão incondicionais em todas as horas.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

À todos que tornaram esse sonho possível direta ou indiretamente.

“Os acontecimentos estão encadeados da melhor maneira possível. Pois, ao fim e ao cabo, se você não houvesse sido expulso de um belo castelo com pontapés no traseiro por causa do amor pela senhorita Cunegunda, se voce não se houvesse envolvido com a Inquisição, se não houvesse dado um belo golpe de espada no barão, se não houvesse perdido todos os seus carneiros do bom país do Eldorado, não estaria aqui comendo cidra com conserva e pistaches.”

Voltaire

Resumo

O estudo de germes de funções analíticas $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ sob a \mathcal{R} - equivalência é um ponto central na Teoria das Singularidades e a informação que temos nessa direção é bastante rica. Nessa dissertação temos um estudo similar para uma equivalência que preserva uma determinada variedade analítica X , a \mathcal{R}_X - equivalência.

Abstract

The study of analytic germs of functions $(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ under \mathcal{R} - equivalence relation is a central point in Singularity Theory and the information we have in this direction is very rich. In this dissertation we have a study similar for an equivalence relation which preserve certain analytic variety X , the \mathcal{R}_X - equivalence.

Conteúdo

Prefácio	vi
1 Preliminares	1
1.1 O anel \mathcal{O}_n e a \mathcal{R} -equivalência	1
1.2 Germes de variedades	5
1.3 Campos de vetores	6
2 A \mathcal{R}_X-equivalência	9
2.1 Os campos logarítmicos	10
2.2 Deformações e Desdobramentos	19
2.3 Germes estáveis	20
2.4 Funções com pontos críticos isolados	22
3 A Transversal completa para o grupo \mathcal{R}_X	28
3.0.1 Submersões sobre o Guarda-chuva de Whitney	40
4 Germes de campos de vetores em variedades	44
4.1 Caracterização dos campos de vetores	44
4.2 Divisores Livres	48
4.2.1 Cálculo de Θ_X quando X é o discriminante	49
Considerações Finais	56
A Teoria de feixes	59
Bibliografia	63

Prefácio

O estudo de germes de funções $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ sob a ação do grupo \mathcal{R} dos germes de difeomorfismos de \mathbb{C}^n , a \mathcal{R} -equivalência, é um dos objetivos da teoria das singularidades e a informação que temos nesta direção é bastante ampla e pode ser encontrada em livros básicos da teoria, por exemplo, em [6], [14] e [15].

Considerando um germe de variedade analítica $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$, V. Arnold [2], J. Bruce e R. Roberts [8], entre outros, apresentaram uma generalização da \mathcal{R} -equivalência através do grupo \mathcal{R}_X dos germes de difeomorfismos de \mathbb{C}^n que preservam X , onde dois germes f e g são \mathcal{R}_X -equivalentes se existir um difeomorfismo $\varphi \in \mathcal{R}_X$ tal que $f = g \circ \varphi$. Quando $X = \emptyset$, a \mathcal{R}_X -equivalência se torna a \mathcal{R} -equivalência. Para o estudo da \mathcal{R}_X -equivalência é necessário encontrar os campos logarítmicos de X , Θ_X , i.e., os campos de vetores tangentes à X .

O objetivo deste trabalho é estudar resultados básicos da \mathcal{R}_X -equivalência e apresentar algumas propriedades de Θ_X .

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

Nas preliminares temos uma visão geral dos principais pré-requisitos utilizados no decorrer do texto, objetivando o esclarecimento de notações e a ilustração de resultados básicos. Maiores detalhes podem ser encontrados nos livros [15] e [19].

No segundo capítulo introduzimos a \mathcal{R}_X -equivalência, o conceito do módulo de campos logarítmicos para um germe de subvariedade X , Θ_X , que é de fundamental importância para o desenvolvimento do trabalho e também algumas definições que são comuns à todas as equivalências como as deformações, os desdobramentos e os germes estáveis.

No capítulo 3 direcionamos nosso estudo para um método mais eficiente

de classificação: A Transversal Completa. O Teorema da Transversal Completa foi demonstrado na sua forma mais geral no artigo de J. Bruce, N. Kirk e A. Du Plessis [7], usando-se o Lema de Mather 3.1. No caso particular do grupo \mathcal{R}_X o artigo de J. Bruce e J. West [9], demonstrou o teorema usando deformações \mathcal{R}_X -triviais. Neste trabalho estudamos ambas abordagens. Para ilustrar a eficiência desse método classificamos germes de submersão $f : (\mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ sob a \mathcal{R}_X -equivalência, considerando-se como variedade, X , o Guarda-chuva de Whitney.

No quarto capítulo, baseando-se em [4], [8] e [24], abordamos o cálculo do módulo Θ_X que, em geral, é muito difícil de ser determinado. Mas, nos casos onde o germe de subvariedade X é definido por uma função quase-homogênea ou quando a subvariedade é o discriminante de uma deformação de uma função com uma singularidade isolada na origem, possuímos um algoritmo para determinar o módulo Θ_X .

Finalizando, o apêndice fornece uma idéia introdutória sobre a teoria de feixes que é necessária para a compreensão de conceitos utilizados no decorrer do texto.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 O anel \mathcal{O}_n e a \mathcal{R} -equivalência

Nosso objetivo é estudar localmente funções analíticas $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$. Para tanto, introduzimos uma relação de equivalência no espaço das funções analíticas definidas num aberto contendo a origem de \mathbb{C}^n , da seguinte forma:

$$f \sim g \iff \exists \text{ aberto } V, \text{ com } 0 \in V \subset \mathbb{C}^n \text{ tal que } f|_V \equiv g|_V.$$

As classes de equivalência são chamadas de germes, denotadas por $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, f(0))$, ou simplesmente, por f . A coleção de todos esses germes de funções é denotada por \mathcal{O}_n . Observemos que \mathcal{O}_n é um anel noetheriano local cujo ideal maximal é dado por $\mathcal{M}_n = \{f \in \mathcal{O}_n : f(0) = 0\}$. Denotamos por $\mathcal{O}_{n,p}$ o conjunto dos germes de aplicações $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, f(0))$.

A idéia é tentar agrupar esses germes em determinados conjuntos. Para isso precisamos da noção de uma ação de um grupo e da noção de grupo de Lie:

Uma ação de um grupo G em um conjunto M é uma aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : G \times M &\longrightarrow M \\ (g, x) &\longmapsto \varphi(g, x) = g \cdot x \end{aligned}$$

tal que para todo $x \in M$ e todos $g, h \in G$ temos

(a) $1 \cdot x = x$, onde 1 é identidade do grupo G ;

(b) $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$.

Neste caso dizemos que G atua em M . O conjunto $G \cdot x = \{g \cdot x : g \in G\}$ é chamado de órbita de x em M .

Um grupo de Lie G é um grupo multiplicativo que é uma variedade diferenciável tal que as operações de multiplicação e inversão são diferenciáveis. Dizemos que um grupo de Lie G atua em uma variedade diferenciável M quando existe uma ação de G em M que é diferenciável.

Em geral, as órbitas de uma ação de um grupo de Lie G em uma variedade diferenciável M não são subvariedades e, sim subvariedades imersas, mas nos casos em que para algum $x \in M$, $G \cdot x$ é uma subvariedade, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 1.1. *Seja $\varphi : G \times M \rightarrow M$ uma ação de um grupo de Lie G em uma variedade diferenciável M . Se as órbitas são subvariedades de M , então para todo $x \in M$, a aplicação $\varphi_x : G \rightarrow G \cdot x$ dada por $\varphi_x(g) = g \cdot x$ é uma submersão. E mais, o espaço tangente à órbita $G \cdot x$ em x é a imagem de $d\varphi_x(1) : T_1G \rightarrow T_xM$, ou seja,*

$$T_xG \cdot x = d\varphi_x(1)(T_1G). \quad (1.1)$$

Demonstração: Veja [15], página 74.

Uma das metas da teoria das singularidades é classificar germes de $\mathcal{O}_{n,p}$ sob relações de equivalências em $\mathcal{O}_{n,p}$ dadas por ações de grupos. Como trabalhamos apenas no anel \mathcal{O}_n a relação de equivalência de nosso interesse é dada pela ação dos subgrupos do grupo dos germes de difeomorfismos de $\mathcal{O}_{n,n}$ que preservam a origem, o qual é denotado por \mathcal{R} . A ação é dada por $\varphi.f = f \circ \varphi^{-1}$, para todo $\varphi \in \mathcal{R}$ e $f \in \mathcal{O}_n$. Dizemos que dois germes $f, g \in \mathcal{O}_n$ são \mathcal{R} -equivalentes se existir um germe $\varphi \in \mathcal{R}$ tal que $f \equiv g \circ \varphi^{-1}$ assim,

$$f \sim_{\mathcal{R}} g \iff \exists \varphi \in \mathcal{R} \text{ tal que } f \equiv g \circ \varphi^{-1}.$$

O conjunto dos germes de difeomorfismos que não preservam a origem é denotado por \mathcal{R}_e (o grupo estendido).

Dado $f \in \mathcal{O}_n$, para cada inteiro positivo k , definimos o k -jato de f por

$$j^k f = j^k f(0) = p_k(f)(0) - f(0),$$

onde $p_k(f)(0)$ é o polinômio de Taylor de grau k do representante f no ponto $x = 0$, observemos que esse polinômio independe do representante escolhido.

Observemos que \mathcal{O}_n não é uma variedade diferenciável e na tentativa de amenizar a dificuldade em trabalhar com espaços de dimensão infinita, trabalhamos com variedades diferenciáveis; que possuem dimensão finita. Denotamos por $J^k(n, 1)$ o \mathbb{C} -espaço vetorial dos k -jatos dos germes de \mathcal{O}_n e por H^k o subespaço de $J^k(n, 1)$ formado pelos polinômios homogêneos de grau k . Portanto $J^k(n, 1)$ e H^k são variedades diferenciáveis pois são difeomorfas à algum espaço vetorial de dimensão finita. Dado $j^k f \in J^k(n, 1)$ quando não houver dúvidas denotamos esse elemento apenas por f .

Da mesma forma, ao invés de trabalhar com o grupo \mathcal{R} , que possui dimensão infinita, trabalhamos com o conjunto \mathcal{R}^k que denota o grupo de Lie (que age em $J^k(n, 1)$, veja [22], página 151) formado pelos k -jatos de germes de \mathcal{R} .

Para a classificação de germes de função sob uma equivalência é necessário que conheçamos o espaço tangente de uma órbita em um germe. Como foi dito anteriormente, o grupo \mathcal{R} não é um grupo de Lie e \mathcal{O}_n não é uma variedade diferenciável, dado um inteiro positivo k , trabalhamos com os espaços dos k -jatos, \mathcal{R}^k (que é um grupo de Lie) e $J^k(n, 1)$ (que é uma variedade diferenciável). Assim, podemos usar a equação (1.1) do Teorema 1.1 para encontrar o espaço tangente de uma órbita em um jato. No caso do grupo \mathcal{R} temos:

Dados um inteiro positivo k e um germe de k -jato $f \in J^k(n, 1)$ fixados, definimos a aplicação:

$$\begin{aligned} \varphi_f : \mathcal{R}^k &\longrightarrow J^k(n, 1) \\ h &\longmapsto j^k(f \circ h^{-1}) = j^k f \circ j^k h^{-1}. \end{aligned}$$

Como \mathcal{R}^k é um aberto de $J^k(n, n)$ então $T_1 \mathcal{R}^k = J^k(n, n)$. Seja $g \in T_1 \mathcal{R}^k$ e consideramos a curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{R}^k$, com $\alpha(0) = 1$ e $\alpha'(0) = g$,

$$\alpha(t)(x) = x + tg(x),$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\varphi_f \circ \alpha(t)]_{t=0} &= \frac{d}{dt}[j^k(f \circ \alpha(t))]_{t=0} = j^k \frac{d}{dt}(f \circ \alpha(t))_{t=0} \\ &= j^k \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\alpha(t)) \alpha'_j(t) \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^n j^k \frac{\partial f}{\partial x_j} g_j \in T_f \mathcal{R}^k f \end{aligned}$$

com $g_j \in \mathcal{M}_n$ pois $\alpha(t) \in \mathcal{R}^k$, para qualquer t .

Considerando-se o ideal de \mathcal{O}_n , $J(f) = \langle \frac{\partial f}{\partial x_j} \rangle_{j=1}^n$ vemos que, pelo Teorema 1.1, temos $T_f \mathcal{R}^k \cdot f = j^k(\mathcal{M}_n J(f))$, para qualquer k . Portanto é natural definir o espaço tangente à \mathcal{R} -órbita em um germe f como o conjunto:

$$T_f \mathcal{R} f = \mathcal{M}_n J(f),$$

e o espaço tangente estendido à \mathcal{R} -órbita em um germe f por:

$$T_f \mathcal{R}_e f = J(f).$$

A seguir enunciamos alguns teoremas envolvendo o anel \mathcal{O}_n que são extremamente úteis no desenvolvimento de resultados posteriores do texto:

Teorema 1.2 (Teorema de Preparação de Malgrange). *Dado um germe de função $\varphi : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^s, 0)$, seja M um \mathcal{O}_n -módulo finitamente gerado então M é um \mathcal{O}_s -módulo finitamente gerado, com relação à estrutura de módulo dada pelo homomorfismo induzido:*

$$\begin{aligned} \varphi^* : \mathcal{O}_s &\longrightarrow \mathcal{O}_n \\ g &\longmapsto \varphi^*(g) = g \circ \varphi, \end{aligned}$$

se, e somente se, o \mathbb{C} -espaço vetorial $\frac{M}{\varphi^*(\mathcal{M}_s)M}$ tem dimensão finita.

Demonstração: Veja [14], página 30.

Teorema 1.3 (Lema de Nakayama). *Sejam M um \mathcal{O}_n -módulo finitamente gerado, N um submódulo de M e $I \subset \mathcal{M}_n$ um ideal. Então $M \subseteq IM + N \implies M \subseteq N$.*

Demonstração: Veja [15], página 102.

Teorema 1.4. *Sejam M um \mathcal{O}_n -módulo livre finitamente gerado e N um submódulo de M . Então*

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{M}{N} < \infty \iff \exists k > 0 \text{ tal que } \mathcal{M}_n^k M \subset N.$$

Demonstração: Veja [15], página 104.

1.2 Germes de variedades

Dados dois subconjuntos X, Y de \mathbb{C}^n dizemos que X e Y são equivalentes em um ponto $z \in X \cap Y$ se existir uma vizinhança U de z tal que $X \cap U = Y \cap U$. A classe de equivalência do conjunto X em um ponto z é chamada de germe do conjunto X e é denotada por (X, z) , ou simplesmente por X quando o ponto z estiver subentendido.

Se $f \in \mathcal{O}_n$, a classe de equivalência do conjunto $\{x : f(x) = 0\}$, onde f é um representante do germe f , é denotada por $\mathcal{V}(f)$; se f_1 e f_2 são dois representantes de um mesmo germe então os conjuntos $\mathcal{V}(f_1)$ e $\mathcal{V}(f_2)$ são iguais. Um germe de variedade (X, x) é um conjunto do tipo:

$$X = \mathcal{V}(f_1) \cap \dots \cap \mathcal{V}(f_r) = \mathcal{V}(f_1, \dots, f_r),$$

para determinados $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{O}_n$.

Definimos o ideal de um germe de variedade X por

$$\mathcal{I}(X) = \{f \in \mathcal{O}_n : X \subset f^{-1}(0)\}.$$

Dizemos que um germe de variedade X é irredutível quando para quaisquer germes X_1 e X_2 tais que $X = X_1 \cup X_2$ então $X = X_1$ ou $X = X_2$.

Proposição 1.5. *Seja X um germe de variedade então existem um inteiro positivo p e X_1, \dots, X_p variedades irredutíveis, com X_i não contida em X_j , para todo $i \neq j$, tais que $X = X_1 \cup \dots \cup X_p$. Essas variedades são unicamente determinadas, a menos da ordem, e são chamadas de componentes irredutíveis de X .*

Demonstração: Veja [19], página 89.

Chamamos de germe de subvariedade analítica em x , um germe de conjunto X em x tal que, para alguma vizinhança V de x , o germe $X \cap V$ pode ser descrito por $\mathcal{V}(f_1, \dots, f_r)$, para alguns $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{O}_n$.

Dizemos que um ponto z de um germe de subvariedade X é um ponto regular ou suave se para alguma vizinhança V de z , o germe $V \cap X$ pode ser descrito

como o conjunto dos zeros de um número finito de germes de funções analíticas que possuem z como ponto regular. Um ponto de X não regular é chamado de ponto singular de X .

Teorema 1.6 (Hilbert's nullstellensatz - versão local). *Seja I um ideal de \mathcal{O}_n . Então $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \text{Rad}(I)$, onde $\text{Rad}(I)$ é o seguinte ideal $\{f \in \mathcal{O}_n : \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } f^n \in I\}$.*

Demonstração: Veja [18], página 660.

Seja $Y = \mathcal{V}(f_1, \dots, f_r)$ uma variedade irredutível. Definimos

$$\dim Y = n - \max_{x \in Y} \text{posto} \left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{n \times r} \right).$$

Se X é uma variedade e $X = X_1 \cup \dots \cup X_p$ é a sua decomposição em componentes irredutíveis, então

$$\dim X = \max_{1 \leq i \leq p} \dim X_i.$$

Dizemos que a variedade é equidimensional quando todas as suas componentes irredutíveis têm a mesma dimensão. Além disso, se $x \in X$ a dimensão da variedade $X = X_1 \cup \dots \cup X_p$ no ponto x é

$$\dim_x X = \max_{x \in X_i} \dim X_i.$$

Dizemos que um germe $X = \mathcal{V}(f_1, \dots, f_r)$ é reduzido se a \mathbb{C} -álgebra local $\frac{\mathcal{O}_n}{\langle f_1, \dots, f_r \rangle}$ não possuir elementos nilpotentes.

1.3 Campos de vetores

Um campo de vetores ξ em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto p de M associa um vetor $\xi(p) \in T_p M$. O campo é suave se a aplicação $\xi : M \rightarrow TM$ é suave. Considerando-se uma parametrização $x : U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow M$, com U aberto, é possível escrever

$$\xi(p) = \sum_{j=1}^n \xi_j(p) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

onde $\xi_j : U \rightarrow \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, n$ é uma função em U e $\{\frac{\partial}{\partial x_j}\}$ é uma base associada à x para $T_p M$. O conjunto dos campos de vetores formam um espaço vetorial sobre \mathbb{C} .

É conveniente pensar em um campo ξ como uma aplicação $\xi : D \rightarrow D$, onde D é o conjunto formado pelas funções analíticas em M , $f : M \rightarrow \mathbb{C}$, dada por

$$(\xi f)(p) = \xi(f)(p) = \sum_{j=1}^n \xi_j(p) \frac{\partial f}{\partial x_j}(p),$$

onde f indica a expressão de f na parametrização x . Também podemos considerar germes de campos de vetores.

Dado um grupo de Lie G agindo suavemente em uma variedade diferenciável M e ξ um campo de vetores em G então dizemos que ξ é invariante à esquerda se, para qualquer $x \in G$, ocorrer

$$dA_x(\xi) = \xi \circ A_x,$$

onde $A_x : G \rightarrow G \cdot x$ é dada por $A_x(g) = gx$ (a ação do grupo à esquerda). Ou seja, se ξ é invariante à esquerda então $dA_x(\xi(g)) = \xi(gx)$.

Uma álgebra de Lie \mathcal{G} sobre \mathbb{C} é um espaço vetorial complexo munido com uma aplicação bilinear $[\cdot, \cdot] : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ tal que para todo $x, y, z \in \mathcal{G}$ tem-se:

- (a) $[x, y] = -[y, x]$;
- (b) $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$.

Teorema 1.7. *Sejam G um grupo de Lie agindo suavemente em uma variedade diferenciável M e $DerG$ o conjunto de seus campos invariantes à esquerda. Então $DerG$ munido com a aplicação*

$$[\cdot, \cdot] : (\xi, \delta) \longmapsto [\xi, \delta]$$

com $(\xi\delta)f = \xi(\delta f)$, para todo $f \in D$, satisfaz:

1. $DerG$ é um \mathbb{C} -espaço vetorial e a aplicação:

$$\begin{aligned} \alpha : DerG &\longrightarrow T_1 G \\ \xi &\longmapsto \alpha(\xi) = \xi(1) \end{aligned}$$

é um isomorfismo de $DerG$ no espaço tangente de G na identidade;

2. Campos de vetores invariantes à esquerda são analíticos;
3. Se $\xi, \delta \in \text{Der}G$ então $[\xi, \delta] \in \text{Der}G$;
4. $\text{Der}G$ é uma álgebra de Lie.

Demonstração: Veja [26], página 85.

Logo à todo grupo de Lie G que age em uma variedade diferenciável M podemos associar uma álgebra de Lie, $\text{Der}G$, que é identificada com o espaço tangente de G na identidade. Para cada $x \in M$, $\text{Der}G \cdot x \subset T_x M$ é a imagem de $\text{Der}G$ pela diferencial da ação, assim $\text{Der}G \cdot x$ coincide com o espaço tangente $T_x(G \cdot x)$ da órbita de x sob G .

Capítulo 2

A \mathcal{R}_X -equivalência

Seja $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ um germe de subvariedade analítica reduzida. Neste trabalho nosso interesse está voltado para o subgrupo dos germes de difeomorfismos de \mathcal{R} que preservam X , o qual passamos a descrever a seguir:

Seja $\varphi : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ um germe de difeomorfismo. Dizemos que φ preserva X se o isomorfismo induzido $\varphi^* : \mathcal{O}_n \rightarrow \mathcal{O}_n$, dado por $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$, preserva o ideal $\mathcal{I}(X)$, i.e., $\varphi^*(\mathcal{I}(X)) = \mathcal{I}(X)$. O grupo formado por tais germes é denotado por \mathcal{R}_X . O conjunto de germes de difeomorfismos que preservam X e não se anulam na origem é denotado por \mathcal{R}_{e_X} .

Um germe de difeomorfismo $\varphi : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ preserva X se, e somente se, $(\varphi(X), 0) = (X, 0)$, ou seja, $\mathcal{R}_X = \{\varphi \in \mathcal{R} : \varphi(X) = X\}$.

Embora o grupo \mathcal{R}_X seja uma generalização do grupo \mathcal{R} (basta tomar $X = \emptyset$), ele é, na verdade, uma classe especial de subgrupos geométricos de \mathcal{R} estudados por J. Damon [12].

Definição 2.1. *Dois germes $f, g \in \mathcal{O}_n$ são \mathcal{R}_X -equivalentes se existir um difeomorfismo $\varphi \in \mathcal{R}_X$ tal que $f \equiv g \circ \varphi$. Notação: $f \sim_{\mathcal{R}_X} g$.*

A \mathcal{R}_X -equivalência é uma relação de equivalência.

Definição 2.2. *Seja k um inteiro positivo. Um germe $f \in \mathcal{O}_n$ é k - \mathcal{R}_X -determinado se para todo $g \in \mathcal{O}_n$ com mesmo k -jato que f temos que f e g são \mathcal{R}_X -equivalentes.*

Dizemos que f é finitamente \mathcal{R}_X -determinado quando f é k - \mathcal{R}_X -determinado, para algum inteiro positivo k .

2.1 Os campos logarítmicos

Para encontrar germes de difeomorfismos que preservam um germe de subvariedade X a técnica usual é a integração de germes de campos de vetores tangentes à X . Passamos a descrever tais campos:

Definição 2.3. *Seja $Der_0\mathbb{C}^n$ o \mathcal{O}_n -módulo formado pelos germes de campos de vetores analíticos de \mathbb{C}^n na origem.*

Seja $\xi \in Der_0\mathbb{C}^n$, se quando visto como derivação, i.e.,

$$\xi = \sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

ocorrer $\xi(h) \in \mathcal{I}(X)$, para qualquer $h \in \mathcal{I}(X)$ então dizemos que esse campo é logarítmico para X . O \mathcal{O}_n -submódulo formado pelos germes de campos de vetores logarítmicos é denotado por $\Theta_{(X,0)}$, quando o ponto $x = 0$ estiver subentendido escrevemos apenas Θ_X .

A próxima Proposição afirma que Θ_X é exatamente o conjunto dos campos de vetores que são tangentes às partes suaves da variedade X .

Proposição 2.4. *Seja $X = \bigcup_{j=1}^p X_j$ a decomposição em componentes irredutíveis de X . Então $\xi \in \Theta_X$ se, e somente se, para cada ponto suave x (suficientemente próximo da origem) de cada componente irredutível X_j de X , o campo ξ é tangente à X_j em x .*

Demonstração: Seja ξ um representante de um germe em Θ_X . Seja $x \in X$ um ponto suave de X_j suficientemente próximo da origem. Podemos escolher germes f_1, \dots, f_r , onde $f_i : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow \mathbb{C}$, tais que o germe (X, x) é a imagem inversa do valor regular $0 \in \mathbb{C}^r$ por $f = (f_1, f_2, \dots, f_r)$, i.e.,

$$(X, x) = f^{-1}(0) = \bigcap_{i=1}^r f_i^{-1}(0).$$

Então $\xi(f_1), \dots, \xi(f_r)$ se anulam em x pois, $f_i \in \mathcal{I}(X, x)$ e x está suficientemente próximo da origem. Então ξ é tangente à X_j em todo ponto suave x próximo da origem.

Por outro lado, suponhamos que ξ é tangente às partes suaves de X_j , para $j = 1, \dots, p$. Se $h \in \mathcal{I}(X)$ e $x \in X_j$ é um ponto suave então como h se anula em x temos que $\xi(h)$ também se anula em x . Assim $\xi(h)$ se anula em cada X_j e portanto se anula em X .

Esta demonstração também pode ser encontrada em [8]. ■

Corolário 2.5. *Se $X = \bigcup_{j=1}^p X_j$ é a decomposição em componentes irredutíveis de X então $\Theta_X = \bigcap_{j=1}^p \Theta_{X_j}$.*

Demonstração: É uma consequência direta da Proposição 2.4. Esta demonstração também pode ser encontrada em [8].

Definição 2.6. *Denotamos por Θ_X^0 o \mathcal{O}_n -módulo formado pelos campos de vetores de Θ_X que se anulam na origem.*

Proposição 2.7. *Seja $\xi \in \Theta_X^0$. Então o fluxo φ_t gerado por ξ preserva X . Dessa forma, $\varphi_t \in \mathcal{R}_X$, para todo t suficientemente próximo da origem.*

Demonstração: Seja $\varphi(x, t)$ o fluxo gerado pelo campo de vetores $\xi \in \Theta_X^0$. Queremos mostrar que, para qualquer t suficientemente próximo da origem e para todo $h \in \mathcal{I}(X)$, temos $h \circ \varphi_t \in \mathcal{I}(X)$; portanto, basta mostrar que $\forall h \in \mathcal{I}(X)$, $h \circ \varphi_t(x)$ é identicamente nula para pequenos valores de t e todo $x \in X$, para tanto verifiquemos que a expansão de Taylor de $h \circ \varphi_t$ é identicamente nula em $t = 0$ e $x \in X$.

Seja $x \in X$ um ponto arbitrário, temos que

$$(h \circ \varphi_t)(x)|_{t=0} = h(\varphi(x, t))|_{t=0} = h(\varphi(x, 0)) = h(x) = 0;$$

se $\xi = \sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ e como φ é o fluxo gerado por ξ , temos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) = \xi(\varphi(x, t)),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(h \circ \varphi)(x, t) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_j}(\varphi(x, t)) \frac{\partial \varphi_j}{\partial t}(x, t) = \\ &= \sum_{j=1}^n \xi_j(\varphi_t(x)) \frac{\partial h}{\partial x_j}(\varphi_t(x)) = \xi(\varphi_t(x))(h(\varphi_t(x))) \end{aligned}$$

assim, $\frac{\partial}{\partial t}(h \circ \varphi)(x, t)|_{t=0} = \xi(\varphi_t(x))h(x)|_{t=0} = \xi(x)(h(x)) = \xi(h)(x) = 0$ pois, $h \in \mathcal{I}(X)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(h \circ \varphi)(x, t)|_{t=0} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{j=1}^n \xi_j(\varphi_t(x)) \frac{\partial h}{\partial x_j}(\varphi_t(x)) \right) |_{t=0} = \\ &= d\xi(\varphi_t(x))d\varphi_t(x) \frac{\partial h}{\partial t}(\varphi_t(x)) |_{t=0} = \\ &= d\xi(x)\xi(x)(h(x)) = d\xi(x)\xi(h)(x) = 0 \end{aligned}$$

Por indução, podemos ver que $\frac{\partial^r}{\partial t^r}(h \circ \varphi)(x, t)|_{t=0} = 0$, para todo $r \geq 1$ e todo $x \in X$; portanto $h \circ \varphi$ é identicamente nulo para todo $x \in X$ e todo t numa vizinhança da origem.

Esta demonstração também pode ser encontrada em [8]. ■

Exemplo 2.8. Seja X a variedade de \mathbb{C}^2 dada por $X := y - x^2 = 0$ e consideramos o campo ξ dado por

$$\xi(x, y) = x \frac{\partial}{\partial x} + 2y \frac{\partial}{\partial y}.$$

Notemos que ξ está em Θ_X^0 , pois se $h \in \mathcal{I}(X) = \text{Rad}(\langle y - x^2 \rangle) = \langle y - x^2 \rangle$ então

$$\xi(h)(x, y) = x \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) + 2y \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) \in \langle y - x^2 \rangle.$$

Portanto pela Proposição anterior 2.7 temos que o fluxo gerado por ξ ,

$$\begin{aligned} \varphi_t : (\mathbb{C}^2, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0) \\ (x, y) &\longmapsto \varphi_t(x, y) = (e^t x, e^{2t} y) \end{aligned}$$

preserva X , para todo t suficientemente próximo da origem, de fato

$$\varphi_t(x, x^2) = (e^t x, e^{2t} x^2) = (e^t x, (e^t x)^2).$$

Assim como a \mathcal{R} -equivalência, para classificar germes de função sob a \mathcal{R}_X -equivalência é necessário calcular os espaços tangentes à uma \mathcal{R}_X -órbita em um germe f .

Dado um inteiro k positivo e usando o Teorema 1.1, trabalhamos com o espaço dos k -jatos \mathcal{R}_X^k e a variedade diferenciável $J^k(n, 1)$. Portanto, precisamos determinar o espaço $T_1\mathcal{R}_X^k$:

Afirmção: $T_1\mathcal{R}_X^k = j^k(\Theta_X^0)$.

Seja $\xi = \sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial}{\partial x_j} \in T_1\mathcal{R}_X^k$ e seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{R}_X^k$, com $\alpha(0) = 1$, $\alpha'(0) = \xi$, e

$$\alpha(t)(x) = x + t\xi(x)$$

então $\alpha(t)(x) \in \mathcal{R}_X^k$, para qualquer t suficientemente pequeno, segue que $\xi(0) = 0$ pois os difeomorfismos de \mathcal{R}_X preservam a origem. Queremos mostrar que ξ é um k -jato que satisfaz:

$$\xi(h) \in \mathcal{I}(X), \quad \forall h \in \mathcal{I}(X).$$

Observemos que, para qualquer $x \in X$ e qualquer $h \in \mathcal{I}(X)$, temos

$$h(\alpha(t)(x)) = 0,$$

derivando em relação à t , e tomando $t = 0$, temos

$$0 = \sum_{j=1}^n \alpha'_j(0)(x) \frac{\partial h}{\partial x_j}(\alpha(0)(x)) = \sum_{j=1}^n \xi_j(x) \frac{\partial h}{\partial x_j}(x) = \xi(h)(x) \implies \xi(h) \in \mathcal{I}(X),$$

assim $\xi \in j^k(\Theta_X^0)$.

Por outro lado, se $\xi \in j^k(\Theta_X^0)$ então, pela Proposição 2.7, o fluxo φ gerado por ξ preserva X . Consideramos a curva

$$\alpha(t) = j^k\varphi(x, t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{R}_X^k$$

e $\alpha(0) = 1$ e portanto $\xi \in T_1\mathcal{R}_X^k$. ■

Sabendo-se qual é o espaço $T_1\mathcal{R}_X^k$, podemos determinar o espaço tangente à uma \mathcal{R}_X^k -órbita em um germe f , seguindo o Teorema 1.1. Fixado um k -jato $f \in J^k(n, 1)$, definimos a aplicação:

$$\begin{aligned} \varphi_f : \mathcal{R}_X^k &\longrightarrow J^k(n, 1) \\ h &\longmapsto j^k(f \circ h^{-1}) = j^k f \circ j^k h^{-1}. \end{aligned}$$

Pela equação (1.1), temos

$$d\varphi_f(1)(j^k(\Theta_X^0)) = T_f\mathcal{R}_X^k f.$$

Sejam $\xi = \sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial}{\partial x_j} \in j^k(\Theta_X^0)$ e $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{R}_X^k$, com $\alpha(0) = 1$ e $\alpha'(0) = \xi$,

$$\begin{aligned} \alpha(t)(x) &= x + t\xi(x), \\ \frac{d}{dt}[\varphi_f \circ \alpha(t)]_{|t=0} &= \frac{d}{dt}[j^k(f \circ \alpha(t))]_{|t=0} = j^k \frac{d}{dt}(f \circ \alpha(t))_{|t=0} = \\ &= j^k \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\alpha(t)) \alpha'_j(t) \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^n j^k \xi_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \in T_f\mathcal{R}_X^k f, \end{aligned}$$

com $\xi_j \in \mathcal{M}_n$ pois $\alpha(t) \in \mathcal{R}_X^k$, para qualquer t , portanto esse campo se anula na origem; temos, para qualquer inteiro positivo k ,

$$T_f\mathcal{R}_X^k f = j^k(\Theta_X^0 f).$$

Fazendo analogia com o grupo \mathcal{R} , definimos:

Definição 2.9. *O espaço tangente à \mathcal{R}_X -órbita em um germe f é o conjunto:*

$$\Theta_X^0 f = \{\delta(f) : \delta \in \Theta_X^0\}.$$

O espaço tangente estendido à \mathcal{R}_X -órbita em um germe f é o conjunto:

$$\Theta_X f = \{\delta(f) : \delta \in \Theta_X\}.$$

Assim como é feito com a \mathcal{R} -equivalência, queremos determinar métodos que ajudem a classificar germes sob a \mathcal{R}_X -equivalência. Apesar do grupo \mathcal{R}_X ser um subgrupo geométrico do grupo \mathcal{R} (veja [12], página 47) e portanto garantir que os teoremas de determinação (veja [11], parte III, seção 9) se apliquem à ele, damos a seguir uma demonstração desses teoremas cuja interpretação é mais simples:

Teorema 2.10 (Teorema da Determinação Finita). *Dado um germe $f \in \mathcal{M}_n$ se o ideal $\Theta_X^0 f$ contém alguma potência do ideal maximal \mathcal{M}_n então f é finitamente \mathcal{R}_X -determinado. Mais ainda, se $\mathcal{M}_n^k \subset \Theta_X^0 f$ então f é k - \mathcal{R}_X -determinado.*

Demonstração: Seja $g \in \mathcal{M}_n$ tal que $j^k g = j^k f$ logo $f - g \in \mathcal{M}_n^{k+1}$.

Definimos a família

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}, 0) \\ (x, t) &\longmapsto F(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x). \end{aligned}$$

Se $F_t(x) = F(x, t)$ então $F_1 = g$ e $F_0 = f$. Seja I um compacto de \mathbb{C} contendo 0 e 1 então basta mostrar que F_s é \mathcal{R}_X -equivalente à F_t , para todos $t, s \in I$. Fixamos s em I , por sua compacidade, basta mostrar tal fato para todo t suficientemente próximo de s . Seja $s_0 \in I$ fixado arbitrariamente. Queremos mostrar que existe uma família de difeomorfismos $H : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ preservando X , que satisfaz:

- (i) $H(x, s_0) = x$;
- (ii) $H(0, t) = 0$;
- (iii) $F(H(x, t), t) = F(x, s_0)$.

Supondo que (i) é válido e tomando $t = s_0$ então (iii) é automaticamente satisfeita, assim (iii) pode ser trocada pela afirmação de que $F(H(x, t), t)$ não depende de t , i.e.,

$$(iii)', \quad \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_j}(H(x, t), t) \frac{\partial H_j}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial F}{\partial t}(H(x, t), t) = 0;$$

para mostrar (i), (ii) e (iii)' basta encontrar um campo ξ na origem de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ tal que

$$(iv) \quad \sum_{j=1}^n \xi_j \frac{\partial F}{\partial x_j} = -\frac{\partial F}{\partial t};$$

$$(v) \quad \xi_j(0, t) = 0, \text{ para qualquer } j = 1, \dots, n;$$

$$(vi) \quad \xi_t \in \Theta_X^0, \text{ para cada } t \text{ fixo};$$

se tal campo existir, o seu fluxo H preserva X , para cada t fixo (pelo Teorema 2.7) e

$$(vii) \quad \frac{\partial H}{\partial t}(x, t) = \xi(H(x, t), t);$$

satisfazendo $H(x, s_0) = x$. Consideramos o P.V.I.

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t}(x, t) = \xi(H(x, t), t) \\ H(0, s_0) = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

tem solução única $H(0, t) = 0$ (veja [1], página 56). E, (ii) está satisfeita; o item (iii)' pode ser trocado por (iv) e (vii). Portanto resta mostrar a existência de um campo ξ satisfazendo (iv), (v) e (vi). O argumento é algébrico e não depende da escolha de s_0 . Vejamos que

$$\frac{\partial F}{\partial t} = g - f \in \mathcal{M}_n^{k+1}$$

e mais se $\eta \in \Theta_X^0$ então, tomando $\eta(F) = \sum_{j=1}^n \eta_j \frac{\partial F}{\partial x_j}$ e considerando o germe $(x_1, \dots, x_n, t) \mapsto t$ como um elemento de \mathcal{O}_{n+1} que só depende de t

$$\eta(f) = \sum_{j=1}^n \eta_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^n \eta_j \frac{\partial F}{\partial x_j} + t \sum_{j=1}^n \eta_j \left[\frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \right] \in \Theta_X^0 F + \mathcal{M}_{n+1} \mathcal{M}_n^{k+1}$$

e temos

$$\mathcal{M}_n^{k+1} \subseteq \mathcal{M}_n^k \subseteq \Theta_X^0 f \subseteq \Theta_X^0 F + \mathcal{M}_{n+1} \mathcal{M}_n^{k+1}$$

segue do Lema de Nakayama 1.3 que

$$\mathcal{M}_n^{k+1} \subseteq \Theta_X^0 F$$

e provamos a existência de tal campo ξ tangente à variedade X .

Esta demonstração também pode ser encontrada em [11]. ■

Observemos que o Teorema 2.11, a seguir, é quase uma recíproca do Teorema anterior 2.10.

Teorema 2.11. *Se f é k - \mathcal{R}_X -determinado então $\mathcal{M}_n^{k+1} \subset \Theta_X f$.*

Demonstração: Consideramos a projeção

$$\begin{aligned} \Pi : J^{k+1}(n, 1) &\longrightarrow J^k(n, 1) \\ j^{k+1}g &\longmapsto \Pi(j^{k+1}g) = j^k g. \end{aligned}$$

Afirmamos que $\Pi^{-1}(j^k f) \subseteq \mathcal{R}_X^{k+1} \cdot j^{k+1} f$. De fato, dado $g \in \Pi^{-1}(j^k f)$, como f é k - \mathcal{R}_X -determinado então $g \sim_{\mathcal{R}_X} f$ e existe $h \in \mathcal{R}_X$ tal que $f \circ h = g$ assim,

$$g = j^{k+1} g = j^{k+1}(f \circ h) \in \mathcal{R}_X^{k+1} \cdot j^{k+1} f$$

sendo

$$T_{j^{k+1} f} \mathcal{R}_X^{k+1} \cdot j^{k+1} f = j^{k+1}(\Theta_X f) = \frac{\Theta_X f + \mathcal{M}_n^{k+2}}{\mathcal{M}_n^{k+2}}$$

e

$$\begin{aligned} T_{j^{k+1} f} \Pi^{-1}(j^k f) &= (d\Pi)^{-1}(j^{k+1} f)(T_{j^k f}\{j^k f\}) = (d\Pi)^{-1}(j^{k+1} f)(0) \\ &= \ker d\Pi(j^{k+1} f) = \Pi^{-1}(0) = \frac{\mathcal{M}_n^{k+1}}{\mathcal{M}_n^{k+2}}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{\mathcal{M}_n^{k+1}}{\mathcal{M}_n^{k+2}} \subseteq \frac{\Theta_X f + \mathcal{M}_n^{k+2}}{\mathcal{M}_n^{k+2}} \implies \mathcal{M}_n^{k+1} \subseteq \Theta_X f$$

pelo Lema de Nakayama 1.3. ■

Portanto, pelos Teoremas 2.10 e 2.11 temos que, dado um germe $f \in \mathcal{M}_n$

f é finitamente \mathcal{R}_X -determinado $\iff \Theta_X^0 f \supset \mathcal{M}_n^p$, para algum p .

O Corolário a seguir fornece um critério geométrico para estabelecer a \mathcal{R}_X -determinação de um germe:

Corolário 2.12. *Um germe $f \in \mathcal{M}_n$ é finitamente \mathcal{R}_X -determinado se, e somente se, o germe de*

$$\{x \in \mathbb{C}^n : \delta(f)(x) = 0, \forall \delta \in \Theta_X\}$$

em 0 é igual a $\{0\}$ ou é vazio.

Demonstração: Observemos que

$$\mathcal{V}(\Theta_X f) = \left(\{x \in \mathbb{C}^n : \delta(f)(x) = 0, \forall \delta \in \Theta_X\}, 0 \right).$$

Vamos supor que f é finitamente \mathcal{R}_X -determinado, então pelo Teorema anterior 2.11, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{M}_n^p \subset \Theta_X f$, olhando para as variedades desses elementos temos

$$\{0\} = \mathcal{V}(\mathcal{M}_n^p) \supset \mathcal{V}(\Theta_X f) = \left(\{x \in \mathbb{C}^n : \delta(f)(x) = 0, \forall \delta \in \Theta_X\}, 0 \right)$$

portanto o germe de $\{x \in \mathbb{C}^n : \delta(f)(x) = 0, \forall \delta \in \Theta_X\}$ é vazio ou é $\{0\}$.

Por outro lado, se $\mathcal{V}(\Theta_X f)$ é vazio ou $\{0\}$ então $\mathcal{I}(\mathcal{V}(\Theta_X f))$ é igual a \mathcal{M}_n ou a \mathcal{O}_n , segue, pelo Teorema 1.6, que

$$\mathcal{M}_n \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{V}(\Theta_X f)) = \text{Rad}(\Theta_X f).$$

Sabemos que $\Theta_X f$ contem uma potência do seu radical (veja [3], página 83) logo

$$\mathcal{M}_n^p \subseteq (\text{Rad}(\Theta_X f))^p \subset \Theta_X f, \text{ para algum } p \in \mathbb{N},$$

pelo Teorema 2.10, temos que f é finitamente \mathcal{R}_X -determinado. ■

Definição 2.13. Dizemos que um germe $f \in \mathcal{M}_n$ possui uma singularidade isolada na origem em X quando o germe de

$$\{x \in \mathbb{C}^n : \delta(f)(x) = 0, \forall \delta \in \Theta_X\}$$

na origem é igual a $\{0\}$.

Observemos que, pela Definição acima e pelo Corolário 2.12, se um germe possuir uma singularidade isolada na origem em X então o germe é finitamente \mathcal{R}_X -determinado.

Exemplo 2.14. Seja $X := x^3 - y^2 = 0$ uma variedade analítica de \mathbb{C}^2 . Vemos na Proposição 4.10 que os seus campos de vetores tangentes são gerados por

$$\xi_1(x, y) = 2x \frac{\partial}{\partial x} + 3y \frac{\partial}{\partial y} \text{ e } \xi_2(x, y) = 2y \frac{\partial}{\partial x} + 3x^2 \frac{\partial}{\partial y}.$$

Consideramos os germes de função:

$$f(x, y) = y^3 + xy^2 \text{ e } g(x, y) = 3x^3 + xy + 4y^2$$

assim,

$$\Theta_X f = \langle 8xy^2 + 9y^3, 6x^3y + 9x^2y^2 + 2y^3 \rangle$$

$$\Theta_X g = \langle 18x^3 + 5xy + 24y^2, 3x^3 + 42x^2y + 2y^2 \rangle$$

e

$$\mathcal{V}(\Theta_X f) = \{(x, 0) : x \in \mathbb{C}\}$$

$$\mathcal{V}(\Theta_X g) = \{(0, 0)\}$$

então f não é finitamente \mathcal{R}_X -determinado e g é finitamente \mathcal{R}_X -determinado.

2.2 Deformações e Desdobramentos

Definição 2.15. *Seja $f_0 \in \mathcal{O}_n$.*

(a) *Um germe $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^r, 0) \rightarrow \mathbb{C}$ é uma deformação de f_0 se $F(x, 0) = f_0(x)$.*

A deformação F é denotada por (F, r) ;

(b) *Um germe $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^r, 0) \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^r$ é um desdobramento de f_0 se*

- $F(x, a) = (f(x, a), a)$ e,
- $f(x, 0) = f_0(x)$.

As definições abaixo são análogas para um germe de desdobramento.

Definição 2.16. *Seja $f_0 \in \mathcal{O}_n$.*

(a) *Duas deformações (F, r) e (G, q) do germe f_0 são isomorfas se existir uma aplicação $(\Phi, \lambda) : (F, r) \rightarrow (G, q)$, denominada \mathcal{R}_X -aplicação de deformações tal que:*

1. $\Phi(x, a) = (\phi(x, a), a)$ satisfazendo

- $\phi(x, 0) = x$, para todo $x \in (\mathbb{C}^n, 0)$;
- Para cada $a_0 \in \mathbb{C}^q$ suficientemente próximo da origem fixado,

$$\phi(\cdot, a_0) : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow \mathbb{C}^n$$

pertence à \mathcal{R}_{e_X} .

2. *Um germe $\lambda : (\mathbb{C}^q, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^r, 0)$.*

3. $F(\phi(x, a), \lambda(a)) = G(x, a)$.

(b) *Uma deformação (F, r) de f_0 é \mathcal{R}_X -trivial se for isomorfa à deformação constante $(x, a) \mapsto f_0(x)$.*

(c) *Uma deformação (F, r) de f_0 é \mathcal{R}_X -versal se para qualquer deformação (G, q) de f_0 existir uma \mathcal{R}_X -aplicação de deformações (Φ, λ) de (F, r) em (G, q) .*

Teorema 2.17. *Uma deformação (F, r) de um germe f é \mathcal{R}_X -versal se, e somente se,*

$$\Theta_X f + \mathbb{C} \left\{ \frac{\partial F}{\partial a_1}(x, 0), \frac{\partial F}{\partial a_2}(x, 0), \dots, \frac{\partial F}{\partial a_r}(x, 0) \right\} = \mathcal{O}_n.$$

Demonstração: Veja [11], página 44.

Corolário 2.18. *Uma deformação (F, r) de um germe f é \mathcal{R}_X -versal se, e somente se*

$$\mathbb{C} \left\{ \frac{\partial F}{\partial a_1}(x, 0), \frac{\partial F}{\partial a_2}(x, 0), \dots, \frac{\partial F}{\partial a_r}(x, 0) \right\}$$

geram o espaço quociente $\frac{\mathcal{O}_n}{\Theta_X f}$.

Demonstração: Consequência imediata do Teorema 2.17. ■

Definição 2.19. *Duas deformações de mesmo parâmetro (F, r) e (G, r) de um germe f são \mathcal{R}_X -equivalentes se existir duas \mathcal{R}_X -aplicações de deformações $(\Phi, \lambda) : (F, r) \rightarrow (G, r)$ e $(\Psi, \mu) : (G, r) \rightarrow (F, r)$ que satisfazem:*

- $\Phi(x, a) = (\phi(x, a), a)$ e $\Psi(y, b) = (\psi(y, b), b)$;
- $(\Phi(\psi(y, b), \mu(b)), \lambda(\mu(b))) = (y, b)$ e $(\Psi(\phi(x, a), \lambda(a)), \mu(\lambda(a))) = (x, a)$.

Teorema 2.20. *Quaisquer duas deformações \mathcal{R}_X -versais de mesmo parâmetro de um mesmo germe são \mathcal{R}_X -equivalentes.*

Demonstração: Veja [11], página 47.

2.3 Germes estáveis

A idéia de um germe estável f é que qualquer deformação de f é equivalente a f , ou seja, um germe estável deve ser a sua própria deformação versal. Entretanto essa idéia não é totalmente correta. Por exemplo, tomando-se

$$(X, 0) = \emptyset \quad \text{e} \quad f(x) = \sum_{j=1}^n x_j^2,$$

para $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ certamente gostaríamos que f fosse estável mas o germe $(x, t) \mapsto f(x) + t$ é uma deformação versal não-trivial. Isso nos leva a seguinte definição:

Definição 2.21. *Um germe $f \in \mathcal{M}_n$ é \mathcal{R}_X -estável se a deformação à 1-parâmetro $F(x, t) = f(x) + t$ é uma deformação \mathcal{R}_X -versal.*

Definição 2.22. *Se $f \in \mathcal{M}_n$ possui uma singularidade isolada na origem em X então $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\Theta_X f}$ é chamada de multiplicidade de f sobre X na origem. Notação: $\mu_X(f)$.*

Seja $f \in \mathcal{M}_n$ um germe com uma singularidade isolada na origem em X . Então

1. f é \mathcal{R}_X -estável se, e somente se, 1 gera $\frac{\mathcal{O}_n}{\Theta_X f}$, $\Theta_X f = \mathcal{M}_n$ e $\mu_X(f) = 1$.
2. $\mu_X(f) = 0$ e $\Theta_X f = \mathcal{O}_n$ se, e somente se, f é a sua deformação \mathcal{R}_X -versal.

Proposição 2.23. *Sejam $f \in \mathcal{M}_n$ um germe \mathcal{R}_X -estável e (F, r) uma deformação de f . Então para todo $a \in (\mathbb{C}^r, 0)$, suficientemente próximo da origem, existe um ponto $x(a)$ de X , dependendo suavemente de a e um germe de difeomorfismo $\varphi_a : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow \mathbb{C}^n$ que também depende suavemente de a , que leva $(X, 0)$ em $(X, x(a))$, tais que $f(\varphi_a(x)) = F(x, a) + \text{constante}$.*

Demonstração: Como f é \mathcal{R}_X -estável então $G(x, t) = f(x) + t$ é uma deformação \mathcal{R}_X -versal logo existe uma \mathcal{R}_X -aplicação de deformações, $(\Phi, \lambda) : (G, 1) \rightarrow (F, r)$ tal que $F(x, a) = G(\phi(x, a), \lambda(a)) = f(\phi(x, a)) + \lambda(a)$. Tomamos o ponto $x(a) = \phi(0, a) \in X$ e lembramos que $\phi(\cdot, a) \in \mathcal{R}_{e_X}$ para cada a suficientemente pequeno e ambos dependendo suavemente de a ; seja $\varphi_a(x) = \phi(x, a)$. Assim, temos $f(\varphi_a(x)) = F(x, a) - \lambda(a)$, com a fixo.

Como $\varphi_a \in \mathcal{R}_{e_X}$, φ_a leva $(X, 0)$ em $(X, x(a))$.

Esta demonstração também pode ser encontrada em [8]. ■

Proposição 2.24. *Todo germe $f \in \mathcal{M}_n$, \mathcal{R}_X -estável é 2- \mathcal{R}_X -determinado.*

Demonstração: Como f é \mathcal{R}_X -estável, a deformação $F(x, t) = f(x) + t$ é \mathcal{R}_X -versal e portanto $\frac{\partial F}{\partial t}(x, 0) = 1$ gera $\frac{\mathcal{O}_n}{\Theta_X f}$ o que acarreta $\mathcal{M}_n = \Theta_X f$ e o resultado segue pelo Teorema 2.10.

Esta demonstração também pode ser encontrada em [8]. ■

Proposição 2.25. *Seja $f \in \mathcal{M}_n$ e suponhamos que $\Theta_X = \Theta_X^0$. Então*

1. *f é \mathcal{R}_X -estável se, e somente se, $\mathcal{M}_n \subset \Theta_X f + \mathcal{M}_n^2$;*
2. *Os germes \mathcal{R}_X -estáveis são 1- \mathcal{R}_X -determinados;*
3. *Quaisquer dois germes \mathcal{R}_X -estáveis são \mathcal{R}_X -equivalentes.*

Demonstração: Veja [8], página 65.

2.4 Funções com pontos críticos isolados

Nesta seção procuramos condições no germe de subvariedade analítica X que assegurem que existam germes $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ com ponto crítico isolado na origem em X . Estas condições são dadas em termos de uma determinada estratificação de X , a qual passamos a descrever; para maiores detalhes veja [8] e [24].

Definição 2.26. *Uma estratificação de um subconjunto V de uma variedade diferenciável M é uma partição \mathcal{X} de V em subvariedades diferenciáveis, chamadas de estratos, de M que satisfazem:*

- *Todo ponto em V possui uma vizinhança em M que intersecta um número finito de estratos;*
- *A condição de fronteira: Se $X, Y \in \mathcal{X}$ e $\bar{X} \cap Y \neq \emptyset$ então $Y \subset \partial X$.*

Sejam X uma subvariedade analítica reduzida de \mathbb{C}^n e U uma vizinhança suficientemente pequena da origem de \mathbb{C}^n . Dado um ponto $x \in U$, denotamos por

$$\Theta_X(x) = \{\delta(x) \in \mathbb{C}^n : \delta \in \Theta_X\}$$

o subespaço linear de $T_x U$.

Lema 2.27. *Sejam X uma subvariedade analítica reduzida e U uma vizinhança suficientemente pequena da origem de \mathbb{C}^n . Então existe uma única estratificação $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ de U com as seguintes propriedades:*

1. *Cada estrato X_α é uma subvariedade conexa imersa de U e, ainda*

$$U = \dot{\bigcup}_{\alpha \in I} X_\alpha;$$

2. *Se $x \in U$ está no estrato X_α então o espaço tangente $T_x X_\alpha$ coincide com $\Theta_X(x)$;*
3. *Se X_α e X_β são dois estratos distintos com $X_\alpha \cap \overline{X_\beta} \neq \emptyset$ então $X_\alpha \subset \partial X_\beta$.*

Demonstração: Veja [24], página 280.

Definição 2.28. *A estratificação do Lema 2.27, $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ de U é chamada de estratificação logarítmica de X e cada estrato X_α é chamado de estrato logarítmico.*

Proposição 2.29. *Sejam X uma subvariedade analítica reduzida e U uma vizinhança suficientemente pequena da origem de \mathbb{C}^n . Então*

1. *Se X é equidimensional então as componentes conexas do conjunto $U \setminus X$ e do conjunto $X \setminus \text{sing}(X)$ são estratos logarítmicos;*
2. *Se x e y são pontos do mesmo estrato logarítmico de X então existem vizinhanças V e W de x e y respectivamente, e uma aplicação biholomorfa $\varphi : (V, x) \rightarrow (W, y)$ que preserva X ;*
3. *Seja X_α um estrato logarítmico de X de dimensão m . Então em cada ponto $x \in X_\alpha$ existem uma vizinhança V de x , um sistema de coordenadas local z_1, \dots, z_n e uma aplicação $h : V \rightarrow \mathbb{C}^n$ tais que*
 - (i) $h(z_1, \dots, z_n) = h(z_1, \dots, z_{n-m}, 0, \dots, 0)$;
 - (ii) $X \cap V = \{z \in \mathbb{C}^n : h(z) = 0\}$;

(iii) $X_\alpha \cap V = \{z_1 = \dots = z_{n-m} = 0\}$.

Demonstração: Veja [24], páginas 282 e 284.

Na Proposição 2.29, a segunda afirmação afirma que dois germes (X, x) e (X, y) em pontos de um mesmo estrato logarítmico são isomorfos. A terceira afirmação diz que em uma vizinhança de um ponto $x \in \mathbb{C}^n$, a variedade X e, portanto sua estratificação logarítmica é analiticamente um produto cartesiano dos estratos logarítmicos que contêm x .

Definição 2.30. *Um germe X é holonômico se para alguma vizinhança U da origem a estratificação logarítmica de U possuir um número finito de estratos.*

Seja r um inteiro positivo e consideramos o germe

$$A_r = \left(\{x \in U : \dim_{\mathbb{C}} \Theta_X(x) \leq r\}, 0 \right)$$

A_r é um germe analítico fechado e é a união de todos estratos logarítmicos de dimensão $\leq r$. E seja

$$B_r = A_r \setminus A_{r-1} = \left(\{x \in U : \dim_{\mathbb{C}} \Theta_X(x) = r\}, 0 \right).$$

Observemos que para $x \in B_r$ suficientemente próximo da origem $\dim_x B_r \geq r$.

Proposição 2.31. *Um germe X é holonômico se, e somente se, $\dim_0 A_r \leq r$, para todo r , com $m \leq r \leq n$, onde m é a dimensão do estrato X_α que contém a origem.*

Demonstração: Veja [24], página 287.

Proposição 2.32. *Se o germe X não é holonômico então para algum inteiro r , com $0 \leq r \leq n - 1$ temos $\dim B_r > r$.*

Demonstração: Veja [8], página 28.

Proposição 2.33. *Seja $f \in \mathcal{M}_n$ um germe com um ponto crítico isolado na origem em X . Suponhamos que F_t seja uma deformação analítica de f . Então, para t suficientemente próximo da origem, todos os pontos críticos de F_t são isolados.*

Demonstração: Consideramos o conjunto

$$\Sigma = \{(x, t) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} : x \text{ é ponto crítico de } F_t\}.$$

Seja $\pi : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ a projeção no segundo fator, $\pi(x, t) = t$. Então Σ é uma variedade analítica, pois

$$\Sigma = \mathcal{V}\left(\frac{\partial F_t}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F_t}{\partial x_n}\right) \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}.$$

Por hipótese $0 \in \mathbb{C}^n$ é um ponto crítico isolado de $F_0 = f$ acarretando que π é uma aplicação finita em uma vizinhança da origem (veja [17], página 62), i.e., imagem inversa do ponto nesta vizinhança é um conjunto finito.

Esta demonstração também pode ser encontrada em [8]. ■

Corolário 2.34. *Seja $f \in \mathcal{M}_n$ um germe com ponto crítico isolado na origem em X . Suponhamos que $\ker(df(0))$ contenha $\lim_{t \rightarrow 0} \Theta_X(x(t))$, para algum caminho analítico $x : [0, \varepsilon) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$, com $x(0) = 0$. Então existe uma deformação analítica F_t , $t \in [0, \varepsilon)$ de f tal que F_t possui um ponto crítico isolado em $x(t)$ em X .*

Demonstração: Seja l_t uma família de formas lineares com $l_0 = df(0)$ e $l_t \supset \Theta_X(x(t)) = \{\delta(x(t)) : \delta \in \Theta_X\}$, para $t \in [0, \varepsilon)$, definimos

$$F_t(x) = f(x) + l_t(x) - df(x(t))(x).$$

$$F_0(x) = f(x) + l_0(x) - df(x(0))(x) = f(x) + df(0)(x) - df(0)(x) = f(x).$$

$$dF_t(x(t)) = df(x(t)) + l_t - df(x(t)) = l_t.$$

Portanto F_t tem pontos críticos em $x(t)$, para todo $t \in [0, \varepsilon)$, já que l_t foram tomadas de forma que $l_t \supset \Theta_X(x(t))$. Como F_t é uma deformação de f , pela Proposição anterior 2.33, todos os pontos críticos de F_t são isolados.

Esta demonstração também pode ser encontrada em [8]. ■

Lema 2.35. *Dado uma subvariedade analítica X . Sejam x um ponto suave de B_r e $f : (\mathbb{C}^n, x) \rightarrow \mathbb{C}$ com uma singularidade isolada em x . Então a dimensão de B_r em x é menor ou igual à r .*

Demonstração: Suponhamos que $\dim_x B_r \geq r + 1$. Se $\delta_1, \dots, \delta_r$ estão em $\Theta_{(X,x)}$ e são linearmente independentes em x (tais campos existem pois estamos supondo $\dim_x B_r > r$) então para $y \in B_r$ suficientemente próximo de x , temos que $\delta_1(y), \dots, \delta_r(y)$ são linearmente independentes e $\langle \delta_1(y), \dots, \delta_r(y) \rangle$ está contido em $\Theta_X(y)$; pela definição de B_r , sabemos que $\dim \Theta_X(y) = r$ portanto esse conjunto de vetores $\delta_1(y), \dots, \delta_r(y)$ geram $\Theta_X(y)$. O germe de variedade em x formado pelos pontos críticos de f em B_r é igual à

$$\left(\{p \in B_r : \delta_1(f)(p) = \dots = \delta_r(f)(p) = 0\}, x \right)$$

e tem dimensão maior ou igual à 1 e assim f não possui uma singularidade isolada em x .

Esta demonstração também pode ser encontrada em [8]. ■

Teorema 2.36. *Seja U uma vizinhança suficientemente pequena da origem de \mathbb{C}^n . Então (X, x) suporta um germe com ponto crítico isolado para cada ponto $x \in X \cap U$ se, e somente se, X é holonômico.*

Demonstração: Veja [8], página 66. ■

Teorema 2.37. *O conjunto dos germes $f \in \mathcal{M}_n$ com pontos críticos não-isolados em X tem codimensão infinita no espaço de todos os germes se, e somente se, X é holonômico.*

Demonstração: Afirmamos que o conjunto dos germes com pontos críticos não-isolados tem codimensão infinita se para todo germe de polinômio p de grau d podemos encontrar um germe f com $j^d f(0) = p$ e f gerando uma função tendo $0 \in X$ como ponto crítico isolado.

Se X é holonômico sejam $\{0\}, X_1, \dots, X_s$ seus estratos logarítmicos. Para cada inteiro positivo d seja $\{\varphi_j : 1 \leq j \leq N\}$ o conjunto de monômios nas variáveis x_1, \dots, x_n de grau d e definimos

$$\begin{aligned} \varphi^d : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^N, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}, 0) \\ (x, u) &\longmapsto \varphi^d(x, u) = \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(x). \end{aligned}$$

Se $g \in \mathcal{M}_n$ é uma função polinomial de grau d definimos

$$\begin{aligned} G : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^N, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}, 0) \\ (x, u) &\longmapsto g(x) + \varphi^{d+1}(x, u). \end{aligned}$$

A restrição de G à $X_i \times \mathbb{C}^N$ é uma submersão, para $i = 1, \dots, s$

Para uma vizinhança suficientemente pequena U de $0 \in \mathbb{C}^n$ e quase todos $s \in \mathbb{C}^N$ o germe $G(\cdot, s) : X_i \cap U \rightarrow \mathbb{C}$ tem 0 como valor regular pelo Lema da Transversalidade de Thom (veja [15], página 53).

Afirmamos que qualquer germe h tem ponto crítico isolado na origem em X . Caso contrário podemos encontrar uma curva $x : [0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{C}^n$, com $x(0) = 0$, $x(t) \neq 0$ para todo $t > 0$ e com h tendo um ponto singular em $x(t)$ (veja [10], página 148).

Mostremos que $h(x(t)) = 0$. Certamente $x(t)$ está em algum estrato, digamos X_1 . Agora,

$$\frac{d}{dt}(h(x(t))) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t}$$

e, como $x(t)$ está em X_1 , temos que

$$\delta(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial t}(t) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

está em $T_{x(t)}X_1$. Como h tem ponto singular em $x(t)$ temos $\frac{d}{dt}(h(x(t))) = 0$, para todo $t > 0$, e como $h(x(0)) = 0$ deduzimos que $h(x(t)) = 0$ para todo $t > 0$. Isso contradiz a afirmação que $h : X_1 \cap U \rightarrow \mathbb{C}$ tem a origem como valor regular.

Para a recíproca suponhamos que $(X, 0)$ não seja holonômico, tal que para algum $0 \leq r \leq n - 1$ temos que $\dim B_r < r$. Seja l uma forma linear determinando um hiperplano que contem o limite de espaços $\Theta_X(x(t))$ para algum caminho analítico $x(t)$, com $x(0) = 0$ e $x(t) \in B_r$, para $t > 0$. Afirmamos que nenhum germe $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ com $df(0) = l$ tem ponto crítico isolado em 0. Se algum germe dessa forma possuir um ponto crítico isolado na origem então pela Proposição 2.33 existe uma deformação F_t de f com pontos críticos isolados em $x(t) \in B_r$ e segundo [8], página 67, isso não é possível. Dessa forma germes com singularidades não-isoladas são de codimensão $\leq n - 1$.

Esta demonstração também pode ser encontrada em [8]. ■

Capítulo 3

A Transversal completa para o grupo \mathcal{R}_X

A classificação de germes é em grande parte um trabalho indutivo. Por exemplo, trabalhando com funções sob a \mathcal{R} -equivalência, se consideramos o germe $f(x, y) = x^3$ então $J(f) = \langle x^2 \rangle$. Assim, $T_f \mathcal{R}f = \langle x^3, x^2y \rangle$ e f não é um germe finitamente \mathcal{R} -determinado. Como $j^3 f = f$, o próximo passo para a classificação é considerar os 4-jatos g tais que $j^3 g = f$. Ou seja, consideramos os 4-jatos da forma:

$$g = x^3 + ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4$$

com $a, b, c, d, e \in \mathbb{C}$ e obtemos 5 parâmetros para serem analisados.

Neste capítulo mostramos como o Teorema da Transversal Completa pode ser usado para obter métodos eficientes para a classificação de germes sob a \mathcal{R}_X -equivalência. Uma maneira de agrupar os germes é classificando todos os $(k + 1)$ -jatos a partir de um determinado k -jato dado, obtendo assim uma árvore de classificação com vários níveis correspondentes ao grau do jato envolvido. O Teorema da Transversal Completa fornece uma lista reduzida de germes a serem analisados.

No caso do exemplo acima, o método afirma que qualquer 4-jato g com $j^3 g = f$ é \mathcal{R} -equivalente à um germe da forma:

$$x^3 + axy^3 + by^4$$

$a, b \in \mathbb{C}$ reduzindo-se o número de parâmetros a serem analisados para 2.

Portanto o método fornece uma lista reduzida de todos $(k + 1)$ -jatos que são equivalentes a um k -jato dado.

O Teorema da Transversal Completa foi demonstrado na sua forma mais geral no artigo de J. Bruce, N. Kirk e A. Du Plessis [7], onde foi usado o Lema de Mather. Para o caso particular do subgrupo \mathcal{R}_X , J. Bruce e J. West [9], demonstraram o Teorema usando as propriedades das deformações \mathcal{R}_X -triviais. A seguir descrevemos tais resultados:

Teorema 3.1 (Lema de Mather). *Seja G um grupo de Lie agindo suavemente numa variedade diferenciável M . Seja W uma subvariedade conexa de M . Então W está contido em uma única órbita se, e somente se,*

1. $T_w W \subset T_w Gw$, para qualquer $w \in W$;
2. $\dim_{\mathbb{C}} T_w Gw$ independe da escolha de $w \in W$.

Demonstração: Veja [23], página 234.

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre \mathbb{C} ; dizemos que um conjunto não-vazio A é um espaço afim associado à V se existir uma aplicação $V \times A \rightarrow A$ que leva cada par (v, a) em um elemento de A , denotado por $a + v$, satisfazendo as seguintes condições:

- (i) $a + (v + u) = (a + v) + u$, para quaisquer $v, u \in V$ e qualquer $a \in A$;
- (ii) Dados $a, b \in A$ existe um único vetor $v \in V$ tal que $b = a + v$;

denotamos tal espaço vetorial por V_A .

Lembremos também que à todo grupo de Lie G podemos associar uma álgebra de Lie identificada com o espaço tangente à G na identidade, $T_1 G$. E, se temos uma ação de G em uma variedade diferenciável M , para cada $x \in M$, podemos associar a álgebra de Lie de $G \cdot x$ com $T_x(G \cdot x)$, o espaço tangente da órbita de x sob G no ponto x .

Teorema 3.2 (Teorema da Transversal Completa). *Seja G um grupo de Lie agindo suavemente em um espaço afim A associado a um espaço vetorial V_A e $W \subset V_A$ um subespaço vetorial tal que*

$$T_{a+w}G(a+w) = T_aGa \quad (3.1)$$

para qualquer $a \in A$ e qualquer $w \in W$. Então

1. $a + (T_aGa \cap W) \subset Ga \cap (a + W)$, para qualquer $a \in A$;

2. Se $a \in A$ e T é um subespaço vetorial de W tais que

$$W \subset T + T_aGa$$

então para qualquer $w \in W$, existem $g \in G$ e $t \in T$ tais que

$$g(a+w) = a+t$$

Demonstração:

1. Fixemos $a \in A$ arbitrariamente. Vamos mostrar que $N = a + (T_aGa \cap W) \subset Ga$. Como N é subespaço afim de V_A então N é conexo.

Seja $y \in N$, com $y = a + \beta$ onde $\beta \in T_aGa \cap W \subseteq W$. Por hipótese,

$$T_yGy = T_{a+\beta}G(a+\beta) = T_aGa$$

o que acarreta

$$T_yN = T_aGa \cap W \subset T_yGy;$$

$$\text{e, } \dim_{\mathbb{C}} T_yGy = \dim_{\mathbb{C}} T_aGa.$$

Portanto $\dim_{\mathbb{C}} T_yGy$ independe de y . Pelo Lema de Mather 3.1, N está contido em uma única órbita, a saber, Ga .

2. Pelo item (1) temos

$$G(a+\beta) \cap (a+\beta+W) \supset a+\beta + (T_{a+\beta}G(a+\beta) \cap W)$$

para qualquer $\beta \in W$, o que implica

$$G(a+\beta) \cap (a+\beta+W) \supset a+\beta + (T_aGa_0 \cap W).$$

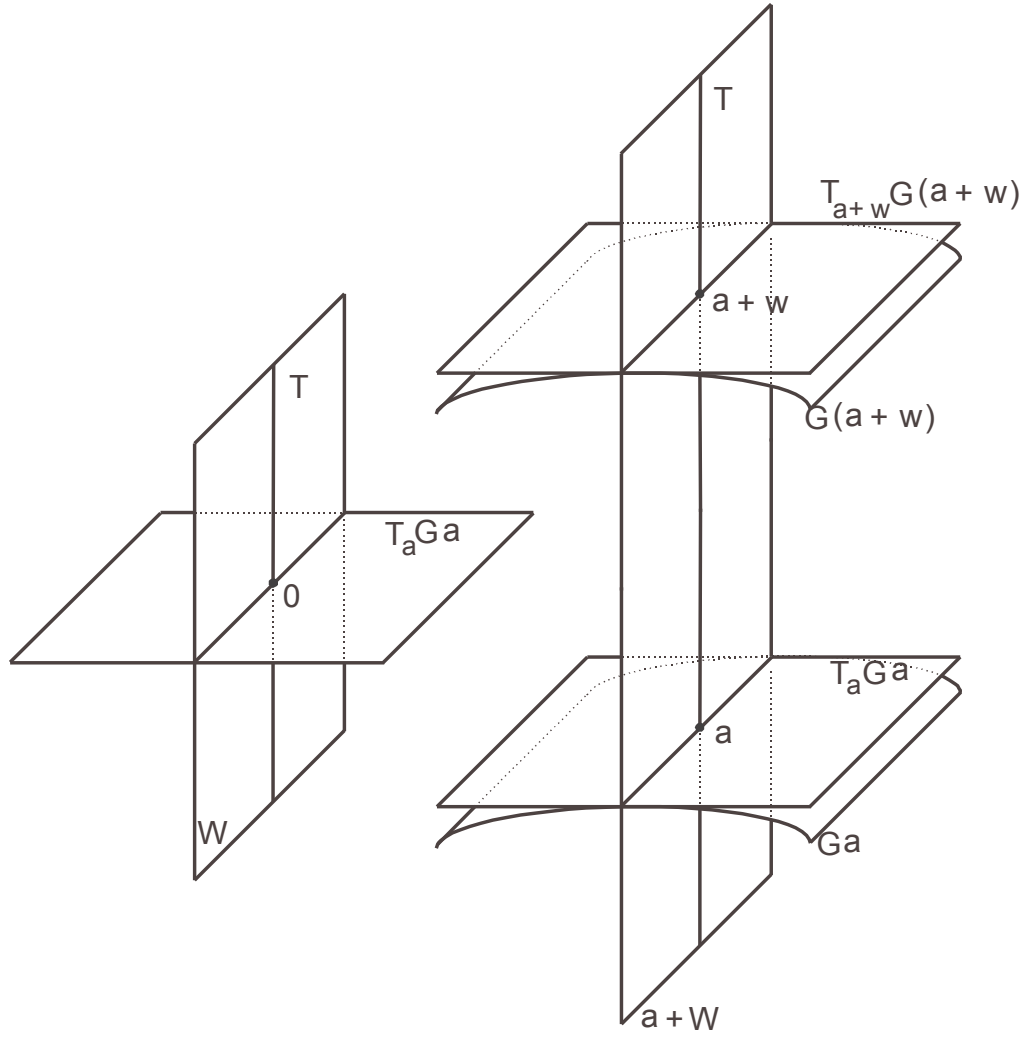


Figura 3.1: Transversal Completa

Portanto

$$\bigcup_{\beta \in T} G(a + \beta) \supset \bigcup_{\beta \in T} (a + \beta + (T_a G a \cap W)) = a + T + (T_a G a \cap W),$$

logo

$$\bigcup_{\beta \in T} G(a + \beta) \supset a + W,$$

e para qualquer $\beta \in W$, $a + \beta \in \bigcup_{t \in T} G(a + t)$, assim $a + \beta \in G(a + \tilde{t})$, para algum $\tilde{t} \in T$.

Esta demonstração também pode ser encontrada em [7].

■

Nosso objetivo é aplicar o Teorema da Transversal Completa para o grupo \mathcal{R}_X ; enunciaremos o Teorema para qualquer subgrupo de Lie do grupo \mathcal{R}_1 e mostramos que \mathcal{R}_{1_X} é um subgrupo de Lie de \mathcal{R}_1 . Primeiramente definimos um subgrupo de Lie:

Sejam M e N duas variedades diferenciáveis e $f : M \rightarrow N$ uma imersão. Tomamos $L = f(M)$ e consideramos em L duas topologias:

1. A topologia induzida de N ;
2. A topologia dada pela imersão f , onde os abertos são da forma $A \subset L$, onde $f^{-1}(A)$ é um aberto em M .

Uma subvariedade imersa L em N é quase-regular se para toda aplicação contínua $\varphi : V \rightarrow N$, com V espaço topológico localmente conexo e φ assumindo valores em L então $\varphi : V \rightarrow L$ é contínua na topologia dada pela imersão; observemos que se a topologia induzida por N coincidir com a topologia dada pela imersão então a condição de quase-regularidade é sempre satisfeita.

Um subgrupo de Lie H de um grupo de Lie G é um subgrupo que também é uma variedade quase-regular.

Dado um grupo de Lie G agindo em um espaço afim A associado a um espaço vetorial V_A e $W \subset V_A$ um subespaço vetorial, a principal hipótese do Teorema da Transversal Completa é a seguinte:

$$T_{a+w}G(a+w) = T_aGa.$$

O nosso objetivo é aplicar o Teorema para subgrupos do grupo \mathcal{R} então tomamos $V_A = A = J^k(n, 1)$ considerando-o como um subespaço de $J^{k+1}(n, 1)$, sendo H^k o subespaço de $J^k(n, 1)$ formado pelos polinômios homogêneos de grau k tomamos $W = H^{k+1}$ nosso primeiro impulso é tomar $G = \mathcal{R}^{k+1}$ o grupo dos $(k+1)$ -jatos de difeomorfismos de \mathcal{R} mas nessas condições a hipótese do Teorema não é satisfeita pois, para quaisquer $g \in J^k(n, 1)$ e $p \in H^{k+1}$,

$$T_{g+p}\mathcal{R}^{k+1}(g+p) = j^{k+1}(\mathcal{M}_n J(f) + \mathcal{M}_n J(p))$$

e não podemos afirmar que o conjunto dos $(k+1)$ -jatos de $\mathcal{M}_n J(p)$ é nulo. Portanto $T_{g+p}\mathcal{R}^{k+1}(g+p)$ não é igual à $T_g\mathcal{R}^{k+1}g$; dessa forma definimos:

Definição 3.3. *Seja \mathcal{R}_1 o subgrupo de \mathcal{R} formado pelos difeomorfismos cujos 1-jatos é a identidade.*

Analogamente ao grupo \mathcal{R} , no caso do grupo \mathcal{R}_1 obtemos

$$T_f\mathcal{R}_1^k f = j^k(\mathcal{M}_n^2 J(f))$$

e a hipótese do Teorema da Transversal Completa é satisfeita para $G = \mathcal{R}_1^{k+1}$.

Um subgrupo \mathcal{H} de \mathcal{R} é um subgrupo de Lie de \mathcal{R}_1 se, para cada inteiro positivo k , o grupo dos k -jatos \mathcal{H}^k é um subgrupo de Lie de \mathcal{R}_1^k .

Teorema 3.4 (Transversal Completa para o grupo \mathcal{R}). *Sejam \mathcal{H} um subgrupo de Lie de \mathcal{R}_1 e $f \in J^k(n, 1)$. Se $T \subset H^{k+1}$ é um subespaço vetorial tal que*

$$H^{k+1} \subset T + T_f\mathcal{H}^{k+1}f$$

então todo $(k+1)$ -jato g , com $j^k g = f$ está na mesma \mathcal{H}^{k+1} -órbita do que algum $(k+1)$ -jato da forma $f + t$, para algum $t \in T$.

Demonstração: Sejam $A = V_A = J^k(n, 1)$, $W = H^{k+1}$ e $G = \mathcal{H}^{k+1}$. Olhando o espaço vetorial dos k -jatos incluído no espaço vetorial dos $(k+1)$ -jatos, para se usar o Teorema da Transversal Completa 3.2 basta mostrar que:

$$T_{g+p}\mathcal{H}^{k+1}(g+p) = T_g\mathcal{H}^{k+1}g$$

para quaisquer $g \in J^k(n, 1)$ e $p \in H^{k+1}$.

Sejam $g \in J^k(n, 1)$, $p \in H^{k+1}$ e $\xi \in T_1\mathcal{H}$ temos

$$j^{k+1}\xi(f+p) = j^{k+1}\xi(f)$$

já que $T_1\mathcal{H} \subset T_1\mathcal{R}_1$ então ξ tem seu 1-jato nulo e p é um polinômio homogêneo de grau $k+1$. Portanto para qualquer $p \in H^{k+1}$ existem $h \in \mathcal{H}^{k+1}$ e $t \in T$ tais que

$$(f+p) \circ h = f+t,$$

ou seja, qualquer $(k + 1)$ -jato g , com $j^k g = j^k f$ é \mathcal{H}^{k+1} -equivalente à $f + t$, para algum $t \in T$.

Esta demonstração também pode ser encontrada em [7]. ■

Finalizando, queremos aplicar o Teorema da Transversal Completa, para o grupo \mathcal{R}_X . Analogamente ao grupo \mathcal{R} se consideramos $G = \mathcal{R}_X^{k+1}$, $A = V_A = J^k(n, 1)$ e $W = H^{k+1}$, a hipótese (3.1) não é satisfeita pois,

$$T_{f+p}\mathcal{R}_X^{k+1}(f + p) = j^{k+1}\left(\Theta_X f + \Theta_X p\right)$$

e não podemos afirmar que os $(k + 1)$ -jatos de $\Theta_X p$ são nulos; portanto consideramos campos em Θ_X cujos 1-jatos são nulos e obtemos fluxos que são difeomorfismos cujos 1-jatos são a identidade.

Definição 3.5. Denotamos por Θ_X^1 o \mathcal{O}_n -submódulo de Θ_X formado pelos campos cujos 1-jatos são nulos.

Lema 3.6. O grupo \mathcal{R}_{1X} é um subgrupo de Lie de \mathcal{R}_1 .

Demonstração: Como \mathcal{R}_{1X} é um subgrupo de \mathcal{R}_1 então para cada inteiro positivo k fixado, seja $i_k : \mathcal{R}_{1X}^k \rightarrow \mathcal{R}_1^k$ a aplicação de inclusão. Então i_k é uma imersão e a topologia induzida por \mathcal{R}_{1X}^k coincide com a topologia dada por i_k . Portanto \mathcal{R}_{1X} é um subgrupo de Lie de \mathcal{R}_1 . ■

Teorema 3.7 (Transversal Completa para o grupo \mathcal{R}_X). *Seja $f \in J^k(n, 1)$. Se $T \subset H^{k+1}$ é um subespaço vetorial tal que*

$$H^{k+1} \subset T + T_f \mathcal{R}_{1X}^{k+1} f$$

então todo $(k + 1)$ -jato g , com $j^k g = f$ é \mathcal{R}_{1X}^{k+1} -equivalente à $f + t$, para algum $t \in T$.

Conforme foi observado anteriormente, o Teorema acima 3.7, foi demonstrado por J. Bruce, J. West em [9], usando-se apenas a abordagem das deformações \mathcal{R}_X -triviais; a qual passamos a descrever a seguir:

Definição 3.8. *Seja $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um germe de uma família de funções à 1-parâmetro, com $F(0, t) = 0$ para t próximo da origem.*

1. *F é uma família \mathcal{R}_X -trivial se existir uma família à 1-parâmetro de difeomorfismos $H : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ que preservam X , com $H(x, 0) = x$, $H(0, t) = 0$ para t próximo da origem e*

$$F(H(x, t), t) = F(x, 0);$$

2. *Seja k um inteiro positivo. F é uma família k - \mathcal{R}_X -trivial se existir uma família à 1-parâmetro de difeomorfismos $H : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ que preservam X , com $H(x, 0) = x$, $H(0, t) = 0$ para t próximo da origem e*

$$F(H(x, t), t) = F(x, 0) + \phi(x, t)$$

para algum $\phi \in \mathcal{M}_{n+1}^{k+1}$.

Esta definição diz que se uma família F é \mathcal{R}_X -trivial então, para t próximo da origem fixado, F_t é \mathcal{R}_X -equivalente à F_0 .

Observemos que uma família é k - \mathcal{R}_X -trivial se ela é \mathcal{R}_X -trivial a menos de termos de grau k . Obviamente, uma família \mathcal{R}_X -trivial é k - \mathcal{R}_X -trivial para todo inteiro positivo k .

A próxima Proposição fornece critérios para identificar se uma família é \mathcal{R}_X -trivial ou k - \mathcal{R}_X -trivial, para algum k .

Proposição 3.9. *Seja $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ um germe tal que $F(0, t) = 0$, para t próximo da origem. Sejam ξ_1, \dots, ξ_p os germes de campos de vetores que geram Θ_X^0 . Então*

1. *F é \mathcal{R}_X -trivial se existir um germe $\alpha : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow \mathbb{C}^p$ satisfazendo*

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i \xi_i(F) + \frac{\partial F}{\partial t} \equiv 0,$$

onde

$$\xi_i(F) = \sum_{j=1}^n \xi_{ij} \frac{\partial F}{\partial x_j}$$

ou, equivalentemente

$$\frac{\partial F}{\partial t} \in \Theta_X^0 F;$$

2. F é k - \mathcal{R}_X -trivial se existir um germe $\alpha : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow \mathbb{C}^p$ satisfazendo

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i \xi_i(F) + \frac{\partial F}{\partial t} \in \mathcal{M}_n^{k+1}$$

ou, equivalentemente

$$\frac{\partial F}{\partial t} \in \Theta_X^0 F + \mathcal{M}_n^{k+1}.$$

Demonstração:

(1) Suponhamos que exista tal α e definimos o campo

$$\eta \equiv \sum_{i=1}^p \alpha_i \xi_i \equiv \sum_{j=1}^n \eta_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

então a equação diferencial

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t}(x, t) = \eta(H(x, t), t) \\ H(x, 0) = x \end{cases} \quad (3.2)$$

tem solução definida em alguma vizinhança de $(0, 0) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ (veja [1], página 56).

Ou seja, podemos encontrar $H : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ satisfazendo (3.2).

O campo η é tangente à X pois é uma combinação de campos de Θ_X^0 ; pela Proposição 2.7, o fluxo gerado por η , H_t preserva X para t próximo da origem.

Definimos, então, uma nova família

$$\begin{aligned} G : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}, 0) \\ (x, t) &\longmapsto G(x, t) = F(H(x, t), t), \end{aligned}$$

diferenciando em relação à t , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[F(H(x, t), t) \right] = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_j}(H(x, t), t) \frac{\partial H_j}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial F}{\partial t}(H(x, t), t) = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_j}(H(x, t), t) \eta_j(H(x, t), t) + \frac{\partial F}{\partial t}(H(x, t), t) = \left(\sum_{j=1}^n \eta_j \frac{\partial F}{\partial x_j} + \frac{\partial F}{\partial t} \right)(H(x, t), t) = 0 \end{aligned}$$

por (3.2) e, pela hipótese que $\sum_{i=1}^p \alpha_i \xi_i(F) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$.

Vemos que G não depende de t , i.e., $G(x, t) = G(x, 0)$ para t próximo da origem, portanto

$$F(H(x, t), t) = G(x, t) = G(x, 0) = F(H(x, 0), 0) = F(x, 0).$$

Observemos que $\frac{\partial H}{\partial t}(0, t) = \eta(H(0, t), t)$ tem solução única $H(0, t) = 0$ já que os campos ξ_i , $i = 1, \dots, p$, se anulam na origem, então H tem as propriedades exigidas.

(2) Suponhamos que tal α exista e seja H solução do P.V.I.

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t}(x, t) = \eta(H(x, t), t) \\ H(x, 0) = x \end{cases} \quad (3.3)$$

onde $\eta = \sum_{i=1}^p \alpha_i \xi_i$.

Da mesma forma que no item (1), como ξ_i são tangentes à X , H_t preserva X . Se $G(x, t) = F(H(x, t), t)$,

$$\frac{\partial G}{\partial t}(x, t) = \left(\sum_{j=1}^n \eta_j \frac{\partial F}{\partial x_j} + \frac{\partial F}{\partial t} \right)(H(x, t), t) \in \mathcal{M}_n^{k+1}.$$

Observando que $\mathcal{M}_n^{k+1} = \langle x^I = x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \rangle$ onde $|I| = \sum_{l=1}^n i_l = k + 1$ podemos escrever $\frac{\partial G}{\partial t}$ como uma soma $\sum G_I x^I$, com $|I| = k + 1$. Então

$$G(x, t) - G(x, 0) = \int_0^t \frac{\partial G}{\partial u}(x, u) du = \sum_I \left(\int_0^t \frac{\partial G_I}{\partial u}(x, u) du \right) x^I \in \mathcal{M}_n^{k+1}$$

como $G(x, 0) = F(x, 0)$ o resultado segue.

Esta demonstração também pode ser encontrada em [9]. ■

Como aplicação do Teorema 3.9 podemos demonstrar o Teorema da Transversal Completa para o grupo \mathcal{R}_X .

Teorema 3.10. *Sejam $f \in \mathcal{M}_n$ e $\{h_1, \dots, h_r\}$ uma coleção de polinômios homogêneos de grau $k + 1$ tais que*

$$\Theta_X^1 f + \langle h_1, \dots, h_r \rangle + \mathcal{M}_n^{k+2} \supset \mathcal{M}_n^{k+1}.$$

Então qualquer $g \in \mathcal{M}_n$ com $j^k g = j^k f$ é \mathcal{R}_{1_X} -equivalente a um germe da forma:

$$f(x) + \sum_{i=1}^r u_i h_i(x) + \phi(x),$$

onde $\phi \in \mathcal{M}_n^{k+2}$ e $u_i \in \mathbb{C}$.

Demonstração: Seja $g \in \mathcal{M}_n$, com $j^k g = j^k f$ e consideramos a diferença $g - f \in \mathcal{M}_n^{k+1}$. Por hipótese, podemos escrever:

$$g - f = \eta(f) + \sum_{i=1}^r u_i h_i + \phi, \quad (3.4)$$

onde $\eta = \sum \eta_j \frac{\partial}{\partial x_j} \in \Theta_X^1$, $u_i \in \mathbb{C}$ e $\phi \in \mathcal{M}_n^{k+2}$. Consideramos um compacto I de \mathbb{C} que contenha os pontos 1 e 0 e para cada ponto $t_0 \in I$ definimos a família $F^0 : \mathbb{C}^n \times I \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$F^0(x, t) = f(x) + (1 - t - t_0)(g - f)(x) + (t + t_0) \sum_{i=1}^r u_i h_i(x),$$

$F_t^0(x) = F^0(x, t)$ e $F^0(0, t) = 0$. Para cada $t_0 \in I$ fixado, temos

$$\eta(F^0) = \eta(f) + (1 - t - t_0)(\eta(g - f)) + (t + t_0) \sum_{i=1}^r u_i \eta(h_i)$$

$$\frac{\partial F^0}{\partial t} = f - g + \sum_{i=1}^r u_i h_i = -\eta(f) - \phi$$

por (3.4) e lembrando que η tem o seu 1-jato nulo,

$$\eta(F^0) + \frac{\partial F^0}{\partial t} \in \mathcal{M}_n^{k+1}.$$

Pela Proposição 3.9 a família F^0 é k - \mathcal{R}_X -trivial.

Assim para cada t_0 fixo e t próximo da origem existe uma família de difeomorfismos que preservam X , $H^0(x, t)$, tal que

$$(F_t^0 \circ H_t^0)(x) = f(x) + (1 - t_0)(g - f)(x) + t_0 \sum_{i=1}^r u_i h_i(x) + \phi_t^0(x). \quad (3.5)$$

Para cada t_0 conseguimos uma vizinhança aberta desse ponto na qual F_t^0 é \mathcal{R}_X -equivalente ao germe da segunda parcela de (3.5). Essas vizinhanças formam uma

cobertura de abertos do compacto I logo existe uma subcobertura finita (que possui intersecções) de I formada por vizinhanças dos pontos t_0, \dots, t_r ; podemos supor que $t_r = 1$ e $t_0 = 0$ e,

$$(F_t^0 \circ H_t^0)(x) = g(x) + \phi_t^0(x),$$

$$(F_t^r \circ H_t^r)(x) = f(x) + \sum_{i=1}^r u_i h_i(x) + \phi_t^r(x).$$

A \mathcal{R}_X -equivalência é transitiva portanto podemos concluir que os dois germes acima são \mathcal{R}_X -equivalentes.

Como $\eta \in \Theta_X^1$, para cada t , H_t tem como 1-jato a identidade.

Esta demonstração também pode ser encontrada em [9]. ■

Usando o Lema de Nakayama 1.3, podemos enfraquecer a hipótese do Teorema 3.10 da seguinte forma:

$$\Theta_X^1 f + \langle h_1, \dots, h_r \rangle \supset \mathcal{M}_n^{k+1} \tag{3.6}$$

então qualquer germe g , com $j^k g = j^k f$ é \mathcal{R}_{1X} -equivalente a um germe da forma $f(x) + \sum_{i=1}^r u_i h_i(x)$.

Como corolário do Teorema da Transversal Completa podemos demonstrar de forma mais direta o Teorema da Determinação Finita 2.10 para o grupo \mathcal{R}_X .

Corolário 3.11. *Dado $f \in \mathcal{M}_n$ e $\mathcal{M}_n^{k+1} \subset \Theta_X^1 f$ então f é k - \mathcal{R}_X -determinado.*

Demonstração: Seja $g \in \mathcal{M}_n$ com $j^k g = j^k f$ então, pelo Teorema 3.10, g é \mathcal{R}_X -equivalente com um germe da forma $f + \sum_{j=1}^r u_j \cdot 0 + 0 = f$, (veja a equivalência de (3.6)).

Esta demonstração também pode ser encontrada em [9]. ■

Corolário 3.12. *Seja $f \in \mathcal{M}_n$.*

1. *Se $\mathcal{M}_n^{k+1} \subset \Theta_X^1 f + \mathcal{M}_n^{k+2}$ então f é k - \mathcal{R}_X -determinado;*
2. *Se $\mathcal{M}_n^k \subset \Theta_X^0 f + \mathcal{M}_n^{k+1}$ então f é k - \mathcal{R}_X -determinado.*

Demonstração:

(1) Se $\mathcal{M}_n^{k+1} \subset \Theta_X^1 f + \mathcal{M}_n \mathcal{M}_n^{k+1}$ então pelo Lema de Nakayama 1.3, temos que $\mathcal{M}_n^{k+1} \subset \Theta_X^1 f$ e portanto, pelo Corolário 3.11, f é k - \mathcal{R}_X -determinado.

(2) Temos que

$$\mathcal{M}_n \cdot \Theta_X^0 f \subset \Theta_X^1 f$$

pois, se $\xi(x) = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j$, com $\xi_j(0) = 0$ então $j^1 \xi(0) = 0$. Portanto

$$\mathcal{M}_n^k \subset \Theta_X^0 f + \mathcal{M}_n^{k+1} \Rightarrow \mathcal{M}_n^{k+1} \subset \mathcal{M}_n \cdot \Theta_X^0 f + \mathcal{M}_n^{k+2}$$

o que acarreta $\mathcal{M}_n^{k+1} \subset \Theta_X^1 f + \mathcal{M}_n^{k+2}$ e pelo item (1), f é k - \mathcal{R}_X -determinado.

Esta demonstração também pode ser encontrada em [9]. ■

3.0.1 Submersões sobre o Guarda-chuva de Whitney

Para ilustrar a aplicabilidade do Teorema da Transversal Completa para o grupo \mathcal{R}_X , vamos classificar germes de submersão sob o Guarda-chuva de Whitney, i.e., vamos considerar como variedade analítica a hipersuperfície definida pela equação $X := v^2 - u^2 w = 0$, o Guarda-chuva de Whitney. Para maiores detalhes veja [9].

Proposição 3.13. *O \mathcal{O}_3 -módulo, Θ_X , onde $X := v^2 - u^2 w = 0$, é gerado por*

$$\begin{aligned} \xi_1 &= u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v}, & \xi_2 &= v \frac{\partial}{\partial v} + 2w \frac{\partial}{\partial w}, \\ \xi_3 &= u^2 \frac{\partial}{\partial v} + 2v \frac{\partial}{\partial w} & e, & \xi_4 = v \frac{\partial}{\partial u} + uw \frac{\partial}{\partial v} \end{aligned}$$

neste caso, $\Theta_X = \Theta_X^0$.

Demonstração: Veja [9], página 22.

Para classificar germes sob a \mathcal{R}_X^1 -equivalência precisamos determinar os 1-jatos de difeomorfismos de \mathcal{R}_X . Vamos considerar as partes lineares dos campos de vetores que geram Θ_X :

$$\begin{aligned} \text{linear}(\xi_1) &= u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v} & \text{linear}(\xi_2) &= v \frac{\partial}{\partial v} + 2w \frac{\partial}{\partial w} \\ \text{linear}(\xi_3) &= 2v \frac{\partial}{\partial w} & \text{linear}(\xi_4) &= v \frac{\partial}{\partial u} \end{aligned}$$

Integrando essas partes lineares obtemos os 1-jatos dos germes de \mathcal{R}_X :

$$\begin{aligned}\varphi_1 : (u, v, w) &\longmapsto (e^\lambda u, e^\lambda v, w) & \varphi_2 : (u, v, w) &\longmapsto (u, e^\lambda v, e^{2\lambda} w) \\ \varphi_3 : (u, v, w) &\longmapsto (u, v, w + 2\alpha v) & \varphi_4 : (u, v, w) &\longmapsto (u + \beta v, v, w)\end{aligned}$$

Teorema 3.14. *Qualquer 1-jato de um germe de submersão f de $(\mathbb{C}^3, 0)$ em $(\mathbb{C}, 0)$ é \mathcal{R}_X^1 -equivalente a um germe de alguma das seguintes famílias:*

1. $UW^{k+1} : u + w^{k+1}$, para $k \geq 0$;
2. $WU^{k+1} : w + u^{k+1}$, para $k \geq 1$;
3. $VW^{k+1} : v + w^{k+1}$, para $k \geq 1$;

e, cada um desses germes é $(k+1)$ - \mathcal{R}_X -determinado.

Demonstração: Consideramos o 1-jato de f , $au + bv + cw$, com algum a , b ou c não-nulo já que f é uma submersão.

Se $ac \neq 0$ então $a \neq 0$ e $c \neq 0$ usando o difeomorfismo

$$\varphi_3(u, v, w) = (u, v, w + 2\alpha v)$$

podemos tomar $\alpha = \frac{-b}{2c}$ e, conseguimos o 1-jato de difeomorfismo,

$$\begin{aligned}\phi_1 : (\mathbb{C}^3, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}^3, 0) \\ (u, v, w) &\longmapsto \phi_1(u, v, w) = \left(\frac{1}{a}u, \frac{\sqrt{c}}{ac}v, \frac{1}{c}w - \frac{b\sqrt{c}}{ac^2}v\right)\end{aligned}$$

portanto $au + bv + cw$ é \mathcal{R}_X^1 -equivalente com

(a) $u + w$.

Agora, se $ac = 0$ então $a = 0$ ou $c = 0$.

Para $a = 0$ e $c \neq 0$ temos o germe $bv + cw$ e usamos o difeomorfismo:

$$\varphi_3(u, v, w) = \left(u, v, w - \frac{b}{c}v\right)$$

e, consideramos o germe

$$\begin{aligned}\phi_2 : (\mathbb{C}^3, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}^3, 0) \\ (u, v, w) &\longmapsto \phi_2(u, v, w) = \left(u, \frac{\sqrt{c}}{c}v, \frac{1}{c}w - \frac{b\sqrt{c}}{c^2}v\right)\end{aligned}$$

portanto $bv + cw$ é \mathcal{R}_X^1 -equivalente com

(b) w .

Para $c = 0$ e $a \neq 0$ temos $au + bv$ e usamos o difeomorfismo:

$$\varphi_4(u, v, w) = \left(u - \frac{b}{a}v, v, w\right)$$

e,

$$\begin{aligned} \phi_3 : (\mathbb{C}^3, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}^3, 0) \\ (u, v, w) &\longmapsto \phi_3(u, v, w) = \left(\frac{1}{a}u - \frac{b}{a^2}v, \frac{1}{a}v, w\right) \end{aligned}$$

portanto $au + bv$ é \mathcal{R}_X^1 -equivalente com

(c) u .

Para $a = 0$ e $c = 0$ temos o germe bv e consideramos o difeomorfismo

$$h_5(u, v, w) = \left(\frac{1}{b}u, \frac{1}{b}v, w\right) \in \mathcal{R}_X$$

portanto bv é \mathcal{R}_X^1 -equivalente com

(d) v .

Caso (a) Suponhamos que $f(u, v, w) = u + w$. Então temos

$$\begin{aligned} \xi_1(f) &= u & \xi_2(f) &= 2w \\ \xi_3(f) &= 2v & \xi_4(f) &= v \end{aligned}$$

portanto $\Theta_X^0 f \supset \mathcal{M}_3$, pelo Corolário 3.12, item (2), $k = 0$ temos que f é 1- \mathcal{R}_X -determinado.

Caso (b) Suponhamos que $f(u, v, w) = w$. Então temos

$$\begin{aligned} \xi_1(f) &= 0 & \xi_2(f) &= 2w \\ \xi_3(f) &= 2v & \xi_4(f) &= 0 \end{aligned}$$

temos um germe com k -jato w e a transversal completa (veja 3.7) é dada por $T = \mathbb{C}\{u^{k+1}\}$. Consideramos o germe $f(u, v, w) = w + u^{k+1}$ e

$$\begin{aligned} \xi_1(f) &= (k+1)u^{k+1} & \xi_2(f) &= 2w \\ \xi_3(f) &= 2v & \xi_4(f) &= (k+1)vu^k \end{aligned}$$

temos que $\Theta_X^0 f \supset \mathcal{M}_3^{k+1}$ e f é $(k+1)$ - \mathcal{R}_X -determinado.

Caso (c) Suponhamos que $f(u, v, w) = u$. Então temos

$$\begin{aligned}\xi_1(f) &= u & \xi_2(f) &= 0 \\ \xi_3(f) &= 0 & \xi_4(f) &= v\end{aligned}$$

dessa forma temos um germe com k -jato u e a transversal completa (veja 3.7) é dada por $T = \mathbb{C}\{w^{k+1}\}$. Consideramos o germe $f(u, v, w) = u + w^{k+1}$ e

$$\begin{aligned}\xi_1(f) &= u & \xi_2(f) &= 2(k+1)w^{k+1} \\ \xi_3(f) &= 2(k+1)vw^k & \xi_4(f) &= v\end{aligned}$$

temos que $\Theta_X^0 f \supset \mathcal{M}_3^{k+1}$ e f é $(k+1)$ - \mathcal{R}_X -determinado.

Caso (d) Suponhamos que $f(u, v, w) = v$. Então temos

$$\begin{aligned}\xi_1(f) &= v & \xi_2(f) &= v \\ \xi_3(f) &= u^2 & \xi_4(f) &= uw\end{aligned}$$

dessa forma temos um germe com k -jato v e a transversal completa (veja 3.7) é dada por $T = \mathbb{C}\{w^{k+1}\}$. Consideramos o germe $f(u, v, w) = v + w^{k+1}$ e

$$\begin{aligned}\xi_1(g) &= v & \xi_2(g) &= v + 2(k+1)w^{k+1} \\ \xi_3(g) &= u^2 + 2(k+1)vw^k & \xi_4(g) &= uw\end{aligned}$$

temos que $\Theta_X^0 f \supset \mathcal{M}_3^{k+1}$ e f é $(k+1)$ - \mathcal{R}_X -determinado.

Esta demonstração também pode ser encontrada em [9]. ■

Capítulo 4

Germes de campos de vetores em variedades

Para o estudo da \mathcal{R}_X -equivalência é fundamental conhecer o espaço tangente à \mathcal{R}_X -órbita em um determinado germe f , ou seja, precisamos descobrir quais são os campos de vetores tangentes à variedade. Um caso, relativamente simples de encontrar o \mathcal{O}_n -módulo Θ_X ocorre quando X é uma variedade quase-homogênea, veja Proposição 4.7. Quando consideramos como variedade o discriminante de uma deformação versal de um germe com singularidade isolada, podemos mostrar que os campos de vetores definidos por Saito [24], são os campos de vetores tangentes ao discriminante, veja o Teorema 4.17. Parte deste capítulo está baseado no artigo de J. Bruce [4].

4.1 Caracterização dos campos de vetores

Proposição 4.1. *Existe um subconjunto finito de campos em Θ_X^0 que juntos geram o espaço tangente de \mathbb{C}^n em todos os pontos de $\mathbb{C}^n \setminus X$ suficientemente próximos da origem.*

Demonstração: Suponhamos que $(X, 0) = \mathcal{V}(f_1, \dots, f_r)$ e, consideramos o conjunto $F = \{f_i \frac{\partial}{\partial x_j}\}$, com $1 \leq i \leq r$ e $1 \leq j \leq n$, esse conjunto satisfaz as condições da Proposição. De fato,

- Para todo $g \in \mathcal{I}(X)$ e todo $x \in X$,

$$f_i(x) \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = 0 \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = 0,$$

para $1 \leq i \leq r$ e $1 \leq j \leq n$; portanto $f_i \frac{\partial g}{\partial x_j} \in \mathcal{I}(X)$;

- Como $0 \in X$, para cada i , temos $f_i(0) = 0$ logo $f_i \frac{\partial}{\partial x_j}$ se anula na origem;
- Se $x \notin X$ está suficientemente próximo da origem, então podemos encontrar $j_0 \in \{1, \dots, r\}$ tal que $f_{j_0}(x) \neq 0$ e, qualquer campo de vetores δ do espaço tangente à \mathbb{C}^n em x pode ser escrito como combinação dos campos formados por este germe, i.e.,

$$\delta = \sum_{j=1}^n \delta_j \frac{\partial}{\partial x_j} = \delta_1 \frac{1}{f_{j_0}} f_{j_0} \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \delta_n \frac{1}{f_{j_0}} f_{j_0} \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Esta demonstração também pode ser encontrada em [8]. ■

Proposição 4.2. *Se X é equidimensional então existe um subconjunto finito de Θ_X consistindo de germes que se anulam no conjunto singular de X e juntos geram o espaço tangente à X em todos os pontos suaves de X suficientemente próximos da origem.*

Demonstração: Suponhamos $(X, 0) = \mathcal{V}(f_1, \dots, f_r)$ e que a dimensão de X seja l . Então, como X é equidimensional existe, pelo menos, um menor de ordem $(n-l) \times (n-l)$ da matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \frac{\partial f_r}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

cujo determinante quando aplicado em um ponto suave de X é não-nulo enquanto que os determinantes dos menores de ordem maior a $(n-l) \times (n-l)$ são nulos.

Lembremos que um ponto $x \in X$ é singular se os determinantes de todos os $(n-l) \times (n-l)$ menores de A são nulos em x .

Seja B a matriz obtida de A adicionando-se, como a $(r + 1)$ linha o vetor $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$, obtendo-se a seguinte matriz

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \frac{\partial f_r}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial x_n} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Então o conjunto dos campos obtidos tomando-se o determinante dos menores de B de ordem $(n - l + 1) \times (n - l + 1)$ que contêm essa última linha adicionada possui as propriedades desejadas:

Os germes obtidos são campos de vetores que se anulam em pontos singulares de X pois, como foi mencionado anteriormente todos determinantes de todos menores de A de ordem $(n - l) \times (n - l)$ são nulos em um ponto singular. E ainda, esses campos geram o espaço tangente à X nos pontos suaves, pois quando aplicado em um ponto suave esse determinante não será nulo e o resultado segue análogo à Proposição 4.2.

Esta demonstração também pode ser encontrada em [8]. ■

O exemplo a seguir ilustra a construção feita na demonstração anterior:

Exemplo 4.3. *Seja X a hipersuperfície definida por $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow \mathbb{C}$, então essa variedade tem dimensão $n - 1$. Pelo menos um menor de ordem 1×1 da matriz $A = (\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n})$ é não-nulo em um ponto suave. Construímos a matriz*

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

e os determinantes dos menores de ordem 2×2 são os campos

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i},$$

para $1 \leq i < j \leq n$.

Seja U uma vizinhança suficientemente pequena da origem de \mathbb{C}^n . Seja \mathcal{F}_U o conjunto das funções analíticas definidas em U ; se V é um subconjunto abertos de

U e $f \in \mathcal{F}_U$ e consideramos a aplicação $\rho_{VU}(f) = f|_V$ então $\{\mathcal{F}_U, \rho_{VU}\}$ é um prefeixe em U e o feixe associado a este prefeixe é denotado por \mathcal{O}_U , analogamente, o feixe de germes de campos de vetores em U é denotado por Der_U . Definimos

$$\Xi_X = \bigcup_{x \in X} \Theta_{(X,x)},$$

onde $\Theta_{(X,x)} = \{\delta \in Der_U : \delta(h) \in \mathcal{I}(X,x), \forall h \in \mathcal{I}(X,x)\}$ e Ξ_X é um subfeixe de Der_U . Além disso, com a operação

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : \Xi_X \times \Xi_X &\longrightarrow \Xi_X \\ (\xi, \delta) &\longmapsto [\xi, \delta] = \xi\delta - \delta\xi \end{aligned}$$

Ξ_X se torna uma álgebra de Lie.

Proposição 4.4 (Propriedade dos campos de vetores). *Seja X uma subvariedade analítica reduzida. Então*

1. Ξ_X é um \mathcal{O}_U -submódulo coerente de Der_U ;
2. Ξ_X é fechado para a operação de álgebra de Lie;
3. Se $\delta_k = \sum_{j=1}^n \delta_{kj} \frac{\partial}{\partial x_j}$, para $1 \leq k \leq l+1$ são elementos de $\Theta_{(X,x)}$, e X tem dimensão l em x , então os determinantes dos menores de ordem $(l+1) \times (l+1)$ de (δ_{kj}) estão em $\mathcal{I}(X,x)$.

Demonstração: Veja [15], página 60.

Definição 4.5. *Um germe de variedade $X \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ de dimensão d é chamado de intersecção completa se o seu ideal $\mathcal{I}(X)$, é gerado por $n - d$ germes de \mathcal{O}_n .*

Vamos considerar uma classe especial de intersecção completa com singularidade isolada para a qual Ξ_X é particularmente boa: a classe quase-homogênea.

Definição 4.6. *Um germe de subvariedade $X \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ é dito quase-homogêneo se é definido por um germe $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$, $f = (f_1, \dots, f_p)$ tal que existem inteiros $w_1, \dots, w_n, d_1, \dots, d_p$ e para todo $t \in \mathbb{C}$,*

$$f_j(t^{w_1}x_1, \dots, t^{w_n}x_n) = t^{d_j} f_j(x_1, \dots, x_n), \quad 1 \leq j \leq p.$$

Proposição 4.7. *Seja $X \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ um germe de intersecção completa com uma singularidade isolada definido por um germe quase-homogêneo $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$, $f = (f_1, \dots, f_p)$. Então Ξ_X é gerado pelos campos $f_i \frac{\partial}{\partial x_j}$, $1 \leq i \leq p$ e $1 \leq j \leq n$, o campo de Euler $\sum_{j=1}^n w_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ e os campos triviais:*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_{i_{p+1}}} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_{p+1}}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_{i_1}} & \frac{\partial f_p}{\partial x_{i_2}} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_{i_{p+1}}} \end{vmatrix}$$

para toda $(p+1)$ -upla i_1, \dots, i_{p+1} satisfazendo $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{p+1} \leq n$.

Demonstração: Veja [8], página 79.

Exemplo 4.8. *Consideramos o germe de variedade analítica $X := x^4 + y^4 + z^4 = 0$ é um germe de intersecção completa com uma singularidade isolada na origem definido por um germe homogêneo. Pela Proposição 4.7, Ξ_X é gerado pelos campos:*

$$\begin{aligned} & (x^4 + y^4 + z^4) \frac{\partial}{\partial x}, \quad (x^4 + y^4 + z^4) \frac{\partial}{\partial y}, \quad x^4 + y^4 + z^4 \frac{\partial}{\partial z}, \\ & x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}, \\ & 4y^3 \frac{\partial}{\partial x} - 4x^3 \frac{\partial}{\partial y}, \quad 4z^3 \frac{\partial}{\partial x} - 4x^3 \frac{\partial}{\partial z}, \quad e \quad 4z^3 \frac{\partial}{\partial y} - 4y^3 \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

4.2 Divisores Livres

Definição 4.9. *Uma variedade reduzida $X \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ é um divisor livre quando Θ_X é um \mathcal{O}_n -módulo livre.*

Proposição 4.10. *Seja X uma hipersuperfície analítica reduzida e sejam*

$$\xi_j = \sum_{l=1}^n \xi_{jl} \frac{\partial}{\partial x_l},$$

com $1 \leq j \leq n$, elementos de Θ_X com a propriedade que $\det(\xi_{jl})$ é uma equação que define X . Então X é um divisor livre e Θ_X é livremente gerado por ξ_1, \dots, ξ_n .

Demonstração: Veja [24], página 270.

Exemplo 4.11. Tomemos $X := y - x^2 = 0$ uma hipersuperfície analítica reduzida de \mathbb{C}^2 . Consideramos os campos de Θ_X

$$\xi_1 = \frac{\partial}{\partial x} + 2x \frac{\partial}{\partial y} \quad e \quad \xi_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + 2y \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\det(\xi_{ji}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2x \\ x & 2y \end{pmatrix} = 2(y - x^2)$$

que gera X , portanto pela Proposição acima 4.10, X é um divisor livre e Θ_X é gerado pelos campos ξ_1 e ξ_2 .

4.2.1 Cálculo de Θ_X quando X é o discriminante

Definição 4.12. Dada uma deformação (F, p) de um germe $f \in \mathcal{M}_n$, definimos o discriminante de F como o germe do conjunto:

$$D = \left\{ a \in \mathbb{C}^p : \exists x \in \mathbb{C}^n, F(x, a) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(x, a) = \dots = \frac{\partial F}{\partial x_n}(x, a) = 0 \right\}$$

Teorema 4.13. Sejam $f \in \mathcal{O}_n$ e (F, p) uma deformação de f . Então F é uma deformação \mathcal{R} -versal de f se, e somente se,

$$J(f) + \mathbb{C} \left\{ \frac{\partial F}{\partial a_1}(x, 0), \dots, \frac{\partial F}{\partial a_p}(x, 0) \right\} = \mathcal{O}_n$$

Demonstração: Veja [11], página 44.

Observemos que a definição de deformação versal para a \mathcal{R} -equivalência é análoga à Definição 2.16, item (c), dada anteriormente de deformação \mathcal{R}_X -versal.

Lema 4.14. Seja $f \in \mathcal{M}_n$ um germe com uma singularidade isolada na origem. Então $\frac{\mathcal{O}_n}{J(f)}$ é um \mathbb{C} -espaço vetorial de dimensão finita.

Demonstração: Como f possui uma singularidade isolada na origem temos que $\mathcal{V}(J(f)) = \{0\}$, assim pelo Teorema 1.6

$$\text{Rad}(J(f)) = \mathcal{I}(\mathcal{V}(J(f))) = \mathcal{I}(\{0\}) = \mathcal{M}_n.$$

Como $J(f)$ contem uma potência do seu radical (veja [3], página 83), então existe inteiro $k > 0$ tal que $J(f) \supset \mathcal{M}_n^k$ e o resultado segue pelo Lema 1.4. ■

Lema 4.15. *Sejam $f \in \mathcal{M}_n$ um germe com singularidade isolada na origem e $\{g_1 + J(f), \dots, g_p + J(f)\}$ uma base do \mathbb{C} -espaço vetorial $\frac{\mathcal{O}_n}{J(f)}$. Então o germe*

$$F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, 0) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(x, a) \longmapsto F(x, a) = f(x) + \sum_{i=1}^p a_i g_i(x),$$

onde $a = (a_1, \dots, a_p)$, é uma deformação \mathcal{R} -versal do germe $f \in \mathcal{O}_n$.

Demonstração: Pelo Teorema 4.13, basta mostrar que

$$J(f) + \mathbb{C}\left\{\frac{\partial F}{\partial a_1}(x, 0), \dots, \frac{\partial F}{\partial a_p}(x, 0)\right\} = \mathcal{O}_n. \quad (4.1)$$

Mas (4.1) ocorre pois, $g_1 + J(f), \dots, g_p + J(f)$ geram $\frac{\mathcal{O}_n}{J(f)}$. ■

Considerando as hipóteses do Lema anterior 4.15, definimos o ideal:

$$\mathcal{J}(F) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right\rangle \subset \mathcal{O}_{n+p}.$$

Lema 4.16. *Se $f \in \mathcal{M}_n$ é um germe com singularidade isolada na origem e $\{g_i + J(f)\}_{i=1}^p$ formam uma \mathbb{C} -base para $\frac{\mathcal{O}_n}{J(f)}$ então os germes $g_1 + \mathcal{J}(F), \dots, g_p + \mathcal{J}(F)$ formam uma \mathcal{O}_p -base livre para $\frac{\mathcal{O}_{n+p}}{\mathcal{J}(F)}$.*

Demonstração: Sejam $A = \frac{\mathcal{O}_{n+p}}{\mathcal{J}(F)}$ e Π a projeção

$$\Pi : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$$

$$(x, a) \longmapsto \Pi(x, a) = a$$

pelo Teorema de Preparação de Malgrange 1.2 temos que A é um \mathcal{O}_p -módulo finitamente gerado via Π^* se, e somente se, $\frac{A}{\mathcal{M}_p A}$ é um \mathbb{C} -espaço vetorial de dimensão finita. Afirmamos que:

$$\frac{A}{\mathcal{M}_p A} \text{ tem dimensão finita} \iff \frac{\mathcal{O}_n}{J(f)} \text{ tem dimensão finita.}$$

observemos que $\frac{A}{\mathcal{M}_p A} \cong \frac{\mathcal{O}_{n+p}}{\mathcal{J}(F) + \mathcal{M}_p}$, basta usar o homomorfismo sobrejetor:

$$\begin{aligned} \phi : A &\longrightarrow \frac{\mathcal{O}_{n+p}}{\mathcal{J}(F) + \mathcal{M}_p} \\ g + \mathcal{J}(F) &\longmapsto g + (\mathcal{J}(F) + \mathcal{M}_p), \end{aligned}$$

onde $\ker(\phi) = \mathcal{M}_p A$. E, $\mathcal{J}(F) + \mathcal{M}_p = \mathcal{J}(f) + \mathcal{M}_p$ já que, para $1 \leq j \leq n$, $\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^p a_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}$, assim

$$\frac{A}{\mathcal{M}_p A} \cong \frac{\mathcal{O}_{n+p}}{\mathcal{J}(F) + \mathcal{M}_p} = \frac{\mathcal{O}_{n+p}}{\mathcal{J}(f) + \mathcal{M}_p} \cong \frac{\mathcal{O}_n}{\mathcal{J}(f)}$$

e pelo Lema 4.14, $\frac{\mathcal{O}_n}{\mathcal{J}(f)}$ tem dimensão finita.

Agora, basta mostrar que $g_1 + \mathcal{J}(F), \dots, g_p + \mathcal{J}(F)$ geram A livremente.

Considerando o conjunto:

$$\Sigma = \{(x, a) : \frac{\partial F}{\partial x_j}(x, a) = 0, 1 \leq j \leq n\}$$

e sendo $\pi : (\Sigma, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ a projeção na segunda coordenada. Denotemos por $\mathcal{O}(\Sigma)$ a estrutura de feixe de Σ , i.e., $\mathcal{O}(\Sigma)$ é o feixe Σ juntamente com a aplicação π sobre o espaço topológico $(\mathbb{C}^p, 0)$, logo π é uma aplicação holomorfa própria onde todas as fibras são conjunto discretos em $(\Sigma, 0)$ pois f é um germe com uma singularidade isolada, portanto é finita (veja [17], página 175) e assim a imagem direta $\pi_*(\mathcal{O}(\Sigma))$ é um feixe de $\mathcal{O}(\mathbb{C}^p)$ -módulos coerente (veja [17], página 64). Definimos o homomorfismo de $\mathcal{O}(\mathbb{C}^p)$ -módulos

$$\begin{aligned} r : \mathcal{O}(\mathbb{C}^p)^p &\longrightarrow \pi_*(\mathcal{O}(\Sigma)) \\ (\psi_1, \dots, \psi_p) &\longmapsto r(\psi_1, \dots, \psi_p) = \sum_{j=1}^p \psi_j g_j \end{aligned}$$

e seja $\mathcal{F} = \frac{\pi_*(\mathcal{O}(\Sigma))}{\text{Im}(r)}$ (também coerente veja A.4) o co-núcleo de r . Como g_1, \dots, g_p geram $\frac{\mathcal{O}_{n+p}}{\mathcal{J}(F)}$ como um \mathcal{O}_p -módulo o feixe \mathcal{F} tem fibra trivial em $0 \in \mathbb{C}^p$. Por coerência temos que \mathcal{F} é trivial em uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^p$. Dessa forma para b próximo da origem podemos dizer que g_1, \dots, g_p geram

$$\bigoplus_{\hat{x}} \frac{\mathcal{O}_{n+p(\hat{x}, b)}}{\mathcal{J}(F)_{(\hat{x}, b)}}$$

como um $(\mathcal{O}_p)_b$ -módulo (veja A.2), com \tilde{x} variando de forma que $(\tilde{x}, b) \in \Sigma$. Segue que g_1, \dots, g_p geram

$$\bigoplus_{\tilde{x}} \frac{\mathcal{O}_{n_{\tilde{x}}}}{\mathcal{J}(f)_{\tilde{x}}} \quad (4.2)$$

como um \mathbb{C} -espaço vetorial, a soma sendo sobre os mesmos \tilde{x} . Como essa soma direta tem dimensão p segue que g_1, \dots, g_p formam, de fato, uma \mathbb{C} -base para (4.2). Afirmamos que g_1, \dots, g_p geram livremente $\frac{\mathcal{O}_{n+p}}{\mathcal{J}(F)}$ pois, caso contrário, para algum germe não-nulo $(\psi_1, \dots, \psi_p) \in \mathcal{O}_p^p$ teríamos $\sum_{i=1}^p \psi_i g_i = 0$ em $\frac{\mathcal{O}_{n+p}}{\mathcal{J}(F)}$ o que contradiz o fato que, para cada b fixo, $\{g_i\}$ são linearmente independentes em (4.2).

Esta demonstração também pode ser encontrada em [4]. ■

Como os germes $g_1 + \mathcal{J}(F), \dots, g_p + \mathcal{J}(F)$ formam uma base livre para $\frac{\mathcal{O}_{n+p}}{\mathcal{J}(F)}$ então para cada $j = 1, \dots, p$, podemos encontrar germes $a_{ij} \in \mathcal{O}_p$ que satisfazem:

$$F \cdot g_j + \mathcal{J}(F) = \sum_{i=1}^p a_{ij} g_i + \mathcal{J}(F) \quad (4.3)$$

usando as notações acima, os campos

$$\xi_j = \sum_{i=1}^p a_{ij} \frac{\partial}{\partial a_i} \quad (4.4)$$

são germes de campos de vetores tangentes ao discriminante D . Mais ainda, eles formam uma base livre para Θ_D , portanto o discriminante é um divisor livre, i.e.,

Teorema 4.17. *Os campos em (4.4) formam uma base livre para Θ_D , i.e., o conjunto de todos os campos tangentes ao discriminante coincide com o \mathcal{O}_p -módulo gerado pelos ξ_j e qualquer tal campo é expresso como combinação linear dos ξ_j .*

Para demonstrar tal teorema precisamos dos seguintes resultados:

Consideramos o seguinte conjunto:

$$M = \{(x, a) \in (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, 0) : F(x, a) = 0\}$$

e seja Π a projeção na segunda componente de $(M, 0)$ em $(\mathbb{C}^p, 0)$, i.e.,

$$\begin{aligned} \Pi : (M, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}^p, 0) \\ (x, a) &\longmapsto \Pi(x, a) = a \end{aligned}$$

Definição 4.18. Um campo $\xi \in \text{Der}_0 \mathbb{C}^p$ é Π -levantável se para algum campo $\tilde{\xi}$ restrito à M temos

$$d\Pi(\tilde{\xi}) = \xi \circ \Pi$$

Se $\Sigma\Pi$ é o conjunto dos pontos críticos de Π então $(D, 0)$ e $\Pi(\Sigma\Pi, 0)$ coincidem pois

$$\Sigma\Pi = \mathcal{V}\left(\left\langle F, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right\rangle\right) \text{ e, } D = \Pi(\mathcal{V}\left(\left\langle F, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right\rangle\right)).$$

Lema 4.19. Um campo ξ em \mathbb{C}^p é tangente ao discriminante se, e somente se, ξ levanta via Π à um campo em $\Sigma\Pi$.

Demonstração: Veja [4], página 563.

Lema 4.20. Um campo ξ levanta em $\Sigma\Pi$ se, e somente se, ξ levanta em M .

Demonstração: Veja [4], página 564.

O Teorema 4.17 é uma consequência imediata do seguinte teorema:

Teorema 4.21. As seguintes condições são equivalentes:

1. O campo ξ em \mathbb{C}^p é Π -levantável;
2. O campo ξ pertence à Θ_D ;
3. $\xi = \sum c_j \xi_j$, para únicos $c_j \in \mathcal{O}_p$, com ξ_j como em (4.4).

Demonstração: Pelos Lemas 4.19 e 4.20 sabemos que (1) e (2) são equivalentes, portanto um campo ξ em \mathbb{C}^p é tangente ao discriminante se, e somente se, ξ levanta em M .

Vamos mostrar que (3) \iff (1).

Suponhamos que, para cada j , o campo ξ_j é levantável então existe $\tilde{\xi}_j$ em M tal que $d\Pi(\tilde{\xi}_j) = \xi_j \circ \Pi$ e

$$\xi \circ \Pi = \sum_{i=1}^p (c_i \circ \Pi)(\xi_i \circ \Pi) = \sum_{i=1}^p (c_i \circ \Pi)(d\Pi(\tilde{\xi}_i)) = d\Pi\left(\sum_{i=1}^p b_i \tilde{\xi}_i\right)$$

e $\sum b_i \tilde{\xi}_i$ é um campo em M .

Portanto vamos mostrar que ξ_j são levantáveis. Para cada $j = 1, \dots, p$, temos

$$F \cdot g_j = \sum_{i=1}^p a_{ij} g_i + \sum_{l=1}^n \alpha_l \frac{\partial F}{\partial x_l}$$

para $\alpha_l \in \mathcal{O}_{n+p}$, consideramos o campo

$$\tilde{\xi}_j = \xi_j + \sum_{l=1}^n \alpha_l \frac{\partial}{\partial x_l}$$

$$\text{com } \tilde{\xi}_j(F) = \sum_{i=1}^p a_{ij} \frac{\partial F}{\partial a_i} - \sum_{i=1}^p a_{ij} g_i + F g_j,$$

como $\frac{\partial F}{\partial a_i} = g_i$ temos $\tilde{\xi}_j F$ se anulando em M e,

$$d\Pi(\tilde{\xi}_j) = d\Pi\left(\xi_j + \sum_{l=1}^n \alpha_l \frac{\partial}{\partial x_l}\right) = \xi_j \circ \Pi$$

então $\tilde{\xi}_j$ é um levantamento para ξ_j .

Por outro lado, se ξ tem um levantamento $\tilde{\xi}$ então $\tilde{\xi}(F) \in \langle F \rangle$ em \mathcal{O}_{n+p} . Conseqüentemente podemos escrever:

$$\tilde{\xi}(F) = \left(\sum_{j=1}^n \gamma_j \frac{\partial F}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^p c_i g_i \right) F$$

para únicos $c_i \in \mathcal{O}_p$ e alguns $\gamma_j \in \mathcal{O}_{n+p}$, dessa forma,

$$\tilde{\xi}(F) = \sum_{j=1}^n \delta_j \frac{\partial F}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^p c_i a_{ij} g_i$$

para alguns $\delta_j \in \mathcal{O}_{n+p}$. Reciprocamente se

$$\tilde{\xi} = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^p e_i \frac{\partial}{\partial a_i}$$

com $\varepsilon_j \in \mathcal{O}_{n+p}$ e $e_i \in \mathcal{O}_p$ então

$$\tilde{\xi}(F) = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \frac{\partial F}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^p e_i g_i$$

Como g_i geram $\frac{\mathcal{O}_{n+p}}{\mathcal{J}(F)}$ livremente temos $e_i = \sum_{l=1}^p c_l a_{il}$ e

$$\xi = \sum_{i=1}^p e_i \frac{\partial}{\partial a_i} = \sum_{i=1}^p c_i \xi_i.$$

Esta demonstração também pode ser encontrada em [4]. ■

No exemplo abaixo, usando-se o Teorema 4.17, vamos encontrar o \mathcal{O}_1 -módulo Θ_X , quando X é o discriminante de uma singularidade do tipo A_k :

Exemplo 4.22. As singularidades A_k

Consideramos o germe $f(x) = x^{k+1}$. Então $J(f) = \langle x^k \rangle$ e

$$\frac{\mathcal{O}_1}{J(f)} \approx \frac{\mathbb{C}[[x]]}{\langle x^k \rangle} \approx \langle 1, x, x^2, \dots, x^{k-1} \rangle$$

e como \mathbb{C} -base desse espaço vetorial escolhemos

$$\{g_1(x) = x^{k-1}, g_2(x) = x^{k-2}, \dots, g_{k-1}(x) = x, g_k(x) = 1\}$$

e temos a deformação \mathcal{R} -versal

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^k, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}, 0) \\ (x, a) &\longmapsto F(x, a) = x^{k+1} + \sum_{j=1}^k a_j x^{k-j} \end{aligned}$$

onde $a = (a_1, \dots, a_k)$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (k+1)x^k + \sum_{j=1}^{k-1} a_j(k-j)x^{k-j-1} \Rightarrow \mathcal{J}(F) = \langle (k+1)x^k + \sum_{j=1}^{k-1} a_j(k-j)x^{k-j-1} \rangle$$

trabalhando no anel $\frac{\mathcal{O}_{1+k}}{\mathcal{J}(F)}$ podemos trocar x^k por

$$-\frac{1}{k+1} \sum_{j=1}^{k-1} a_j(k-j)x^{k-j-1}$$

já que estão na mesma classe. É fácil obter os campos de vetores básicos para qualquer A_k -singularidade.

Tomamos $k = 3$, logo $f(x) = x^4$, $J(f) = \langle x^3 \rangle$ e

$$\{g_1(x) = x^2, g_2(x) = x, g_3(x) = 1\}$$

é uma base para $\frac{\mathcal{O}_1}{J(f)}$.

Temos a deformação versal:

$$F(x, (a_1, a_2, a_3)) = x^4 + \sum_{j=1}^3 a_j x^{3-j} = x^4 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$$

e ainda,

$$\mathcal{J}(F) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x} \right\rangle = \langle 4x^3 + 2a_1x + a_2 \rangle$$

podemos trocar x^3 por $-\frac{1}{4} \sum_{j=1}^2 (3-j)a_j x^{3-j-1} = -\frac{1}{2}a_1x - \frac{1}{4}a_2$

Assim, concluímos que, quando X é o discriminante de uma singularidade A_3 , o \mathcal{O}_3 -módulo Θ_X é gerado por:

$$\begin{aligned} \xi_1(a_1, a_2, a_3) &= \left(a_3 - \frac{1}{4}a_1^2\right) \frac{\partial}{\partial a_1} - \frac{1}{2}a_1a_2 \frac{\partial}{\partial a_2} - \frac{3}{16}a_2^2 \frac{\partial}{\partial a_3} \\ \xi_2(a_1, a_2, a_3) &= \frac{3}{4}a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + \left(a_3 - \frac{1}{4}a_1^2\right) \frac{\partial}{\partial a_2} - \frac{1}{8}a_1a_2 \frac{\partial}{\partial a_3} \\ \xi_3(a_1, a_2, a_3) &= \frac{1}{2}a_1 \frac{\partial}{\partial a_1} + \frac{3}{4}a_2 \frac{\partial}{\partial a_2} + a_3 \frac{\partial}{\partial a_3}. \end{aligned}$$

Considerações Finais

Dado um germe de subvariedade analítica $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ e um germe de função $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, podemos trabalhar com uma segunda relação de equivalência em \mathcal{O}_n que também considera a subvariedade X . Basta estudar a restrição de f ao germe X , $f|_X$ e usar difeomorfismos de X . O grupo dos difeomorfismos de X é denotado por $\mathcal{R}(X)$. O estudo sobre a $\mathcal{R}(X)$ -equivalência pode ser encontrado em [13].

Observamos que enquanto a $\mathcal{R}(X)$ -equivalência considera o comportamento de um germe f somente sobre X , a \mathcal{R}_X -equivalência considera o comportamento do germe sobre X e fora de X . Por exemplo:

Consideramos a subvariedade de \mathbb{C}^2 , $X := y - x^2 = 0$ e os germes

$$f(x, y) = x^3 \text{ e } g(x, y) = x^3 + y - x^2;$$

f e g são iguais quando considerados sobre X e portanto são $\mathcal{R}(X)$ -equivalentes. Mas, considerando-se a \mathcal{R}_X -equivalência, temos que

$$\Theta_X = \left\langle \frac{\partial}{\partial x} + 2x \frac{\partial}{\partial y}, x \frac{\partial}{\partial x} + 2y \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle$$

e

$$\Theta_X f = \langle 3x^2, 3x^3 \rangle \Rightarrow \mathcal{V}(\Theta_X f) = \{(0, y) : y \in \mathbb{C}\}$$

$$\Theta_X g = \langle 3x^2, 3x^3 - 2x^2 + 2y \rangle \Rightarrow \mathcal{V}(\Theta_X g) = \{(0, 0)\}$$

logo f não é finitamente \mathcal{R}_X -determinado e g é finitamente \mathcal{R}_X -determinado então f e g não são \mathcal{R}_X -equivalentes.

Portanto podemos concluir que a \mathcal{R}_X -equivalência é mais restritiva do que a $\mathcal{R}(X)$ -equivalência.

O fato da \mathcal{R}_X -equivalência levar em conta o comportamento dos germes fora da subvariedade X acarreta em uma diferença nos espaços tangentes de uma órbita em um germe f , i.e.,

$$T\mathcal{R}_e(X)f = T\mathcal{R}_{e_X}f + \mathcal{I}(X).$$

Assim como para o grupo \mathcal{R}_X , todos os resultados de determinação e desdobramentos são válidos para o grupo $\mathcal{R}(X)$. Por exemplo:

Teorema 4.23 (Teorema de determinação finita). *Dado $f \in \mathcal{M}_n$ então se*

$$T\mathcal{R}(X)f \supset \mathcal{M}_n^p,$$

para algum inteiro positivo p , então f é finitamente $\mathcal{R}(X)$ -determinado.

A demonstração deste teorema é análoga à demonstração do Teorema de Determinação Finita para o grupo \mathcal{R}_X 2.10, onde basta considerar o espaço tangente de uma $\mathcal{R}(X)$ -órbita no germe f .

Apêndice A

Teoria de feixes

Nesta seção damos uma visão geral e introdutória sobre feixes; noções básicas necessárias para o entendimento de alguns conceitos que são usados ao longo do texto. Para maiores detalhes veja [17].

Sejam \mathcal{T} e X dois espaços topológicos, se $\pi : \mathcal{T} \rightarrow X$ é um homeomorfismo local, o par (\mathcal{T}, π) é chamado de *feixe* (de conjuntos) em X e π é chamada de *projeção*. Para cada $x \in X$, o subconjunto $\mathcal{T}_x = \pi^{-1}(x)$ é chamado de *fibra* (ou stalk) de \mathcal{T} em x .

Sejam (\mathcal{T}, π) e (\mathcal{F}, Π) dois feixes em X . Um *morfismo de feixes* é uma aplicação contínua $\varphi : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{F}$ tal que $\Pi \circ \varphi = \pi$; portanto um morfismo de feixes leva cada fibra de \mathcal{T} num ponto x na fibra correspondente de \mathcal{F} no ponto x e podemos considerar, para cada $x \in X$, a aplicação induzida $\varphi_x : \mathcal{T}_x \rightarrow \mathcal{F}_x$.

Se Y é um subespaço topológico de X , cada feixe (\mathcal{T}, π) em X induz um feixe $(\pi^{-1}(Y), \pi|_{\pi^{-1}(Y)})$ em Y , onde $\pi^{-1}(Y)$ carrega a topologia de \mathcal{T} . Esse feixe é chamado de *restrição* de \mathcal{T} à Y e é denotado por $\mathcal{T}|_Y$. Analogamente um subespaço topológico \mathcal{F} de \mathcal{T} é um *subfeixe* de \mathcal{T} quando $(\mathcal{F}, \pi|_{\mathcal{F}})$ é um feixe em X .

Sejam (\mathcal{T}, π) e (\mathcal{F}, Π) dois feixes em X , consideramos o produto:

$$\mathcal{T} \oplus \mathcal{F} = \{(z, w) \in \mathcal{T} \times \mathcal{F} : \pi(z) = \Pi(w)\} = \bigcup_{x \in X} (\mathcal{T}_x \times \mathcal{F}_x)$$

com a topologia de $\mathcal{T} \times \mathcal{F}$; a aplicação $\mathcal{T} \oplus \mathcal{F} \rightarrow X$ dada por $(z, w) \mapsto \pi(z)$ é um homeomorfismo local e $\mathcal{T} \oplus \mathcal{F}$ é um feixe em X , chamado de *soma de Whitney* de

\mathcal{T} e \mathcal{F} . Analogamente podemos definir a soma de Whitney para p feixes em X , $\mathcal{T}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{T}_p$; se \mathcal{T}_j são todos iguais, escrevemos \mathcal{T}^p para essa soma de Whitney.

Uma aplicação contínua $s : Y \rightarrow \mathcal{T}$ de um subespaço $Y \subset X$ em um feixe (\mathcal{T}, π) em X é chamada de *seção* sobre Y em \mathcal{T} se $\pi \circ s = id_Y$. Escrevemos $s_x = s(x)$; o conjunto de todas as seções sobre Y em \mathcal{T} é denotado por $\Gamma(Y, \mathcal{T})$.

Suponhamos que para cada subconjunto aberto U de X existe um espaço topológico associado à U , \mathcal{T}_U e para qualquer par de abertos U e V de X , com $V \subset U$, existem aplicações restrições $\rho_{VU} : \mathcal{T}_U \rightarrow \mathcal{T}_V$ satisfazendo

$$\rho_{UU} = id_U \quad \text{e} \quad \rho_{WV} \circ \rho_{VU} = \rho_{WU}$$

sempre que $W \subset V \subset U$. Então a família $\{\mathcal{T}_U, \rho_{VU}\}$ é um *prefeixe* em X . Para todo feixe \mathcal{T} em X temos $\{\Gamma(U, \mathcal{T}), r_{VU}\}$ com $r_{VU}(s) = s|_V$, o *prefeixe canônico*.

Lema A.1. *Para todo prefeixe existe um feixe associado.*

Demonstração: Veja [17], página 225.

Sejam X e Y dois espaços topológicos, $f : X \rightarrow Y$ contínua e \mathcal{T} um feixe em X . Para cada aberto $V \subset Y$ associamos um conjunto $\Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{T}|_{f^{-1}(V)})$. Se $V \subset U$ são abertos de Y temos a restrição $\rho_{VU} : \Gamma(f^{-1}(U), \mathcal{T}|_{f^{-1}(U)}) \rightarrow \Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{T}|_{f^{-1}(V)})$ e $\{\Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{T}|_{f^{-1}(V)}), \rho_{VU}\}$ é um prefeixe em Y ; o feixe associado é denotado por $f_*(\mathcal{T})$ é chamado de *feixe imagem* de \mathcal{T} com respeito à f . Com a bijeção natural de $\Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{T}|_{f^{-1}(V)})$ em $\Gamma(V, f_*(\mathcal{T}))$ podemos identificar $\Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{T}|_{f^{-1}(V)})$ com $\Gamma(V, f_*(\mathcal{T}))$.

Feixes com estrutura algébrica

Um feixe \mathcal{T} em X é chamado de *feixe de anéis* (ou de grupos abelianos) se

- (i) Para cada $x \in X$, \mathcal{T}_x é um anel (subgrupo abeliano);
- (ii) A aplicação $\mathcal{T} \oplus \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$, $(z, w) \mapsto z - w$ é contínua;
- (iii) A aplicação: $\mathcal{T} \oplus \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$, $(z, w) \mapsto zw$ é contínua;

tais operações estão bem definidas pois, se $(z, w) \in \mathcal{T} \oplus \mathcal{T}$ então $x = \pi(z) = \pi(w)$ e $z - w, zw \in \mathcal{T}_x$, para algum $x \in X$. E, 0_x é o elemento neutro em \mathcal{T}_x e a aplicação $x \mapsto 0_x$ é uma seção de X em \mathcal{T} , a seção nula. Assumimos que toda fibra \mathcal{T}_x possui identidade 1_x dependendo suavemente de x , gerando uma seção em \mathcal{T} .

Sejam \mathcal{A} um feixe de anéis e \mathcal{T} um feixe de grupos abelianos. \mathcal{T} é um *feixe de \mathcal{A} -módulos* se existir um morfismo de feixes $\mathcal{A} \oplus \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ tal que cada fibra \mathcal{T}_x é um \mathcal{A}_x -módulo. Se $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_p$ são feixes de \mathcal{A} -módulos então a soma de Whitney é um \mathcal{A} -módulo com operações definidas componente à componente. Em particular \mathcal{A}^p é um \mathcal{A} -módulo.

Sejam \mathcal{T} um feixe de \mathcal{A} -módulos em X e $s_1, \dots, s_p \in \Gamma(U, \mathcal{T})$. Definimos um \mathcal{A}_U -homomorfismo

$$\begin{aligned} \sigma : \mathcal{A}_U^p &\longrightarrow \mathcal{T}_U \\ (a_{1x}, \dots, a_{px}) &\longmapsto \sum_{i=1}^p a_{ix} s_{i_x} \end{aligned} \tag{A.1}$$

com $x \in U$ e $a_{jx} \in \mathcal{A}_{U_x}$. Dizemos que \mathcal{T}_U é gerado pelas seções s_1, \dots, s_p quando σ é sobrejetora, ou seja, para qualquer $x \in U$

$$\mathcal{T}_x = \mathcal{A}_x s_{1_x} + \dots + \mathcal{A}_x s_{p_x}$$

um feixe de módulos é *localmente finitamente gerado em x* se existir uma vizinhança U de x tal que o feixe restrito à U é gerado por finitas seções. O feixe é *localmente finitamente gerado* quando é localmente finitamente gerado em x , $\forall x \in X$.

Teorema A.2. *Sejam \mathcal{F} um feixe localmente finitamente gerado e s_1, \dots, s_p seções numa vizinhança de x que geram \mathcal{F}_x então s_1, \dots, s_p geram \mathcal{F}_w para todo w suficientemente próximo de x .*

Demonstração: Veja [20], página 166.

Seja σ \mathcal{A}_U -homomorfismo como em (A.1), o *feixe de relações de s_1, \dots, s_p* é um \mathcal{A}_U -submódulo de \mathcal{A}_U^p definido por

$$Rel(s_1, \dots, s_p) := ker \sigma = \bigcup_{x \in U} \left\{ (a_{1x}, \dots, a_{px}) \in \mathcal{A}_x^p : \sum_{i=1}^p a_{ix} s_{i_x} = 0 \right\}$$

Um feixe é um *feixe de relação com tipo finito em x* , se para todo σ como na expressão (A.1) de seções num aberto U de x , $Rel(s_1, \dots, s_p)$ é localmente finitamente gerado em x . O feixe é um *feixe de relação com tipo finito* se é de relação com tipo finito em todo x .

Um feixe \mathcal{T} de \mathcal{A} -módulos é um *feixe coerente* se é um feixe localmente finitamente gerado e é um feixe de relação com tipo finito.

Teorema A.3. *Todo subfeixe de \mathcal{O}_n^p localmente finitamente gerado é coerente.*

Demonstração: Veja [20], página 167.

Teorema A.4. *Seja $\varphi : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{F}$ um \mathcal{O}_n -homomorfismo entre feixes coerentes. Então os feixes $Im(\varphi)$, $ker(\varphi)$ e $coker(\varphi)$ são coerentes.*

Demonstração: Veja [20], página 237.

Bibliografia

- [1] ARNOLD, V. *Mathematical methods of classical mechanics*. New York: Springer - Verlag, 1978.
- [2] ARNOLD, V. *Wave front evolution and equivariant Morse lemma*. Communications on pure and applied mathematics 29, pg. 557-582, 1976.
- [3] ATIYAH, M.; MACDONALD, I. *Introduction to commutative algebra*. Massachusetts: Addison - Wesley, 1969.
- [4] BRUCE, J. *Functions on discriminants*. Journal of London mathematical society 30, pg. 551-567, 1984.
- [5] BRUCE, J.; DU PLESSIS, A.; WALL, C. *Determinacy and unipotency*. Inventiones mathematicae 88, pg. 521-554, 1987.
- [6] BRUCE, J.; Giblin, P. *Curves and singularities*.- 2^a edição. Glasgow: Cambridge University, 1992.
- [7] BRUCE, J.; KIRK, N. P.; DU PLESSIS, A. *Complete transversals and the classification of singularities*. Nonlinearity 10, pg. 253-275, 1997.
- [8] BRUCE, J.; ROBERTS, R. *Critical points of functions on analytic varieties*. Topology 27, pg. 57-90, 1988.
- [9] BRUCE, J.; WEST, J. *Function on a crosscap*. Math. proc. camb. phil. soc. 123, pg. 19-39, 1998.

- [10] CARNEIRO, M.; SOARES, M. *Introdução à topologia de singularidades complexas*. Poços de Caldas: IMPA, 1985.
- [11] DAMON, J. *The unfolding and determinacy theorems for subgroups of \mathcal{A} e \mathcal{K}* . *Memoirs of the american mathematical society* 50, 306, 1984.
- [12] DAMON, J. *Topological triviality and versality for subgroups of \mathcal{A} e \mathcal{K}* . *Memoirs of the american mathematical society* 75, 389 (primeiro de 3 números), 1988.
- [13] DIMCA, A. *Function germs defined on isolated hypersurface singularities*. *Compositio mathematica* 53, pg. 245-258. 1984.
- [14] TARI, F. *Singularidades de aplicações diferenciáveis*. São Carlos: Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, 1999. (notas didáticas do ICMC).
- [15] GIBSON, C. *Singular points of smooth mappings*. London: Pitman, 1979.
- [16] GOLUBITSKY, M.; GUILLEMIN, V. *Stable mappings and their singularities*. New York: Springer - Verlag, 1973.
- [17] GRAUERT, H.; REINHOLD, R. *Coherent analytic sheaves*. Berlin: Springer - Verlag, 1984.
- [18] GRIFFITHS, P.; HARRIS, J. *Principles of algebraic geometry*. New York: John Wiley & sons, 1978.
- [19] GUNNING, R.; ROSSI, H. *Analytic functions of several complex variables*. New Jersey: Prentice - Hall, 1965.
- [20] HÖRMANDER, L. *An introduction to complex analysis in several variables*. Amsterdam: North - Holland, 1973.
- [21] HUNGERFORD, T. *Algebra*. New York: Springer - Verlag, 1974.
- [22] MATHER, J. *Stability of C^∞ mappings, III. Finitely determined map-germs*. *Publications mathématiques de l'L.H.É.S.* 35, pg. 127-156, 1968.

- [23] MATHER, J. *Stability of C^∞ mappings, IV. Classification of stable germs by R -algebras*. Publications mathématiques de l’L.H.É.S. 37, pg. 223-248, 1969.
- [24] SAITO, K. *Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields*. Journal fac. of science university of Tokyo sect. 1A math. 27, pg. 265-291, 1980.
- [25] SAN MARTIN, L. *Imersões*. Disponível em [http:// www.ime.unicamp.br/smartin/ grupolie.html](http://www.ime.unicamp.br/smartin/grupolie.html). Acesso em: 03 Novembro 2005.
- [26] WARNER, F. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. New York: Scott, Foresman, 1983.