UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Propriedades Assintóticas de uma Equação de Reação e Difusão com p-Laplaciano Degenerado

Taísa Junges

São Carlos - SP

Fevereiro de 2006

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Propriedades Assintóticas de uma Equação de Reação e Difusão com p-Laplaciano Degenerado

Taísa Junges

Orientadora: Profa. Dra. Cláudia Butarello Gentile

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

São Carlos - SP

Fevereiro de 2006

Orientadora

Profa. Dra. Cláudia Buttarello Gentile

.

Banca Examinadora

Profa. Dra. Cláudia Buttarello Gentille

Prof. Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki

Prof. Dr. Marcos Roberto Teixeira Primo

.

Aos meus pais José Luiz e Neiva Rita, com todo amor e carinho.

Agradecimentos

A Deus, por sempre nos ajudar e orientar nossos passos com sua infinita bondade.

A Professora Dra. Cláudia B. Gentile, meu profundo agradecimento pela orientação e dedicação a este trabalho, pela amizade e compreensão em todos os momentos. Expresso também minha admiração pela competência profissional que possui, com a qual conduz seus afazeres de forma excepcional.

Aos meus amados pais José Luiz e Neiva Rita, pelo amor, incentivo e confiança em todos os momentos. Pela excelente educação e por serem os exemplos da minha vida, pessoas que eu me orgulho e admiro muito por tudo que são e representam para mim. Amo muito vocês.

A minha vó Oraide, aos meus tios e primos, por serem pessoas tão especiais e companheiras. Em especial aos meus "segundos pais" Luciano e Louvaine e meus "irmãos" André e Cintia, por acreditarem nos meus sonhos e estarem sempre ao meu lado, me apoiando e incentivando com todo carinho.

Ao meu noivo Márcio, companheiro de todas as horas, por todo carinho e compreensão, pela generosidade e paciência em ajudar a enfrentar as dificuldades encontradas pelo caminho. E principalmente, por todo amor e felicidade que trouxe a minha vida.

Aos meus amigos Elaine, Cristina, Ricardo, Elisa, Fernanda, Angelo, Jamil, Ithyara e Irma pela amizade, pelo conhecimento compartilhado e pelo ambiente alegre de estudo. Em especial à Claudete, minha amiga de todas as horas, por todo apoio e amizade, desde o primeiro verão quando nos conhecemos. E também à Ana Claudia e ao Jacson, pela amizade e por tudo que me ajudaram para que esse trabalho pudesse ser realizado.

Aos meus amigos do sul, que mesmo distantes, sempre estiveram presentes me incentivando.

Ao professor João Batista Peneireiro, que com disponibilidade e paciência iniciou-me na carreira científica, e que mais que um professor, foi e é um grande amigo.

Ao professor Olimpio Hiroshi Miyagaki, pela amizade, pelas oportunidades, por todo apoio e incentivo.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFSCar, em especial ao professor João Nivaldo Tomazella, por sua amizade e exemplo.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho caracterizamos o conjunto das soluções estacionárias de um problema parabólico quasi-linear governado pelo p-Laplaciano, $p > 2$, e estabelecemos as propriedades de estabilidade dos equilíbrios. Além disso, fazemos uma comparação entre este problema e o caso semilinear $p = 2$.

Abstract

In this work we give a characterization of the equilibrium set of a p-laplacian quasi-linear parabolic problem, $p > 2$, and we estabilish the equilibria stability properties. Furthermore, we make a comparision between the cases $p > 2$ e $p = 2$.

Sumário

Introdução **1**

1 Sistemas Dinâmicos Contínuos **3**

1.1 Introdução 3

1.2 Definições e Resultados Elementares 3

1.3 Sistemas Gradientes 7

2 Propriedades Assintóticas de uma Equação de Reação e Difusão com p-Laplaciano Degenerado **10**

2.1 Introdução 10

2.2 Problema Não Estacionário 11

2.3 Problema Estacionário 21

2.4 Estabilidade das Soluções Estacionárias 49

3 Um Problema de Bifurcação para uma Equação Diferencial Parcial Não-Linear do Tipo Parabólico **60**

3.1 Introdução 60

3.2 Soluções de Equilíbrio da Equação (3.1) 61

4 Conclusão **82**

Referências Bibliográficas **83**

Introdução

Este trabalho foi baseado nos textos [3], [11] e tem por objetivo principal analisar o comportamento assintótico das soluções do problema

$$\begin{cases} u_t = \lambda(|u_x|^{p-2}u_x)_x + |u|^{q-2}u(1-|u|^r), \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,+\infty) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 < t < +\infty \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,1), \end{cases} \tag{1}$$

onde $p > 2$, $q \geq 2$, $r > 0$ e $\lambda > 0$.

A este problema podemos associar um semigrupo contínuo $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ em $W_0^{1,p}$ satisfazendo " boas"condições de compacidade e limitação, e é possível provar que o conjunto w-limite de cada dado inicial está contido no conjunto das soluções estacionárias de (1), E_λ. Torna-se relevante portanto o estudo de E_λ, que é feito através do método "time-map", levando em consideração os valores de λ e as relações entre p e q.

O mesmo método, que ajusta a velocidade inicial das soluções de um problema da Cauchy a fim de garantir as condições de fronteira desejados, foi usado para caracterizar o conjunto das soluções estacionárias de um problema semilinear por Chafee e Infante em [3], onde é provado que, para valores fixos de $\lambda > 0$, os equilíbrios do problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \lambda f(u), \ 0 \leq x \leq \pi \ 0 < t < \infty \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \ 0 \leq t < +\infty \\ u(x,0) = u_0(x), \ 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \tag{2}$$

são finitos e bifurcam da solução nula aos pares, de forma que conforme $\lambda \to \infty$, o número de soluções estacionárias de (2) tende a infinito.

Quando consideramos o problema (1) governado pelo p-Laplaciano, o conjunto E_λ das soluções estacionárias é bastante distinto e, de um modo geral, obtemos os seguintes resultados:

· se $p > q$, E_λ é um conjunto infinito qualquer que seja $\lambda > 0$ e é discreto apenas para valores suficientemente grandes de λ.

· se $p \leq q$, E_λ é um conjunto finito para λ grande e infinito (podendo ser contínuo) sempre que λ for pequeno o suficiente.

O caso $p = q$ é o que nos parece mais adequado para fazermos uma comparação entre a soluções estacionárias dos problemas quasi-linear e semi-linear, conforme explicamos no último capítulo deste trabalho. Neste caso, o comportamento da função "time-map", que mede o x-tempo necessário para uma equação atingir um extremo a partir da origem, em função da velocidade inicial, é similar próximo da origem em ambos os problemas e difere bastante quando o parâmetro velocidade inicial tende ao seu valor máximo (ou mínimo).

Neste trabalho procuramos apresentar a maior quantidade de detalhes possível à análise feita em [11] acrescentando a ela os principais elementos de [3] para que possamos comparar os dois problemas. Organizamos este texto da seguinte forma.

No Capítulo 1 apresentamos alguns resultados da Teoria de Semigrupos apenas com a finalidade de justificar a relevância do estudo feito posteriormente. No Capítulo 2 caracterizamos o conjunto das soluções estacionárias de (1) e estabelecemos as propriedades de estabilidade destas soluções. No Capítulo 3 estão parte dos resultados de [3] expostos aqui principalmente para possibilitar uma comparação entre (2) e (1), a qual fazemos no Capítulo 4.

Queremos salientar que optamos por respeitar, nos capítulos 2 e 3, as notações usadas pelos autores Chafee e Infante e Takeuchi e Yamada respectivamente em seus trabalhos. Assim, a função designada por $X(\cdot)$ no Capítulo 2, tem os mesmo papel que as funções designadas por $\tau_\pm(\cdot)$ no Capítulo 3.

Capítulo 1

Sistemas Dinâmicos Contínuos

1.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos algumas definições e resultados bastante conhecidos da Teoria de Semigrupos. Basicamente nossa intenção é caracterizar o conjunto w-limite e dar condições suficientes para que ele esteja contido no conjunto dos equilíbrios. Ao longo deste capítulo seguimos o texto [6].

1.2 Definições e Resultados Elementares

Sejam X um espaço de Banach, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ e $T(t) : X \to X$, $t \geq 0$, uma família de operadores em X.

Definição 1.1 *Dizemos que* $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *é um semigrupo contínuo, se*

i) $T(0) = I$.

ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$.

iii) $(t, x) \mapsto T(t)x$ *é uma aplicação contínua de* $\mathbb{R}_+ \times X$ *em* X.

Definição 1.2 *Seja* $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *um semigrupo contínuo. Dado* $x \in X$*, definimos órbita positiva por* x *como sendo* $\gamma^+(x) = \{T(t)x; t \geq 0\}$*, e se* $B \subset X$*,* $\gamma^+(B) = \bigcup_{x\in B} \gamma^+(x)$.

Dado $B \subset X$, definimos o conjunto w-limite de B como

$$w(B) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} T(t)B}.$$

Notemos que $w(B) = \overline{w}(B)$, onde

$$\overline{w}(B) = \{y \in X;\ \exists\ \{t_k\} \to +\infty \text{ e } \{x_k\} \subset B \text{ tal que } y = \lim_{k \to +\infty} T(t_k)x_k\}.$$

De fato, seja $y \in w(B)$, logo $y \in \overline{\bigcup_{t \geq s} T(t)B}$, $\forall\ s \geq 0$. Assim, existe seqüência $\{T(t_k)x_k\} \subset \bigcup_{t \geq s} T(t)B$ tal que $T(t_k)x_k \to y$ quando $k \to +\infty$, $\forall\ s \geq 0$, ou seja, para $k \geq 0$, existe $t_k > k$ e $x_k \in B$ tal que $y = \lim_{k \to +\infty} T(t_k)x_k$, e assim, $y \in \overline{w}(B)$.

Por outro lado, dado $y \in \overline{w}(B)$, é claro que $y \in \overline{\bigcup_{t \geq s} T(t)B}, \forall\ s \geq 0$.

Definição 1.3 *Definimos a distância entre dois conjuntos B e A por*

$$dist(B, A) = \sup_{y \in B} \inf_{x \in A} d(y, x).$$

Definição 1.4 *Dizemos que um conjunto $B \subset X$ atrai um conjunto $C \subset X$ por $T(t)$ se $dist(T(t)C, B) \to 0$ quando $t \to +\infty$. (Ou, $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ N(C, \varepsilon)$ tal que $dist(T(t)x, B) < \varepsilon$, $\forall\ t > N(C, \varepsilon)$ e $\forall\ x \in C$).*

Definição 1.5 *Um conjunto $S \subset X$ é invariante se $T(t)S = S, \forall\ t \geq 0$.*

Uma classe importante de conjuntos invariantes são os conjuntos w-limites.

Lema 1.1 *Seja $B \subset X$ tal que $w(B)$ é compacto e $w(B)$ atrai B. Então $w(B)$ é invariante. Além disso, se B é conexo, então $w(B)$ é conexo.*

Demonstração: Seja $B \subset X$. Se $w(B) = \emptyset$, o resultado segue por vacuidade. Suponhamos que $w(B) \neq \emptyset$ é compacto e atrai B. Mostremos que $w(B)$ é invariante. Da continuidade do operador $T(t)$ segue que $T(t)w(B) \subset$

$w(B)$, pois se $y \in w(B)$ então $y = \lim\limits_{k\to+\infty} T(t_k)x_k$ com $\{x_k\} \subset B$ e $t_k \to +\infty$. Logo,

$$\begin{aligned} T(t)y &= T(t)\lim_{k\to+\infty} T(t_k)x_k \\ &= \lim_{k\to+\infty} T(t)T(t_k)x_k \\ &= \lim_{k\to+\infty} T(t+t_k)x_k \in w(B). \end{aligned}$$

Para obtermos a inclusão contrária, seja $y \in w(B)$. Sabemos que $y = \lim\limits_{k\to+\infty} T(t_k)x_k$, onde $t_k \to +\infty$ e $x_k \in B$. Dado $t_0 > 0$ fixo, mas arbitrário, consideremos a seguinte seqüência $\{y_k\} = \{T(t_k - t_0)x_k\}$ (onde k é grande o suficiente para que $t_k - t_0 > 0$).

Afirmação 1.1 $\{y_k\}$ *possui uma subseqüência convergente, ou seja, existe* $\{y_{k_r}\}$ *subseqüência de* $\{y_k\}$ *tal que* $y_{k_r} \to z$.

Inicialmente mostremos que para todo $\varepsilon > 0$, $\mathcal{O}_\varepsilon(w(B)) \subset \bigcup\limits_{i_\varepsilon=1}^{k_\varepsilon} B(z_{i_\varepsilon}, 2\varepsilon)$, onde $z_{1_\varepsilon}, z_{2_\varepsilon}, \ldots, z_{k_\varepsilon} \in w(B)$. De fato, $\{B(z,\varepsilon)\}_{z\in w(B)}$ é uma cobertura aberta de $w(B)$, que é compacto, logo existem z_{i_ε}, $i = 1, \ldots, k$ tal que $w(B) \subset \bigcup\limits_{i_\varepsilon=1}^{k_\varepsilon} B(z_{i_\varepsilon}, \varepsilon)$.

Agora, dado $y \in \mathcal{O}_\varepsilon(w(B))$, existe $z_y \in w(B)$ tal que $d(z_y, y) < \varepsilon$ e existe algum z_{i_ε} tal que $z_y \in B(z_{i_\varepsilon}, \varepsilon)$. Assim,

$$d(y, z_{i_\varepsilon}) \leq d(y, z_y) + d(z_y, z_{i_\varepsilon}) < 2\varepsilon.$$

Portanto, $\mathcal{O}_\varepsilon(w(B)) \subset \bigcup\limits_{i_\varepsilon=1}^{k_\varepsilon} B(z_{i_\varepsilon}, 2\varepsilon)$.

Construiremos seqüências $\{t_{k_r}\}, \{z_{k_r}\}$ e $\{x_{k_r}\}$ tais que $\{t_{k_r}\}$ é subseqüência de $\{t_k\}$, $t_{k_r} \to +\infty$, $\{z_r\} \subset w(B)$ e $\{x_{k_r}\}$ é subseqüência de $\{x_k\}$, da seguinte forma:

Para $k = 1$, como $w(B)$ atrai B, temos que existe $T_1 \in \mathbb{R}_+$ tal que $t > T_1 \Longrightarrow T(t)B \in \mathcal{O}_1(w(B)) \subset \bigcup\limits_{finita} B(z_{i_1}, 2)$. Portanto existe $z_{i_1} \in w(B)$, que denotaremos por z_1 tal que $T(t_{k_1} - t_0)x_{k_1} \in B(z_1, 2)$, para algum $t_{k_1} \in \{t_k\}$ e algum $x_{k_1} \in \{x_k\}$ com $T_1 < t_{k_1} - t_0$.

Para $k=2$, temos que existe $T_2 \in \mathbb{R}_+$, de modo que $t > T_2$ implica $T(t)B \subset \mathcal{O}_{\frac{1}{2}}(w(B)) \subset \bigcup\limits_{finita} B(z_{i_2}, 2\frac{1}{2})$. Portanto existe $z_{i_2} \in w(B)$, que denotaremos por z_2, tal que $T(t_{k_2} - t_0)x_{k_2} \in B(z_2, 1)$, para algum $t_{k_2} \in \{t_k\}$ e algum $x_{k_2} \in \{x_k\}$, com $t_{k_2} - t_0 > \max\{T_2, t_{k_1} - t_0\}$.

Prosseguindo desta forma, construímos uma seqüência $\{t_{k_r}\}$ crescente, $t_{k_r} \to +\infty$ e uma seqüência $\{z_r\}$ contida em $w(B)$ de tal forma que $T(t_{k_r} - t_0)x_{k_r} \in B(z_r, \frac{2}{r})$.

Como $w(B)$ é compacto, existe $\{z_{r_s}\}$ subseqüência de $\{z_r\}$ tal que $z_{r_s} \to z \in w(B)$. Assim, $T(t_{k_{r_s}} - t_0)x_{k_{r_s}} \to z$, pois dado $\varepsilon > 0$, basta considerar $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{4}$ e tal que, se $r_s > N$ então $d(z_{r_s}, z) < \frac{\varepsilon}{2}$. Daí, se $k_{r_s} > N$ então

$$d(T(t_{k_{r_s}} - t_0)x_{k_{r_s}}, z) \leq d(T(t_{k_{r_s}} - t_0)x_{k_{r_s}}, z_{r_s}) + d(z_{r_s}, z) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

o que completa a demonstração da afirmação. Logo,

$$T(t_0)z = T(t_0) \lim_{k_r \to +\infty} T(t_{k_r} - t_0)x_{k_r} = \lim_{k_r \to +\infty} T(t_0 + t_{k_r} - t_0)x_{k_r} = y.$$

Assim, $y \in T(t_0)w(B)$. Como t_0 foi tomado arbitrário, segue que $w(B) \subset T(t)w(B), \forall\, t \geq 0$.

Agora, sendo B conexo, suponhamos que $w(B)$ não é conexo, logo $w(B) = A \cup D$, onde A e D são fechados, disjuntos, não-vazios e $d(A, D) = \delta > 0$. Como $w(B)$ atrai B, temos que para $\varepsilon = \frac{\delta}{4}$, existe $T_0(\varepsilon)$ tal que $t_k > T_0(\varepsilon) \implies d(T(t_k)B, w(B)) < \frac{\delta}{4}$. Como a aplicação $(t, x) \mapsto T(t)x$ é contínua e $(T_0(\varepsilon), +\infty) \times B$ é conexo, temos que $\{T(t)B\}_{t > T_0(\varepsilon)}$ é conexo. E sendo $T(t)B \subset \mathcal{O}_\varepsilon(w(B))$, temos que $T(t)B \subset \mathcal{O}_\varepsilon(A)$ ou $T(t)B \subset \mathcal{O}_\varepsilon(D)$. Podemos supor sem perda de generalidade, que $T(t)B \subset \mathcal{O}_\varepsilon(A)$. Mas isso implica $D = \emptyset$, pois se existe $y \in D$, temos $y = \lim\limits_{k \to +\infty} T(t_k)x_k$, o que é uma contradição.

Portanto $w(B)$ é conexo. $\blacksquare$

Lema 1.2 *Se B é um subconjunto não vazio de X tal que $\overline{\gamma^+(B)}$ é compacto, então $w(B)$ é não vazio, compacto, invariante e atrai B.*

Demonstração: Seja $\{T(t_k)x_k\} \subset \gamma^+(B)$, onde $t_k \to +\infty$ e $\{x_k\} \subset B$. Como $\overline{\gamma^+(B)}$ é compacto e $\{T(t_k)x_k\} \subset \overline{\gamma^+(B)}$, temos que $\{T(t_k)x_k\}$ possui uma subseqüência convergente $T(t_{k_j})x_{k_j} \to y$. Logo, $y \in w(B)$ e portanto $w(B) \neq \emptyset$.

Agora, temos por definição que $w(B) = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} T(t)B}$. Note que $T(t)B \subset \gamma^+(B)$, $\forall\ t \geq 0$, logo, $\bigcup_{t\geq s} T(t)B \subset \gamma^+(B)$, $\forall\ s \geq 0$, e então $\overline{\bigcup_{t\geq s} T(t)B} \subset \overline{\gamma^+(B)}$, $\forall\ s \geq 0$. Assim, $w(B) \subset \overline{\gamma^+(B)}$ e como $w(B)$ é fechado e $\overline{\gamma^+(B)}$ é compacto, segue que $w(B)$ é compacto.

Mostremos que $w(B)$ atrai B. Suponhamos que isso não ocorra, então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, $\forall\ k \geq 0$, existe $t_k > k$ e $x_k \in B$ tal que

$$d(T(t_k)x_k, w(B)) > \varepsilon_0. \tag{1.1}$$

Note que $\{T(t_k)x_k\} \subset \overline{\gamma^+(B)}$ e como $\overline{\gamma^+(B)}$ é compacto, segue que $\{T(t_k)x_k\}$ possui subseqüência convergente $T(t_{k_j})x_{k_j} \to y$ e $y \in w(B)$ (pela definição), o que contradiz (1.1). Portanto, $w(B)$ atrai B.

Como $w(B)$ é compacto e atrai B segue do Lema 1.1 que $w(B)$ é invariante. ■

1.3 Sistemas Gradientes

Seja $\{T(t)\}_{t\in I\!R_+}$ um semigrupo contínuo em um espaço de Banach X e seja E o conjunto dos pontos de equilíbrio de $T(t)$, ou seja,

$$E = \{x \in X; T(t)x = x, \forall\ t \geq 0\}.$$

Definição 1.6 *Um semigrupo contínuo $\{T(t)\}_{t\in I\!R_+}$ é um Sistema Gradiente se*

i) Cada órbita positiva limitada é pré-compacta.

ii) Existe um Funcional de Liapunov para $T(t)$, isto é, existe uma função contínua $V : X \to I\!R$ com as seguintes propriedades

$ii_1)$ *$V(\cdot)$ é limitada inferiormente.*

$ii_2)$ *$V(x) \to +\infty$ quando $\|x\| \to +\infty$.*

$ii_3)$ *$V(T(t)x)$ é não crescente em t para cada $x \in X$.*

$ii_4)$ *se x é tal que $T(t)x$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}_+$ e $V(T(t)x) = V(x)$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$, então x é um ponto de equilíbrio.*

Lema 1.3 *Seja $T(t)$ um Sistema Gradiente, então para cada $x \in X$ temos que $w(x) \subset E$.*

Demonstração: Dado $x \in X$, por $ii_3)$ temos que $V(T(t)x) \leq V(x), \forall\, t \geq 0$, logo o subconjunto de $\mathbb{R}$, $\{V(T(t)x)\}_{t\geq 0}$, é limitado. Suponhamos que $\gamma^+(x)$ não é limitada, logo existe uma seqüência $\{T(t_k)x\}$ tal que $\|T(t_k)x\| \to \infty$, o que implica, por $ii_2)$ que $V(T(t_k)x) \to \infty$ quando $k \to \infty$, o que é uma contradição, já que $\{V(T(t)x)\}$ é limitada. Portanto $\gamma^+(x)$ é limitada para cada $x \in X$.

Assim por $i)$, $\gamma^+(x)$ é pré compacta para cada $x \in X$. Sendo assim, dada qualquer seqüência $\{T(t_k)x\}$ com $t_k \to \infty$, existe uma subseqüência $\{T(t_{k_r})x\}$ da seqüência $\{T(t_k)x\}$ que é convergente. Pela continuidade de V, $\{V(T(t_{k_r})x)\}$ converge, e como $\{V(T(t_{k_r})x)\}$ é uma seqüência não crescente e limitada inferiormente, ela converge para o seu ínfimo, isto é, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{k_r \to \infty} V(T(t_{k_r})x) = c = \inf\{V(T(t_{k_r})x)\}.$$

Mostremos que c independe da seqüência escolhida. De fato, sejam

$$c_1 = \inf\{V(T(t_{k_1})x)\}, t_{k_1} \to \infty$$

$$c_2 = \inf\{V(T(t_{k_2})x)\}, t_{k_2} \to \infty.$$

Se $c_1 \neq c_2$, sem perda de generalidade podemos considerar $c_1 < c_2$. Pela definição de c_1 temos que deve existir $t_{k_{0_1}}$ tal que $V(T(t_{k_{0_1}})x) < c_2$. Logo, $V(T(t_{k_{0_1}})x) < V(T(t_{k_2})x), \forall\ t_{k_2}$, o que é uma contradição, pois $t_{k_2} \to \infty$, logo existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_{k_{2_i}} > t_{k_{0_1}}, \forall\ i \geq i_0$, e por ii_3), $V(T(t_{k_{2_i}})x) \leq V(T(t_{k_{0_1}})x)$. Portanto $c_1 = c_2$ e o limite independe da seqüência escolhida. Portanto $V(T(t)x) \to c$ quando $t \to \infty$.

Seja $y \in w(x)$. Logo, existe seqüência $\{T(t_k)x\}$, $t_k \to \infty$ tal que $y = \lim\limits_{k \to \infty} T(t_k)x$. Pela continuidade de V, $V(T(t_k)x) \to V(y)$, e pela unicidade do limite, $V(y) = c$. Como $\overline{\gamma^+(x)}$ é compacto temos que $w(x)$ é invariante, logo $y \in w(x) \Longrightarrow T(t)y \in w(x), \forall\ t \geq 0$. Pelo raciocínio acima, $V(T(t)y) = c = V(y)$, para todo $t \geq 0$. Por ii_4) temos que $y \in E$. Portanto $w(x) \subset E$ para cada $x \in X$. ■

Capítulo 2

Propriedades Assintóticas de uma Equação de Reação e Difusão com p-Laplaciano Degenerado

2.1 Introdução

Considere o problema

$$\begin{cases} u_t = \lambda(|u_x|^{p-2}u_x)_x + |u|^{q-2}u(1-|u|^r), & (x,t) \in (0,1) \times (0,+\infty) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & 0 \leq t < +\infty \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in (0,1), \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $p > 2$, $q \geq 2$, $r > 0$ e $\lambda > 0$. O termo de reação de (2.1) consiste de um termo fonte $|u|^{q-2}u$, e de um termo de absorção $|u|^{q+r-2}u$ que domina o termo fonte.

Nosso objetivo é estudar o comportamento assintótico das soluções de (2.1) considerando as relações entre p e q e os valores de λ. Especificamente, abordaremos os seguintes assuntos:

$i)$ existência global de soluções para (2.1) ;

ii) existência de uma função de Liapunov para o semigrupo associado à (2.1);

iii) estrutura do conjunto de todas as soluções estacionárias;

iv) estabilidade de cada solução estacionária.

Segue abaixo a notação que será utilizada no desenvolvimento deste capítulo:

- L^p denota o espaço de funções $L^p(0,1)$, para $p \geq 1$;
- $\|\cdot\|_p$ denota a norma em $L^p(0,1)$. Para o caso $p = 2$ usamos $\|\cdot\|$;
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno em $L^2(0,1)$.
- $W_0^{1,p}$ denota o espaço de Sobolev $W_0^{1,p}(0,1)$ munido da norma $\|u_x\|_p$;

Este capítulo está organizado da seguinte forma: na seção 2.2 garantimos que o problema (2.1) define um sistema gradiente em $W_0^{1,p}$, na seção 2.3 estudamos a estrutura do conjunto das soluções estacionárias de (2.1) e na seção 2.4 estudamos a estabilidade dessas soluções.

2.2 Problema Não Estacionário

Nessa seção estudaremos a existência global de soluções de (2.1), bem como propriedades do semigrupo associado ao problema e do conjunto w-limite de cada dado inicial. Começaremos definindo solução forte:

Definição 2.1 *Para* $u_0 \in W_0^{1,p}$, *uma função* $u : [0,T] \longrightarrow W_0^{1,p}$ *é chamada uma solução forte de* (2.1) *em* $[0,T]$ *com* $u(0) = u_0$ *se*

i) $u \in C([0,T], W_0^{1,p})$;

ii) $u_t \in L^2(\delta, T; L^2)$ *e* $(|u_x|^{p-2}u_x)_x \in L^2(\delta, T; L^2)$, *para cada* $\delta > 0$;

iii) *u satisfaz*

$$\begin{cases} u_t = \lambda(|u_x|^{p-2}u_x)_x + |u|^{q-2}u(1-|u|^r), & qtp\ (x,t) \in (0,1) \times (0,+\infty) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad 0 \leq t < +\infty; \end{cases}$$

iv) $u(0) = u_0$.

A existência de solução forte para o problema (2.1) é estabelecida por um teorema devido a Mitsuharu Ôtani, Teorema 3.2, [9], referente a um problema abstrato de Cauchy

$$\frac{du}{dt}(t) + \partial\phi^1(u(t)) - \partial\phi^2(u(t)) \ni 0, u(0) = 0,$$

onde $\partial\phi^i$ são as subdiferenciais de funções convexas e semicontínuas inferiormente ϕ^i de H em $(-\infty, \infty]$ tais que $\phi^i \not\equiv +\infty$.

Observação 2.1 *Observamos que (2.1) é um caso particular do problema acima pois*

$$\phi^1(u) := \frac{\lambda}{p}\int_0^1 |u_x(x)|^p dx + \int_0^1 \int_0^u |v|^{q-2+r} v\, dv\, dx$$

e

$$\phi^2(u) := \int_0^1 \int_0^u |v|^{q-2} v\, dv\, dx$$

são tais que $\partial\phi^1 u = -\lambda(|u_x|^{p-2}u_x)_x + |u|^{q+r-2}u$ *e* $\partial\phi^2 u = |u|^{q-2}u$.

Observação 2.2 *É possível mostrar que toda solução de (2.1) é limitada em* $W_0^{1,p}$*, uniformemente em* $[0, T]$*, para dados iniciais em limitados de* $W_0^{1,p}$*. De fato, existem constantes* $0 < c_0 < 1$ *e* $c > 0$ *tais que* $\phi^2(u) \leq c_0\, \phi^1(u) + c$ *qualquer que seja* $u \in W_0^{1,p}$*. Desta desigualdade e da equação* (2.1) *segue que*

$$\int_0^t \|u_\tau(\tau)\|^2 d\tau + (1 - c_0)\frac{\lambda}{p}\int_0^1 |u_x(x)|^p dx \leq \phi^1(u_0) + c.$$

Como $\displaystyle\frac{\lambda}{p}\int_0^1 |u_x(x)|^p dx$ *é equivalente à norma de* u *em* $W_0^{1,p}$*, então dados* $B \subset W_0^{1,p}$ *limitado e* $T > 0$, $\displaystyle\sup_{t\in[0,T],\, u_0\in B} \|u_x(t)\|_p < \infty$*. Assim, uma vez que* $W_0^{1,p}(0,1)$ *está continuamente imerso em* $C([0,1])$*, temos que existe uma constante* K *positiva, tal que* $\displaystyle\sup_{(x,t)\in[0,1]\times[0,T]} |u(t)(x)| < K$ *para dados iniciais em* B.

A seguir mostraremos algumas propriedades das soluções fortes de (2.1).

Lema 2.1 *Sejam T um número real positivo arbitrário, $u_0, v_0 \in B \subset W_0^{1,p}$ limitado, u e v soluções fortes de* (2.1) *em* $[0,T]$ *com* $u(0) = u_0$ *e* $v(0) = v_0$, *respectivamente. Então existem constantes positivas C_i,* $0 \leq i \leq 3$, *dependendo de p, q e r e T, tais que para qualquer* $t \in [0,T]$,

$$\|u(t) - v(t)\|^2 + 2C_0\lambda \int_0^t \|u_x(s) - v_x(s)\|_p^p \, ds \leq e^{2C_1 t}\|u_0 - v_0\|^2, \tag{2.2}$$

$$\lambda\|u_x(t)\|_p^p + p \int_0^t \|u_t(s)\|^2 ds \leq \lambda\|(u_0)_x\|_p^p + C_2\|u_0\|_{q+r}^{q+r} + C_3. \tag{2.3}$$

Demonstração: Sejam u e v soluções fortes de (2.1) com $u(0) = u_0$ e $v(0) = v_0$ e considere $f(u) = |u|^{q-2}u(1 - |u|^r)$. Então

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u(t) - v(t)\|^2\right) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\langle u(t) - v(t), u(t) - v(t)\rangle\right) \\
&= \langle u_t(t) - v_t(t), u(t) - v(t)\rangle \\
&= \langle \lambda(|u_x(t)|^{p-2}u_x(t))_x + f(u(t)) - \lambda(|v_x(t)|^{p-2}v_x(t))_x \\
&\quad - f(v(t)), u(t) - v(t)\rangle \\
&= \lambda\langle (|u_x(t)|^{p-2}u_x(t))_x - (|v_x(t)|^{p-2}v_x(t))_x, u(t) - v(t)\rangle \\
&\quad + \langle f(u(t)) - f(v(t)), u(t) - v(t)\rangle.
\end{aligned}$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u(t) - v(t)\|^2\right) &= -\lambda\langle (|u_x(t)|^{p-2}u_x(t)) - (|v_x(t)|^{p-2}v_x(t)), u_x(t) - v_x(t)\rangle \\
&\quad + \langle f(u(t)) - f(v(t)), u(t) - v(t)\rangle. \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Pelas desigualdades de Cauchy-Schwartz e de Tartar, [4], temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u(t) - v(t)\|^2\right) &= -\lambda\langle (|u_x(t)|^{p-2}u_x(t)) - (|v_x(t)|^{p-2}v_x(t)), u_x(t) - v_x(t)\rangle \\
&\quad + \langle f(u(t)) - f(v(t)), u(t) - v(t)\rangle \\
&\leq -\lambda\langle (|u_x(t)|^{p-2}u_x(t)) - (|v_x(t)|^{p-2}v_x(t)), u_x(t) - v_x(t)\rangle \\
&\quad + \|f(u(t)) - f(v(t))\|\|u(t) - v(t)\| \\
&\leq -\lambda C_0\|u_x(t) - v_x(t)\|_p^p + \|f(u(t)) - f(v(t))\|\|u(t) - v(t)\| \\
&\leq -\lambda C_0\|u_x(t) - v_x(t)\|_p^p + C_1\|u(t) - v(t)\|^2,
\end{aligned}$$

onde $C_1 = \sup\{|f'(u)|; u \in (-K, +K)\} < +\infty$, e K é a constante cuja existência foi enunciada na Observação 2.2. Integrando essa expressão em relação a t, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|u(t)-v(t)\|^2 - \frac{1}{2}\|u_0-v_0\|^2 &\leq \int_0^t -\lambda C_0\|u_x(s)-v_x(s)\|_p^p\,ds \\ &+\int_0^t C_1\|u(s)-v(s)\|^2\,ds,\end{aligned}$$

o que implica,

$$\begin{aligned}\|u(t)-v(t)\|^2 &\leq -\lambda 2C_0\int_0^t \|u_x(s)-v_x(s)\|_p^p\,ds + \|u_0-v_0\|^2 \\ &+2\int_0^t C_1\|u(s)-v(s)\|^2\,ds.\end{aligned}$$

Pelo Lema de Gronwall-Bellman segue que

$$\|u(t)-v(t)\|^2 \leq \left(-\lambda 2C_0\int_0^t \|u_x(s)-v_x(s)\|_p^p\,ds + \|u_0-v_0\|^2\right)e^{2\int_0^t C_1\,ds}.$$

Logo,

$$\|u(t)-v(t)\|^2 \leq -\lambda 2C_0 e^{2C_1 t}\int_0^t \|u_x(s)-v_x(s)\|_p^p\,ds + e^{2C_1 t}\|u_0-v_0\|^2.$$

Ou ainda,

$$\|u(t)-v(t)\|^2 + \lambda 2C_0 e^{2C_1 t}\int_0^t \|u_x(s)-v_x(s)\|_p^p\,ds \leq e^{2C_1 t}\|u_0-v_0\|^2.$$

Como $C_1 > 0$ e $t \geq 0$ temos $e^{2C_1 t} \geq 1$, e assim

$$\|u(t)-v(t)\|^2 + \lambda 2C_0\int_0^t \|u_x(s)-v_x(s)\|_p^p\,ds \leq e^{2C_1 t}\|u_0-v_0\|^2,$$

o que demonstra a relação (2.2).

Para (2.3), tomando $v(t) \equiv 0$ em (2.4), o que é possível pois a função identicamente nula é uma solução de (2.1), temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2\right) &= -\lambda\langle|u_x(t)|^{p-2}u_x(t), u_x(t)\rangle + \langle f(u(t)), u(t)\rangle \\ &= -\lambda\|u_x(t)\|_p^p + \langle f(u(t)), u(t)\rangle.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 &\leq -2\lambda\|u_x(t)\|_p^p + 2\int_0^1 f(u(t))u(t) + |u(t)|^{q+r} - |u(t)|^{q+r}\,dx \\ &\leq -2\lambda\|u_x(t)\|_p^p + C - \|u(t)\|_{q+r}^{q+r},\end{aligned}$$

onde $C = \sup\{2f(u)u + |u|_{q+r}^{q+r}; u \in (-K, +K)\} < +\infty$. Logo,

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 + 2\lambda\|u_x(t)\|_p^p \leq C - \|u(t)\|_{q+r}^{q+r}.$$

Integrando essa expressão, obtemos

$$\|u(t)\|^2 + \int_0^t 2\lambda\|u_x(s)\|_p^p\,ds \leq \int_0^t C - \|u(s)\|_{q+r}^{q+r}\,ds + \|u(0)\|^2.$$

Ou, ainda,

$$\|u(t)\|^2 + 2\lambda\int_0^t \|u_x(s)\|_p^p\,ds + \int_0^t \|u(s)\|_{q+r}^{q+r}\,ds \leq Ct + \|u_0\|^2. \tag{2.5}$$

Definimos

$$F(u) = \int_0^u f(v)\,dv.$$

Por (2.1) sabemos

$$u_t = \lambda(|u_x|^{p-2}u_x)_x + |u|^{q-2}u(1 - |u|^r),$$

logo

$$\begin{aligned}
\|u_t\|^2 = \langle u_t, u_t\rangle &= \langle \lambda(|u_x|^{p-2}u_x)_x + f(u), u_t\rangle \\
&= \lambda\langle(|u_x|^{p-2}u_x)_x, u_t\rangle + \langle f(u), u_t\rangle \\
&= \frac{d}{dt}\left(-\frac{\lambda}{p}\int_0^1 |u_x|^p dx + \int_0^1 F(u)dx\right).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|u_t(t)\|^2 = \frac{d}{dt}\left(-\frac{\lambda}{p}\|u_x(t)\|_p^p + \int_0^1 F(u(x,t))dx\right). \tag{2.6}$$

Como $u_0 \in W_0^{1,p}$, então integrando em t a expressão acima obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^t \|u_t(s)\|^2 ds &= -\frac{\lambda}{p}\|u_x(t)\|_p^p + \int_0^1 F(u(x,t))dx + \frac{\lambda}{p}\|u_x(0)\|_p^p \\
&\quad - \int_0^1 F(u(x,0))dx.
\end{aligned}$$

O que implica,

$$\begin{aligned}
p\int_0^t \|u_t(s)\|^2 ds + \lambda\|u_x(t)\|_p^p &= \lambda\|(u_0)_x\|_p^p \\
&\quad + p\int_0^1 F(u(t))\,dx - p\int_0^1 F(u_0)\,dx.
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
-p\int_0^1 F(u(x,0))dx &= -p\int_0^1\int_0^u f(v(x,0))\,dvdx\\
&= -p\int_0^1\int_0^u |v(x,0)|^{q-2}v(x,0)(1-|v(x,0)|^r)\,dvdx\\
&= -p\int_0^1\int_0^u |v(x,0)|^{q-2}v(x,0)-|v(x,0)|^{q+r-2}v(x,0)\,dvdx\\
&= -p\int_0^1 \frac{|u(x,0)|^q}{q}-\frac{|u(x,0)|^{q+r}}{q+r}dx\\
&= -\frac{p}{q}\int_0^1 |u(x,0)|^q dx+\frac{p}{q+r}\int_0^1 |u(x,0)|^{q+r}dx\\
&= -\frac{p}{q}\|u(0)\|_q^q+\frac{p}{q+r}\|u(0)\|_{q+r}^{q+r}\\
&\leq \frac{p}{q+r}\|u(0)\|_{q+r}^{q+r}. \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

Assim, sendo $C_2=\frac{p}{q+r}$ e $C_3=\sup\{pF(u); u\in(-K,+K)\}<+\infty$, temos

$$p\int_0^t \|u_t(s)\|^2ds+\lambda\|u_x(t)\|_p^p\leq\lambda\|u_x(0)\|_p^p+C_2\|u(0)\|_{q+r}^{q+r}+C_3.$$

Portanto, u satisfaz (2.3). ■

Daremos agora um resultado de existência global para (2.1):

Teorema 2.1 *Para cada* $T>0$ *e* $u_0\in W_0^{1,p}$ *existe uma única solução forte* u *de* (2.1) *em* $[0,T]$ *com* $u(0)=u_0$.

Demonstração: A existência local é estabelecida pelo Teorema 3.2 de Mitsuharu Ôtani, [9] e a unicidade é uma consequência de (2.2). Para a existência global, fazemos uso da desigualdade (2.3). ■

Pelo teorema anterior podemos definir uma família de aplicações

$$\{T(t): W_0^{1,p}\to W_0^{1,p}; t\geq 0\},$$

tal que

$$T(t)u_0\mapsto u(t,u_0),\ \forall\, u_0\in W_0^{1,p},$$

onde $u(\cdot,u_0)$ denota a solução forte de (2.1) com $u(0)=u_0$ em $[0,+\infty)$.

Os resultados acima nos asseguram que (2.1) gera um semigrupo em $W_0^{1,p}$. Ou seja, temos o seguinte lema:

Lema 2.2 *A família* $\{T(t) : W_0^{1,p} \longrightarrow W_0^{1,p}; t \geq 0\}$ *tem as seguintes propriedades:*

i) $T(0) = I$, *o operador identidade em* $W_0^{1,p}$;

ii) $T(t)(T(\tau)u_0) = T(t+\tau)u_0$, $\forall\ u_0 \in W_0^{1,p}$ *e* $t, \tau \geq 0$.

Demonstração: Seja $u_0 \in W_0^{1,p}$. Então $T(0)u_0 = u(0, u_0) = u_0$. Como tomamos $u_0 \in W_0^{1,p}$ arbitrário, segue que $T(0)u = u$, $\forall\ u \in W_0^{1,p}$, e portanto $T(0) = I$.

Sejam $u_0 \in W_0^{1,p}$, $t \geq 0$ e $\tau \geq 0$.

$$T(t)(T(\tau)u_0) = T(t)(u(\tau, u_0)) = u(t, u(\tau, u_0)).$$

Por outro lado,

$$T(t+\tau)u_0 = u(t+\tau, u_0).$$

Definimos $q = u(\tau, u_0)$, logo $u(t, q) = u(t, u(\tau, u_0))$.

Note que se $u(t)$ é solução de (2.1) em um intervalo (a, b), então para qualquer $\tau \in \mathbb{R}$, $u(t-\tau)$ é solução de (2.1) em $(a+\tau, b+\tau)$, pois se $y(t) = u(t-\tau)$, para $t \in (a+\tau, b+\tau)$, temos

$$\begin{aligned} y'(t) &= u'(t-\tau) \\ &= \lambda(|u_x(t-\tau)|^{p-2}u_x(t-\tau))_x + f(u(t-\tau)) \\ &= \lambda(|y_x(t)|^{p-2}y_x(t))_x + f(y(t)), \end{aligned}$$

isto é, $y(t) = u(t-\tau)$ é solução de (2.1) em $(a+\tau, b+\tau)$.

Consideremos

$$u_1(t) = u(t, q)$$

e

$$u_2(t) = u(t+\tau, u_0).$$

Temos que u_1 é solução de (2.1) (pois u o é) e u_2 é solução de (2.1) (pela observação anterior). Além disso,

$$u_1(0) = u(0, q) = q$$

$$u_2(0) = u(\tau, u_0) = q.$$

Logo u_1 e u_2 são soluções do mesmo problema de valor inicial, o que implica, pela unicidade de solução (Teorema 2.1), que $u_1 = u_2$, ou seja,

$$T(t)(T(\tau)u_0) = u(t,q) = u_1(t) = u_2(t) = u(t+\tau, u_0) = T(t+\tau)u_0.$$

Portanto,

$$T(t)(T(\tau)u_0) = T(t+\tau)u_0.$$

■

As propriedades de continuidade e compacidade deste semigrupo são enunciadas sem demonstração no teorema abaixo, e os detalhes podem ser encontrados em [2].

Teorema 2.2 *Para cada $T > 0$ e $B \subset W_0^{1,p}$ limitado, a aplicação $(u_0, t) \mapsto T(t)u_0$ é contínua em $B \times [0, T]$,além disso, existe $T_0 > 0$ tal que, para cada $t \in (T_0, T]$, se $\{u_n(t)\} \subset \{u_n(t, B)\}$ então $\{u_n(t)\}$ tem uma subseqüência convergente.*

Pelo Lema 2.2 é possível definir o conjunto w-limite $w(u_0)$ associado com $\{T(t)u_0; t \geq 0\}$,

$$w(u_0) = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\bigcup_{s\geq t} \{T(s)u_0\}}$$

sendo o fecho com respeito a norma de $W_0^{1,p}$.

Pelo capítulo anterior sabemos que $v \in w(u_0)$ é equivalente a existir uma sequência $\{t_n\} \to +\infty$ tal que $u(t_n, u_0) \to v$ em $W_0^{1,p}$.

Teorema 2.3 *Para cada $u_0 \in W_0^{1,p}$, $w(u_0)$ é não vazio, compacto, invariante e conexo em $W_0^{1,p}$, e*

$$d(u(t,u_0); w(u_0)) \equiv \inf_{v \in w(u_0)} \|u_x(t,u_0) - v_x\|_p \to 0 \text{ quando } t \to +\infty.$$

Além disso,

$$w(u_0) \subset E_\lambda \equiv \{\phi \in W_0^{1,p};\ \lambda(|\phi_x|^{p-2}\phi_x)_x + |\phi|^{q-2}\phi(1-|\phi|^r) = 0 \text{ em } (0,1)\}.$$

Demonstração: Pelo Teorema 2.2 temos que $\overline{\gamma^+(u_0)}$ é compacto, logo pelo Lema 1.2 temos que $w(u_0)$ é não-vazio, compacto, invariante, atrai u_0 e é conexo. Resta mostrarmos que $w(u_0) \subset E_\lambda$. Considere $V : W_0^{1,p} \to \mathrm{I\!R}$ dado por

$$V(u(\cdot,t)) = \int_0^1 \left\{ \lambda \frac{|u_x(x,t)|^p}{p} - \int_0^{u(x,t)} f(\xi)\, d\xi \right\} dx,$$

onde $f(u) = |u|^{q-2}u(1-|u|^r)$. A continuidade de V, o fato de que $V(u) \to +\infty$ quando $\|u\|_{W_0^{1,p}} \to +\infty$ e V é limitado inferiormente seguem da definição de V.

Temos que V é não crescente em t para cada $u_0 \in W_0^{1,p}$, pois

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(u(\cdot,t)) &= \frac{d}{dt}\int_0^1 \lambda \frac{|u_x(x,t)|^p}{p}\, dx - \frac{d}{dt}\int_0^1 \int_0^{u(x,t)} f(\xi)\, d\xi\, dx \\
&= -\int_0^1 \lambda(|u_x(x,t)|^{p-2}u_x(x,t))_x u_t(x,t) + f(u(x,t))u_t(x,t)\, dx \\
&= -\int_0^1 u_t(x,t)^2\, dx \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Ainda, se $V(T(t)u) = V(u),\ \forall\, t \geq 0$ então $\frac{d}{dt}V(T(t)u) = 0,\ \forall\, t > 0$. Logo,

$$\frac{d}{dt}V(T(t)u) = 0,\ \forall\, t > 0 \Longrightarrow \int_0^1 u_t^2(x,t)\, dx = 0,\ \forall\, t > 0.$$

Ou seja,

$$u_t^2(x,t) = 0 \text{ qtp } x \in [0,1],\ \forall\, t > 0.$$

Logo u é ponto de equilíbrio.

Portanto temos que $T(t)$ é um Sistema Gradiente e assim, pelo Lema 1.3, segue que $w(u_0) \subset E_\lambda$.

$\blacksquare$

Definição 2.2 *Seja $u : [0,T] \to W_0^{1,p}$ tal que u possui as propriedades $i)$ e $ii)$ da Definição 2.1. Então u é chamada solução superior para (2.1) em $[0,T]$ se satifaz*

$$\begin{cases} u_t \geq \lambda(|u_x|^{p-2}u_x)_x + |u|^{q-2}u(1-|u|^r), & (x,t) \in (0,1)\times(0,T) \\ u(0,t) \geq 0,\quad u(1,t) \geq 0, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{2.8}$$

Se u satisfaz (2.8) com $\geq$ substituído por $\leq$, então u é uma solução inferior.

Teorema 2.4 *Seja u (respectivamente v) uma solução superior (inferior) para (2.1) em $[0,T]$. Se $u(0) \geq v(0)$, então $u(\cdot,t) \geq v(\cdot,t)$, para todo $t \in [0,T]$.*

Demonstração: Seja $w(t) = v(t) - u(t)$ e $w^+(x,t) = \max\{w(x,t),0\}$. Como u é solução superior, temos que

$$u_t \geq \lambda(|u_x|^{p-2}u_x)_x + |u|^{q-2}u(1-|u|^r).$$

E, sendo v uma solução inferior,

$$v_t \leq \lambda(|v_x|^{p-2}v_x)_x + |v|^{q-2}v(1-|v|^r).$$

Se $w^+(x,t) = w(x,t)$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w^+(t)\|^2 &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v(t)-u(t))\|^2 = \langle v_t(t)-u_t(t), v(t)-u(t)\rangle \\
&\leq \langle \lambda(|v_x(t)|^{p-2}v_x(t))_x + |v(t)|^{q-2}v(t)(1-|v(t)|^r) \\
&\qquad -\lambda(|u_x(t)|^{p-2}u_x(t))_x - |u(t)|^{q-2}u(t)(1-|u(t)|^r), v(t)-u(t)\rangle \\
&= \langle \lambda(|v_x(t)|^{p-2}v_x(t))_x - \lambda(|u_x(t)|^{p-2}u_x(t))_x, v(t)-u(t)\rangle \\
&\quad + \langle f(v(t)) - f(u(t)), v(t)-u(t)\rangle \\
&\leq -\lambda\langle |v_x(t)|^{p-2}v_x(t) - |u_x(t)|^{p-2}u_x(t), v_x(t)-u_x(t)\rangle \\
&\quad + \|f(v(t)) - f(u(t))\|\|v(t)-u(t)\| \\
&\leq -\lambda C_0\|v_x(t)-u_x(t)\|_p^p + C_1\|v(t)-u(t)\|^2,
\end{aligned}$$

onde $C_1 = \sup\{f'(u);\ u \in (-K,+K)\} < +\infty$. Integrando essa expressão em relação a t, obtemos

$$\begin{aligned}
\|v(t)-u(t)\|^2 \;\leq\; & -\lambda 2C_0\int_0^t \|v_x(s)-u_x(s)\|_p^p\,ds + \|v(0)-u(0)\|^2 \\
& + \int_0^t 2C_1\|v(s)-u(s)\|^2\,ds.
\end{aligned}$$

Pelo Lema de Gronwall,

$$\|v(t)-u(t)\|^2 + \lambda 2C_0\int_0^t \|v_x(s)-u_x(s)\|_p^p\,ds \leq e^{2C_1 t}\|v(0)-u(0)\|^2. \quad (2.9)$$

Se $w^+(x,t) = 0$, então (2.9) também ocorre. Logo,

$$\|w^+(x,t)\|^2 + \lambda 2C_0 \int_0^t \|w_x^+(s)\|_p^p \, ds \leq e^{2C_1 t}\|w^+(0)\|^2.$$

Como $u(0) \geq v(0)$, temos $w(0) = v(0) - u(0) \leq 0$, ou seja, $w^+(x,0) = 0$.

Assim,

$$\|w^+(x,t)\|^2 + \lambda 2C_0 \int_0^t \|w^+(x,s)\|_p^p \, ds \leq 0,$$

donde obtemos

$$\|w^+(x,t)\| = 0 \Longrightarrow w^+(x,t) = 0 \Longrightarrow w(x,t) \leq 0.$$

Portanto, $v(\cdot,t) \leq u(\cdot,t)$, para cada $t \in [0,T]$. ■

2.3 Problema Estacionário

Considere o seguinte problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} \lambda(|\phi_x|^{p-2}\phi_x)_x + |\phi|^{q-2}\phi(1 - |\phi|^r) = 0, \quad x \in (0,1) \\ \phi(0) = \phi(1) = 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

As soluções do problema (2.10) são chamadas de soluções estacionárias do problema (2.1). Tais soluções são importantes no estudo do problema (2.1), pois é através delas que podemos conhecer o comportamento assintótico da solução do problema (2.1), visto que, pelo Teorema 2.3, dado $u_0 \in W_0^{1,p}$, $w(u_0) \subset E_\lambda$, sendo E_λ o conjunto de todas as soluções estacionárias.

Desta forma, neste momento temos por finalidade estudar a estrutura de E_λ. Os principais resultados dessa seção são os Teoremas 2.5, 2.6 e 2.7.

Iniciaremos esse estudo analisando o grau de regularidade de tais soluções. A proposição a seguir é uma adaptação da Proposição 2 de Ôtani, [8].

Proposição 2.1 *Se* $\phi \in E_\lambda$, *então* $\phi \in C^1([0,1]) \bigcap C^{<q>}([0,1]\backslash Z)$, *sendo* $Z = \{x \in [0,1]; \phi_x(x) = 0\}$ *e*

$$< x >= \begin{cases} +\infty, & se\ x = 2k,\ onde\, k \in \mathbb{Z}, \\ \min\{n; n \geq x, n \in \mathbb{Z}\}, & caso\ contr\acute{a}rio. \end{cases}$$

Observação 2.3 *Na demonstração da Proposição* 2.1, *podemos ver que a função* $|\phi_x|^{p-2}\phi_x \in C^1([0,1])$, *logo* ϕ *satisfaz* (2.10) *no sentido clássico.*

Observação 2.4 *Suponha que* $\phi \not\equiv 0$ *é duas vezes diferenciável para todo* $x \in (0,1)$ *e* ϕ *satisfaz* (2.10), *então* ϕ *atinge seus extremos em* 1 *e* -1.

De fato, pela primeira equação de (2.10) sabemos que

$$\lambda(|\phi_x|^{p-2}\phi_x)_x + |\phi|^{q-2}\phi(1 - |\phi|^r) = 0,$$

para todo $x \in (0,1)$. Como a função ϕ é duas vezes diferenciável, definindo $f(\phi) = |\phi|^{q-2}\phi(1 - |\phi|^r)$, segue, para todo $x \in (0,1)$ que

$$\lambda(p-1)|\phi_x(x)|^{p-2}\phi_{xx}(x) = -f(\phi(x)).$$

Como $\phi(0) = \phi(1) = 0$ e $\phi \not\equiv 0$, existe $x_0 \in (0,1)$ de forma que $\phi_x(x_0) = 0$ e $\phi(x_0) > 0$, (ou $\phi(x_0) < 0$). Fazendo $x = x_0$ na equação acima obtemos que

$$0 = \lambda(p-1)|\phi_x(x_0)|^{p-2}\phi_{xx}(x_0) = -f(\phi(x_0)),$$

ou seja, $|\phi(x_0)|^{q-2}\phi(x_0)(1 - |\phi(x_0)|^r) = 0$. Como $\phi(x_0) \neq 0$, temos então que $1 - |\phi(x_0)|^r = 0$, donde resulta $\phi(x_0) = 1$ ou $\phi(x_0) = -1$. Observe que na Proposição 2.1 obtivemos o mínimo de regularidade necessária que uma solução estacionária deve satisfazer. Nada impede, porém, que $\phi \in E_\lambda$ seja uma solução $C^\infty([0,1])$, inclusive em Z, ou que não seja nem duas vezes diferenciável, como mostram os exemplos abaixo.

Exemplo 2.1 *Se tomarmos* $p = 4, q = r = 2$ *e* $\lambda = (3\pi^4)^{-1}$, *então* $\phi(x) = sen(\pi x)$ *é uma solução* $C^\infty([0,1])$ *de* (2.10) *satisfazendo* $\phi\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

De fato, temos que sen $\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ e $\text{sen}(0) = \text{sen}(1) = 0$. Ainda,

$$\begin{aligned}
\lambda(|\phi_x|^{p-2}\phi_x)_x + |\phi|^{q-2}\phi(1-|\phi|^r) &= (3\pi^4)^{-1}(|\pi\cos(\pi x)|^{4-2}\pi\cos(\pi x))_x \\
&\quad +|\text{sen}(\pi x)|^{2-2}\text{sen}(\pi x)(1-|\text{sen}(\pi x)|^2) \\
&= -(3\pi^4)^{-1}(3\pi^4\text{sen}(\pi x)\cos^2(\pi x)) \\
&\quad +\text{sen}(\pi x)\cos^2(\pi x) \\
&= -\text{sen}(\pi x)\cos^2(\pi x) + \text{sen}(\pi x)\cos^2(\pi x) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

logo $\phi(x)$ satisfaz (2.10).

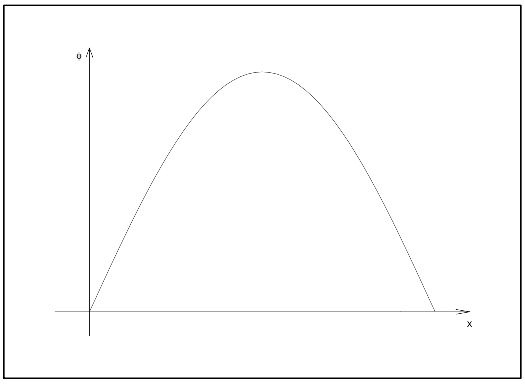


Figura 2.1: Exemplo 1.1

Exemplo 2.2 *Se tomarmos* $p = 4, q = r = 2, \lambda \in (0, (3\pi^4)^{-1})$, $C_0 = (3\lambda)^{\frac{1}{4}}\dfrac{\pi}{2}$, *e considerarmos a função*

$$\phi(x) = \begin{cases} sen\left(\frac{x}{(3\lambda)^{\frac{1}{4}}}\right), & x \in [0, C_0), \\ 1, & x \in [C_0, 1-C_0], \\ sen\left(\frac{x-1+2C_0}{(3\lambda)^{\frac{1}{4}}}\right), & x \in (1-C_0, 1], \end{cases}$$

temos que ϕ *é uma solução de* (2.10) *que não é nem duas vezes diferenciável, no entanto atinge seu máximo em* 1.

Mostremos que a função ϕ satisfaz (2.10). Para simplificar os cálculos definimos $C = (3\lambda)^{-\frac{1}{4}}$. Logo, $\phi(1) = \text{sen}(\frac{C^{-1}\pi}{C^{-1}}) = 0$ e $\phi(0) = 0$. Além disso, ϕ satisfaz a primeira equação de (2.10) no interior de cada intervalo $(0, C_0)$,

$(C_0, 1 - C_0)$ e $(1 - C_0, 1)$.

De fato, se $x \in (0, C_0)$, temos

$$\begin{aligned}
\lambda(|\phi_x|^{p-2}\phi_x)_x + |\phi|^{q-2}\phi(1-|\phi|^r) &= \lambda(|C\cos(Cx)|^2 C\cos(Cx))_x \\
&\quad + \operatorname{sen}(Cx)(1 - |\operatorname{sen}(Cx)|^2) \\
&= \lambda C^3(\cos^3(Cx))_x + \operatorname{sen}(Cx)\cos^2(Cx) \\
&= \lambda C^3(-3C\operatorname{sen}(Cx)\cos^2(Cx)) \\
&\quad + \operatorname{sen}(Cx)\cos^2(Cx) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Se $x \in (C_0, 1 - C_0)$, como $\phi(x) \equiv 1$, temos que a primeira equação de (2.10) é trivialmente satisfeita.

Para $x \in (1 - C_0, 1)$,

$$\begin{aligned}
\lambda(|\phi_x|^{p-2}\phi_x)_x + |\phi|^{q-2}\phi(1-|\phi|^r) &= \lambda\big(|C\cos(Cx-C+\pi)|^2\, C\cos(Cx-C+\pi))\big)_x \\
&\quad + \operatorname{sen}(Cx-C+\pi)\big(1-|\operatorname{sen}(Cx-C+\pi)|^2\big) \\
&= \lambda C^3\big(-3C\cos^2(Cx-C+\pi)\operatorname{sen}(Cx-C+\pi)\big) \\
&\quad + \operatorname{sen}(Cx-C+\pi)\cos^2(Cx-C+\pi) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto ϕ satisfaz o problema (2.10). No entanto ϕ não é duas vezes diferenciável em $x = C_0$ e $x = 1 - C_0$.

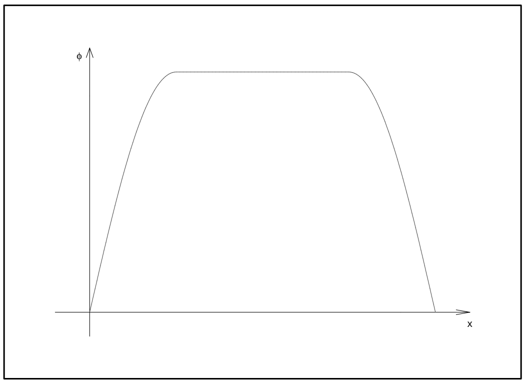


Figura 2.2: Exemplo 1.2

Assim, sabemos que uma solução de (2.10) pode atingir seus extremos em 1 mesmo não sendo $C^2([0, 1])$.

Procuraremos agora pelas soluções de (2.10), utilizando um método conhecido por “time-map”. Este método consiste em procurar a “velocidade inicial” adequada para que a solução do problema abaixo satisfaça a condição de fronteira.

Considere o seguinte problema de valor inicial,

$$\begin{cases} \lambda\psi_x + f(\phi) = 0, \quad x \in (0,+\infty) \\ \phi(0) = 0 \quad \psi(0) = \alpha, \end{cases} \tag{2.11}$$

onde α é um parâmetro, $\psi = |\phi_x|^{p-2}\phi_x$ e $f(\phi) = |\phi|^{q-2}\phi(1-|\phi|^r)$. Se variando α pudermos encontrar uma solução ϕ de (2.11) tal que $\phi(1) = 0$, então essa solução satisfaz (2.10). Para este fim vamos analisar o retrato de fase de (2.11).

Denotaremos por $\phi(\cdot,\alpha)$ a solução de (2.11) com dados iniciais $\phi(0) = 0$ e $\psi(0) = \alpha$.

Definimos

$$F(\phi) = \int_0^\phi f(s)\,ds = \frac{|\phi|^q}{q} - \frac{|\phi|^{q+r}}{q+r}.$$

Multiplicando a primeira equação de (2.11) por ϕ_x e integrando de 0 a x obtemos a seguinte expressão

$$\lambda\int_0^x (|\phi_x(s)|^{p-2}\phi_x(s))_x\phi_x(s)\,ds + \int_0^x \frac{d}{ds}F(\phi(s))\,ds = 0,$$

para todo $x \in (0,+\infty)$, ou seja,

$$\lambda\int_0^x (p-1)|\phi_x(s)|^{p-2}\phi_x(s)\phi_{xx}(s)\,ds + F(\phi(x)) - F(\phi(0)) = 0, \tag{2.12}$$

para qualquer $x \in (0,+\infty)$. Agora observe que

$$\begin{aligned} \lambda\int_0^x (p-1)|\phi_x(s)|^{p-2}\phi_x(s)\phi_{xx}(s)\,ds &= \lambda(p-1)\int_{\phi_x(0)}^{\phi_x(x)} |u|^{p-2}u\,du \\ &= \frac{\lambda(p-1)}{2}\int_{\phi_x^2(0)}^{\phi_x^2(x)} |v|^{\frac{p-2}{2}}\,dv \\ &= \frac{\lambda(p-1)}{p}\left(|\phi_x^2(x)|^{\frac{p}{2}} - |\phi_x^2(0)|^{\frac{p}{2}}\right) \\ &= \frac{\lambda(p-1)}{p}\left(|\phi_x(x)|^p - |\phi_x(0)|^p\right). \end{aligned}$$

Assim
$$\frac{\lambda(p-1)}{p}|\phi_x(x)|^p - \frac{\lambda(p-1)}{p}|\phi_x(0)|^p + F(\phi(x)) = 0,$$
para todo $x \in (0, \infty)$. Mas
$$|\psi(x)|^{\frac{p}{p-1}} = (||\phi_x(x)|^{p-2}\phi_x(x)|)^{\frac{p}{p-1}} = |\phi_x(x)|^p,$$
logo
$$|\alpha|^{\frac{p}{p-1}} = |\psi(0)|^{\frac{p}{p-1}} = |\phi_x(0)|^p$$
e portanto, pela relação (2.12), segue que
$$\frac{\lambda(p-1)}{p}|\psi|^{\frac{p}{p-1}} + F(\phi) = \frac{\lambda(p-1)}{p}|\alpha|^{\frac{p}{p-1}}. \tag{2.13}$$

Observação 2.5 *Note que podemos derivar ϕ duas vezes, pois os pontos onde ϕ não é duas vezes diferenciável formam um conjunto de medida nula e como utilizamos ϕ_{xx} dentro de uma integral, esse conjunto é irrelevante.*

De fato, seja $Z = \{x_0; \phi_x(x_0) = 0\}$. Suponha que a medida de Z é maior que zero. Como $Z \subset \mathbb{R}$, temos que Z é um intervalo ou uma união de intervalos Z_n, o que implica que temos em cada Z_n um patamar. Claramente no interior de cada Z_n a função é $C^2([0,1])$, pois é constante e então ϕ deixa de ser $C^2([0,1])$ apenas nos extremos de cada Z_n, que formam assim um conjunto enumerável de pontos cuja medida é nula.

A seguir definimos α_0 e ϕ_α como segue
$$F(1) = \frac{\lambda(p-1)}{p}|\alpha_0|^{\frac{p}{p-1}} \tag{2.14}$$

$$F(\phi_\alpha) = \frac{\lambda(p-1)}{p}|\alpha|^{\frac{p}{p-1}}, \tag{2.15}$$
onde $\phi_\alpha \in (0,1]$.

Com o auxílio de (2.13) temos o seguinte retrato de fase de (2.11), que é obtido da seguinte forma: notemos inicialmente que como f e ψ são funções simétricas, o retrato de fase $\phi\psi$ é simétrico em relação aos eixos ϕ e ψ, logo basta analisarmos o primeiro quadrante. Da equação (2.11) temos que se $0 < \phi < 1$, então ψ é decrescente, e se $\phi > 1$ ψ é crescente. Por definição de α_0 e pela equação (2.13), temos que:

· se $\alpha = \alpha_0$, então $\psi = 0 \Longrightarrow \phi = 1$.

· se $\alpha < \alpha_0$, então $\psi = 0 \Longrightarrow \phi = \phi_\alpha$.

· se $\alpha > \alpha_0$, então $\phi = 1 \Longrightarrow \psi > 0$.

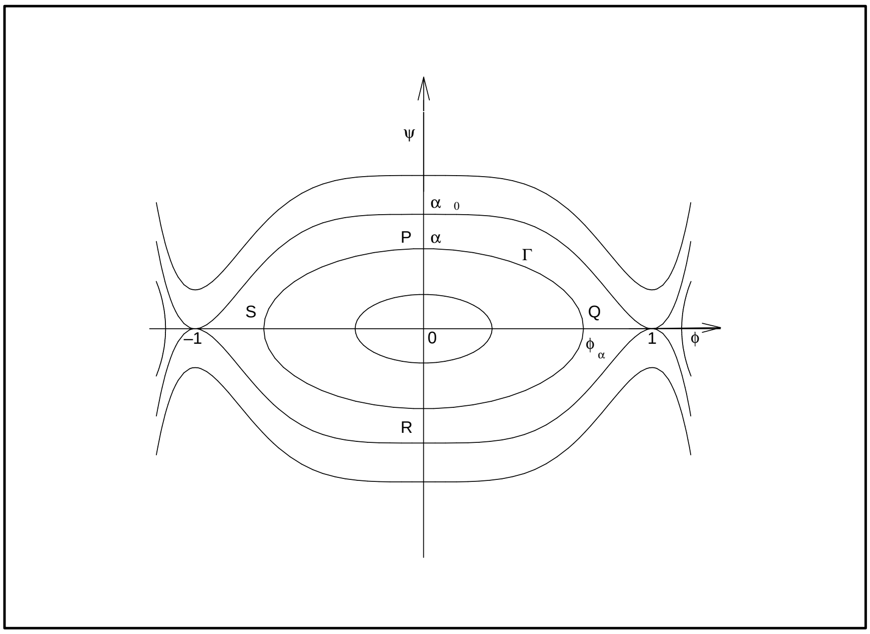


Figura 2.3: Retrato de fase $\phi\psi$ de (2.11)

Observação 2.6 *Temos que ϕ_α é valor extremo de ϕ que começou com velocidade α ($\psi(0) = \alpha$) e α_0 é tomado de forma que a solução que começou com velocidade α_0 ($\psi(0) = \alpha_0$) atinja seu primeiro máximo em $\phi_{\alpha_0} = 1$.*

Pelas propriedades de simetria de f e ψ sabemos que o retrato de fase $\phi\psi$ é simétrico em relação aos eixos ϕ e ψ. Se tomarmos $\phi_0 \in (0, 1)$ no eixo ϕ temos que a ϕ_0 correspondem ψ_1 e ψ_2 no eixo ψ de forma que se $x \in (0, \infty)$ é tal que $|\phi(x)| = \phi_0$, então pela simetria do retrato de fase, $|\phi_x(x)| = |\psi_1| = |\psi_2|$, o que implica no gráfico da solução ϕ (Figura 2.4) que qualquer que seja o ponto $\overline{x} > 0$ tal que $|\phi(\overline{x})| = \phi_0$, o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de ϕ neste ponto é sempre constante em módulo, isto é, $|\phi_x(\overline{x})| = |\psi_1| = |\psi_2|$.

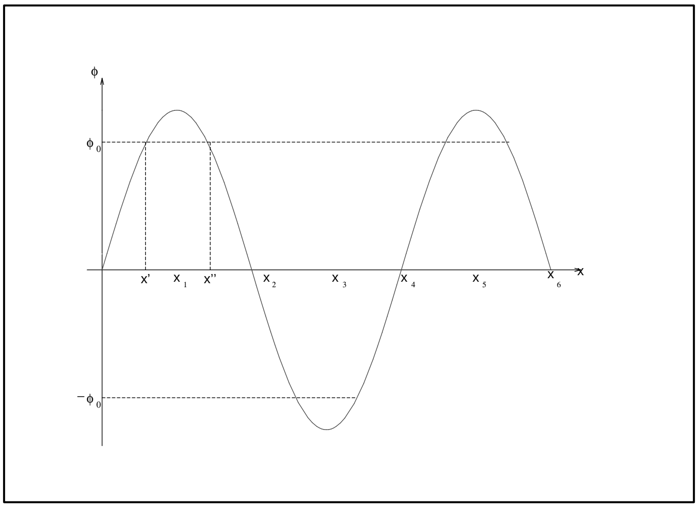


Figura 2.4: Exemplo de solução do pvi (2.11)

Ainda pelo retrato de fase percebemos que se $\alpha > \alpha_0$, $\phi(\cdot, \alpha)$ é solução de (2.11), mas não é solução de (2.10), pois não satisfaz $\phi(1, \alpha) = 0$. Como estamos interessados em soluções de (2.10), consideraremos de agora em diante $\alpha \in (0, \alpha_0]$ (já que se ϕ é solução, $-\phi$ também é, e se $\alpha = 0$ a única solução de (2.11) é a trivial).

Seja $\phi(x, \alpha)$ uma solução de (2.11), definimos

$$X(\alpha) = X(\alpha, \lambda) = \inf\{x \in (0, \infty); \phi_x(x, \alpha) = 0\}.$$

Ou seja, se considerarmos x como a variável tempo, então $X(\alpha)$ significa o menor tempo necessário para a órbita que saiu de P chegar em Q sobre a curva Γ na Figura 2.3. Nesse sentido, $X(\alpha)$ é usualmente chamado de "time-map".

Como $|\psi|^{\frac{p}{p-1}} = |\phi_x|^p$, segue de (2.13) que

$$F(\phi) + \frac{\lambda(p-1)}{p}|\phi_x|^p = \frac{\lambda(p-1)}{p}|\alpha|^{\frac{p}{p-1}},$$

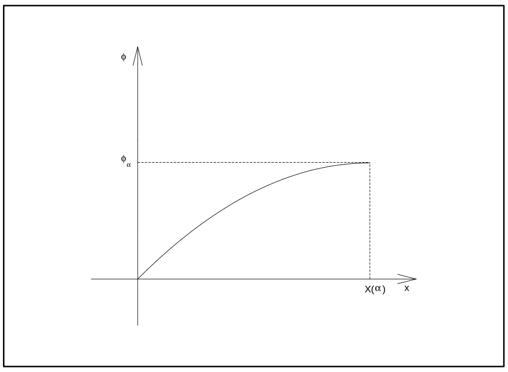
que pela relação (2.15) é equivalente a seguinte igualdade

$$\frac{\lambda(p-1)}{p}\left|\frac{d\phi}{dx}\right|^p = F(\phi_\alpha) - F(\phi),$$

ou ainda,

$$\left|\frac{d\phi}{dx}\right| = \left(\frac{p}{\lambda(p-1)}\left(F(\phi_\alpha) - F(\phi)\right)\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.16}$$

Temos que no intervalo $(0, X(\alpha))$ a função ϕ é bijetora e, portanto, inversível. Assim podemos considerar x em função de ϕ no intervalo $(0, \phi_\alpha)$.



Portanto

$$\int_0^{\phi_\alpha} \frac{dx}{d\phi}(\phi)\, d\phi = x(\phi_\alpha) - x(0) = X(\alpha), \text{ se } \phi_\alpha \text{ é máximo,}$$

e

$$-\int_{\phi_\alpha}^{0} \frac{dx}{d\phi}(\phi)\, d\phi = x(\phi_\alpha) - x(0) = X(\alpha), \text{ se } \phi_\alpha \text{ é mínimo.}$$

Em qualquer caso, $X(\alpha)$ é uma função de $(0, \alpha_0]$ em $(0, \infty]$, onde

$$\begin{aligned} X(\alpha) &= \int_0^{\phi_\alpha} \frac{dx}{d\phi}\, d\phi \\ &= \left(\frac{\lambda(p-1)}{p} \right)^{\frac{1}{p}} \int_0^{\phi_\alpha} \left(F(\phi_\alpha) - F(\phi)\right)^{-\frac{1}{p}} d\phi. \end{aligned}$$

Note que não há problema em substituir $\left|\dfrac{dx}{d\phi}\right|$ pela equação (2.16), pois como F é estritamente crescente em $(0,1)$ temos que o único ponto no intervalo $[0, \phi_\alpha]$ tal que $F(\phi_\alpha) = F(\phi)$ é ϕ_α e ele está no extremo do intervalo de integração.

Assim é conveniente estudar $I(a) = \displaystyle\int_0^a \left(F(a) - F(\phi)\right)^{-\frac{1}{p}} d\phi$, onde $a \in (0,1]$, ao invés de $X(\alpha)$. O lema a seguir nos dá importantes informações a respeito de $I(\,\cdot\,)$.

Lema 2.3 *Para cada $p > 2$ e $q \geq 2$, temos que $I(\,\cdot\,)$ é contínua em $(0,1]$. Em particular, $\lim_{a \to 1^-} I(a) = I(1)$ é finito. Além disso, $I(\,\cdot\,)$ possui as seguintes propriedades:*

i) Se $p > q$, então $I(\,\cdot\,)$ é estritamente crescente e $\lim_{a \to 0^+} I(a) = 0$.

ii) Se $p = q$, então $I(\,\cdot\,)$ é estritamente crescente e vale a seguinte igualdade

$$\lim_{a\to 0^+} I(a) = I_0 = p^{\frac{1}{p}} \int_0^1 (1-t^p)^{-\frac{1}{p}}\, dt.$$

iii) Se $p < q$, então existe $a^* \in (0,1)$ de modo que $I(\,\cdot\,)$ é estritamente decrescente em $(0, a^*)$ e estritamente crescente em $(a^*, 1)$. Ainda, temos que $\lim\limits_{a\to 0^+} I(a) = \infty$.

Demonstração: Como 1 é um valor de máximo local de F, temos que $F'(1) = 0$. Pela expansão em Taylor de F, obtemos que

$$F(\phi) = F(1) + F'(1)(\phi - 1) + \frac{F''(1)(\phi-1)^2}{2} + o(\phi-1)^2.$$

Portanto temos que

$$F(\phi) - F(1) = \frac{F''(1)(\phi-1)^2}{2} + o(\phi-1)^2,$$

ou ainda,

$$\frac{F(\phi) - F(1)}{(\phi-1)^2} = \frac{F''(1)}{2} + \frac{o(\phi-1)^2}{(\phi-1)^2}.$$

Portanto $F(1) - F(\phi) = O((\phi-1)^2)$.

Mostremos que $I(1)$ é um número real.

Como $\lim\limits_{\phi\to 1} \dfrac{F(1) - F(\phi)}{(1-\phi)^2} = C > 0$, temos que

$$\lim_{\phi\to 1} \frac{(1-\phi)^{\frac{2}{p}}}{(F(1) - F(\phi))^{\frac{1}{p}}} = \frac{1}{C^{\frac{1}{p}}} = C_1 > 0.$$

Logo, existe $\delta > 0$ tal que se $|\phi - 1| < \delta$ então

$$\left| \frac{(1-\phi)^{\frac{2}{p}}}{(F(1) - F(\phi))^{\frac{1}{p}}} - C_1 \right| < 1,$$

ou seja,

$$\frac{1}{(F(1) - F(\phi))^{\frac{1}{p}}} < \frac{C_1}{(1-\phi)^{\frac{2}{p}}} + \frac{1}{(1-\phi)^{\frac{2}{p}}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} I(1) &= \int_0^1 \frac{d\phi}{(F(1) - F(\phi))^{\frac{1}{p}}} \\ &= \int_0^{1-\delta} \frac{d\phi}{(F(1) - F(\phi))^{\frac{1}{p}}} + \int_{1-\delta}^1 \frac{d\phi}{(F(1) - F(\phi))^{\frac{1}{p}}} \\ &< \int_0^{1-\delta} \frac{d\phi}{(F(1) - F(\phi))^{\frac{1}{p}}} + \int_{1-\delta}^1 \frac{C_1}{(1-\phi)^{\frac{2}{p}}} + \frac{1}{(1-\phi)^{\frac{2}{p}}}\, d\phi < \infty. \end{aligned}$$

Portanto $I(1)$ é um número real.

Agora, fazendo a mudança de variáveis $\phi = as$, com $0 \leq s \leq 1$ e $0 < a \leq 1$, obtemos

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^a (F(a) - F(\phi))^{-\frac{1}{p}}\, d\phi \\ &= a\int_0^1 (F(a) - F(as))^{-\frac{1}{p}}\, ds \\ &= a\int_0^1 \left(\int_0^a f(t)\, dt - \int_0^{as} f(t)\, dt\right)^{-\frac{1}{p}} ds \\ &= a\int_0^1 \left(\int_{as}^a f(t)\, dt\right)^{-\frac{1}{p}} ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= a\int_0^1 \left(\int_{as}^a |t|^{q-2}t\,(1-|t|^r)\; dt\right)^{-\frac{1}{p}} ds \\ &= a\int_0^1 \left(\left(\frac{t^q}{q} - \frac{t^{q+r}}{q+r}\Big|_{as}^{a}\right)\right)^{-\frac{1}{p}} ds \\ &= a\int_0^1 \left(a^q\left(\frac{1-s^q}{q} - a^r\frac{1-s^{q+r}}{q+r}\right)\right)^{-\frac{1}{p}} ds \\ &= a^{1-\frac{q}{p}}\int_0^1 \Phi(s,a)^{-\frac{1}{p}}\, ds, \end{aligned} \tag{2.17}$$

onde $\Phi(s,a) = \dfrac{1-s^q}{q} - a^r\left(\dfrac{1-s^{q+r}}{q+r}\right) > 0$, para todo $s \in [0,1)$.

Mostremos que $I(\,\cdot\,)$ é contínua em $(0,1]$. Seja $a_0 \in (0,1]$ arbitrário. Consideremos $\{a_n\}$ seqüência crescente contida em $(0,1]$ tal que $a_n \to a_0^-$ e definimos para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi_n(t) = \left(\frac{1-t^q}{q} - \frac{(1-t^{q+r})}{q+r}(a_n)^r\right)^{-\frac{1}{p}}.$$

Notemos que para $t \in (0,1)$,

$$0 < a_n < a_{n+1} < 1 \Longrightarrow \varphi_n(t) < \varphi_{n+1}(t).$$

Temos também que $\varphi_n(t) \to \varphi_0(t)$, para todo $t \in (0,1)$. Logo segue do Teorema da Convergência Monótona que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \varphi_n(t)\, dt = \int_0^1 \varphi_0(t)\, dt,$$

e assim,

$$\begin{aligned}
\lim_{a_n \to a_0^-} I(a_n) &= \lim_{a_n \to a_0^-} (a_n)^{1-\frac{q}{p}} \int_0^1 \left(\frac{1-t^q}{q} - \frac{(1-t^{q+r})}{q+r} (a_n)^r \right)^{-\frac{1}{p}} dt \\
&= (a_0)^{1-\frac{q}{p}} \int_0^1 \left(\frac{1-t^q}{q} - \frac{(1-t^{q+r})}{q+r} (a_0)^r \right)^{-\frac{1}{p}} dt \\
&= I(a_0).
\end{aligned}$$

Consideremos agora $\{a_n\}$ uma seqüência decrescente contida em $(0,1]$ tal que $a_n \to a_0$ e definimos, da mesma forma, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi_n(t) = \left(\frac{1-t^q}{q} - \frac{(1-t^{q+r})}{q+r} (a_n)^r \right)^{-\frac{1}{p}}$$

Notemos que para $t \in (0,1)$,

$$0 < a_{n+1} < a_n < 1 \Longrightarrow \varphi_{n+1}(t) < \varphi_n(t).$$

Temos também que $\varphi_n(t) \to \varphi_0(t), \forall\, t \in (0,1)$. Ainda, $\varphi_1(t) \in L^1$, pois

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \varphi_1(t)\, dt &= \int_0^1 \left(\frac{1-t^q}{q} - \frac{(1-t^{q+r})}{q+r} (a_1)^r \right)^{-\frac{1}{p}} \\
&\leq \int_0^1 \left(\frac{1-t^q}{q} - \frac{(1-t^{q+r})}{q+r} (1)^r \right)^{-\frac{1}{p}} = I(1) < \infty.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \varphi_n(t)\, dt = \int_0^1 \varphi_0(t)\, dt,$$

e assim,

$$\lim_{a_n \to a_0^+} I(a_n) = \lim_{a_n \to a_0^+} (a_n)^{1-\frac{q}{p}} \int_0^1 \varphi_n(t)\, dt = (a_0)^{1-\frac{q}{p}} \int_0^1 \varphi_0(t)\, dt = I(a_0).$$

Portanto, $\lim\limits_{a_n \to a_0} I(a_n) = I(a_0)$ e $I(\,\cdot\,)$ é contínua em $(0,1]$.

Derivando I com relação à a obtemos que

$$\begin{aligned}
I_a(a) &= \left(1 - \frac{q}{p}\right) a^{-\frac{q}{p}} \int_0^1 \Phi(s,a)^{-\frac{1}{p}}\, ds + a^{1-\frac{q}{p}} \int_0^1 -\frac{1}{p} \Phi(s,a)^{-\frac{1}{p}-1} \Phi_a(s,a)\, ds \\
&= \frac{a^{-\frac{q}{p}}}{p} \int_0^1 (p-q)\Phi(s,a)^{-\frac{1}{p}} - a\Phi(s,a)^{-\frac{1}{p}-1} \Phi_a(s,a)\, ds.
\end{aligned}$$

Seja $\Psi(s,a) = (p-q)\Phi(s,a) - a\Phi_a(s,a)$. Temos então que

$$I_a(a) = \frac{a^{-\frac{q}{p}}}{p} \int_0^1 \Psi(s,a) \Phi(s,a)^{-\frac{1}{p}-1}\, ds. \tag{2.18}$$

Observe que $\Phi_a(s,a) = -ra^{r-1}\dfrac{1-s^{q+r}}{q+r} < 0$, se $s \in [0,1)$. Assim se $p \geq q$, obtemos que $I_a(a) > 0$ em $(0,1)$ e dessa forma $I(\,\cdot\,)$ é estritamente crescente em $(0,1)$. Ainda, se $p > q$, então

$$\begin{aligned}\lim_{a\to 0^+} I(a) &= \lim_{a\to 0^+} a^{1-\frac{q}{p}} \int_0^1 \Phi(s,a)^{-\frac{1}{p}}\, ds \\ &= \lim_{a\to 0^+} a^{1-\frac{q}{p}} \int_0^1 \left(\frac{1-s^q}{q} - a^r \frac{(1-s)^{q+r}}{q+r}\right)^{-\frac{1}{p}} ds \\ &= 0,\end{aligned}$$

donde segue o item i). Se $p = q$, temos que

$$\lim_{a\to 0^+} I(a) = \lim_{a\to 0^+} a^{1-\frac{q}{p}} \int_0^1 \left(\frac{1-s^q}{q} - a^r \frac{(1-s)^{q+r}}{q+r}\right)^{-\frac{1}{p}} ds = p^{\frac{1}{p}} \int_0^1 (1-s^p)^{-\frac{1}{p}}\, ds.$$

Assim $\lim\limits_{a\to 0^+} I(a) = I_0$, onde $I_0 = p^{\frac{1}{p}} \int_0^1 (1-s^p)^{-\frac{1}{p}} ds < \infty$, o que mostra ii).

Resta mostrarmos o item iii).

Se $p < q$, definimos $a_0 = \left(\dfrac{q-p}{q-p+r}\right)^{\frac{1}{r}}$ e então para cada $a \in (0,a_0)$ e $s \in (0,1)$, temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi}{\partial s}(s,a) &= (p-q)\frac{\partial \Phi}{\partial s}(s,a) - a\frac{\partial \Phi_a}{\partial s}(s,a) \\ &= (p-q)\left(-s^{q-1} + a^r s^{q+r-1}\right) - a\left(ra^{r-1}s^{q+r-1}\right) \\ &= s^{q-1}\left(q-p-(q-p+r)a^r s^r\right) \\ &> s^{q-1}(q-p-(q-p+r)a_0^r) \\ &= s^{q-1}\left(q-p-(q-p+r)\left(\frac{q-p}{q-p+r}\right)\right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Portanto, $\Psi(\cdot,a)$ é estritamente crescente para $s \in (0,1)$ e $a \in (0,a_0)$. Como $\Psi(1,a) = (p-q)\Phi(1,a) - a\Phi_a(1,a) = 0$, para qualquer $a \in (0,a_0)$, então temos que $\Psi(s,a) < 0$, para quaisquer $s \in (0,1)$ e $a \in (0,a_0)$. Assim, segue de (2.18) que $I_a(a) < 0$ se $a \in (0,a_0)$, ou seja, I é estritamente decrescente em $(0,a_0)$.

Analisemos agora $I(a)$ para $a \in [a_0,1)$. Observe que $a\Phi_{aa} = (r-1)\Phi_a$, pois

$$a\Phi_{aa} = a\frac{-r(r-1)(1-s^{q+r})a^{r-2}}{q+r} = -r(r-1)a^{r-1}\frac{(1-s^{q+r})}{q+r} = (r-1)\Phi_a.$$

Diferenciando $p^2 a^{\frac{q}{p}} I_a(a)$ com relação a a, temos que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{da}\Big(p^2 a^{\frac{q}{p}} I_a(a)\Big) = {} & p^2 \frac{q}{p} a^{\frac{q}{p}-1} I_a(a) + p^2 a^{\frac{q}{p}} I_{aa}(a) \\
= {} & pqa^{\frac{q}{p}-1} \frac{a^{-\frac{q}{p}}}{p} \int_0^1 \Psi(s,a)\Phi(s,a)^{-1-\frac{1}{p}}\, ds \\
& + p^2 a^{\frac{q}{p}} \Bigg(-\frac{q}{p^2} a^{-\frac{q}{p}-1} \int_0^1 \Psi(s,a)\Phi(s,a)^{-1-\frac{1}{p}}\, ds \\
& + \frac{a^{-\frac{q}{p}}}{p} \int_0^1 \Psi_a(s,a)\Phi(s,a)^{-1-\frac{1}{p}}\, ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& + \frac{a^{-\frac{q}{p}}}{p} \int_0^1 (-1-\frac{1}{p})\Psi(s,a)\Phi(s,a)^{-2-\frac{1}{p}}\Phi_a(s,a)\, ds \Bigg) \\
= {} & p \int_0^1 \Psi_a(s,a)\Phi(s,a)^{-1-\frac{1}{p}}\, ds \\
& - p \int_0^1 \frac{p+1}{p} \Psi(s,a)\Phi(s,a)^{-2-\frac{1}{p}} \Phi_a(s,a)\, ds \\
= {} & p \int_0^1 \left[(p-q)\Phi_a(s,a) - \Phi_a(s,a) - a\Phi_{aa}(s,a)\right] \Phi(s,a)^{-\left(\frac{p+1}{p}\right)}\, ds \\
& - (p+1) \int_0^1 \left[(p-q)\Phi(s,a) - a\Phi_a(s,a)\right] \Phi(s,a)^{-\left(\frac{2p+1}{p}\right)} \Phi_a(s,a)\, ds \\
= {} & p \int_0^1 \left[(p-q)\Phi_a(s,a) - \Phi_a(s,a) - (r-1)\Phi_a(s,a)\right] \Phi(s,a)^{-\left(\frac{p+1}{p}\right)}\, ds \\
& - (p+1) \int_0^1 (p-q)\Phi(s,a)^{-\left(\frac{p+1}{p}\right)} \Phi_a(s,a)\, ds \\
& + (p+1) \int_0^1 a\Phi(s,a)^{-\left(\frac{2p+1}{p}\right)} \Phi_a(s,a)^2\, ds \\
= {} & p \int_0^1 (p-q-r)\Phi_a(s,a)\Phi(s,a)^{-\left(\frac{p+1}{p}\right)}\, ds \\
& - (p+1) \int_0^1 (p-q)\Phi(s,a)^{-\left(\frac{p+1}{p}\right)} \Phi_a(s,a) - a\Phi(s,a)^{-\left(\frac{2p+1}{p}\right)} \Phi_a(s,a)^2 ds \\
= {} & \int_0^1 \Phi(s,a)^{-\left(\frac{2p+1}{p}\right)} \Phi_a(s,a)\left[(q-p-pr)\Phi(s,a) + a(p+1)\Phi_a(s,a)\right] ds.
\end{aligned}
$$

Fazendo $\theta(s,a) = (q-p-pr)\Phi(s,a) + a(p+1)\Phi_a(s,a)$, para todo $s \in (0,1)$ e $a \in [a_0, 1)$, obtemos que

$$
pqa^{\frac{q}{p}-1} I_a(a) + p^2 a^{\frac{q}{p}} I_{aa}(a) = \int_0^1 \Phi(s,a)^{-\frac{2p+1}{p}} \Phi_a(s,a)\theta(s,a)\, ds. \tag{2.19}
$$

Agora notemos que para qualquer $s \in (0,1)$ e $a \in (a_0, 1)$ vale

$$
\begin{aligned}
\theta(s,a) &= (q-p-pr)\Phi(s,a) + a(p+1)\Phi_a(s,a) \\
&= (q-p-pr)\left(\frac{1-s^q}{q} - \frac{a^r(1-s^{q+r})}{q+r}\right) \\
&\quad + a(p+1)\left(\frac{-ra^{r-1}(1-s^{q+r})}{q+r}\right) \\
&= (q-p-pr)\left(\frac{1-s^q}{q}\right) + \left(\frac{1-s^{q+r}}{q+r}\right) a^r(p-q-r) \\
&\leq (q-p-pr)\left(\frac{1-s^q}{q}\right) + \left(\frac{1-s^q}{q+r}\right) a_0^r(p-q-r) \\
&= \frac{q-p-pr}{q}(1-s^q) - \frac{a_0^r(q+r-p)}{q+r}(1-s^q) \\
&= (1-s^q)\left(\frac{q-p-pr}{q} - \frac{q+r-p}{q+r}\frac{q-p}{q+r-p}\right) \\
&= (1-s^q)\left(\frac{q-p-pr}{q} - \frac{q-p}{q+r}\right) \\
&= (1-s^q)\, r\left(\frac{(1-p)q-(r+1)p}{q(q+r)}\right) \\
&< 0.
\end{aligned}
$$

Logo pela relação (2.19) temos para qualquer $a \in (a_0, 1)$ que

$$
pqa^{\frac{q}{p}-1} I_a(a) + p^2 a^{\frac{q}{p}} I_{aa}(a) > 0. \tag{2.20}
$$

Como $I(a)$ é estritamente decrescente para $a \in (0, a_0)$, temos que $I_a(a) < 0$ para qualquer $a \in (0, a_0)$. Como $\lim\limits_{a\to 1^-} I_a(a) > 0$, $I(\,\cdot\,)$ deve ter ao menos um ponto crítico em $(a_0, 1)$. Seja a^* esse ponto crítico, isto é, $I_a(a^*) = 0$. Logo pela relação (2.20) obtemos que $I_{aa}(a^*) > 0$, o que implica que $I(a^*)$ é um mínimo local. Além disso segue de (2.20) que $I(\,\cdot\,)$ não tem máximo local.

Portanto existe $a^* \in (a_0, 1)$ tal que $I(\,\cdot\,)$ é estritamente decrescente em $(0, a^*)$ e estritamente crescente em $(a^*, 1)$. Temos ainda que

$$
\lim_{a\to 0^+} I(a) = \lim_{a\to 0^+} a^{\frac{p-q}{p}} \int_0^1 \Phi(s,a)^{-\frac{1}{p}}\, ds = \lim_{a\to 0^+} a^{\frac{p-q}{p}} \int_0^1 \left(\frac{1-s^q}{q} - a^r \frac{1-s^{q+r}}{q+r}\right)^{-\frac{1}{p}} ds = \infty,
$$

o que conclui a demonstração do Lema 2.3. ■

Observação 2.7 *Observe que* $\alpha \mapsto \phi_\alpha$ *é uma função estritamente crescente de classe* C^1 *em* $(0, \alpha)$.

De fato, como

$$F(\phi_\alpha) = \frac{\lambda(p-1)}{p}|\alpha|^{\frac{p}{p-1}}$$

é estritamente crescente em α e ainda $F(\phi_\alpha) \to 0$ quando $\alpha \to 0$, temos então que

$$\phi_\alpha = F^{-1}\left(\frac{\lambda(p-1)}{p}|\alpha|^{\frac{p}{p-1}}\right)$$

é estritamente crescente e obtemos que

$$\phi_\alpha{}' = \frac{1}{F'\left(F^{-1}\left(\frac{\lambda(p-1)}{p}|\alpha|^{\frac{p}{p-1}}\right)\right)}.$$

Portanto $\phi_\alpha \in C^1(0, \alpha_0)$.

Note que, dependendo dos valores de p e q, temos situações diferentes na relação entre α e $X(\alpha)$. Devido ao Lema 2.3 e pelo fato que a aplicação $\alpha \mapsto \phi_\alpha$ é estritamente crescente, temos:

Se $p > q$, a medida que α diminui, $X(\alpha)$ também diminui, ou seja, quanto menor a velocidade inicial da solução ϕ, menor será o tempo para o primeiro ponto de máximo (ou de mínimo) ser atingido.

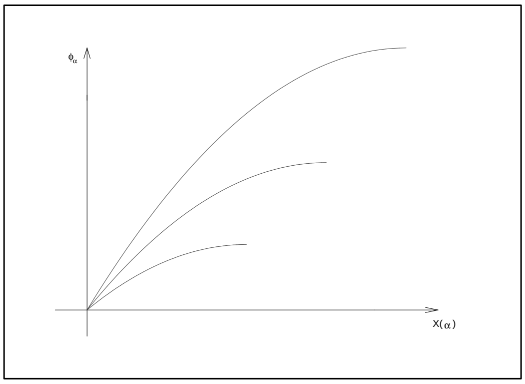


Figura 2.5: Caso $p > q$

No caso $p = q$, temos que quando α decresce, $X(\alpha)$ também decresce, mas há um valor mínimo I_0 para $X(\alpha)$, ou seja, por menor que seja a velocidade inicial, a solução ϕ percorre no mínimo o tempo I_0 para atingir seu primeiro ponto de máximo (ou mínimo).

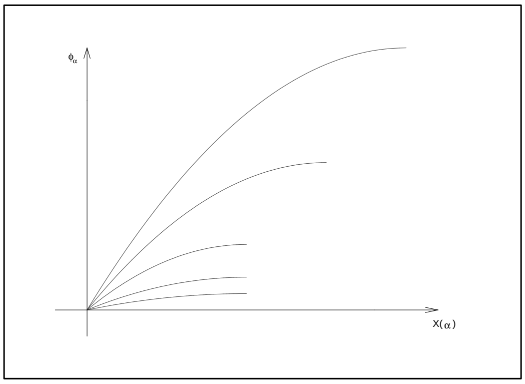


Figura 2.6: Caso $p = q$

Finalmente, se $p < q$ e $\alpha \in (0, \alpha^*)$, temos a situação contrária, pois a medida que α decresce $X(\alpha)$ cresce, isto é, o tempo para que a solução ϕ atinja seu máximo aumenta a medida que a velocidade inicial diminui.

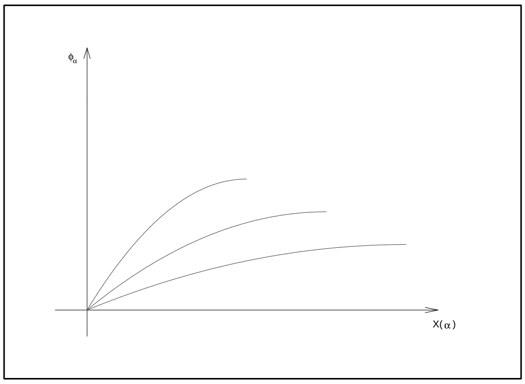


Figura 2.7: Caso $p < q$ e $\alpha \in (0, \alpha^*)$

Note que

$$\begin{aligned} X(\alpha_0) &= \left(\frac{\lambda(p-1)}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^{\phi_{\alpha_0}} (F(\phi_{\alpha_0}) - F(\phi))^{-\frac{1}{p}}\, d\phi \\ &= \left(\frac{\lambda(p-1)}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \int_0^{1} (F(1) - F(\phi))^{-\frac{1}{p}}\, d\phi \\ &= \left(\frac{\lambda(p-1)}{p}\right)^{\frac{1}{p}} I(1). \end{aligned}$$

Observação 2.8 *Como $I(1) < \infty$, então $X(\alpha) < \infty$ e assim no plano de fase $\phi\psi$, a órbita que começa em $P = (0, \alpha_0)$ alcança $Q = (1, 0)$ em um tempo finito $X(\alpha_0)$. Esta é a principal diferença entre os casos $p > 2$ e $p = 2$. No caso semilinear $p = 2$ as soluções estacionárias não alcançam o máximo 1 (ou mínimo -1) em tempo finito. O caso $p = 2$ foi estudado no trabalho [3]* *devido a Chafee e Infante e os principais resultados estão descritos no próximo capítulo.*

Como $\widetilde{\phi} \equiv 1$ satisfaz a equação em (2.11), depois de chegar em $Q = (1,0)$, uma órbita pode permanecer lá por qualquer tempo finito antes de ir para $R = (0, -\alpha_0)$. Em outras palavras, depois de atingir 1, $\phi(\cdot, \alpha_0)$ pode ser constante e igual a 1 por qualquer tempo finito antes de começar a decrescer para zero. A esse pedaço de curva em que ϕ é constante chamaremos de patamar de ϕ.

Assim, podemos notar que existe um número infinito de soluções de (2.11) para $\alpha = \alpha_0$. (Observe que isso só ocorre para $\alpha = \alpha_0$ porque o ponto $(\phi_{\alpha_0}, 0) = (1,0)$ é o único ponto de equilíbrio de (2.11) para $\alpha \in (0, \alpha_0]$. Dessa forma, para $0 < \alpha < \alpha_0$ as soluções não formam patamares). Da mesma forma, as soluções estacionárias do problema semilinear $p = 2$ não apresentam patamares.

Antes de mostrarmos os três principais resultados desta seção, referentes à estrutura de E_λ, consideremos algumas definições e relações que serão necessárias para a demonstração desses resultados.

Seja $Y(\alpha)$ a distância entre duas raízes adjacentes de $\phi(\cdot, \alpha)$. Então sendo α_0, ϕ_α como em (2.14) e (2.15) e $C_{\lambda,p} = \left(\lambda \frac{p-1}{p}\right)^{\frac{1}{p}}$, temos que

$$Y(\alpha) = 2X(\alpha) = 2C_{\lambda,p} \int_0^{\phi_\alpha} (F(\phi_\alpha) - F(\phi))^{-\frac{1}{p}} \, d\phi = 2C_{\lambda,p} I(\phi_\alpha),$$

para $\alpha \in (0, \alpha_0)$.

Para $\alpha = \alpha_0$, temos que $\phi(\cdot, \alpha_0)$ satisfaz

$$\begin{cases} \phi(x, \alpha_0) = 0, & \text{para}\, x = 0 \text{ e } x = 2X(\alpha_0) + d, \\ 0 < \phi(x, \alpha_0) < 1, & \text{para}\, x \in (0, X(\alpha_0)) \cup (X(\alpha_0) + d, 2X(\alpha_0) + d), \\ \phi(x, \alpha_0) = 1 & \text{para}\, x \in [X(\alpha_0), X(\alpha_0) + d], \end{cases} \tag{2.21}$$

onde $d \in [0, \infty)$ é uma constante arbitrária. Desse modo temos que $Y(\,\cdot\,)$ é uma aplicação multívoca em $(0, \alpha_0]$, com $Y(\alpha_0) = [2C_{\lambda,p} I(1), \infty)$.

Pelo Lema 2.3 e observando que $\lim_{a\to 0} I'(a) = \infty$ no caso $p > q$, $I'(0) = 0$ no caso $p = q$ e $\lim_{a\to 0} I(a) = \infty$ quando $p < q$, temos as seguintes representações gráficas para $Y(\,\cdot\,)$.

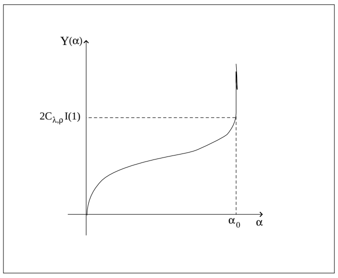


Figura 2.8: $Y(\alpha)$, para $p > q$

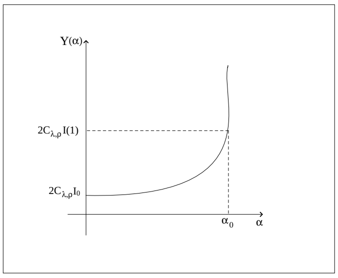


Figura 2.9: $Y(\alpha)$, para $p = q$

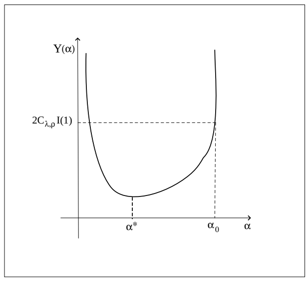


Figura 2.10: $Y(\alpha)$, para $p < q$

Denotamos por TS o tempo de subida, ou seja, o tempo percorrido pela solução $\phi(\cdot, \alpha)$ até alcançar o seu primeiro máximo, ou ainda, o tempo que a órbita precisa para sair de $(0, \alpha)$ e chegar em $(\phi_\alpha, 0)$ no retrato de fase $\phi\psi$. TD denota o tempo de descida, ou seja, o tempo necessário par a solução $\phi(\cdot, \alpha)$ sair de seu primeiro máximo e encontrar o eixo x, ou ainda, o tempo que a órbita precisa para sair de $(\phi_\alpha, 0)$ e chegar em $(0, -\alpha)$ no retrato de fase $\phi\psi$. Denotamos ainda por TP o tempo de parada, isto é, o tempo em que a solução $\phi(\cdot, \alpha)$ fica constante igual a 1, ou seja, a soma dos comprimentos dos patamares de $\phi(\cdot, \alpha)$ no intervalo $[0, 1]$. Claramente $TS = TD = X(\alpha)$ para qualquer $\alpha \in (0, \alpha_0]$.

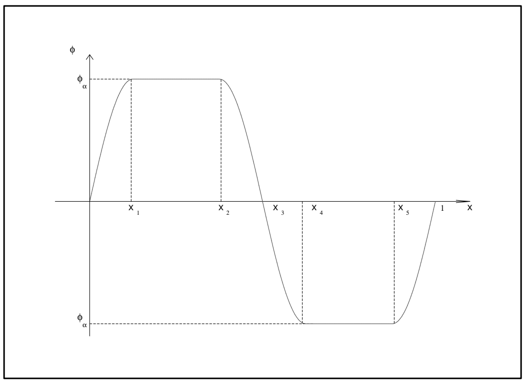


Figura 2.11: Solução de (2.10) com $\alpha = \alpha_0$

Como procuramos por soluções estacionárias de (2.10), temos que as soluções $\phi(\cdot,\alpha)$ de (2.11) devem satisfazer $\phi(1,\alpha) = 0$ para qualquer $\alpha \in (0,\alpha_0]$. Dessa forma, se $\phi \in E_\lambda$, então ϕ deve oscilar no intervalo $[-1,1]$ de acordo com sua quantidade de raízes, desde que $\phi(0) = \phi(1) = 0$. Assim, se denotarmos por n o número de raízes de ϕ em $(0,1)$, então a seguinte relação deve ser satisfeita

$$2(n+1)X(\alpha) + TP = 1, \tag{2.22}$$

Portanto, a constante d em (2.21) pode ser escolhida arbitrariamente no intervalo $[0,TP)$.

Denotamos por $E_\lambda^l = \{\phi \in E_\lambda : \phi \text{ tem } l \text{ raízes em } (0,1) \,\text{e}\, \phi_x(0) > 0\}$, e $-E_\lambda^l = \{-\phi : \phi \in E_\lambda^l\}$, onde $l \in \mathbb{N}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ e $a \in (0,1]$, definimos

$$\lambda_k(a) = \frac{p}{p-1}\left(2(k+1)I(a)\right)^{-p}.$$

Lema 2.4 *Temos que $\phi(\cdot,\alpha) \in E_\lambda^l$ se, e somente se, existem constantes $C_i \in Y(\alpha)$, para $i = 1,\ldots,l+1$ de modo que $\sum_{i=1}^{l+1} C_i = 1$, para $l \in \mathbb{N}^*$.*

Demonstração: Seja $\alpha < \alpha_0$. Se $\phi(\cdot,\alpha) \in E_\lambda^l$, então $\phi(\cdot,\alpha)$ possui l raízes e não possui patamares, logo pela relação (2.22) temos que $2(l+1)X(\alpha) = 1$. Tomando $C_i = 2X(\alpha), i = 1,\ldots,l+1$, temos que cada $C_i \in Y(\alpha)$ e $\sum_{i=1}^{l+1} C_i = 1$. Por outro lado, se $\sum_{i=1}^{l+1} C_i = 1$, onde $C_i = 2X(\alpha) \in Y(\alpha)$ para cada i, então $\phi(\cdot,\alpha)$ satisfaz a condição de fronteira $\phi(1,\alpha) = 0$ e portanto é solução de (2.10).

Analogamente, seja $\alpha = \alpha_0$. Se $\phi(\cdot,\alpha_0) \in E_\lambda^l$ então ϕ possui l raízes em $(0,1)$ e consequentemente $l+1$ patamares, logo $TP = \sum_{i=1}^{l+1} d_i$, onde d_i é o comprimento do i-ésimo patamar. Pela relação (2.22) temos que

$$1 = 2(l+1)X(\alpha_0) + \sum_{i=1}^{l+1} d_i = \sum_{i=1}^{l+1}(2X(\alpha_0) + d_i),$$

logo, tomando $C_i = 2X(\alpha_0) + d_i$, para todo $i = 1,\ldots,l+1$, temos que $C_i \in Y(\alpha_0)$ e $\sum_{i=1}^{l+1} C_i = 1$. Por outro lado, se $\sum_{i=1}^{l+1} C_i = 1$, onde $C_i = 2X(\alpha_0) + d_i \in$

$Y(\alpha_0)$ para cada i, então $\phi(\cdot, \alpha_0)$ satisfaz a condição de fronteira $\phi(1, \alpha_0) = 0$ e portanto é solução de (2.10). ■

Observação 2.9 *O Lema* 2.4 *feito acima não possui a mesma afirmação feita em [11], onde consta: "$\phi(\cdot, \alpha) \in E^l_\lambda \iff 1 \in (l+1)Y(\alpha)$". Acreditamos que esta última expressão está incorreta, pois nos leva a pensar que para $\alpha = \alpha_0$, os patamares devem ter todos o mesmo comprimento, o que não é verdade, pois cada patamar pode ter comprimento distinto, desde que a soma das medidas de todos os patamares seja constante.*

Teorema 2.5 *Se $p > q$, então para cada $\lambda > 0$ temos que*

$$E_\lambda = \{0\} \cup \bigcup_{l=0}^{\infty} \{\pm E^l_\lambda\},$$

onde E^l_λ possui as seguintes propriedades:

a) $E^0_\lambda = \{\phi^0_\lambda\}$ *para* $\lambda > 0$.

b) Se $\lambda_l(1) \leq \lambda$, *para* $l = 1, 2, \ldots$, *então* $E^l_\lambda = \{\phi^l_\lambda\}$.

c) Se $0 < \lambda < \lambda_l(1)$ *para* $l = 1, 2, \ldots$, *então existe uma relação bijetora entre* E^l_λ *e* $[0, 1]^l$.

Em particular, para cada $\lambda > 0$ existe uma única solução positiva de (2.10).

Demonstração: Se considerarmos soluções positivas para $\alpha \in (0, \alpha_0]$, temos que $\phi(\cdot, \alpha) \in E^0_\lambda$ se, e somente se, $1 \in Y(\alpha)$. De fato, $\phi(\cdot, \alpha) \in E^0_\lambda$ se, e somente se, $\phi \in E_\lambda$ e ϕ não possui raízes em $(0, 1)$, mas esta última sentença é equivalente a afirmar que as únicas raízes adjacentes de ϕ em $[0, 1]$ ocorrem em 0 e 1, o que é o mesmo que dizer que $1 \in Y(\alpha)$.

Como $p > q$, temos pelo item $i)$ do Lema 2.3 que $Y(\,\cdot\,)$ é estritamente crescente, logo existe um único $\alpha_1 \in (0, \alpha_0]$ de modo que $1 \in Y(\alpha_1)$.

Da definição de $\lambda_0(1)$, temos que $2I(1) = \left(\frac{p}{\lambda_0(1)(p-1)}\right)^{\frac{1}{p}}$. Logo,

$$\begin{aligned} 2X(\alpha_0) &= 2C_{\lambda,p}I(\phi_{\alpha_0}) \\ &= 2C_{\lambda,p}I(1) \\ &= \left(\frac{\lambda(p-1)}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{p}{\lambda_0(1)(p-1)}\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda_0(1)}\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Portanto se $\lambda \leq \lambda_0(1)$, temos que $2X(\alpha_0) \leq 1$ e então $\alpha_1 = \alpha_0$, pois se $\alpha_1 < \alpha_0$, por $X(\,\cdot\,)$ ser estritamente crescente temos que

$$Y(\alpha_1) = 2X(\alpha_1) < 2X(\alpha_0) \leq 1,$$

o que contradiz a escolha de α_1. Se $\lambda > \lambda_0(1)$, temos que $2X(\alpha_0) > 1$ e então $\alpha_1 < \alpha_0$, pois se $\alpha_1 = \alpha_0$, então $Y(\alpha_1) > 1$ e $\phi(\cdot, \alpha_1)$ não satisfaz a condição de fronteira em (2.10). Em particular, qualquer que seja $\lambda > 0$, $\phi(\cdot, \alpha_1)$ é a única solução positiva de (2.10). A unicidade é uma consequência da monotonicidade estrita de $X(\alpha)$.

Se $\lambda \leq \lambda_0(1)$, então $\phi(\cdot, \alpha_0)$ deve satisfazer (veja Figura 2.12)

$$\begin{cases} \phi(x, \alpha_0) = 1, & \text{se}\, x \in [X(\alpha_0), 1 - X(\alpha_0)], \\ 0 < \phi(x, \alpha_0) < 1, & \text{se}\, x \in (0,1) \setminus [X(\alpha_0), 1 - X(\alpha_0)]. \end{cases}$$

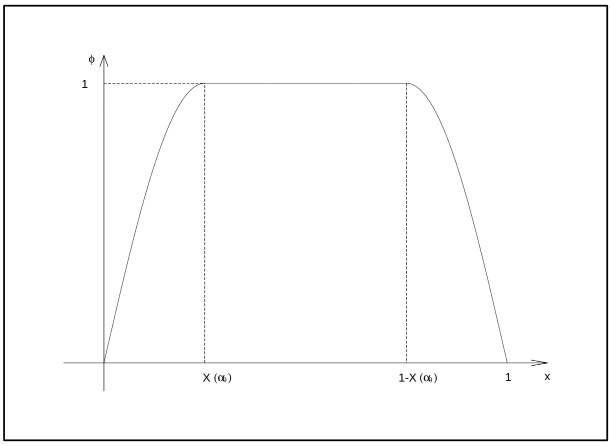


Figura 2.12: Solução $\phi(\cdot, \alpha_0)$ no caso $\lambda < \lambda_0(1)$

As soluções estacionárias de sinal oposto podem ser construídas com o uso de $Y(\,\cdot\,)$ da mesma forma acima.

Estudaremos agora a estrutura de E_λ^l, para $l \in \mathbb{N}^*$. Da definição de $\lambda_l(1)$ temos que

$$2(l+1)I(1) = \left(\frac{p}{(p-1)\lambda_l(1)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Logo,

$$2(l+1)X(\alpha_0) = 2(l+1)\left(\frac{\lambda(p-1)}{p}\right)^{\frac{1}{p}} I(1) = \left(\frac{\lambda}{\lambda_l(1)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Se $\lambda > \lambda_l(1)$ então $2(l+1)X(\alpha_0) > 1$. Como $X(\cdot)$ é estritamente crescente, dado $\frac{1}{2(l+1)} \in Im(X)$, existe um único $\alpha_2 \in (0, \alpha_0]$ tal que $X(\alpha_2) = \dfrac{1}{2(l+1)}$, o que implica, $2(l+1)X(\alpha_2) = 1$. Note que $\alpha_2 \neq \alpha_0$, pois se $\alpha_2 = \alpha_0$, então

$$1 = 2(l+1)X(\alpha_2) = 2(l+1)X(\alpha_0) > 1,$$

o que é uma contradição. Neste caso tomando $C_i = 2X(\alpha_2), \forall\, i = 1, \ldots, l+1$ temos que $C_i \in Y(\alpha_2)$ e $\displaystyle\sum_{i=1}^{l+1} C_i = 1$ e assim pelo Lema 2.4 temos que $\phi_\lambda^l = \phi(\cdot, \alpha_2) \in E_\lambda^l$. A monotonicidade de $X(\cdot)$ garante que $E_\lambda^l = \{\phi_\lambda^l\}$.

Se $\lambda = \lambda_l(1)$, temos $2(l+1)X(\alpha_0) = 1$. Então, tomando $C_i = 2X(\alpha_0)$ temos $\displaystyle\sum_{i=1}^{l+1} C_i = 1$ e também pelo Lema 2.4 segue que $\phi_\lambda^l = \phi(\cdot, \alpha_0) \in E_\lambda^l$ e $\phi(\cdot, \alpha_0)$ não possui patamares nesse caso.

Portanto se $\lambda \geq \lambda_l(1)$, temos que $E_\lambda^l = \{\phi_\lambda^l\}$.

Se $\lambda < \lambda_l(1)$ então $2(l+1)X(\alpha_0) < 1$. Tomando $C_i = 2X(\alpha_0) + d_i$, $\forall\ i = 1, \ldots, l+1$ de forma que $\displaystyle\sum_{i=1}^{l+1} C_i = 1$, (onde cada d_i é tomado arbitrariamente desde que $\displaystyle\sum_{i=1}^{l+1} d_i = 1 - 2(l+1)X(\alpha_0)$) temos, novamente pelo Lema 2.4, que $\phi(\cdot, \alpha_0) \in E_\lambda^l$. Nesse caso, E_λ^l consiste de uma infinidade de soluções ϕ de (2.10) com as seguintes propriedades: existem $(l+1)$ intervalos $J_i = [a_i, b_i]$, $i = 1, \ldots, l+1$, tal que $\displaystyle\sum_{i=1}^{l+1} b_i - a_i = TP$ e

$$\begin{cases} |\phi(x)| = 1, & \text{se}\, x \in J_i, i = 1, \ldots, l+1, \\ |\phi(x)| < 1, & \text{se}\, x \in [0,1] \setminus \displaystyle\bigcup_{i=1}^{l+1} J_i. \end{cases} \tag{2.23}$$

onde $|J_i| = b_i - a_i = d_i$ é o comprimento do i-ésimo patamar.

Dessa forma podemos considerar o seguinte conjunto

$$R^l_\lambda = \left\{ (d_1, d_2, \ldots, d_{l+1}) \in \mathbb{R}^{l+1} \text{ tal que } \sum_{i=1}^{l+1} d_i = TP \text{ e cada } d_i \geq 0 \right\}.$$

Existe uma relação bijetora entre E^l_λ e R^l_λ, pois dado $d = (d_1, d_2, \ldots, d_{l+1}) \in R^l_\lambda$, existe uma única $\phi(\cdot, \alpha_0) \in E^l_\lambda$ tal que cada d_i é o comprimento do seu i-ésimo patamar. E dada $\phi \in E^l_\lambda$, sabemos que ϕ possui $l+1$ patamares, logo basta tomarmos d_i = comprimento do i-ésimo patamar. Note que essa relação, que denotaremos por $g : R^l_\lambda \to E^l_\lambda$,é contínua. Definimos a função $f : [0,1]^l \to R^l_\lambda$ por

$$(d_1, d_2, \ldots, d_{l+1}) \mapsto (TPd_1, (TP - d_1)d_2, \ldots, (TP - \sum_{i=1}^{l-1} d_i)d_l),$$

que é uma relação bijetora entre R^l_λ e $[0,1]^l$. Portanto existe uma relação bijetora $h : [0,1]^l \to E^l_\lambda$, que é contínua. ■

Observação 2.10 *Pelo método de construção podemos ver que* $|\phi(x)| \leq \phi^0_\lambda(x)$ *para qualquer* $\phi \in E_\lambda$ *e qualquer* $x \in [0,1]$*. Nesse sentido,* ϕ^0_λ *(respectivamente* $-\phi^0_\lambda$*) é uma solução maximal (respectivamente minimal) em* E_λ*. (Figuras* 2.13*,* 2.14 *e* 2.15*)*

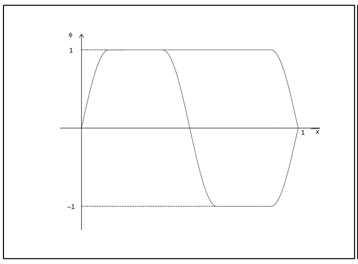


Figura 2.13: $\lambda \leq \lambda_l(1) < \lambda_0(1)$

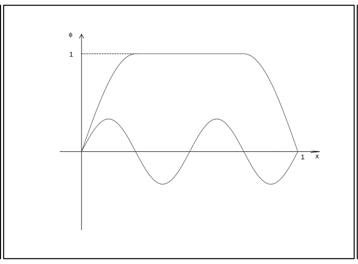


Figura 2.14: $\lambda_l(1) < \lambda < \lambda_0(1)$

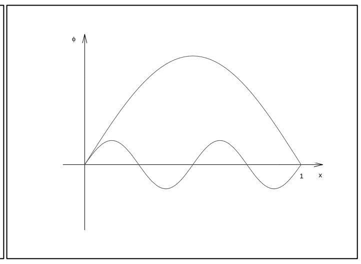


Figura 2.15: $\lambda_0(1) \leq \lambda$

Observação 2.11 *Quando* $\lambda \leq \lambda_l(1)$*, então para cada* $\phi \in E^l_\lambda$ *temos que* $\phi_x(0) = \alpha_0^{\frac{1}{p-1}}$.

Observação 2.12 *Caso* $a_i < b_i$*, dizemos que a imagem de* J_i *é um patamar (ver também Guedda e Veron,* [5]*). Segue da relação acima que a soma dos* *comprimentos de todos os patamares para cada $\phi \in E_\lambda^l$ é constante. Assim se $\lambda < \lambda_l(1)$, temos que E_λ^l é um continuum de soluções, para $l = 1, 2, \ldots$. Veja a figura abaixo.*

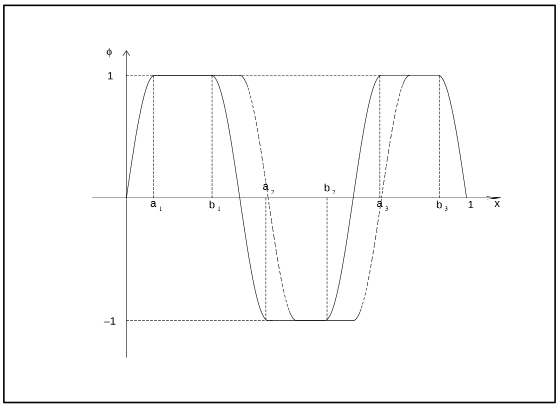


Figura 2.16: Soluções Estacionárias

Teorema 2.6 *Seja $p = q$. Definimos para cada $k \in \mathbb{N}$*

$$\lambda_k = \frac{p}{p-1}(2(k+1)I_0)^{-p}. \tag{2.24}$$

Então temos que

i) Se $\lambda_0 \leq \lambda$, então $E_\lambda = \{0\}$.

ii) Se $\lambda_{k+1} \leq \lambda < \lambda_k$, então $E_\lambda = \{0\} \cup \bigcup_{l=0}^{k} \{\pm E_\lambda^l\}$, onde E_λ^l possui as propriedades a), b), c) do Teorema 2.5. Em particular, o problema (2.10) possui uma única solução positiva se, e somente se, $\lambda < \lambda_0$.

Demonstração: Como $\lambda_0 = \dfrac{p}{p-1}(2I_0)^{-p}$, temos que $2I_0 = \left(\dfrac{p}{\lambda_0(p-1)}\right)^{\frac{1}{p}}$. Além disso,

$$\begin{aligned}
Y(0) &= \lim_{\alpha\to 0} Y(\alpha) = \lim_{\alpha \to 0} 2X(\alpha) \\
&= \lim_{\phi_\alpha \to 0} 2\left(\frac{\lambda(p-1)}{p}\right)^{\frac{1}{p}} I(\phi_\alpha) \\
&= 2\left(\frac{\lambda(p-1)}{p}\right)^{\frac{1}{p}} I_0 \\
&= 2\left(\frac{\lambda(p-1)}{p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{p}{\lambda_0(p-1)}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Pelo fato de Y ser uma função estritamente crescente, temos que

$$\inf_{\alpha\in(0,\alpha_0]} Y(\alpha) = Y(0) = \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Assim, se $\lambda_0 \leq \lambda$, temos que $\inf\limits_{\alpha\in(0,\alpha_0]} Y(\alpha) \geq 1$, o que implica que $Y(\alpha) > 1$, para qualquer $\alpha \in (0,\alpha_0]$. Logo a única solução de (2.10) é a trivial.

Consideremos agora o caso $\lambda < \lambda_0$. Seja $k \in \mathbb{N}$ e suponhamos que para $\lambda_{k+1} \leq \lambda < \lambda_k$, exista $\phi = \phi(\cdot,\alpha_3) \in E_\lambda$, tal que ϕ possui $k+1$ raízes ou mais. Da definição de λ_{k+1} temos que

$$2(k+2)I_0 = \left(\frac{p}{(p-1)\lambda_{k+1}}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Agora,

$$2(k+2)I_0 = 2(k+2)\lim_{a\to 0} I(a) < 2(k+2)I(\phi_{\alpha_3}) = 2(k+2)\left(\frac{\lambda(p-1)}{p}\right)^{-\frac{1}{p}} X(\alpha_3),$$

ou seja,

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right)^{\frac{1}{p}} < 2(k+2)X(\alpha_3).$$

Como $\lambda_{k+1} \leq \lambda$ e pela relação (2.22) temos que

$$1 \leq \left(\frac{\lambda}{\lambda_{k+1}}\right)^{\frac{1}{p}} < 2(k+2)X(\alpha_3) \leq 1,$$

o que é um absurdo. Portanto se $\lambda_{k+1} \leq \lambda < \lambda_k$, temos que $E_\lambda^{k+i} = \emptyset, \forall\, i \geq 1$ e $E_\lambda = \{0\} \cup \bigcup\limits_{l=0}^{k} \{\pm E_\lambda^l\}$.

O restante da demonstração segue exatamente da mesma forma que no teorema anterior. ■

Teorema 2.7 *Suponha que $p < q$ e seja a^* a constante obtida no Lema 2.3. Então obtemos que*

i) Se $\lambda_0(a^*) < \lambda$, então $E_\lambda = \{0\}$.

ii) Se $\lambda_{k+1}(a^*) < \lambda \leq \lambda_k(a^*)$, então $E_\lambda = \{0\} \cup \bigcup\limits_{l=0}^{k} \{\pm E_\lambda^l\}$, onde

$E_\lambda^l = \{\psi_\lambda^l\} \cup F_\lambda^l$ e F_λ^l possui as seguintes propriedades para $l = 0, 1 \ldots, k$:

a) Se $\lambda_l(a^*) = \lambda$, *então* $F_\lambda^l = \{\psi_\lambda^l\}$.

b) Se $\lambda_l(1) \leq \lambda < \lambda_l(a^*)$, *então* F_λ^l *consiste de um único elemento* ϕ_λ^l *satisfazendo* $(\psi_\lambda^l)_x(0) < (\phi_\lambda^l)_x(0)$ *e ainda,* $|\psi_\lambda^l(x)| < |\phi_\lambda^l(x)| \leq 1$, *para qualquer* $x \in (0,1)$, *exceto as raízes de* ϕ_λ^l *e* ψ_λ^l.

c) Se $0 < \lambda < \lambda_l(1)$, *então existe uma bijeção entre* F_λ^l *e* $[0,1]^l$ *e ainda temos que* $(\psi_\lambda^l)_x(0) < \phi_x(0)$, *para qualquer* $\phi \in E_\lambda^l$.

Em particular, para todo $\lambda < \lambda_0(a^*)$, *o problema* (2.10) *possui exatamente duas soluções positivas,* ψ_λ^0 *e* ϕ_λ^0, *onde* $(\psi_\lambda^0)_x(0) < (\phi_\lambda^0)_x(0)$ *e ainda, para cada* $x \in (0,1)$, $\psi_\lambda^0(x) < \phi_\lambda^0(x)$.

Demonstração: As demonstrações do item $i)$ e de que se $\lambda_{k+1}(a^*) < \lambda \leq \lambda_k(a^*)$, então $E_\lambda = \{0\} \cup \bigcup_{l=0}^{k} \{\pm E_\lambda^l\}$, são análogas às demonstrações destes fatos no teorema anterior, utilizando a definição de $\lambda_k(a^*)$ e o fato de α^* ser ponto de mínimo de $Y(\,\cdot\,)$.

Consideremos o caso $\lambda_{k+1}(a^*) < \lambda \leq \lambda_k(a^*)$. Pelo tipo de comportamento de $Y(\,\cdot\,)$ no caso $p < q$ (veja Figura 2.10), temos que para cada $y \in Im(Y)$, existem únicos $\alpha_1 \in (0, \alpha^*]$ e $\alpha_2 \in [\alpha^*, \alpha_0]$ tais que $Y(\alpha_1) = y$ e $y \in Y(\alpha_2)$. Em particular, dado um inteiro l, $0 \leq l \leq k$, temos que $\frac{1}{l+1} \in Im(Y)$, logo $2(l+1)X(\alpha_1) = (l+1)Y(\alpha_1) = 1$, ou seja, $\psi_\lambda^l = \phi(\cdot, \alpha_1) \in E_\lambda^l$ e existe $\alpha_2 \geq \alpha^*$ com propriedade similar. Porém neste caso devemos analisar separadamente duas possibilidades: $\alpha_2 < \alpha_0$ ou $\alpha_2 = \alpha_0$. Se $\alpha_2 < \alpha_0$, podemos tomar $C_i = Y(\alpha_2) = 2X(\alpha_2)$, $i = 1, \ldots, l+1$, e obtemos como acima, que $\phi_\lambda^l = \phi(\cdot, \alpha_2) \in E_\lambda^l$. Se $\alpha_2 = \alpha_0$, então $2(l+1)X(\alpha_1) \leq 1$ e podemos considerar $C_i = 2X(\alpha_0) + d_i$, $i = 1, \ldots, l+1$ de forma que $\sum_{i=1}^{l+1} C_i = 1$ (cada d_i pode ser escolhido arbitrariamente desde que $\sum_{i=1}^{l+1} d_i = 1 - 2(l+1)X(\alpha_0)$) e, novamente pelo Lema 2.4, temos que $\phi(\cdot, \alpha_0) \in E_\lambda^l$.

Assim, temos que $E_\lambda^l = \{\psi_\lambda^l\} \cup F_\lambda^l$, onde F_λ^l é o conjunto das soluções geradas por $\alpha_2 \in [\alpha^*, \alpha_0]$.

No caso $\lambda = \lambda_l(a^*)$, temos que $\alpha_1 = \alpha^* = \alpha_2$, pois se $\alpha_1 < \alpha^*$, então

$$2(l+1)X(\alpha_1) > 2(l+1)X(\alpha^*) = \left(\frac{\lambda}{\lambda_l(a^*)}\right)^{\frac{1}{p}} = 1,$$

e assim $\psi_\lambda^l \notin E_\lambda^l$. Se $\alpha^* < \alpha_2$, então

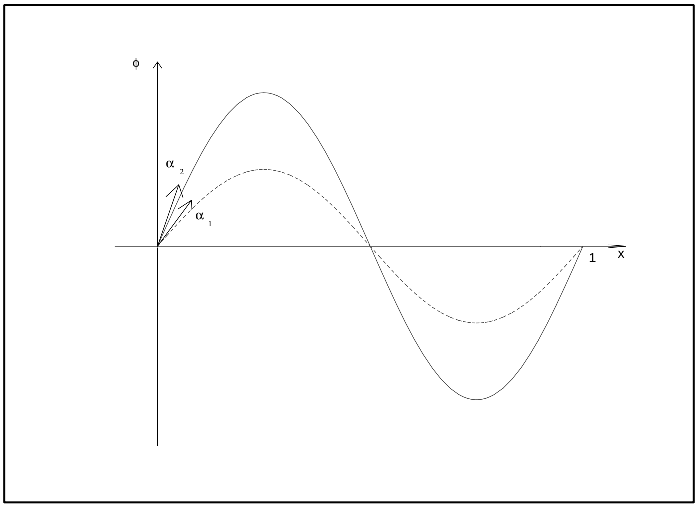
$$2(l+1)X(\alpha_2) > 2(l+1)X(\alpha^*) = \left(\frac{\lambda}{\lambda_l(a^*)}\right)^{\frac{1}{p}} = 1,$$

e assim $\phi_\lambda^l = \phi(\cdot, \alpha_2) \notin E_\lambda^l$. Logo, $\psi_\lambda^l = \phi_\lambda^l = \phi(\cdot, \alpha^*)$ e portanto $F_\lambda^l = \{\psi_\lambda^l\}$.

No caso em que $\lambda < \lambda_l(a^*)$, como $\alpha_2 \in [\alpha^*, \alpha_0]$ e nesse intervalo $Y(\,\cdot\,)$ é estritamente crescente, temos por demonstração análoga à do Teorema 2.5, que se $\lambda_l(1) \leq \lambda < \lambda_l(a^*)$, então $F_\lambda^l = \{\phi_\lambda^l\}$, e se $\lambda < \lambda_l(1)$, então existe uma bijeção entre F_λ^l e $[0,1]^l$. Ainda, se $\lambda < \lambda_l(a^*)$, temos $\alpha_1 < \alpha^* < \alpha_2$, logo

$$(\psi_\lambda^l)_x(0) = \phi_x(0, \alpha_1) = \alpha_1 < \alpha_2 = \phi_x(0, \alpha_2) = (\phi_\lambda^l)_x(0).$$

Sendo $\alpha_1 < \alpha_2$, temos que a velocidade inicial de ψ_λ^l é menor que a velocidade inicial de ϕ_λ^l, mas ambas possuem as mesmas raízes (visto que $Y(\alpha_1) = Y(\alpha_2)$), o que implica, obrigatoriamente que $|\psi_\lambda^l(x)| < |\phi_\lambda^l(x)|$, para todo $x \in (0,1)$, exceto nas raízes (veja figura abaixo).



Como $\alpha_2 \leq \alpha_0$, temos $\phi_{\alpha_2} \leq \phi_{\alpha_0} = 1$, logo $|\phi_\lambda^l(x)| \leq 1, \forall\, x \in (0,1)$.

Em particular, para todo $\lambda < \lambda_0(a^*)$, temos que (2.10) possui duas soluções positivas, sendo que $\phi_\lambda^0 \in F_\lambda^0 = \{\phi_\lambda^0\}$ pode ter patamar ou não (dependendo se $\lambda < \lambda_0(1)$ ou $\lambda \geq \lambda_0(1)$). De qualquer forma, pelo mesmo argumento acima, temos $(\psi_\lambda^0)_x(0) < (\phi_\lambda^0)_x(0)$ e $\psi_\lambda^0(x) < \phi_\lambda^0(x)$, para qualquer $x \in (0,1)$.$\blacksquare$

Observação 2.13 *Para $\lambda < \lambda_0(a^*)$, podemos mostrar, como na Observação 2.10, que $|\phi(x)| \leq \phi_\lambda^0(x)$ para qualquer $\phi \in E_\lambda$ e assim ϕ_λ^0 é solução maximal em E_λ.*

2.4 Estabilidade das Soluções Estacionárias

Os Teoremas 2.5 – 2.7 afirmam para cada $\lambda > 0$, que E_λ consiste de um conjunto discreto D e de um continuum G_λ^l de funções,

$$E_\lambda = D \cup \bigcup_{l \in L_\lambda} \{G_\lambda^l\}, \tag{2.25}$$

onde L_λ é algum subconjunto finito de $\mathbb{N}$ e G_λ^l é dado por

$$G_\lambda^l = \begin{cases} \emptyset, \text{ se } \lambda \geq \lambda_l(1), \\ E_\lambda^l, \text{ se } 0 < \lambda < \lambda_l(1) \text{ e } p \geq q, \\ F_\lambda^l, \text{ se } 0 < \lambda < \lambda_l(1) \text{ e } p < q. \end{cases}$$

Note que, apesar de E_λ ser uma união infinita no caso $p > q$, L_λ é finito, pois se considerarmos $\overline{\lambda} > 0$, como a seqüência $\{\lambda_k(1)\}$ é decrescente com k, existe k_0 tal que se $k \geq k_0$, então $\overline{\lambda} > \lambda_k(1)$, ou seja, $\overline{\lambda} < \lambda_l(1)$ apenas para $l \in \{0, 1, \ldots, k_0 - 1\}$.

Mostraremos inicialmente que $u(t, u_0)$ (solução do problema (2.1) com $u(0) = u_0 \in W_0^{1,p}$) converge a uma solução estacionária ou a algum G_λ^l, quando $t \to \infty$. A seguir analisaremos a estabilidade da solução trivial e das soluções positivas, conforme os valores de λ e as relações entre p e q. Finalizamos esta seção com o estudo da estabilidade das demais soluções estacionárias. Nesta seção as considerações topológicas são feitas na norma $\|\cdot\|_\infty$.

Lema 2.5 *Temos que G_λ^l é uma componente conexa de E_λ para cada l.*

Demonstração: Seja $\lambda > 0$. Como a aplicação $h : [0,1]^l \to G_\lambda^l$ definida no Teorema 2.5 é contínua, temos que G_λ^l é conexo e fechado, para todo l. Dado l_0 fixo, mas arbitrário, sendo a componente conexa o subconjunto conexo máximo, segue

$$\phi_\lambda^{l_0} \in G_\lambda^{l_0} \Longrightarrow G_\lambda^{l_0} \subset C_\lambda^{l_0},$$

onde $C_\lambda^{l_0}$ é a componente conexa de $\phi_\lambda^{l_0}$. Suponhamos que existe $\phi \in C_\lambda^{l_0}$ tal que $\phi \in E_\lambda$ e $\phi \notin G_\lambda^{l_0}$. Dessa forma temos duas possibilidades: $\phi \in D$ ou $\phi \in \bigcup_{l \neq l_0} G_\lambda^l$.

Se $\phi \in D$, como D é um conjunto discreto, a componente conexa de ϕ é $\{\phi\}$, o que implica que $C_\lambda^{l_0} = \{\phi\}$ e então $\phi = \phi_\lambda^{l_0}$, o que é uma contradição, pois $\phi_\lambda^{l_0} \in G_\lambda^{l_0}$. Logo, $\phi \in \bigcup_{l \neq l_0} G_\lambda^l$, ou seja, $\phi \in G_\lambda^{l_1}, l_1 \neq l_0$.

Como $G_\lambda^{l_1} \subset C_\lambda^{l_1}$, temos que $\phi \in C_\lambda^{l_1}$ e $\phi \in C_\lambda^{l_0}$, logo $C_\lambda^{l_0} = C_\lambda^{l_1}$ e assim $G_\lambda^{l_1} \subset C_\lambda^{l_0}$. Agora, sabemos que $G_\lambda^{l_0} \bigcap G_\lambda^{l_1} = \emptyset$, se $l_1 \neq l_0$ e cada G_λ^l é fechado, logo não podemos ter $G_\lambda^{l_0} \cup G_\lambda^{l_1} = C_\lambda^{l_0}$. Assim, existe $\overline{\phi} \in C_\lambda^{l_0} \setminus G_\lambda^{l_0} \cup G_\lambda^{l_1}$ e então $\overline{\phi} \in G_\lambda^{l_2}$, com $l_2 \neq l_0$ e $l_2 \neq l_1$. Seguindo esse raciocínio obtemos que $C_\lambda^{l_0} = \bigcup_{l \in L_\lambda} G_\lambda^l$, o que é uma contradição, pois $C_\lambda^{l_0}$ é conexo e está escrito como uma união finita de conjuntos fechados, disjuntos e não vazios. Portanto $C_\lambda^{l_0} = G_\lambda^{l_0}$ e $G_\lambda^{l_0}$ é uma componente conexa de E_λ. ∎

Teorema 2.8 *Para cada dado inicial $u_0 \in W_0^{1,p}$, temos que $u(t, u_0)$ satisfaz uma das seguintes condições:*

i) Existe $\phi \in E_\lambda$ tal que $\|u(t, u_0) - \phi\|_\infty \to 0$ quando $t \to \infty$.

ii) Existe $G_\lambda^l \subset E_\lambda^l$ tal que

$$d(u(t, u_0); G_\lambda^l)_\infty \equiv \inf_{\phi \in G_\lambda^l} \|u(t, u_0) - \phi\|_\infty \to 0 \tag{2.26}$$

quando $t \to \infty$.

Demonstração: Seja $u(t, u_0)$ solução de (2.1), onde $u_0 \in W_0^{1,p}$. Como $(0, 1)$ é intervalo limitado, temos pela Desigualdade de Gagliardo-Niremberg, [1], que existe constante k tal que

$$\|u\|_\infty \leq k \|u\|_2^{1-a} \|u_x\|_p^a,$$

para todo $u \in W_0^{1,p}$, com $a = 1 - \dfrac{2(p-1)}{3p-2}$. Agora, pela Desigualdade de Poincaré, [1], e utilizando o fato que $\|\cdot\|_2 \leq C' \|\cdot\|_p, \forall\, p \geq 2$, para alguma constante $C' > 0$ temos

$$\|u\|_\infty \leq k\|u\|_2^{1-a}\|u_x\|_p^a \leq ck\|u_x\|_p^{1-a}\|u_x\|_p^a = ck\|u_x\|_p.$$

Pelo Teorema 2.3 sabemos que $w(u_0)$ é conexo e está contido em E_λ. Sendo $E_\lambda = D \cup \bigcup_{l=1}^{\infty}\{G_\lambda^l\}$, temos que $w(u_0)$ está contido em uma das componentes conexas de E_λ, ou seja, $w(u_0) = \phi \in D$ ou $w(u_0) \subset G_\lambda^l$, para algum l.

Se $w(u_0) = \phi \in D$, temos pelo Teorema 2.3,

$$\inf_{v \in w(u_0) = \phi} \|u(t, u_0) - v\|_{W_0^{1,p}} \to 0 \Longrightarrow \|u(t, u_0) - \phi\|_{W_0^{1,p}} \to 0$$

quando $t \to \infty$. Logo

$$\|u(t, u_0) - \phi\|_\infty \leq ck\|u(t, u_0) - \phi\|_{W_0^{1,p}} \to 0$$

quando $t \to \infty$ e assim $u(t, u_0)$ satisfaz $i)$.

Se $w(u_0) \subset G_\lambda^l$, para algum l, temos novamente pelo Teorema 2.3,

$$\inf_{v \in G_\lambda^l} \|u(t, u_0) - v\|_\infty \leq \inf_{v \in w(u_0)} \|u(t, u_0) - v\|_\infty \leq ck \inf_{v \in w(u_0)} \|u(t, u_0) - v\|_{W_0^{1,p}} \to 0$$

quando $t \to \infty$ e assim $u(t, u_0)$ satisfaz $ii)$. ■

Observação 2.14 *Não é conhecido se, no item ii), a solução $u(t, u_0)$ converge a um elemento específico de G_λ^l. Isto é apontado como uma questão aberta pelos autores do artigo [11].*

Definição 2.3 *Uma solução estacionária ϕ é estável se ϕ possui a seguinte propriedade: para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|u_0 - \phi\|_\infty < \delta$ implica $\|u(t, u_0) - \phi\|_\infty < \varepsilon$, $\forall\ t > 0$. Uma solução estacionária ϕ é atratora se ϕ possui a seguinte propriedade: existe $\delta > 0$ tal que $\|u_0 - \phi\|_\infty < \delta$ implica $\|u(t, u_0) - \phi\|_\infty \to 0$ quando $t \to \infty$. Dizemos que ϕ é assintoticamente estável se ϕ é estável e atratora. Se ϕ não é estável, então ϕ é instável.*

Definição 2.4 *Um conjunto de soluções estacionárias G_λ^l é estável se G_λ^l possui a seguinte propriedade: $\forall\ \varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(u_0, G_\lambda^l)_\infty < \delta$ implica $d(u(t, u_0), G_\lambda^l)_\infty < \varepsilon$, $\forall\ t > 0$. Se G_λ^l não é estável, então G_λ^l é instável.*

Como a estabilidade de $-\phi$ coincide com a estabilidade de ϕ, discutiremos apenas a estabilidade da solução trivial $\phi \equiv 0$, da solução positiva ϕ_λ^0 (ψ_λ^0 e ϕ_λ^0 se $p < q$), das soluções que mudam de sinal $\psi_\lambda^l, \phi_\lambda^l$ e de G_λ^l, $l \in \mathbb{N}^*$. Como na Seção 3, denotamos por $\phi(x, \alpha)$ a solução de (2.11) com $\phi_x(0)^{p-1} = \alpha$.

Teorema 2.9 *(Propriedades de estabilidade da solução trivial)*

i) Para $p > q$, a solução trivial é instável.

ii) Para $p = q$, a solução trivial é assintoticamente estável para $\lambda \geq \lambda_0$ e instável para $\lambda < \lambda_0$.

iii) Para $p < q$, a solução trivial é assintoticamente estável.

Demonstração: Considere $p > q$ e seja δ um número real positivo.

Afirmação 2.1 *Podemos escolher $\breve{\alpha} \in (0, \alpha_0)$ pequeno tal que $\|\phi(\cdot, \breve{\alpha})\|_\infty < \delta$ e $\phi(1, \breve{\alpha}) < 0$.*

De fato, temos que $\phi_\alpha \to 0$ quando $\alpha \to 0$, onde $\phi_\alpha(-\phi_\alpha)$ é o valor de máximo (mínimo) da solução $\phi(\cdot, \alpha)$. Dessa forma, dado $\delta > 0$ arbitrário, podemos escolher α_δ de forma que $\phi_{\alpha_\delta} < \delta$, ou seja podemos tomar α_δ de modo que a solução $\phi(\cdot, \alpha_\delta)$ de (2.10) satisfaça $\|\phi(\cdot, \alpha_\delta)\|_\infty < \delta$.

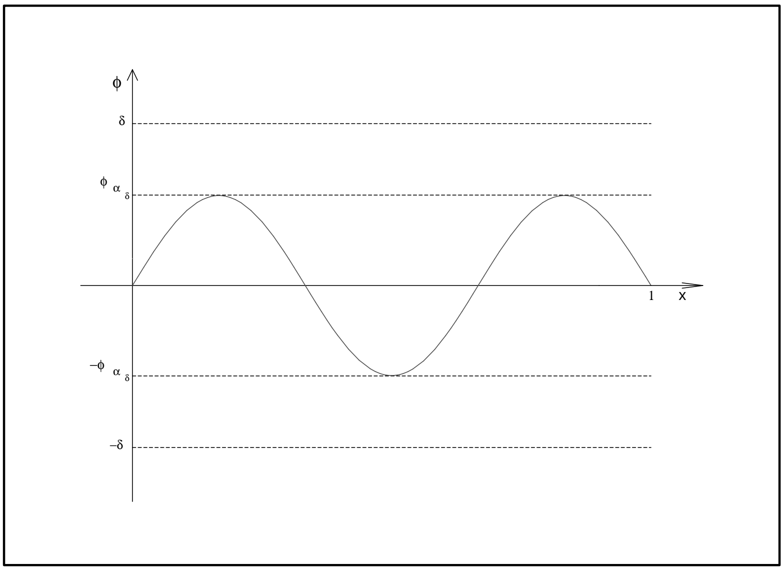


Figura 2.17: Solução de (2.10) com $\|\phi(\cdot, \alpha_\delta)\|_\infty < \delta$

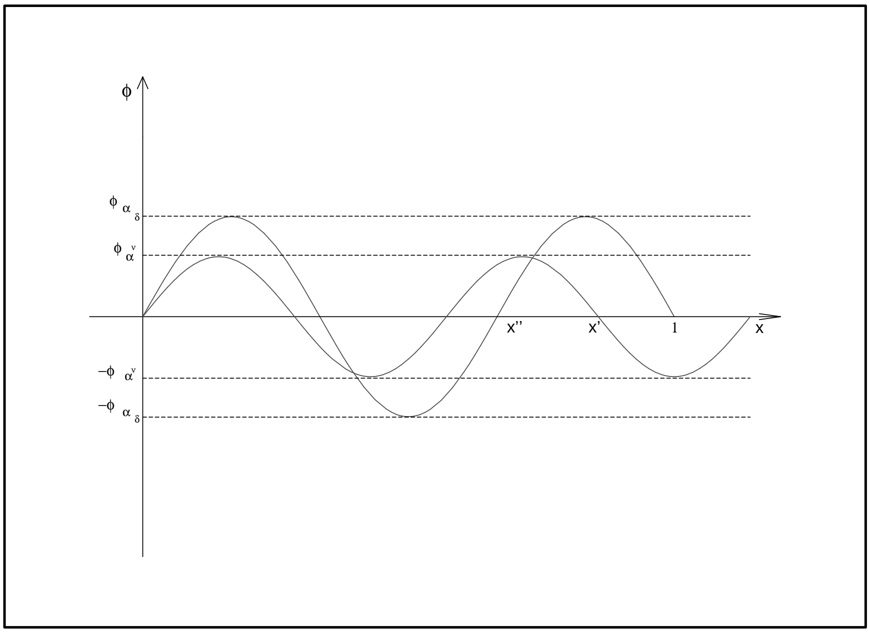
Notemos ainda que se $\alpha < \alpha_\delta$, então $\phi_\alpha < \phi_{\alpha_\delta}$ e assim também temos que $\|\phi(\cdot,\alpha)\|_\infty < \delta$.

Seja $\breve{\alpha} \in (0, \alpha_\delta)$ tal que $\dfrac{1}{k+1} < Y(\breve{\alpha}) < \dfrac{1}{k}$, para algum inteiro k ímpar (note que existe tal $\breve{\alpha}$ pois $Im(Y) = \mathbb{R}_+$) e considere $\phi(\cdot, \breve{\alpha})$ solução de (2.11).

Como $\breve{\alpha} < \alpha_\delta$, temos que $\|\phi(\cdot,\breve{\alpha})\|_\infty < \delta$. E, sendo $\dfrac{1}{k+1} < Y(\breve{\alpha}) < \dfrac{1}{k}$, segue que

$$kY(\breve{\alpha}) < 1 < (k+1)Y(\breve{\alpha}),$$

ou seja, $\phi(\cdot,\breve{\alpha})$ possui k zeros no intervalo $(0,1)$, sendo $x' = kY(\breve{\alpha})$ a última raiz nesse intervalo. Como $\breve{\alpha} > 0$ e $\phi(\cdot,\breve{\alpha})$ possui k raízes em $(0,1)$, com k ímpar, temos que o último ponto crítico x'' de $\phi(\cdot,\breve{\alpha})$ no intervalo $(0,1]$ é um ponto de máximo e $x'' < x' = kY(\breve{\alpha})$. Assim, $\phi(x'',\breve{\alpha}) > 0$ e $\phi(x',\breve{\alpha}) = 0$, o que implica que $\phi(x,\breve{\alpha}) < 0$ para $x \in (kY(\breve{\alpha}), (k+1)Y(\breve{\alpha}))$. Como 1 pertence a esse intervalo, segue que $\phi(1,\breve{\alpha}) < 0$.



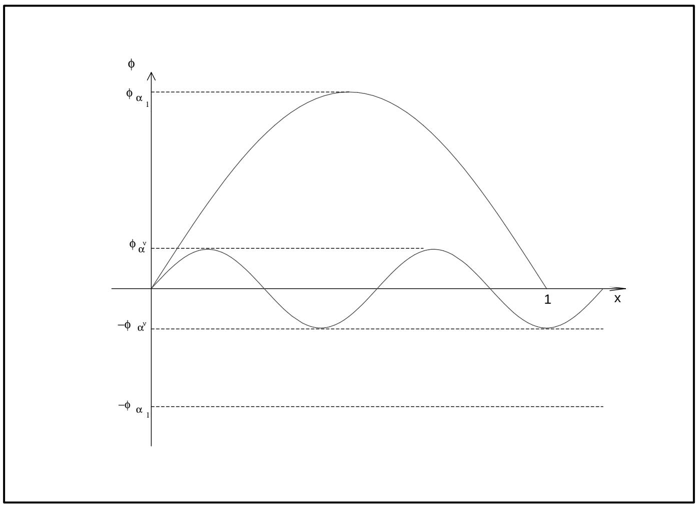
Dessa forma temos que $\breve{u}(x,t) = \phi(x,\breve{\alpha})$ é uma solução inferior de (2.1). Logo, se tomarmos $u_0 \in L^\infty$ tal que $\phi(x,\breve{\alpha}) < u_0(x)$ e $\|u_0\|_\infty < \delta$ para $x \in (0,1)$, temos pelo Teorema 2.4 que para todo $(x,t) \in (0,1) \times [0,\infty)$,

$$u(x,t,u_0) \geq \breve{u}(x,t) \equiv \phi(x,\breve{\alpha}).$$

Além disso, temos também que

Afirmação 2.2 *ϕ_λ^0 é o único elemento de E_λ que satisfaz $\phi_\lambda^0 > \phi(\cdot, \breve{\alpha})$, ou seja, $\phi_\lambda^0(x) > \phi(x, \breve{\alpha}), \forall\, x \in (0,1)$.*

Note que $\phi_\lambda^0 = \phi(\cdot, \alpha_1)$ é tal que $\phi_\lambda^0 > \phi(\cdot, \breve{\alpha})$, pois como ϕ_λ^0 não possui raízes em $(0,1)$ e $\phi(\cdot, \breve{\alpha})$ possui, então $Y(\alpha_1) > Y(\breve{\alpha})$ e portanto $\alpha_1 > \breve{\alpha}$. Assim $\phi_{\alpha_1} > \phi_{\breve{\alpha}}$, logo $\phi_\lambda^0 > \phi(\cdot, \breve{\alpha})$.



Mostremos que ϕ_λ^0 é a única solução estacionária com essa propriedade: Seja $\phi = \phi(\cdot, \widetilde{\alpha})$, onde $\widetilde{\alpha} < \breve{\alpha}$. Então existe intervalo $(0, \eta)$ onde $\phi(x, \widetilde{\alpha}) < \phi(x, \breve{\alpha})$ para $x \in (0, \eta)$ e assim não temos que $\phi > \phi(\cdot, \breve{\alpha})$. Consideremos então o caso $\breve{\alpha} < \widetilde{\alpha} < \alpha_1$. Como $\phi(\cdot, \widetilde{\alpha})$ possui ao menos um zero e $\widetilde{\alpha} > 0$, temos para $x \in (Y(\widetilde{\alpha}), 2Y(\widetilde{\alpha}))$ que $\phi(x, \widetilde{\alpha}) < 0$. Agora, como Y é estritamente crescente, $\breve{\alpha} < \widetilde{\alpha}$ implica $2Y(\breve{\alpha}) < 2Y(\widetilde{\alpha})$, logo existe $\widetilde{x} \in (0,1)$ tal que $2Y(\breve{\alpha}) < \widetilde{x} < \min\{2Y(\widetilde{\alpha}), 3Y(\breve{\alpha})\}$. Como $2Y(\breve{\alpha}) < \widetilde{x}$, temos que $\phi(\widetilde{x}, \breve{\alpha}) > 0$, enquanto que $\widetilde{x} < 2Y(\widetilde{\alpha})$ implica $\phi(\widetilde{x}, \widetilde{\alpha}) < 0$. Assim, existe ao menos um $\widetilde{x} \in (0,1)$ tal que $\phi(\widetilde{x}, \breve{\alpha}) > \phi(\widetilde{x}, \widetilde{\alpha})$ e não podemos ter $\phi(\cdot, \breve{\alpha}) < \phi(\cdot, \widetilde{\alpha})$. Dessa forma concluímos que $\phi(\cdot, \widetilde{\alpha})$ não pode ter zeros e $\widetilde{\alpha} > \breve{\alpha}$, ou seja, $\phi(\cdot, \widetilde{\alpha}) = \phi_\lambda^0$. Portanto ϕ_λ^0 é a única $\phi \in E_\lambda$ tal que $\phi_\lambda^0 > \phi(\cdot, \breve{\alpha})$. Portanto a solução trivial é instável.

Seja $p = q$ e consideremos inicialmente $\lambda < \lambda_0$. De forma inteiramente análoga à demonstração do caso anterior, mostramos que existe α_δ tal que $\|\phi(\cdot, \alpha)\|_\infty < \delta$ qualquer que seja $\alpha \leq \alpha_\delta$. Agora neste caso, podemos apenas garantir a existência de $\breve{\alpha} \in (0, \alpha_\delta)$ de forma que $\dfrac{1}{k+1} < Y(\breve{\alpha}) < \dfrac{1}{k}$, para algum $k \in \mathbb{N}$ (pois neste caso $Im(Y) = [2C_{\lambda,p}I_0, \infty)$). Se k for ímpar, a demonstração segue como no caso anterior. Se k for par, consideremos a solução $-\phi(\cdot, \breve{\alpha})$ no lugar de $\phi(\cdot, \breve{\alpha})$ e a demonstração novamente segue de forma análoga à do caso anterior. Portanto $\phi \equiv 0$ é instável se $\lambda < \lambda_0$.

Consideremos o caso $\lambda \geq \lambda_0$. Como na demonstração da primeira afirmação desse teorema, dado $\varepsilon > 0$, existe $\hat{\alpha} > 0$ pequeno tal que $\phi(\cdot, \hat{\alpha}) < \varepsilon$. Sendo $\lambda \geq \lambda_0$, temos $\inf\limits_{\alpha \in (0, \alpha_0]} Y(\alpha) = Y(0) = \dfrac{\lambda}{\lambda_0} \geq 1$. Logo, $1 \leq Y(0) < Y(\hat{\alpha})$ e portanto $\phi(x, \hat{\alpha}) > 0$, $\forall\, x \in (0, 1]$. Assim, existe $\hat{\alpha} > 0$ pequeno suficiente para que $0 < \phi(x, \hat{\alpha}) < \varepsilon$, $\forall\, x \in (0, 1]$. Podemos tomar $\delta > 0$ pequeno tal que exista $\xi > 0$ com $\varepsilon > \phi(x + \xi, \hat{\alpha}) > \delta$, $\forall\, x \in [0, 1]$.

Assim, $\hat{u}(x, t) \equiv \phi(x + \xi, \hat{\alpha})$ é uma solução superior de (2.1). Pelo Teorema 2.4 temos que se $\|u_0\|_\infty \leq \delta < \phi(x + \xi, \hat{\alpha})$, então

$$|u(t, x, u_0)| \leq \hat{u}(x, t) = \phi(x + \xi, \hat{\alpha}) < \varepsilon,$$

para cada $(x, t) \in [0, 1] \times [0, \infty)$ e assim $\|u(t, u_0)\|_\infty \leq \varepsilon$. Portanto a solução trivial é estável. Como $E_\lambda = \{0\}$ nesse caso, temos pelo Teorema 2.8 que $u(t, u_0) \to 0$ quando $t \to \infty$ em L^∞. Portanto a solução trivial é assintoticamente estável se $\lambda \geq \lambda_0$.

A estabilidade no caso $p < q$, segue novamente por ser possível escolher $0 < \hat{\alpha} < \alpha^*$ tal que dado $\varepsilon > 0$ existem $\delta, \xi > 0$ tais que $\delta < \phi(x + \xi, \hat{\alpha}) < \varepsilon$, para todo $x \in [0, 1]$.

Como $\phi \equiv 0$ é o único elemento de E_λ^l tal que $\phi < \phi(\cdot, \hat{\alpha})$, então pelo Teorema 2.8 segue que $\|u(t, u_0)\|_\infty \to 0$ quando $t \to \infty$. Portanto a solução trivial é assintoticamente estável. ∎

Teorema 2.10 *(Soluções positivas)*

i) Para quaisquer $p > 2$ e $q \geq 2$, ϕ_λ^0 é assintoticamente estável para $\lambda > \lambda_0(1)$ e atratora para $\lambda \leq \lambda_0(1)$.

ii) Para $p < q$, ψ_λ^0 *é instável para* $\lambda \leq \lambda_0(a^*)$.

Demonstração: Começamos com a prova da instabilidade de ψ_λ^0 no caso $p < q$. Pelo Teorema 2.7 temos que se $\lambda \leq \lambda_0(a^*)$ então $\psi_\lambda^0 = \phi(\cdot, \alpha_1)$, com $\alpha_1 \in (0, \alpha^*]$. Quando $\hat{\alpha} < \alpha_1 < \alpha^*$, como Y é estritamente decrescente em $(0, \alpha^*]$, temos que $Y(\hat{\alpha}) > Y(\alpha^*) = 1$, logo $\phi(\cdot, \hat{\alpha})$ satisfaz $\phi(x, \hat{\alpha}) > 0$, $\forall\, x \in (0, 1]$ e assim $\phi(\cdot, \hat{\alpha})$ é uma solução superior de (2.1).

Seja $\delta > 0$ arbitrário. Podemos tomar $\hat{\alpha}$ conveniente tal que existe uma função inicial $u_0 \in L^\infty$ satisfazendo $\|u_0 - \psi_\lambda^0\|_\infty < \delta$ e $0 < u_0(x) < \phi(x, \hat{\alpha})$, para $x \in (0, 1)$. Basta escolher $\hat{\alpha}$ próximo o suficiente de α, de tal forma que $\|\phi(\cdot, \hat{\alpha}) - \psi_\lambda^0\|_\infty < \frac{\delta}{2}$. Isto é possível pois tanto ϕ_α como $X(\alpha)$ são aplicações contínuas em α.

Pelo Teorema 2.4, temos que $u(t, x, u_0) < \phi(x, \hat{\alpha})$, para $x \in (0, 1)$. Mas $\phi \equiv 0$ é o único elemento de E_λ tal que $\phi < \phi(\cdot, \hat{\alpha})$. Logo, pelo Teorema 2.8, segue que $\|u(t, u_0)\|_\infty \to 0$ quando $t \to \infty$. Portanto, para todo $\varepsilon > 0$, existe $T > 0$ tal que $\forall\, t \geq T$, $\|u(t, u_0)\|_\infty < \varepsilon$ e assim ψ_λ^0 é instável.

Agora consideremos o caso $p > 2$ e $q \geq 2$ e mostremos a estabilidade assintótica de ϕ_λ^0 para $\lambda > \lambda_0(1)$.

Seja α' tal que $\phi_\lambda^0 = \phi(\cdot, \alpha')$. Se $\breve{\alpha}$ e $\hat{\alpha}$ estão suficientemente próximos de α' com $\breve{\alpha} < \alpha' < \hat{\alpha}$, então para cada $x \in (0, 1]$ temos

$$\phi(x, \breve{\alpha}) < \phi_\lambda^0(x) < \phi(x, \hat{\alpha}). \tag{2.27}$$

Afirmação 2.3 *Para cada* $\varepsilon > 0$ *podemos escolher* $\breve{\alpha}$ *e* $\hat{\alpha}$ *satisfazendo as seguintes relações para algum* $\xi > 0$*:*

$$\phi_\lambda^0(x) - \varepsilon < \phi(x - \xi, \breve{\alpha}) < \phi_\lambda^0(x) < \phi(x + \xi, \hat{\alpha}) < \phi_\lambda^0(x) + \varepsilon, \tag{2.28}$$

para $x \in [0, 1]$. *Além disso existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$\phi(x - \xi, \breve{\alpha}) < \phi_\lambda^0(x) - \delta < \phi_\lambda^0(x) + \delta < \phi(x + \xi, \hat{\alpha}),\ \textit{para}\ x \in [0, 1].$$

Sejam $\breve{u}(x, t) \equiv \phi(x - \xi, \breve{\alpha})$ e $\hat{u}(x, t) \equiv \phi(x + \xi, \hat{\alpha})$. Então $\breve{u}$ (respectivamente $\hat{u}$) é uma solução inferior (respectivamente superior) de (2.1). Assim, se tomarmos $u_0 \in L^\infty$ tal que $\|u_0 - \phi^0_\lambda\|_\infty < \delta$, temos que $\phi(x-\xi,\check{\alpha}) < \phi^0_\lambda(x) - \delta < u_0(x)$ e $u_0(x) < \phi^0_\lambda(x) + \delta < \phi(x+\xi,\hat{\alpha})$ qtp $x \in (0,1)$, o que implica pelo Teorema 2.4 que

$$u(x,t,u_0) \geq \phi(x-\xi,\check{\alpha}), \text{ qtp } x \in (0,1)\ \forall\, t \geq 0 \tag{2.29}$$

e

$$u(x,t,u_0) \leq \phi(x+\xi,\hat{\alpha}), \text{ qtp } x \in (0,1),\ \forall\, t \geq 0.$$

Por (2.28), $u(x,t,u_0) > \phi^0_\lambda(x) - \varepsilon$ e $u(x,t,u_0) < \phi^0_\lambda(x) + \varepsilon$ qtp $x \in (0,1)\ \forall\, t \geq 0$. Dessa forma, $-\varepsilon < u(x,t,u_0) - \phi^0_\lambda(x) < \varepsilon$, qtp $x \in (0,1)\ \forall\, t \geq 0$, o que implica $\|u(t,u_0) - \phi^0_\lambda\|_\infty < \varepsilon,\ \forall\, t \geq 0$.

Assim, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|u_0 - \phi^0_\lambda\|_\infty < \delta$ implica $\|u(t,u_0) - \phi^0_\lambda\|_\infty < \varepsilon$. Portanto ϕ^0_λ é estável.

Como $\phi = \phi^0_\lambda$ é o único elemento de E_λ tal que $\phi > \phi(x-\xi,\check{\alpha})$, para todo $x \in [0,1]$, segue por (2.29) e pelo Teorema 2.8 que $u(x,t,u_0) \to \phi^0_\lambda$ quando $t \to \infty$ em L^∞. Portanto ϕ^0_λ é assintoticamente estável.

Resta discutirmos o caso $\lambda \leq \lambda_0(1)$. Neste caso não podemos tomar uma solução superior $\hat{u}(x,t) = \phi(x+\xi,\hat{\alpha})$ como acima, pois $\phi^0_\lambda = \phi(\cdot,\alpha_0)$ e, portanto, atinge o valor 1. Assim escolhemos $\hat{u}(x,t) \equiv c > 1$ como uma solução superior. Como solução inferior podemos tomar $\check{u}(x,t) \equiv \phi(x-\xi,\check{\alpha})$ com $\xi > 0$ e $\check{\alpha} < \alpha_0$ convenientes. Temos então que

$$\phi(x-\xi,\check{\alpha}) = \check{u}(x,t) < \phi^0_\lambda(x) < \hat{u}(x,t) = c$$

para cada $(x,t) \in [0,1] \times [0,\infty)$, onde como no caso anterior, ϕ^0_λ é a única $\phi \in E_\lambda$ tal que $\phi > \phi(x-\xi,\check{\alpha})$. Tomemos $\delta > 0$ tal que

$$\phi(x-\xi,\check{\alpha}) < \phi^0_\lambda(x) - \delta < \phi^0_\lambda(x) + \delta < c,$$

para $x \in [0,1]$ e tomemos ainda um dado inicial $u_0 \in L^\infty$ de forma que $\|u_0 - \phi^0_\lambda\|_\infty < \delta$. Pelo Teorema 2.8 temos que $u(x,t,u_0) \to \phi^0_\lambda$ em L^∞ quando $t \to \infty$.

Portanto ϕ^0_λ é atratora. ∎

Observação 2.15 *Pelo Teorema* 2.10*, a solução maximal* ϕ_λ^0 *é atratora sempre que existir, enquanto que a outra solução positiva* ψ_λ^0 *é instável por baixo no sentido que existe uma função inicial* u_0 *perto de* ψ_λ^0 $(\psi_\lambda^0 > u_0)$ *tal que* $u(t, u_0)$ *converge a zero quando* $t \to \infty$.

Observação 2.16 *Quando* $\lambda < \lambda_0(a^*)$*, podemos também mostrar a instabilidade de* ψ_λ^0 *por cima.*

De fato, podemos tomar $\hat{\alpha}$ conveniente tal que existe $u_1 \in L^\infty$ com $\|u_1 - \psi_\lambda^0\|_\infty < \delta$ e $u_1(x) > \phi(x, \hat{\alpha})$. Pelo Teorema 2.4, $u(x, t, u_1) > \phi(x, \hat{\alpha})$. Mas ϕ_λ^0 é o único elemento em $\phi \in E_\lambda$ tal que $\phi_\lambda^0 > \phi(x, \hat{\alpha})$, logo pelo Teorema 2.8, $\|u(t, u_1) - \phi_\lambda^0\|_\infty \to 0$ quando $t \to \infty$.

Observação 2.17 *Quando* $\lambda = \lambda_0(a^*)$ *pode ser mostrado que* ψ_λ^0 *é assintoticamente estável por cima e instável por baixo, em consequência, instável.*

Com efeito, quando $\lambda = \lambda_0(a^*)$ temos $\phi_\lambda^0 = \psi_\lambda^0 = \phi(\cdot, \alpha^*)$ e assim temos que ψ_λ^0 é atratora (já que ϕ_λ^0 é atratora sempre que existir). Ainda, ψ_λ^0 é estável por cima pelo argumento utilizado na observação anterior, visto que $\psi_\lambda^0 = \phi_\lambda^0$ e é instável por baixo pelo teorema anterior.

Teorema 2.11 *Cada* $\psi_\lambda^l, \phi_\lambda^l$ *e* $G_\lambda^l, l = 1, 2, \ldots$ *é instável.*

Demonstração: Consideraremos somente o caso $l = 1$, pois a prova dos demais casos é essencialmente a mesma. Escolha a seguinte função $\phi \in G_\lambda^1$:

$$\phi^1(x) \equiv \begin{cases} \phi_\lambda^0(x), \text{ se } x \in [0, X(\alpha_0)), \\ 1 \text{ se } x \in [X(\alpha_0), 1 - 3X(\alpha_0)), \\ \phi_\lambda^0(-x + 1 - 2X(\alpha_0)), \text{ se } x \in [1 - 3X(\alpha_0), 1 - 2X(\alpha_0)), \\ -\phi_\lambda^0(x - 1 + 2X(\alpha_0)), \text{ se } x \in [1 - 2X(\alpha_0), 1 - X(\alpha_0)), \\ -\phi_\lambda^0(-x + 1), \text{ se } x \in [1 - X(\alpha_0), 1]. \end{cases}$$

Seja $\phi^{1,\varepsilon}$ uma solução inferior de (2.1) definida como segue:

$$\phi^{1,\varepsilon}(x) \equiv \begin{cases} \phi_\lambda^0(x), \text{ se } x \in [0, X(\alpha_0)), \\ 1 \text{ se } x \in [X(\alpha_0), 1 - 3X(\alpha_0) + \varepsilon), \\ \phi_\lambda^0(-x+1-2X(\alpha_0)+\varepsilon), \text{ se } x \in [1-3X(\alpha_0)+\varepsilon, 1-2X(\alpha_0)+\varepsilon), \\ -\phi_\lambda^0(x-1+2X(\alpha_0)-\varepsilon), \text{ se } x \in [1-2X(\alpha_0)+\varepsilon, 1-X(\alpha_0)+\varepsilon), \\ -\phi_\lambda^0(-x+1+\varepsilon), \text{ se } x \in [1-X(\alpha_0)+\varepsilon, 1]. \end{cases}$$

Defina $u_0(x) \equiv \max\{\phi^1(x), \phi^{1,\varepsilon}(x)\}$. Podemos tomar $\|u_0 - \phi^1\|_\infty$ tão pequeno quanto possível, tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Como $u_0(x) > \phi^{1,\varepsilon}(x)$, temos pelo Teorema 2.4 que $u(t, x, u_0) \geq \phi^{1,\varepsilon}(x)$. Novamente, como $\phi = \phi_\lambda^0$ é o único elemento de E_λ tal que $\phi > \phi^{1,\varepsilon}$ (pela definição de $\phi^{1,\varepsilon}$), pelo Teorema 2.8 temos que $u(t, u_0) \to \phi_\lambda^0$ quando $t \to \infty$. Como $d(\phi_\lambda^0, G_\lambda^1) > 0$, segue do que foi visto acima que G_λ^1 é instável.

A instabilidade de ψ_λ^l e ϕ_λ^l segue análoga ao caso da instabilidade de ψ_λ^0. ■

Capítulo 3

Um Problema de Bifurcação para uma Equação Diferencial Parcial Não-Linear do Tipo Parabólico

3.1 Introdução

Este capítulo segue o texto de Chafee e Infante, [3], e tem por objetivo estudar o comportamento assintótico das soluções do seguinte problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \lambda f(u),\ 0 \leq x \leq \pi,\ 0 < t < \infty \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ 0 \leq t < +\infty \\ u(x,0) = u_0(x),\ 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $f(u) = -u(u-a_+)(u-a_-)$, com $a_- < 0 < a_+$, $u_0 \in (X, \|\cdot\|_X)$, sendo $X = \{\phi \in C^1([0,\pi]); \phi(0) = \phi(\pi) = 0\}$ e $\|\phi\|_X = \sup\{|\phi'(x)| : 0 \leq x \leq \pi\}$.

Para esse problema existe uma única solução globalmente definida. Além disso, podemos associar a (3.1) um semigrupo contínuo em X, que é um Sistema Gradiente (por demonstração análoga ao capítulo anterior, notando que neste caso $V_\lambda(\phi) = \displaystyle\int_0^\pi \left\{\frac{1}{2}\phi'(x)^2 - \lambda \int_0^{\phi(x)} f(\xi)\,d\xi\right\}dx$). E ainda, temos que o conjunto w-limite $w(\phi)$ é compacto, não vazio, invariante, atrai ϕ e é conexo. Sendo $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ um Sistema Gradiente, temos pelo Lema 1.2 que $w(\phi)$ está contido no conjunto das soluções estacionárias de (3.1), para cada $\phi \in X$.

O principal objetivo deste capítulo é apresentar a estrutura do conjunto das soluções estacionárias de (3.1). Assim, torna-se possível fazer uma comparação entre os resultados obtidos por Takeuchi e Yamada em [11] apresentada no Capítulo 2 e o problema clássico (3.1) estudado por Chafee e Infante em [3].

3.2 Soluções de Equilíbrio da Equação (3.1)

O objetivo dessa seção é encontrar os pontos de equilíbrio não triviais de (3.1). Para isso devemos determinar as soluções não nulas da equação diferencial ordinária,

$$u_{xx}(x) + \lambda f(u(x)) = 0, \tag{3.2}$$

com condição de fronteira

$$u(0) = u(\pi) = 0, \tag{3.3}$$

onde $f(u) = -u(u - a_+)(u - a_-)$.

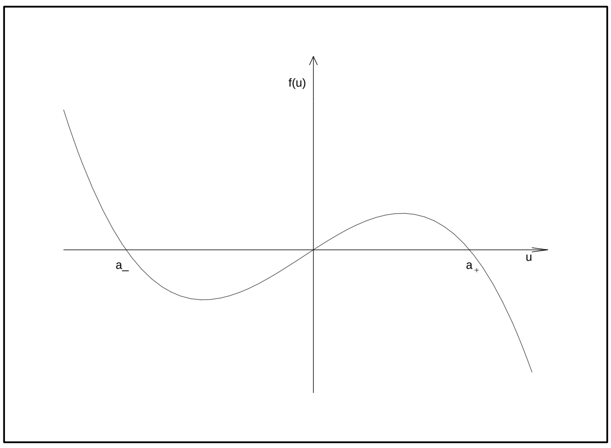


Figura 3.1: $f(u) = -u(u - a_+)(u - a_-)$

Note que essa função satisfaz as seguintes condições.

H1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função C^2;

H2) $f(0) = 0, \quad f'(0) > 0$;

H3) $\displaystyle\lim_{|u| \longrightarrow \infty} \frac{f(u)}{u} = -\infty$;

H4) $\forall\, u \in \mathbb{R}^*, \quad sgnf''(u) = -sgn\, u$, ou seja, $f''(u)u < 0$.

Ainda, temos que para $u \in [a_-, a_+]$, $sgn\, u = sgnf(u)$ e $f(a_-) = f(a_+) = 0$.

Definimos agora $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(u) = \int_0^u f(\xi)d\xi = -\frac{u^4}{4} + (a_+ + a_-)\frac{u^3}{3} - (a_- a_+)\frac{u^2}{2}.$$

Note que F é estritamente crescente em $[0, a_+)$, estritamente decrescente em $(a_-, 0]$ e $F(0) = 0$.

Definimos E_+ $(0 < E_+ \leq +\infty)$ e E_- $(0 < E_- \leq +\infty)$ como

$$E_\pm = \lim_{u \to a_\pm} F(u).$$

Sejam $U_+ : [0, E_+) \to [0, a_+)$ e $U_- : [0, E_-) \to (a_-, 0]$ as inversas de F em $[0, a_+)$ e $(a_-, 0]$ respectivamente. Temos que $U_\pm$ são contínuas por serem inversas de funções contínuas e injetivas (Teorema 13, p.186, [7]). Ainda, sendo F derivável em $(0, a_+)$ e U_+ contínua em $(0, E_+)$, segue que U_+ é derivável em $(0, E_+)$ e $U'_+(F(u)) = \dfrac{1}{F'(u)}$ (Corolário 6, p.215 [7]). Analogamente, $U_-(E)$ é derivável em $(0, E_-)$ e $U'_-(F(u)) = \dfrac{1}{F'(u)}$.

Agora, fixemos $\lambda > 0$ e consideremos o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_{xx} + \lambda f(u) = 0, \\ u(0) = 0, \;\; u_x(0) = v_0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Seja

$$E = \frac{v_0^2}{2\lambda}.$$

Multiplicando a equação (3.2) por u_x obtemos

$$u_{xx}(x)u_x(x) + \lambda f(u(x))u_x(x) = 0,$$

logo, segue que

$$u_{xx}(x)u_x(x) + \lambda \frac{d}{dx}F(u(x)) = 0.$$

Ou ainda,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(u_x(x))^2 + \lambda \frac{d}{dx}F(u(x)) = 0.$$

Integrando essa expressão de 0 a x, obtemos

$$\frac{1}{2}(u_x(x))^2 + \lambda F(u(x)) = \frac{v_0^2}{2} = \lambda E. \tag{3.5}$$

Com o auxílio de (3.5) obtemos o seguinte retrato de fase do problema (3.4), com $|a_-| > |a_+|$ e $E_- > E_+$, cuja construção é semelhante à construção do retrato de fase do capítulo anterior.

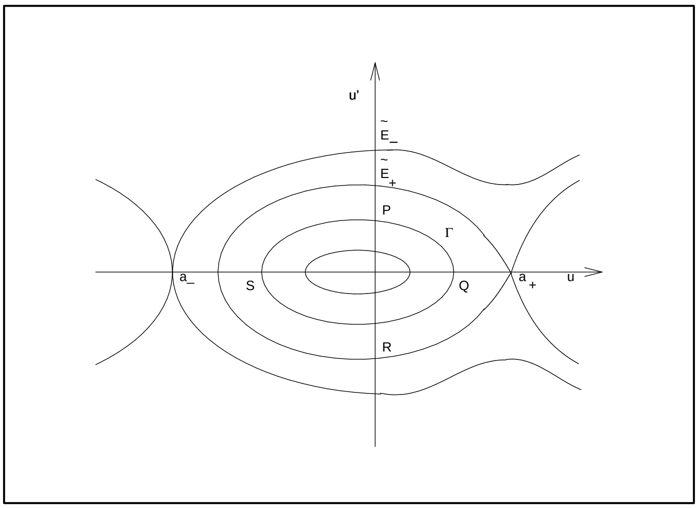


Figura 3.2: Retrato de fase de uu', com $\tilde{E}_\pm = \sqrt{2\lambda E_\pm}$

Definimos então

$$\overline{\tau}_+(E) = \inf_{x \in (0,+\infty)} \{x - y; u_x(x) = 0, u_{xx}(x) < 0,\ y \text{ é o maior elemento em } [0,x) \text{ com } u(y) = 0\},$$

$$\overline{\tau}_-(E) = \inf_{x \in (0,+\infty)} \{x - y; u_x(x) = 0, u_{xx}(x) > 0,\ y \text{ é o maior elemento em } [0,x) \text{ com } u(y) = 0\}.$$

Se considerarmos x como variável tempo, então $\overline{\tau}_+(E)$ significa o menor tempo necessário para a órbita sair de P e chegar em Q sobre a curva Γ, e $\overline{\tau}_-(E)$

significa o menor tempo necessário para a órbita começar em R e chegar em S sobre Γ na figura anterior. Nesse sentido, $\overline{\tau}_+(E)$ e $\overline{\tau}_-(E)$ são usualmente chamados de "time-map".

Analisando o retrato de fase acima e os outros dois retratos (quando $E_- < E_+$ e quando $E_- = E_+$) concluímos que para obtermos uma solução do problema (3.2) − (3.3) devemos ter $E \leq E_+$ se $v_0 > 0$ e $E \leq E_-$ se $v_0 < 0$ (pois caso contrário, $u'(x) \neq 0, \forall\, x$ e assim u não satisfaz $u(\pi) = 0$). Portanto consideraremos apenas os valores de E nos intervalos $(0, E_-]$ e $(0, E_+]$.

Sendo u uma solução de (3.4) temos que u satisfaz (3.5), o que implica

$$|u_x(x)| = \sqrt{2\lambda(E - F(u(x)))}$$

ou ainda,

$$\frac{|u_x(x)|}{\sqrt{2\lambda(E - F(u(x)))}} = 1, \text{ se } E \neq F(u(x)).$$

Sejam x_1 e x_3 pontos de máximo e mínimo de u respectivamente. Sejam x_0 o maior ponto menor que x_1 tal que $u(x_0) = 0$ e x_2 o maior ponto menor que x_3 tal que $u(x_2) = 0$. Assim, temos que $x_1 - x_0 = \overline{\tau}_+(E)$ e $x_3 - x_2 = \overline{\tau}_-(E)$.

Pela relação (3.5) temos que $F(u(x_1)) = E$. Sendo x_1 ponto de máximo de u, $u(x_1) > 0$ e assim,

$$F(u(x_1)) = E \leq E_+ \text{ e } u(x_1) = U_+(F(u(x_1))) = U_+(E) \in (0, a_+].$$

Como F é injetora em $(0, a_+)$ e $F(u(x_1)) = E$, temos que $x = x_1$ é o único ponto no intervalo $(x_0, x_1]$ tal que $E = F(u(x_1))$. Logo,

$$\overline{\tau}_+(E) = x_1 - x_0 = \int_{x_0}^{x_1} dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{|u_x(x)|}{\sqrt{2\lambda(E - F(u(x)))}}\, dx.$$

Além disso, temos que $u_x(x) > 0$ para $x \in (x_0, x_1)$, logo

$$\overline{\tau}_+(E) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{u_x(x)}{\sqrt{2\lambda(E - F(u(x)))}}\, dx.$$

Fazendo a mudança de variáveis $u = u(x)$, temos $x = x_0 \Longrightarrow u(x) = u(x_0) = 0$ e $x = x_1 \Longrightarrow u(x) = u(x_1) = U_+(E)$. Assim,

$$\overline{\tau}_+(E) = \int_0^{U_+(E)} \frac{du}{\sqrt{2\lambda(E - F(u))}} \; (0 < E < E_+).$$

Sendo x_3 ponto de mínimo de u, $u(x_3) < 0$ e assim,

$$F(u(x_3)) = E \leq E_- \text{ e } u(x_3) = U_-(F(u(x_3))) = U_-(E) \in [a_-, 0).$$

Como F é injetora em $(a_-, 0)$ e $F(u(x_3)) = E$, temos que $x = x_3$ é o único ponto no intervalo $(x_2, x_3]$ tal que $E = F(u(x))$. Logo,

$$\overline{\tau}_-(E) = x_3 - x_2 = \int_{x_2}^{x_3} dx = \int_{x_2}^{x_3} \frac{|u_x(x)|}{\sqrt{2\lambda(E - F(u(x)))}}\, dx.$$

Como $u_x(x) < 0$ para $x \in (x_2, x_3)$, segue que

$$\overline{\tau}_-(E) = -\int_{x_2}^{x_3} \frac{u_x(x)}{\sqrt{2\lambda(E - F(u(x)))}}\, dx.$$

Fazendo a mudança de variáveis $u = u(x)$, temos $x = x_2 \Longrightarrow u(x) = u(x_2) = 0$ e $x = x_3 \Longrightarrow u(x) = u(x_3) = U_-(E)$. Assim,

$$\overline{\tau}_-(E) = \int_{U_-(E)}^{0} \frac{du}{\sqrt{2\lambda(E - F(u))}} \quad (0 < E < E_-).$$

Definimos então $\tau_+ : (0, E_+) \to [0, +\infty)$ e $\tau_- : (0, E_-) \to [0, +\infty)$ por

$$\tau_+(E) = \sqrt{2\lambda}\,\overline{\tau}_+(E) = \int_0^{U_+(E)} \frac{du}{\sqrt{E - F(u)}}$$

$$\tau_-(E) = \sqrt{2\lambda}\,\overline{\tau}_-(E) = \int_{U_-(E)}^{0} \frac{du}{\sqrt{E - F(u)}}.$$

A seguir estudaremos algumas propriedades de $\tau_\pm(E)$. Considerando a definição de τ_+, para um dado $E \in (0, E_+)$, façamos a seguinte troca de variáveis:

$$F(u) = Ey^2 \quad 0 \leq y \leq 1, \;\; 0 < u \leq U_+(E).$$

Sendo $F(u) = Ey^2$, temos

$$2Eydy = \frac{d}{du}F(u) = f(u)du \Rightarrow du = \frac{2Ey}{f(u)}dy.$$

Então,

$$u = 0 \Longrightarrow y^2 = \frac{F(0)}{E} = 0 \Rightarrow y = 0,$$

$$u = U_+(E) \Longrightarrow y^2 = \frac{F(U_+(E))}{E} = 1 \Rightarrow y = 1.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\tau_+(E) &= \int_0^{U_+(E)} \frac{du}{\sqrt{E-F(u)}}\\
&= \int_0^1 \frac{2Ey\,dy}{f(u)\sqrt{E-Ey^2}}\\
&= \int_0^1 \frac{2Ey}{f(u)\sqrt{E}\sqrt{1-y^2}}\,dy\\
&= 2\sqrt{E}\int_0^1 \frac{y}{f(u)\sqrt{1-y^2}}\,dy,
\end{aligned}$$

para $0 < E < E_+$, com $u = U_+(Ey^2)$ e $0 \leq y \leq 1$. De modo análogo obtemos

$$\tau_-(E) = 2\sqrt{E}\int_{-1}^0 \frac{y}{f(u)\sqrt{1-y^2}}\,dy$$

para $0 < E < E_-$, $u = U_-(Ey^2)$ e $-1 \leq y \leq 0$.

Teorema 3.1 *As funções $\tau_\pm$ são contínuas em seus respectivos domínios. Além disso,*

$$\lim_{E\to 0^+} \tau_\pm(E) = \frac{\pi}{(2\alpha)^{\frac{1}{2}}},$$

onde $\alpha := f'(0) > 0$.

Demonstração: Para obtermos a segunda parte do teorema, consideremos $0 < \varepsilon < 1$. Se $x \geq 0$, definimos

$$g(x) = f(x) - \alpha(1+\varepsilon)x.$$

Então, $g'(x) = f'(x) - \alpha(1+\varepsilon)$. Além disso, $g(0) = f(0) - \alpha(1+\varepsilon)0 = 0$ e $g'(0) = f'(0) - \alpha - \varepsilon\alpha = -\varepsilon\alpha < 0$. Logo temos que g é decrescente em uma vizinhança $[0, \overline{\delta}]$ de 0. Ou seja, $g(x) < g(0) = 0 \Rightarrow f(x) \leq \alpha(1+\varepsilon)x$, para $x \in [0, \overline{\delta}]$.

Se tomarmos $h(x) = f(x) - \alpha(1-\varepsilon)x$ temos por raciocínio análogo que $f(x) \geq \alpha(1-\varepsilon)x$, para $x \in [0, \overline{\overline{\delta}}]$.

Logo, para cada $0 < \varepsilon < 1$, tomando $0 < \delta \leq \min\{\overline{\delta}, \overline{\overline{\delta}}\}$ temos que se $0 \leq x \leq \delta$, então

$$\alpha(1-\varepsilon)x \leq f(x) \leq \alpha(1+\varepsilon)x. \tag{3.6}$$

Integrando a relação (3.6) de 0 a u, temos

$$\int_0^u \alpha(1-\varepsilon)x\,dx \leq \int_0^u f(x)\,dx \leq \int_0^u \alpha(1+\varepsilon)x\,dx,$$

ou seja

$$\alpha(1-\varepsilon)\frac{u^2}{2} \leq F(u) \leq \alpha(1+\varepsilon)\frac{u^2}{2},$$

desde que $0 \leq u \leq \delta$. Agora, como U_+ é contínua à direita em 0, temos que para este $\delta > 0$, $\exists\ \eta > 0$ tal que $0 < E < \eta \Rightarrow 0 < U_+(E) < \delta$. Pela mudança de variável, $F(u) = Ey^2$, feita anteriormente, onde $0 < u \leq \delta$ e $0 < E \leq \eta$, temos

$$\frac{\alpha}{2}(1-\varepsilon)u^2 \leq Ey^2 \leq \frac{\alpha}{2}(1+\varepsilon)u^2,$$

ou seja,

$$\left(\frac{\alpha(1-\varepsilon)}{2E}\right)^{\frac{1}{2}} u < y < \left(\frac{\alpha(1+\varepsilon)}{2E}\right)^{\frac{1}{2}} u,$$

desde que $0 < u \leq \delta$ e $0 < E \leq \eta$, para todo $y \in (0,1)$.

Como $\alpha(1-\varepsilon)u \leq f(u) \leq \alpha(1+\varepsilon)u$, temos

$$\frac{1}{\alpha(1+\varepsilon)u} \leq \frac{1}{f(u)} \leq \frac{1}{\alpha(1-\varepsilon)u}.$$

Assim se $0 < E \leq \eta$ e $0 < u \leq \delta$, obtemos que

$$\left(\frac{1-\varepsilon}{2E\alpha(1+\varepsilon)^2}\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{y}{f(u)} < \left(\frac{1+\varepsilon}{2E\alpha(1-\varepsilon)^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Multiplicando essa expressão por $\frac{2\sqrt{E}}{\sqrt{1-y^2}}$ e integrando de 0 a 1, obtemos

$$2\left(\frac{1-\varepsilon}{2\alpha(1+\varepsilon)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy \leq \tau_+(E) \leq 2\left(\frac{1+\varepsilon}{2\alpha(1-\varepsilon)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy,$$

ou seja,

$$\left(\frac{1-\varepsilon}{2\alpha(1+\varepsilon)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \pi \leq \tau_+(E) \leq \left(\frac{1+\varepsilon}{2\alpha(1-\varepsilon)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \pi.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0^+$ temos que $\delta \to 0$ e assim $\eta \to 0$, logo segue que $E \to 0$ e

$$\frac{\pi}{\sqrt{2\alpha}} \leq \lim_{E \to 0^+} \tau_+(E) \leq \frac{\pi}{\sqrt{2\alpha}}.$$

Portanto, $\lim_{E\to 0^+} \tau_+(E) = \dfrac{\pi}{\sqrt{2\alpha}}$. De forma análoga obtemos o resultado para $\tau_-(E)$. ■

Teorema 3.2 *A função $\tau_\pm$ é diferenciável em seu domínio $(0, E_\pm)$ e*

$$\frac{d}{dE}\tau_\pm(E) > 0,$$

isto é, a função $\tau_\pm$ é estritamente crescente em $(0, E_\pm)$.

Demonstração: Pela Regra de Leibniz temos que a função

$$h(E) = \int_0^1 \frac{y}{f(U_+(Ey^2))\sqrt{1-y^2}}\,dy$$

é diferenciável em $(0, E_+)$ e

$$\frac{d}{dE}h(E) = \int_0^1 \frac{d}{dE}\frac{y}{f(U_+(Ey^2))\sqrt{1-y^2}}\,dy.$$

Como $2\sqrt{E}$ também é diferenciável em $(0, E_+)$, segue que

$$\tau_+(E) = 2\sqrt{E}\int_0^1 \frac{y}{f(U_+(Ey^2))\sqrt{1-y^2}}\,dy$$

é diferenciável em $(0, E_+)$ e

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dE}\tau_+(E) &= \frac{1}{\sqrt{E}}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\left(\frac{y}{f(U_+(Ey^2))}\right)dy \\
&+ 2\sqrt{E}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\left(\frac{-yf'(U_+(Ey^2))U_+'(Ey^2)y^2}{f(U_+(Ey^2))^2}\right)dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{E}}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\left(\frac{y}{f(u)}\right)dy \\
&+ 2\sqrt{E}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\left(\frac{-y^3 f'(U_+(Ey^2))}{F'(U_+(Ey^2))f(U_+(Ey^2))^2}\right)dy.
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
2\sqrt{E}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\left(\frac{-y^3 f'(u)}{F'(u)f(u)^2}\right)dy &= \frac{2}{\sqrt{E}}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\left(\frac{-yf'(u)y^2E}{(f(u))^3}\right)dy \\
&= \frac{2}{\sqrt{E}}\int_0^1 \frac{y}{f(u)\sqrt{1-y^2}}\left(\frac{-f'(u)F(u)}{f(u)^2}\right)dy,
\end{aligned}$$

temos então que

$$\frac{d}{dE}\tau_\pm(E) = \frac{1}{\sqrt{E}}\int_0^1 \frac{y}{f(u)\sqrt{1-y^2}}\left(1 - 2\frac{f'(u)F(u)}{f(u)^2}\right)dy,$$

onde $u = U_+(Ey^2)$ e $0 < E < E_+$.

Definindo a função $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$G(u) = f(u)^2 - 2f'(u)F(u),$$

temos que

$$G'(u) = 2f'(u)f(u) - 2f''(u)F(u) - 2f'(u)f(u) = -2f''(u)F(u).$$

Para $u \in (0, a_+)$, temos por (H4) que $f''(u) < 0$ e $F(u) > 0$, logo $G'(u) > 0$. Ainda, $G(0) = f(0)^2 - 2f'(0)F(0) = 0$. Logo $G(u) > 0$ para $u \in (0, a_+)$, dessa forma obtemos que

$$\frac{d}{dE}\tau_+(E) > 0.$$

O resultado para $\tau_-(E)$ segue de forma análoga. ■

Observação 3.1 *Pelos Teoremas* 3.1 *e* 3.2 *temos que, a medida que a velocidade inicial da solução u decresce continuamente, o tempo para a solução atingir seu primeiro máximo decresce, mas há um mínimo para esse tempo, ou seja, por menor que seja a velocidade inicial, a solução u atinge seu primeiro máximo em um tempo que é sempre maior que* $\dfrac{\pi}{\sqrt{2\alpha}}$.

Teorema 3.3 *Temos que*

$$\lim_{E \to E_\pm} \tau_\pm(E) = +\infty.$$

Portanto a imagem de $\tau_\pm$ *é* $\left(\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}, +\infty\right)$, *onde* $\alpha = f'(0) > 0$.

Demonstração: Seja $T > 0$ e suponhamos que $\tau_+(E_+) < T$. Como τ_+ é crescente em $(0, E_+)$, $\tau_+(E_+) = \sup\limits_{E \in (0, E_+)} \tau_+(E)$.

Como $a_+ < +\infty$, temos que $E_+ < +\infty$. Logo, se $\{E_n\}$ é uma seqüência crescente, com $E_n \in (0, E_+)$, então $\{\tau_+(E_n)\}$ é uma seqüência crescente e limitada, logo convergente, convergindo para o seu supremo. Ou seja, $E_n \to E_+$ implica $\tau_+(E_n) \to \tau_+(E_+)$.

Agora consideremos os sistemas

$$\begin{cases} U_x = g(U) \\ U(\tau_+(E_+)) = (a_+, 0), \end{cases} \tag{3.7}$$

e

$$\begin{cases} U_x = g(U) \\ U(\tau_+(E_n)) = (U_+(E_n), 0), \end{cases} \tag{3.8}$$

onde $U = (u, v)$ e $g(U) = (v, -\lambda f(u))$ os quais possuem uma única solução maximal $\varphi_a(x) \equiv (a_+, 0)$ e $\varphi_n = (u_n, (u_n)_x)$, respectivamente, definidas nos intervalos máximos $I_0, I_n = \mathbb{R}$.

Como f é Lipschitziana em limitados e $U_+(E_n) \to a_+$, temos pela continuidade das soluções de (3.7) com relação aos dados iniciais, que existe $n_0 > 0$ tal que se $n > n_0$, temos $[0, \tau_+(E_+)] \subset I_n$ e $\varphi_n|_{[0,2\tau_+(E_+)]} \to (a_+, 0)$ uniformemente. Ou seja, dado $k > 0$, existe $\delta > 0$ e $n_k > n_0$ tal que se $|E_{n_k} - E_+| < \delta$ então $\sup\limits_{x\in[0,2\tau_+(E_+)]} |\varphi_{n_k}(x) - \varphi_a(x)| < \dfrac{1}{k}$, ou ainda,

$$\sup_{x\in[0,2\tau_+(E_+)]} \{\max\{|u_n(x) - a_+|, |(u_n)_x(x) - 0|\}\} < \frac{1}{k}.$$

Pela unicidade de solução $\varphi_n = (u_n, (u_n)_x)$, onde u_n é ponto de equilíbrio do problema (3.1). Temos que $\varphi_n(0) = (u_n(0), (u_n)_x(0)) = (0, \sqrt{2\lambda E_n})$.

Como φ_n converge uniformemente para φ_a, temos que φ_n converge pontualmente para φ_a, no intervalo $[0, \tau_+(E_+)]$, logo $u_n(x)$ converge pontualmente para a_+ nesse intervalo. Mas $u_n(0) = 0$, $\forall\ n$ e $a_+ > 0$, o que é uma contradição, e essa contradição surgiu do fato de supormos que $\tau_+(E_+) < +\infty$.

$\blacksquare$

Observação 3.2 *Pelo Teorema* 3.3 *temos que as órbitas que começam em* $E = E_+$ *e* $E = E_-$ *não chegam em* Q=$(a_+, 0)$ *e* S=$(a_-, 0)$ *respectivamente em um tempo finito. Assim, se* u *começar com essas velocidades não será solução de* (3.3)*, pois não poderá satisfazer* $u(\pi) = 0$*. Dessa forma, para* u *ser solução do problema* $(3.2) - (3.3)$ *os pontos* $u = a_+$ *e* $u = a_-$ *não podem ser atingidos e portanto* $E < E_+$*,* $E < E_-$ *e* $u \in (a_-, a_+)$*.*

Afirmação 3.1 *Se u é solução não nula do problema* $(3.2)-(3.3)$, *então*

i) $v_0 \neq 0$.

ii) $-(2\lambda E_-)^{\frac{1}{2}} < v_0 < (2\lambda E_+)^{\frac{1}{2}}$.

De fato, suponhamos que $v_0 = 0$, logo $E = 0$, o que implica em (3.5)

$$\frac{1}{2}(u_x(x))^2 = -\lambda F(u(x)).$$

Como $\lambda > 0$ e $(u_x(x))^2 > 0$, devemos ter $F(u(x)) \leq 0$. Mas u é solução de (3.2) e (3.3), logo $u \in (a_-, a_+)$ e assim, $F(u) \geq 0$. Dessa forma, $F(u(x)) = 0$, para todo $x \in [0, \pi]$, ou seja $u \equiv 0$, o que é uma contradição.

Sendo u solução do problema $(3.2)-(3.3)$, pela observação anterior temos que $E < E_\pm$. Como $E = \dfrac{v_0^2}{2\lambda}$, temos

$$\frac{v_0^2}{2\lambda} < E_+ \Longrightarrow |v_0| < (2\lambda E_+)^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow -(2\lambda E_+)^{\frac{1}{2}} < v_0 < (2\lambda E_+)^{\frac{1}{2}}$$

e

$$\frac{v_0^2}{2\lambda} < E_- \Longrightarrow |v_0| < (2\lambda E_-)^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow -(2\lambda E_-)^{\frac{1}{2}} < v_0 < (2\lambda E_-)^{\frac{1}{2}}.$$

Se $E_- < E_+$, então $\sqrt{2\lambda E_-} < \sqrt{2\lambda E_+}$, logo

$$-(2\lambda E_-)^{\frac{1}{2}} < v_0 < (2\lambda E_-)^{\frac{1}{2}} < (2\lambda E_+)^{\frac{1}{2}}.$$

E, se $E_+ < E_-$, então $-\sqrt{2\lambda E_+} > -\sqrt{2\lambda E_-}$, logo

$$-(2\lambda E_-)^{\frac{1}{2}} < -(2\lambda E_+)^{\frac{1}{2}} < v_0 < (2\lambda E_+)^{\frac{1}{2}}.$$

Portanto, $-(2\lambda E_-)^{\frac{1}{2}} < v_0 < (2\lambda E_+)^{\frac{1}{2}}$.

Teorema 3.4 *Seja u solução não nula do problema* (3.4). *Então u satisfaz a condição de fronteira $u(0) = u(\pi) = 0$ se, e somente se, E satisfaz uma das equações abaixo*

$$k\tau_+(E) + (k-1)\tau_-(E) = \pi\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.9}$$

$$k\tau_-(E) + (k-1)\tau_+(E) = \pi\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.10}$$

$$k\tau_+(E) + k\tau_-(E) = \pi\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.11}$$

para algum $k \in \mathbb{N}^*$.

Demonstração: Suponhamos que u seja solução não nula do problema $(3.2)-(3.3)$. Se u possui $2k$ zeros em $[0,\pi]$, u possui $2k-1$ pontos críticos no interior deste intervalo. Note que podemos escrever

$$\pi = \underbrace{\int_{x_0}^{x_1} dx + \int_{x_1}^{x_2} dx + \int_{x_2}^{x_3} dx + \ldots + \int_{x_{4k-3}}^{x_{4k-2}} dx}_{4k-2\ integrais}, \tag{3.12}$$

onde $x_0 = 0$, $x_{4k-2} = \pi$ e x_m representam os pontos críticos de u, se m for ímpar e as raízes de u, se m for par.

Mostremos que

$$\int_{x_0}^{x_1} dx = \int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{x_4}^{x_5} dx = \ldots = \int_{x_{4k-3}}^{x_{4k-2}} dx.$$

e

$$\int_{x_2}^{x_3} dx = \int_{x_3}^{x_4} dx = \ldots = \int_{x_{4k-5}}^{x_{4k-4}} dx.$$

De fato, se tomarmos $u_0 \in (0, a_+)$ no retrato de fase uu', temos que existem w_1 e w_2 no eixo u' de forma que, se $x \in [0,\pi]$ é tal que $u(x) = u_0$, então $|u'(x)| = |w_1| = |w_2|$. Isso implica no gráfico da solução, que para o ponto u_0 existem $x \in (x_0, x_1)$ e $\overline{x} \in (x_1, x_2)$, tais que o coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto x é igual ao coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto $\overline{x}$ em módulo. Como isso ocorre para cada $u_0 \in (0, a_+)$, temos que o comportamento da curva no intervalo (x_0, x_1) é simétrico ao comportamento da curva no intervalo (x_1, x_2) e portanto

$$\int_{x_0}^{x_1} dx = \int_{x_1}^{x_2} dx.$$

Pela simetria do problema obtemos o mesmo resultado para os valores de mínimo, isto é,

$$\int_{x_2}^{x_3} dx = \int_{x_3}^{x_4} dx.$$

Para o próximo valor de máximo, a curva no retrato de fase uu' percorre novamente os primeiro e segundo quadrantes e pelo mesmo argumento, obtemos

$$\int_{x_0}^{x_1} dx = \int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{x_4}^{x_5} dx = \int_{x_5}^{x_6} dx.$$

Continuando esse procedimento concluímos a igualdade das integrais.

Se $v_0 > 0$ teremos, dos $2k-1$ pontos críticos, k pontos de máximo e $k-1$ pontos de mínimo, onde x_{4k-3} é ponto de máximo. Dessa forma podemos escrever a relação (3.12) como

$$\begin{aligned} \pi &= 2k\int_{x_0}^{x_1} dx + (2k-2)\int_{x_2}^{x_3} dx \\ &= 2k\overline{\tau}_+(E) + (2k-2)\overline{\tau}_-(E) \\ &= 2\left[k\frac{\tau_+(E)}{\sqrt{2\lambda}} + (k-1)\frac{\tau_-(E)}{\sqrt{2\lambda}}\right], \end{aligned}$$

ou seja,

$$\pi\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = k\tau_+(E) + (k-1)\tau_-(E).$$

Se $v_0 < 0$, por raciocínio análogo obtemos

$$\pi\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = k\tau_-(E) + (k-1)\tau_+(E).$$

Portanto se u é solução do problema $(3.2)-(3.3)$ e u possui $2k$ zeros em $[0,\pi]$, então E satisfaz (3.9) ou (3.10), dependendo do sinal da velocidade inicial de u.

Agora suponha que u seja solução do problema $(3.2)-(3.3)$ e tenha $2k+1$ zeros em $[0,\pi]$, portanto $2k$ pontos críticos.

Note que

$$\pi = \underbrace{\int_{x_0}^{x_1} dx + \int_{x_1}^{x_2} dx + \int_{2}^{x_3} dx + \ldots + \int_{x_{4k-1}}^{x_{4k}} dx}_{4k\ \ integrais}, \qquad (3.13)$$

onde $x_0 = 0$, $x_{4k} = \pi$ e x_m representam os pontos críticos de u, se m for ímpar e as raízes de u, se m for par.

Se $v_0 > 0$, teremos k pontos de máximo e k pontos de mínimo, onde x_{4k-1} é ponto de mínimo.

Novamente pela simetria do problema temos que

$$\begin{aligned}
\pi &= 2k\int_{x_0}^{x_1} dx + 2k\int_{x_2}^{x_3} dx \\
&= 2k\overline{\tau}_+(E) + 2k\overline{\tau}_-(E) \\
&= 2\left[k\frac{\tau_+(E)}{\sqrt{2\lambda}} + k\frac{\tau_-(E)}{\sqrt{2\lambda}}\right],
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\pi\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = k\tau_+(E) + k\tau_-(E).$$

Se $v_0 < 0$ obtemos exatamente a mesma conclusão.

Portanto, se u é solução do problema $(3.2) - (3.3)$ e u possui $2k+1$ zeros em $[0, \pi]$, então E satisfaz (3.11).

Reciprocamente, se E satisfaz (3.9), (3.10) ou (3.11), então a solução u do problema (3.4) satisfaz $u(0) = u(\pi) = 0$ pela definição de $\tau_\pm(E)$. ■

Através dessas equações percebemos que existe uma relação entre a velocidade inicial v_0 (indicada por E) e o número de equilíbrios (ou zeros) do problema (3.1). Nosso objetivo é resolver as equações (3.9), (3.10) e (3.11) para E como função de λ.

Teorema 3.5 *Seja* $\lambda_n = \dfrac{n^2}{f'(0)}$, *para* $n \in \mathbb{N}^*$. *Então para cada* n *existem duas funções*

$$E_n^\pm : [\lambda_n, +\infty) \to [0, E_\pm)$$

contínuas e sobrejetoras que têm as seguintes propriedades:

i) Para todo $k \in \mathbb{N}^*$ *e todo* $\lambda \in [\lambda_{2k-1}, +\infty)$, *a função* $E_{2k-1}^+(\lambda)$ *é a única solução da equação* (3.9) *e* $E_{2k-1}^-(\lambda)$ *é a única solução da equação* (3.10).

ii) Para todo $k \in \mathbb{N}^*$ *e todo* $\lambda \in [\lambda_{2k}, +\infty)$, *temos* $E_{2k}^-(\lambda) = E_{2k}^+(\lambda)$ *e* $E_{2k}^+(\lambda)$ *é a única solução da equação* (3.11).

iii) Para todo $n \in \mathbb{N}^*$, *temos que* $E_n^{\pm}(\lambda_n) = 0$ *e ainda* $\frac{d}{d\lambda}E_n^{\pm}(\lambda) > 0$ *para* $\lambda \in (\lambda_n, +\infty)$. *Além disso, se* $\lambda \in (\lambda_n, +\infty)$, *então* $E_{n+1}^{+}(\lambda) \leq E_n^{\pm}(\lambda)$ *e* $E_{n+1}^{-} \leq E_n^{\pm}(\lambda)$.

Demonstração: Definimos para cada $k \geq 1$ a seguinte função

$$H_{2k-1}^{+}(E) = 2\left(\frac{k\tau_+(E) + (k-1)\tau_-(E)}{\pi}\right)^2,$$

onde $0 < E < E_+$. Observe que

$$\begin{aligned}
\lim_{E\to 0} H_{2k-1}^{+}(E) &= 2\left(\frac{k\lim\limits_{E\to 0}\tau_+(E) + (k-1)\lim\limits_{E\to 0}\tau_-(E)}{\pi}\right)^2 \\
&= 2\left(\frac{k\pi}{\pi(2f'(0))^{\frac{1}{2}}} + \frac{(k-1)\pi}{\pi(2f'(0))^{\frac{1}{2}}}\right)^2 \\
&= \frac{(2k-1)^2}{f'(0)} \\
&= \lambda_{2k-1}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, definimos $H_{2k-1}^{+}(0) = \lambda_{2k-1}$. Devido ao Teorema 3.3, temos que $\tau_+(E) \to +\infty$ quando $E \to E_+$, logo $H_{2k-1}^{+} \to +\infty$ quando $E \to E_+$. Como as funções τ_+ e τ_- são estritamente crescentes, temos que $H_{2k-1}^{+}(E)$ é estritamente crescente e portanto $H_{2k-1}^{+}([0, E_+)) = [\lambda_{2k-1}, +\infty)$. Além disso, sendo $H_{2k-1}^{+}(E)$ contínua e injetora, segue que $H_{2k-1}^{+}(E)$ possui inversa e esta é contínua (Teorema 13, p.186, [7]). Consideremos então a função $E_{2k-1}^{+} : [\lambda_{2k-1}, +\infty) \to [0, E_+)$ tal que

$$E_{2k-1}^{+}(\lambda) = (H_{2k-1}^{+})^{-1}(\lambda).$$

Definimos agora

$$H_{2k-1}^{-}(E) = 2\left(\frac{\tau_-(E) + (k-1)\tau_+(E)}{\pi}\right)^2.$$

De forma análoga ao caso anterior temos que $H_{2k-1}^{-} : [0, E_-) \to [\lambda_{2k-1}, +\infty)$, onde $H_{2k-1}^{-}(0) = \lambda_{2k-1}$, possui inversa $E_{2k-1}^{-} : [\lambda_{2k-1}, +\infty) \to [0, E_-)$.

Finalmente, consideremos

$$H_{2k}^{-}(E) = H_{2k}^{+}(E) = 2\left(\frac{k\tau_+(E) + k\tau_-(E)}{\pi}\right)^2.$$

Novamente obtemos que a função $H^{\pm}_{2k} : [0, E_{\pm}) \to [\lambda_{2k}, +\infty)$ possui inversa $E^{\pm}_{2k} : [\lambda_{2k}, +\infty) \to [0, E_{\pm})$.

Mostremos então que $E^{\pm}_{n}$ satisfazem as propriedades $i) - iii)$.

$i)$ Por construção temos que $E^{+}_{2k-1}(\lambda)$ é solução de (3.9) e que $E^{-}_{2k-1}(\lambda)$ é solução de (3.10). A unicidade segue da unicidade das funções inversas.

$ii)$ Por construção temos que $E^{-}_{2k}(\lambda) = E^{+}_{2k}(\lambda)$ e que $E^{+}_{2k}(\lambda)$ é solução de (3.11). A unicidade segue como no item anterior.

$iii)$ Por construção temos que $E^{\pm}_{n}(\lambda_n) = 0$. Mostremos que $\dfrac{d}{d\lambda}E^{\pm}_{n} > 0$ para $\lambda \in (\lambda_n, +\infty)$. Como $H^{\pm}_{n}$ é derivável, $\dfrac{d}{dE}H^{\pm}_{n} \neq 0$, para $E \in (0, E_{\pm})$ e $(H^{\pm}_{n})^{-1} = E^{\pm}_{n}$ é contínua em $(\lambda_n, +\infty)$, segue-se que $E^{\pm}_{n}$ é derivável, para todo $\lambda \in (\lambda_n, +\infty)$ e $(E^{\pm}_{n})'(\lambda) = \dfrac{1}{(H^{\pm}_{n})'(E^{\pm}_{n}(\lambda))}$. Como $(H^{\pm}_{n})'(E^{\pm}_{n}(\lambda)) > 0$ em todo seu domínio, temos $\dfrac{d}{d\lambda}E^{\pm}_{n}(\lambda) > 0$ para $\lambda \in (\lambda_n, +\infty)$.

Resta mostrarmos que $E^{+}_{n+1}(\lambda) \leq E^{\pm}_{n}(\lambda)$ e $E^{-}_{n+1}(\lambda) \leq E^{\pm}_{n}(\lambda)$, para $\lambda \in (\lambda_n, +\infty)$. Seja $\lambda \in (\lambda_n, +\infty)$ arbitrário. Consideremos inicialmente o caso $n = 2(k-1)$, logo $E_n = E_{2(k-1)}$ e $E_{n+1} = E_{2(k-1)+1} = E_{2k-1}$. Agora, $E^{+}_{n}(\lambda)$ solução de (3.11), logo

$$(k-1)\tau_{+}(E^{+}_{n}(\lambda)) + (k-1)\tau_{-}(E^{+}_{n}(\lambda)) = \pi\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

e $E^{+}_{n+1}(\lambda)$ solução de (3.9), logo

$$k\tau_{+}(E^{+}_{n+1}(\lambda)) + (k-1)\tau_{-}(E^{+}_{n+1}(\lambda)) = \pi\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dessa forma, temos

$$\begin{aligned}(k-1)\tau_{+}(E^{+}_{n}(\lambda)) + (k-1)\tau_{-}(E^{+}_{n}(\lambda)) &= k\tau_{+}(E^{+}_{n+1}(\lambda)) + (k-1)\tau_{-}(E^{+}_{n+1}(\lambda)) \\ &\geq (k-1)\tau_{+}(E^{+}_{n+1}(\lambda)) + (k-1)\tau_{-}(E^{+}_{n+1}(\lambda)).\end{aligned}$$

Como τ_{+} e τ_{-} são funções crescentes, temos que $\tau_{+} + \tau_{-}$ é crescente e assim

$$E^{+}_{n+1}(\lambda) \leq E^{+}_{n}(\lambda).$$

Como $E^{+}_{n}(\lambda) = E^{-}_{n}(\lambda)$, segue que $E^{+}_{n+1}(\lambda) \leq E^{\pm}_{n}(\lambda)$. Por raciocínio análogo obtemos que $E^{-}_{n+1}(\lambda) \leq E^{\pm}_{n}(\lambda)$.

Consideremos agora o caso $n = 2k-1$, logo $E_n = E_{2k-1}$ e $E_{n+1} = E_{2k}$. Agora, como $E^+_{2k-1}(\lambda)$ é solução de (3.9) e $E^-_{2k-1}(\lambda)$ é solução de (3.10), temos

$$k\tau_\pm(E^\pm_{2k-1}(\lambda)) + (k-1)\tau_\mp(E^\pm_{2k-1}(\lambda)) = \pi\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

e por $E^+_{2k}(\lambda)$ ser solução de (3.11), temos

$$k\tau_+(E^+_{2k}(\lambda)) + k\tau_-(E^+_{2k}(\lambda)) = \pi\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dessa forma, obtemos que

$$\begin{aligned}
k\tau_+(E^+_{n+1}(\lambda)) + k\tau_-(E^+_{n+1}(\lambda)) &= k\tau_\pm(E^\pm_n(\lambda)) + (k-1)\tau_\mp(E^\pm_n(\lambda)) \\
&= k\tau_\pm(E^\pm_n(\lambda)) + k\tau_\mp(E^\pm_n(\lambda)) - \tau_\mp(E^\pm_n(\lambda)) \\
&\leq k\tau_\pm(E^\pm_n(\lambda)) + k\tau_\mp(E^\pm_n(\lambda)).
\end{aligned}$$

Logo,

$$k\tau_+(E^+_{n+1}(\lambda)) + k\tau_-(E^+_{n+1}(\lambda)) \leq k\tau_\pm(E^\pm_n(\lambda)) + k\tau_\mp(E^\pm_n(\lambda)),$$

ou seja,

$$(\tau_+ + \tau_-)(E^+_{n+1}(\lambda)) \leq (\tau_+ + \tau_-)(E^\pm_n(\lambda)).$$

Como a função $\tau_+ + \tau_-$ é crescente, temos

$$E^+_{n+1}(\lambda) \leq E^\pm_n(\lambda).$$

Como $E^+_{n+1}(\lambda) = E^-_{n+1}(\lambda)$, segue que $E^-_{n+1}(\lambda) \leq E^\pm_n(\lambda)$. ■

Teorema 3.6 *Sejam* $r_0 = \max\{|a_-|, a_+\}$ *e* $\lambda_n = \dfrac{n^2}{f'(0)}$, *onde* $n \in \mathbb{N}^*$. *Então para cada* $n \in \mathbb{N}^*$ *e* $\lambda \in [\lambda_n, +\infty)$, *o problema* (3.1) *tem dois pontos de equilíbrio* $u^\pm_n(\lambda) \in B_0(r_0)$ *que possuem as seguintes propriedades:*

i) $u^\pm_n(\lambda_n) = 0$.

ii) Para cada $\lambda \in (\lambda_n, +\infty)$, $u^\pm_n(\lambda)$ *tem exatamente* $n+1$ *zeros em* $[0, \pi]$. *Denotando esses zeros por* $x^\pm_q(\lambda)$, $q = 0, 1, 2, \ldots, n$, *com*

$$0 = x^\pm_0(\lambda) < x^\pm_1(\lambda) < \ldots < x^\pm_n(\lambda) = \pi,$$

temos $(-1)^q u_n^+(x;\lambda) > 0$ *para* $x_q^+(\lambda) < x < x_{q+1}^+(\lambda)$, $q = 0, 1, \ldots, n-1$ *e* $(-1)^q u_n^-(x;\lambda) < 0$ *para* $x_q^-(\lambda) < x < x_{q+1}^-(\lambda)$, $q = 0, 1, \ldots, n-1$.

iii) Para cada $n \geq 1$, $u_n^{\pm}(\lambda)$ *varia continuamente com* λ *em* $[\lambda_n, +\infty)$ *com relação à norma* $\|\cdot\|_X$. *Em particular,* $\|u_n^{\pm}(\lambda)\|_X \to 0$ *quando* $\lambda \to \lambda_n$, *e ainda* $\|u_n^{\pm}(\lambda)\|_X \to +\infty$ *quando* $\lambda \to +\infty$.

Finalmente, para cada $\lambda \in [0, +\infty)$, *o problema* (3.1) *não tem pontos de equilíbrio em* X *além da origem* $u_0 = 0$ *e dos elementos* $u_n^{\pm}(\lambda)$, $n \geq 1$, *para os quais* $\lambda_n \leq \lambda$.

Demonstração:

Seja $u_n^{\pm}(\lambda)$ uma solução de (3.2) com $(u_n^{\pm}(\lambda))_x(0) = \pm\sqrt{2\lambda E_n^{\pm}(\lambda)}$.

Se n é par, $n = 2k$, então $E_n^-(\lambda) = E_n^+(\lambda)$ e $E_n^+(\lambda)$ é a única solução da equação (3.11). Logo, pelo Teorema 3.4, temos que $u_n^{\pm}(\lambda)$ é ponto de equilíbrio do problema (3.1) e possui $2k + 1 = n + 1$ zeros em $[0, \pi]$.

Se n é ímpar, $n = 2k - 1$, então $E_n^+(\lambda)$ é a única solução da equação (3.9), logo pelo Teorema 3.4 temos que $u_n^+(\lambda)$ é ponto de equilíbrio do problema (3.1) e possui $2k = n + 1$ zeros em $[0, \pi]$ e, $E_n^-(\lambda)$ é a única solução da equação (3.10), assim $u_n^-(\lambda)$ é ponto de equilíbrio do problema (3.1) com $n+1$ zeros em $[0, \pi]$.

Pelo Teorema 3.5, temos que $E_n^{\pm}(\lambda_n) = 0$ e portanto $u_n^{\pm}(\lambda_n) \equiv 0$.

Denotaremos os zeros dos pontos de equilíbrio $u_n^{\pm}(\lambda)$ por $x_q^{\pm}(\lambda)$, para $q = 0, 1, \ldots, n$, com $0 = x_0^{\pm}(\lambda) < x_1^{\pm}(\lambda) < \ldots < x_n^{\pm}(\lambda) = \pi$. Consideremos inicialmente $u_n^+(\lambda)$.

Como $(u_n^+(\lambda))_x(0) > 0$, temos que $u_n^+(\lambda)$ é crescente numa vizinhança do zero. Como $u_n^+(\lambda)(0) = 0$, segue que $0 < u_n^+(x;\lambda)$ para $0 = x_0^+(\lambda) < x < x_1^+(\lambda)$. Agora, se $x \in (x_1^+(\lambda), x_2^+(\lambda))$ temos que $u_n^+(x;\lambda) < 0$, pois caso contrário teríamos uma contradição com a equação (3.2). Prosseguindo com esse raciocínio, obtemos que

$$(-1)^q u_n^+(x;\lambda) > 0,$$

para $x_q^+(\lambda) < x < x_{q+1}^+(\lambda)$, onde $q = 0, 1, \ldots, n-1$.

Por um argumento semelhante obtemos que

$$(-1)^q u_n^-(x;\lambda) < 0,$$

para $x_q^-(\lambda) < x < x_{q+1}^-(\lambda)$, onde $q = 0, 1, \ldots, n-1$.

Mostremos agora que $u_n^\pm(\lambda)$ varia continuamente com λ. Seja $n_0 \in \mathbb{N}^*$ arbitrário e considere $u_{n_0}^+(\lambda)$ um ponto de equilíbrio do problema (3.1). Seja $\{\lambda_n\} \subset [\lambda_{n_0}, +\infty)$ uma seqüência tal que $\lambda_n \to \overline{\lambda} \in [\lambda_{n_0}, +\infty)$. Se considerarmos o sistema

$$\begin{cases} U_x = g(U) \\ U(0) = (0, \sqrt{2\overline{\lambda} E_{n_0}^+(\overline{\lambda})}), \end{cases} \tag{3.14}$$

onde $U = (u, u_x)$ e $g(U) = (u_x, -\lambda f(u))$, como g é Lipschitziana em limitados e contínua, temos que existe uma única solução maximal $\varphi_0 = (u, u_x)$ definida no intervalo máximo I_0. Como $u_{n_0}^+(\overline{\lambda})$ é ponto de equilíbrio, temos que $u_{n_0}^+(\overline{\lambda})$ é solução de (3.14) e pela unicidade de solução temos que $\varphi_0 = (u_{n_0}^+(\overline{\lambda}), (u_{n_0}^+(\overline{\lambda}))_x)$ e $[0, \pi] \subset I_0$.

Considerando agora o sistema

$$\begin{cases} U_x = g_n(U) \\ U(0) = (0, \sqrt{2\lambda_n E_{n_0}^+(\lambda_n)}), \end{cases} \tag{3.15}$$

onde $U = (u, u_x)$ e $g_n(U) = (u_x, -\lambda_n f(u))$, como g_n é Lipschitziana em limitados e contínua, temos que existe uma única solução maximal $\varphi_n = (u_n, (u_n)_x)$ definida no intervalo máximo I_n.

Como $u_{n_0}^+(\lambda_n)$ é ponto de equilíbrio, temos que $u_{n_0}^+(\lambda_n)$ é solução de (3.15) e pela unicidade de solução temos que $\varphi_n = (u_{n_0}^+(\lambda_n), (u_{n_0}^+(\lambda_n))_x)$.

Como $\left(0, \sqrt{2\lambda_n E_{n_0^+}(\lambda_n)}\right) \to \left(0, \sqrt{2\overline{\lambda} E_{n_0}^+(\overline{\overline{\lambda}})}\right)$ e $g_n \to g$ uniformemente em compactos, temos que existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que para $n > k_0$, $[0, \pi] \subset I_n$ e $\varphi_n\big|_{[0,\pi]} \to \varphi_0\big|_{[0,\pi]}$ uniformemente (Proposição 3, p.35, [10]). Ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que se $n \geq k_0$, então

$$\sup_{x \in [0,\pi]} \{\max\{|u_{n_0}^+(\lambda_n)(x) - u_{n_0}^+(\overline{\lambda})(x)|, |(u_{n_0}^+(\lambda_n))_x(x) - (u_{n_0}^+(\overline{\lambda}))_x(x)|\}\} < \varepsilon,$$

assim se $n \geq k_0$,

$$\|u^+_{n_0}(\lambda_n) - u^+_{n_0}(\overline{\lambda})\|_X = \sup_{x\in[0,\pi]} \{|(u^+_{n_0}(\lambda_n))_x(x) - (u^+_{n_0}(\overline{\lambda}))_x(x)|\} < \varepsilon.$$

Portanto se $\lambda_n \to \overline{\lambda}$, então $u^+_{n_0}(\lambda_n) \to u^+_{n_0}(\overline{\lambda})$ na norma $\|\cdot\|_X$. Analogamente se $\lambda_n \to \overline{\lambda}$, então $u^-_{n_0}(\lambda_n) \to u^-_{n_0}(\overline{\lambda})$ na norma $\|\cdot\|_X$. Como $n_0 \in \mathbb{N}^*$ é arbitrário, segue que $u^\pm_n(\lambda)$ varia continuamente com λ.

Em particular, se $\overline{\lambda} = \lambda_{n_0}$ temos que $\lambda_n \to \lambda_{n_0}$ implica

$$u^\pm_{n_0}(\lambda_n) \to u^\pm_{n_0}(\lambda_{n_0}) = 0$$

na norma $\|\cdot\|_X$.

Mostremos que $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \|u^\pm_n(\lambda)\|_X = +\infty$. De fato, dado $M > 0$, sejam $n \in \mathbb{N}^*$ arbitrário e $\lambda_0 > \lambda_n$ fixo. Consideremos

$$N > \max\left\{\lambda_0, \frac{M^2}{2E^\pm_n(\lambda_0)}\right\}.$$

Logo, se $\lambda > N$, como a função E^+_n é crescente, temos

$$\begin{aligned}
\|u^\pm_n(\lambda)\|_X &= \sup_{x\in[0,\pi]} \{|(u^\pm_n(\lambda))_x(x)|\} \\
&\geq |(u^\pm_n(\lambda))_x(0)| = \sqrt{2\lambda E^\pm_n(\lambda)} \\
&> \sqrt{2NE^\pm_n(\lambda)} > \sqrt{2NE^\pm_n(\lambda_0)} > \sqrt{2\frac{M^2}{2E^\pm_n(\lambda_0)}2E^\pm_n(\lambda_0)} \\
&= M.
\end{aligned}$$

Portanto $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \|u^\pm_n(\lambda)\|_X = +\infty$.

Segue da definição de $u^\pm_n(\lambda)$ e da unicidade de $E^\pm_n(\lambda)$ que $u_0 \equiv 0$ e $u^\pm_n(\lambda)$ são os únicos pontos de equilíbrio do problema (3.1). ■

Observação 3.3 *Em virtude da afirmação que* $\|u^\pm_n(\lambda)\|_X \to 0$ *quando* $\lambda \to \lambda_n$, *podemos dizer que* $u^\pm_n(\lambda)$ *bifurca da origem* $u_0 = 0$ *de* X *a medida que* λ *cresce com* λ_n.

Observação 3.4 *Se a função* f *do problema* (3.1) *é ímpar, então* $u^-_n(\lambda) = -u^+_n(\lambda)$, *para todo* $n \in \mathbb{N}^*$ *e* $\lambda \in [\lambda_n, +\infty)$.

Teorema 3.7 *Suponha que* $\lambda \in [0, \lambda_1]$*, onde* $\lambda_1 = \dfrac{1}{f'(0)}$*. Então para cada* $\phi \in X$*, a solução correspondente* $u(\phi, \lambda)$ *do problema* (3.1) *tem a propriedade de* $u(\phi, \lambda)(t) \to 0$ *quando* $t \to +\infty$*. Se* $\lambda \in (\lambda_1, +\infty)$ *e sendo* $N \geq 1$ *o menor inteiro tal que* $\lambda \leq \lambda_{N+1}$*, então para cada* $\phi \in X$*, temos que* $u(\phi, \lambda)(t) \to 0$ *quando* $t \to +\infty$*, ou* $u(\phi, \lambda)(t) \to u_n^{\pm}(\lambda)$ *quando* $t \to +\infty$ *para algum* n*,* $1 \leq n \leq N$*, onde a convergência é relativa à* $\| \cdot \|_X$*.*

Demonstração: Pelo Teorema 3.6 temos que para cada $\lambda \in [0, +\infty)$, o problema (3.1) tem um número finito de pontos de equilíbrio em X, e cada um desses pontos são isolados em X com relação à norma $\| \cdot \|_X$. Mas sabemos que para cada $\phi \in X$, o conjunto $w(\phi)$ é conexo e consiste de um ou mais pontos de equilíbrio. Sendo esses isolados, concluímos que $w(\phi)$ consiste de um único ponto de equilíbrio. Dessa forma, se $\lambda \in (0, +\infty)$ então os pontos de equilíbrio são a origem e $u_n^{\pm}(\lambda)$, onde $1 < n < N$ e N é o menor inteiro tal que $\lambda \leq \lambda_{N+1}$.

Logo se $\lambda \in [0, \lambda_1]$, temos $N = 1$ e então o único ponto de equilíbrio é a origem e portanto $u(\phi, \lambda)(t) \to 0$ quando $t \to +\infty$.

Para $\lambda \in (\lambda_1, +\infty)$, temos que $u(\phi, \lambda)(t) \to 0$ quando $t \to +\infty$ ou $u(\phi, \lambda)(t) \to u_n^{\pm}(\lambda)$ quando $t \to +\infty$, para algum n, com $1 \leq n \leq N$. ■

Capítulo 4

Conclusão

Ao final deste trabalho gostaríamos de apresentar a diferença mais relevante entre o estudo das soluções estacionárias dos problemas quasi-linear, feito no Capítulo 2, e semilinear, Capítulo 3.

Em ambos os casos, o conjunto equilíbrio torna-se mais complexo quando o parâmetro de difusão é pequeno. No entanto, no caso semilinear, embora o conjunto equilíbrio tende a infinito conforme a difusão vai a zero, ele permanece discreto, pois os equilíbrios bifurcam da solução nula aos pares, ou seja, dois a dois. Esta situação é bastante distinta da que acontece no caso quasi-linear.

Antes de seguirmos, devemos notar que o caso $p = q$ no Capítulo 2 é o mais adequado para fazermos esta comparação, pois se tomarmos um termo perturbativo f dado por $f(u) = u(1 - u^2)$ em (3.1), ou seja $a_+ = 1$ e $a_- = -1$, temos exatamente a mesma expressão que a perturbação considerada no Capítulo 2, com $p = q = 2$ e $r = 2$.

Com isso em mente, observamos no Teorema 2.6 que o conjunto equilíbrio contem subconjuntos com a cardinalidade do continuum se a difusão não for suficientemente grande. Isso ocorrre porque as soluções do problema estacionário (2.10) podem atingir seus extremos em 1 e -1, que são raízes de f (ou seja, $u^+(x) \equiv 1$ e $u^-(x) \equiv -1$ satisfaz a equação em (2.10)). Sendo assim, os pontos de equilíbrio podem formar patamares quando atingem esses valores e, embora a soma do comprimento de todos os patamares seja constante, ela pode ser distribuída livremente entre eles. Dessa forma pode haver um contínuo de possibilidades para as soluções equilíbrio com um mesmo número de raízes.

Isso não ocorre no problema semilinear porque o x-tempo que uma solução de (3.4) levaria para atingir seus extremos em $a_+ = 1$ ($a_- = -1$) não é finito, como mostram o Teorema 3.3 e a observação que o segue.

Uma outra diferença relevante é que, no problema semilinear o conjunto w-limite é sempre constituído de um único equilíbrio, conforme Teorema 3.7, já no caso $p > 2$ esta é uma interessante questão aberta, enunciada pelos autores Takeuchi e Yamada na observação 4.1 do artigo [11].

Finalmente no que diz respeito às propriedades de estabilidade, elas são similares nos dois problemas (Teoremas 2.9, 2.10 e 2.11, Capítulo 2 e Teoremas 6.4 e 6.5 de [3]). Ou seja, em ambos os casos a solução nula é assintoticamente estável para valores grandes o suficiente do parâmetro de difusão e passa a ser instável assim que bifurcam as primeiras soluções não nulas. Estas por sua vez são assintoticamente estáveis enquanto existirem. As demais soluções são instáveis nos demais casos.

Referências Bibliográficas

[1] BRÈZIS, H. **Analyse fonctionnelle: théorie et applications**. Paris: Masson, 1983.

[2] CARVALHO, A. N.;GENTILE, C. B. Asymptotic behaviour of non-linearparabolic equations with monotone principal part. **J. Math. Anal. Appl.** , n. 280, p. 252-272, 2003.

[3] CHAFEE, N., INFANTE; E. F. A bifurcation problem for a nonlinear partial differential equation of parabolic type. **Appl. Anal.**, n. 4, p. 17-37, 1974.

[4] DIBENEDETTO, E. **Degenerate parabolic equations**. New York: Springer-Verlag, 1993.

[5] GUEDDA, M.; VERON, L. Bifurcation phenomena associated to the p-Laplace operator. **Trans. Amer. Math. Soc.**, n. 310, p. 419-431, 1988.

[6] HALE, J. K. **Asymptotic behavior of dissipative systems**. American Mathematical Society, Rhode Island: Providence, 1988.

[7] LIMA, E. L. **Curso de Análise**. v.1, 5. ed. Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1987.

[8] ÔTANI, M. On certain second order ordinary differential equations associated with Sobolev-Poincaré-type inequalities. **Nonlinear Anal.**, n. 8, p. 1255-1270, 1984.

[9] ÔTANI, M. Existence and asymptotic stability of strong solutions for $(du/dt)(t) + \partial\psi^1(u(t)) - \partial\psi^2(u(t)) \ni f(t)$. **J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec.**, n. 24, p. 575-605, 1977.

[10] SOTOMAYOR, J. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1979.

[11] TAKEUCHI, S.; YAMADA, Y. Asymptotic properties of a reaction-diffusion equation with degenerate p-Laplacian. **Nonlinear Analysis**, n. 42, p. 41-46, 2000.