Universidade Federal de São Carlos
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação

Estimativas a Priori em Espaços de Hardy para Campos Vetoriais Complexos Localmente Resolúveis

Evandro Raimundo da Silva

Estimativas a Priori em Espaços de Hardy para Campos Vetoriais Complexos Localmente Resolúveis

Evandro Raimundo da Silva

Tese apresentada ao PPG-M da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática

São Carlos
dezembro 2000

Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie
Orientador

Agradecimentos

A Deus pela a misericórdia em minha vida.
Aos meus pais pela formação moral e espiritual.
Ao meu orientador Prof. Jorge Hounie pelos ensinamentos matemáticos e reflexões.
A todos que contribuíram direta ou indiretamente pra realização deste trabalho.
A Capes pelo apoio financeiro.

Abstract

This work studies a priori estimates in Hardy spaces for planar first-order differential operators satisfying the Nirenberg-Treves Condition (P), as well as related local solvability results in spaces of bounded mean oscillation. As an application we obtain a generalized simililarity principle for locally solvable vector fields.

Resumo

Neste trabalho estudamos a existência de estimativas a priori, envolvendo normas em espaços de Hardy, para operadores diferenciais de primeira ordem no plano satisfazendo a condição $(\mathcal{P})$ de Nirenberg-Treves, bem como a consequente resolubilidade local em espaços de funções de variação média limitada. Obtem-se como aplicação um princípio da similaridade generalizado para campos localmente resolúveis.

Sumário

Introdução

Dado um operador diferencial parcial linear de ordem m com coeficientes suaves e a valores complexos definidos num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in \Omega$

$$P(y, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(y) D^\alpha$$

onde $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N) \in Z^n_+$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} ... D_n^{\alpha_n}$ e $D_j = \partial / i\, \partial y_j$, $i = \sqrt{-1}$, o símbolo principal de $P(y, D)$ é a função

$$p(y, \xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(y) \xi^\alpha \quad y \in \Omega\,, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

onde $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} ... \xi_n^{\alpha_n}$. O operador $P(y, D)$ é de tipo principal em 0 quando :

$$\xi \in \mathbb{R}^n \backslash 0\,, \quad p(0, \xi) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \nabla_\xi p(0, \xi) \neq 0\,.$$

Definição 0.0.1 *Um operador diferêncial parcial $P(y, D)$ em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com $0 \in \Omega$, é localmente resolúvel em 0 se existir uma vizinhança $U \subset \Omega$ de 0 tal que a equação*

$$P(y, D)u = f$$

pode ser resolvida em $\mathcal{D}'(U)$ para toda $f \in C_c^\infty(U)$.

Nirenberg e Treves introduziram a condição $(\mathcal{P})$ para o símbolo principal do operador $P(y, D)$ e provou que em certas hipóteses esta condição é equivalente a resolubilidade local.

No seguinte caso particular, temos a condição $(\mathcal{P})$ de Nirenberg e Treves: Seja $P(y, t, D)$ um operador diferêncial parcial linear de primeira ordem em $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, contendo a origem 0,

$$P = P(y, t, D) = a_1(y, t) D_1 + a_2(y, t) D_2 + c(y, t)\,, \quad (y, t) \in \Omega\,, \tag{0.1}$$

então seu símbolo principal se escreve como

$$p(y, t, \xi_1, \xi_2) = a_1(y, t)\xi_1 + a_2(y, t)\xi_2 = A(y, t, \xi_1, \xi_2) + iB(y, t, \xi_1, \xi_2)\,,$$

onde $A(y,t,\xi_1,\xi_2) = Re(a_1)(y,t)\xi_1 + Re(a_2)(y,t)\xi_2$, e $B(y,t,\xi_1,\xi_2) = Im(a_1)(y,t)\xi_1 + Im(a_2)(y,t)\xi_2$. Uma bicaracterística nula de $A(y,t,\xi_1,\xi_2)$ passando por $(0,\xi_1^0,\xi_2^0)$ é uma curva satisfazendo o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} (\dot{y}(s),\dot{t}(s)) = \quad \nabla_\xi A(y,t,\xi_1,\xi_2)\,, \qquad (y(0),t(0)) = 0\,, \\ (\dot{\xi}_1(s),\dot{\xi}_2(s)) = -\nabla_{(y,t)} A(y,t,\xi_1,\xi_2)\,, \quad (\xi_1(0),\xi_2(0)) = (\xi_1^0,\xi_2^0)\,, \end{cases}$$

com condição inicial verificando $A(0,\xi_1^0,\xi_2^0) = 0$. O operador P da forma (0.1) e de tipo principal em 0, com $\nabla_\xi A(y,t,\xi_1^0,\xi_2^0) \neq 0$, satisfaz a condição $(\mathcal{P})$ de Nirenberg e Treves neste ponto, se $B(y,t,\xi_1,\xi_2)$ não muda de sinal ao longo de qualquer bicaracterística nula de $A(y,t,\xi_1,\xi_2)$ passando por $(0,\xi_1^0,\xi_2^0)$. Observamos que esta formulação é invariante por mudança de coordenadas.

Notamos ainda que se P é da forma (0.1) e de tipo principal em 0 então existe j_0 tal que $|a_{j_0}(0)| > 0$ para algum $j_0 \in \{1,2\}$, e que sem perder a generalidade iremos supor $j_0 = 2$. Além disso, devido ao fato que a função a_2 é contínua, segue da definição que se P é de tipo principal em 0, existe uma vizinhança $U_0 \subset \Omega$ de 0 onde $|a_2(y,t)| > 0$ para todo $(y,t) \in U_0$. Sendo a propriedade de resolubilidade local invariante por divisão de funções; segue que para estudar a resolubilidade local de P em 0 basta estudar a resolubilidade do operador $\frac{1}{a_2}P$. Sendo assim podemos considerar P na forma

$$P = \frac{\partial}{\partial t} + a(y,t)\frac{\partial}{\partial y} + c(y,t)\ ,$$

com a, c funcões suaves e a valores complexos. Finalmente, se $f(x) = y$ é a solução da E.D.O.

$$\begin{cases} \dot{y}(s) = Re(a)(y,t)\,, \\ y(0) = x \end{cases}$$

a aplicação $(x,t) \mapsto (y,t)$ é uma mudança de coordenada numa vizinhança da origem. Nestas novas coordenadas P fica na forma

$$P = \frac{\partial}{\partial t} + ib(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + c(x,t) = L + c(x,t)\,, \tag{0.2}$$

com b, c suaves, b real e c complexa. Assim $p(x,t,\xi_1,\xi_2) = A(x,t,\xi_1,\xi_2) + iB(x,t,\xi_1,\xi_2)$, com $A(x,t,\xi_1,\xi_2) = \xi_2$ e $B(x,t,\xi_1,\xi_2) = b(x,t)\xi_1$. Então se P é do tipo principal em 0 então $b(0) = 0$ e a bicaracterística nula de A passando por $(0,\xi_1^0,\xi_2^0)$, com $\xi_1^0 \neq 0$, é a curva $\gamma(s) = (0,s,\xi_1^0,\xi_2^0)$. Portanto P satisfaz a condição $(\mathcal{P})$ em 0 se a aplicação $s \mapsto B(\gamma(s)) = b(0,s)\xi_1^0$ não muda de sinal, que é equivalente a dizer que a aplicação $s \mapsto b(0,s)$ não muda de sinal. Em geral temos a seguinte definição:

Definição 0.0.2 *Um operador P na forma (0.2), satisfaz a condição $(\mathcal{P})$ num aberto Ω contendo a origem quando para cada x fixo a aplicação $s \mapsto b(x,s)$ não muda de sinal.*

Na presente tese obtemos algumas estimativas a priori para P em (0.2) satisfazendo a condição $(\mathcal{P})$ de Nirenberg-Treves no espaço com normas mistas, $L^1(H^1)$ quando os coeficientes b, c não dependem de x e em $L^1(h^1)$ quando b, c são funções podendo depender de x e t, implicando em resolubilidade local nos seus respectivos espaços duais $L^\infty(BMO)$ e $L^\infty(bmo)$.

Beals e Fefferman em [BF] provaram que a condição $(\mathcal{P})$ implica em resolubilidade local em L^2 para um operador diferencial linear de ordem m, $P(x,D)$ de tipo principal no seguinte sentido:

Definição 0.0.3 *Um operador $P(x,D)$ diferencial parcial linear de ordem m, definido em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é localmente resolúvel em L^p se para todo ponto de $x_0 \in \Omega$ e todo $s \in \mathbb{R}$ existe uma vizinhança $U \subset \Omega$ de x_0, tal que para toda $f \in L^p_s \cap \mathcal{E}'(U)$ a equação*

$$P(x,D)u = f$$

pode ser resolvida em U com $u \in L^p_{s+m-1}$, onde $L^p_s = (I - \triangle)^{-s/2} L^p(\mathbb{R}^n)$,

provando a desigualdade a priori

$$\|\varphi\|_{p',m-1} \leq C \|{}^tP\varphi\|_{p'}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 .$$

A questão da resolubilidade local em L^p, $1 < p < \infty$, para P um operador diferencial parcial linear de primeira ordem satisfazendo a condição $(\mathcal{P})$, foi abordada por J. Hounie e E. P. Lemos em [HL], onde eles provaram a seguinte estimativa a priori

$$\|\varphi\|_{L^p} \leq C \|P\varphi\|_{L^p} \quad \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \tag{0.3}$$

onde Ω é alguma vizinhança da origem. Para $p = 1$, J. Hounie e J. Tavares em [HT] exibem um exemplo de um campo L em $\mathbb{R}^2$ satisfazendo a condição $(\mathcal{P})$, e $f \in L^\infty(\Omega)$ tal que é impossível encontrar $u \in L^\infty(\Omega)$ tal que $Lu = f$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ para qualquer vizinhança Ω da origem. Desta maneira para $p = 1$ a estimativa a priori (0.3) não é válida no plano. Mais recentemente, J. Hounie, P. Santiago e S. Berhanu provaram em [BHS] a estimativa

$$\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}_x \times (-T,T))} \leq C \|P\varphi\|_{L^1((-T,T),h^1(\mathbb{R}_x))}, \quad \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_x \times (-T,T)) \tag{0.4}$$

com P em (0.2), b suave e $b \leq 0$ ou $b \geq 0$.

Esta tese vem mostrar que podemos colocar no lado esquerdo da desigualdade acima a mesma norma que aparece do lado direito, precisando que P satisfaça a condição $(\mathcal{P})$ de Niremberg e Treves.

Resumindo as duas estimativas principais da presente tese são as seguintes: Suponha P como em (0.2) então

$$\|\varphi\|_{L^1((-T,T),H^1(\mathbb{R}_x))} \leq C\,T\|P\varphi\|_{L^1((-T,T),H^1(\mathbb{R}_x))}\,, \quad \varphi \in C_c^\infty((-T,T),\mathcal{S}(\mathbb{R}_x)) \tag{0.5}$$

com b suave não negativa dependendo somente de t e

$$\|\varphi\|_{L^1((-T,T),h^1(\mathbb{R}_x))} \leq C\,T\|P\varphi\|_{L^1((-T,T),h^1(\mathbb{R}_x))}\,, \quad \varphi \in C_c^\infty((-a,a)\times(-T,T)) \tag{0.6}$$

com b suave tal que para cada x fixo, a aplicação $t \mapsto b(x,t)$ não muda de sinal, i.e. P satisfazendo a condição $(\mathcal{P})$.

O artigo [BHS] traz uma aplicação da desigualdade (0.4) para o Princípio da Similaridade Generalizado. No último capítulo desta tese, via a desigualdade (0.6) estendemos o Princípio da Similaridade Generalizado para campos que satisfazem a condição $(\mathcal{P})$. Uma outra aplicação é a extensão da desigualdade (0.6), é que provando o lema de Friedrichs ([H] pág.9) no caso h^1 vamos obter para toda $u \in L^1(h^1) \cap \mathcal{E}'$ tal que $Pu \in L^1(h^1) \cap \mathcal{E}'$,

$$\|u\|_{L^1(h^1)} \leq C\|Pu\|_{L^1(h^1)}\,.$$

Observamos ainda, que as constantes que aparecem no texto, denotadas por C, podem variar ao longo das demonstrações.

Capítulo 1

Os espaços de Hardy H^1 e h^1

Os espaços de Hardy $H^p(\mathbb{R}^n)$ $(0 < p \leq \infty)$ foram introduzidos por Elias Stein e Guido Weiss [SW], estes coincidem com os espaços L^p quando $1 < p \leq \infty$ e é um subespaço de distribuições temperadas para $0 < p < 1$, e está estritamente contido em L^1 quando $p = 1$. Mais tarde David Goldberg apresentou em [G] uma versão local dos espaços de Hardy, os $h^p(\mathbb{R}^n)$, tendo como objetivo sanar algumas dificuldades que surgem quando se estuda questões de Análise nos espaços $H^p(\mathbb{R}^n)$. Neste capítulo tratamos somente os espaços $H^1(\mathbb{R})$ e $h^1(\mathbb{R})$ uma vez que nos capítulos posteriores faremos uso de suas propriedades. Seremos breves na apresentação, pois os resultados seguintes podem ser encontrados nas referências [FS], [St] e [G].

1.1 O espaço $H^1(\mathbb{R})$

Uma das maneiras de caracterizar o espaço H^1 é através das funções maximais. Dada $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, definimos a função maximal

$$M_\phi f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} |f * \phi_\varepsilon(x)| \,, \quad \phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}\phi(x/\varepsilon)\,.$$

Para uma dada coleção finita de seminormas $\mathcal{F} = \{\|\cdot\|_{m,n}\}$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (a classe das funções infinitamente diferenciáveis e com todas as derivadas rapidamente decrescente) com $\|\phi\|_{m,n} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^m \partial_x^n \phi(x)|$, consideremos a **família de funções $\mathcal{S}_\mathcal{F}$** de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ **limitadas** uniformemente por estas seminormas,

$$\mathcal{S}_\mathcal{F} = \{\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}); \|\phi\|_{m,n} \leq 1 \text{ para toda } \|\cdot\|_{m,n} \in \mathcal{F}\}\,.$$

A grande função maximal associada a família limitada $\mathcal{S}_\mathcal{F}$ é definida

$$\mathcal{M}_\mathcal{F} f(x) = \sup_{\phi \in \mathcal{S}_\mathcal{F}} M_\phi f(x).$$

Teorema 1.1.1 *Seja $f \in \mathcal{S}'$. Então as seguintes condições são equivalentes:*
(i) Existe $\phi \in \mathcal{S}$ com $\int \phi \neq 0$ tal que $M_\phi f \in L^1$.
(ii) Para toda $\phi \in \mathcal{S}$ com $\int \phi \neq 0$, $M_\phi f \in L^1$.
(iii) Existe uma coleção $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{M}_\mathcal{F} f \in L^1$.

A implicação $(ii) \Rightarrow (i)$ é óbvia. Que $(iii) \Rightarrow (ii)$, segue do fato que dada $\phi \in \mathcal{S}$ seja $\theta^{-1} = \max\{\|\phi\|_{m,n}\,; \|\cdot\|_{m,n} \in \mathcal{F}\}$ então $\theta\phi \in \mathcal{S}_\mathcal{F}$, assim $\theta M_\phi f(x) = M_{\theta\phi} f(x) \leq \mathcal{M}_\mathcal{F} f(x) \in L^1$. A implicação $(i) \Rightarrow (iii)$ é a mais difícil e pode ser vista em [St] a partir da página 91. Além disso, é mostrado que $\|M_\phi f\|_{L^1}$, $\|\mathcal{M}_\mathcal{F} f\|_{L^1}$ são equivalentes.

Definição 1.1.1 *Se $f \in \mathcal{S}'$ satisfaz uma das condições do teorema acima, dizemos que $f \in H^1$.*

É possível mostrar que $H^1 \subset L^1$, na verdade $H^1 \hookrightarrow L^1$ (seguirá facilmente da decomposição atômica). Fixamos $\phi \in C_c^\infty(I(0,1))$, ($I(0,1) = (-1,1)$ intervalo de centro $x_0 = 0$ e raio $r = 1$), $\int \phi = 1$ definimos a **norma** $\|f\|_{H^1} = \|M_\phi f\|_{L^1}$, que torna o espaço H^1 um **espaço de Banach**.

Existe também uma outra função maximal usada para definir os espaços H^1 que envolve o núcleo de Poisson em $\mathbb{R}^2_+ = \mathbb{R}_x \times (0,\infty)$, $P_y(x) = y^{-1}P(x/y)$ onde $P(x) = \pi^{-1}(1+|x|^2)^{-1}$, que também será usada nos capítulos posteriores. Antes precisamos do conceito de distribuição limitada.

Definição 1.1.2 *Uma distribuição $f \in \mathcal{S}'$ é dita limitada quando*

$$\phi \in \mathcal{S} \Longrightarrow \|f * \phi\|_{L^\infty} < C_\phi < \infty\,.$$

Para uma distribuição limitada f é possível definir a distribuição $f * h$ com $h \in L^1$ como:

$$\phi \in \mathcal{S} \Longrightarrow < f * h, \phi > = < f * \check{\phi}, \check{h} >\,, \quad \check{\phi}(x) = \phi(-x)\,.$$

Segue facilmente que $f * h$ é uma distribuição limitada e que dados h_1, h_2 em L^1 então $(f * h_1) * h_2 = f * (h_1 * h_2)$.

Portanto como P está em L^1, temos que $P_y * f$ está bem definido como distribuição, sempre que f é uma distribuição limitada.

Considerando $\phi \in \mathcal{S}$, com $\widehat{\phi}(\xi) = 1$ para ξ próximo de 0, escrevemos $\widehat{P}(\xi) = e^{-|\xi|} = \widehat{\phi}(\xi)e^{-|\xi|} + (1 - \widehat{\phi}(\xi))e^{-|\xi|} = \widehat{\phi}(\xi)e^{-|\xi|} + \widehat{\psi}(\xi)$, em seguida aplicando a transformada de Fourier inversa temos $P_y = \phi_y * h_y + \psi_y$ e assim

$$P_y * f = f * \phi_y * h_y + \psi_y * f\,, \quad h(x) = P(x)\,, \;\; \psi \in \mathcal{S}.$$

Desta decomposição e do fato que $(\partial_y^2 + \partial_x^2)P_y(x) = 0$ temos:

Proposição 1.1.1 *Se $f \in \mathcal{S}'$, é limitada então $f * P_y \in C^\infty$, e*

$$(\partial_y^2 + \partial_x^2)(f * P_y)(x) = 0\,, \quad em \quad \mathbb{R}^2_+\,.$$

Em Stein [St] a partir da página 91, está demonstrado o seguinte:

Teorema 1.1.2 *$f \in H^1 \Longleftrightarrow f$ é limitada, $u^* \in L^1$; onde*

$$u^*(x) = \sup_{|x-z|\leq y} |f * P_y(z)|\,,$$

além disso,

$$\|u^*\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq C\|f\|_{H^1(\mathbb{R})}\,.$$

A caracterização atômica

Definição 1.1.3 *Um H^1-átomo é uma função a, com suporte $s(a)$, e satisfazendo:*
(i) $s(a) \subset I$, para algum intervalo $I = I(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r)$, (centro x_0 e raio r),
(ii) $\|a\|_{L^\infty} \leq |I|^{-1}$, onde $|I|$ medida de Lebesgue de I.
(iii) $\int a(x)\,dx = 0$.

A seguir temos o **teorema da decomposição atômica**:

Teorema 1.1.3 *(i) Todo H^1-átomo a está em H^1, e além disso, existe $C > 0$ tal que $\|a\|_{H^1} \leq C$ para todo H^1-átomo.*
(ii) Toda $f \in H^1$ pode ser escrita em H^1 como $f = \sum_k \lambda_k a_k$ com a_k H^1-átomos, e $C_1 \sum_k |\lambda_k| \leq \|f\|_{H^1} \leq C_2 \sum_k |\lambda_k|$, com C_1 e C_2 constantes independentes de f.

A seguir iremos enunciar propriedades do espaço H^1 que serão úteis nos capítulos posteriores, sendo que algumas destas propriedades demonstraremos.

Proposição 1.1.2 *Sejam ϕ, ψ, em $\mathcal{S}$, e $\psi_\delta(x) = \delta^{-1}\psi(x/\delta)$.*
(i) $\left\{\psi_\delta * \phi\right\}_{\delta\leq 1}$ é uma família uniformemente limitada de $\mathcal{S}$,
(ii) se $f \in H^1$ e $\int \phi \neq 0$, então $\|f * \psi_\delta\|_{H^1} = \|M_\phi(\psi_\delta * f)\|_{L^1} \leq C\|f\|_{H^1}$.

Prova:
(i) Seja F a transformada de Fourier e d o operador derivada então

$$\|\psi_\delta * \phi\|_{m,n} \leq \|F(x^m(d_x)^n(\psi_\delta * \phi))\|_{L^1}\,.$$

Por outro lado, pelas propriedades de F segue

$$F(x^m d_x^n(\psi_\delta * \phi))(\xi) = \sum_{m_1+m_2=m} C_{m_1,m_2} d_\xi^{m_1}(\xi^n F(\psi))(\delta\xi)\,\delta^{m_1}\,d_\xi^{m_2} F(\phi)(\xi)\,,$$

portanto, lembrando que $\delta \leq 1$ e que ϕ, ψ estão em $\mathcal{S}$ temos

$$\begin{aligned}\|F(x^m d_x^n(\phi * \psi_\delta))\|_{L^1} &\leq \sum_{m_1+m_2=m} C_{m_1,m_2}\|\delta^{m_1} d_\xi^{m_1} F(\psi)(\delta\cdot)\|_\infty \|d_\xi^{m_2}(\xi^n F(\phi))\|_1 \\ &\leq C_{m,n}(\phi,\psi)\,.\end{aligned}$$

(ii) Seja $\phi \in C_c^\infty(I(0,1))$ e $\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}\phi(x/\varepsilon)$. É fácil ver que $(\phi * \psi_{\delta/\varepsilon})_\varepsilon = \phi_\varepsilon * \psi_\delta = (\phi_{\varepsilon/\delta} * \psi)_\delta$,

$$\sup_{\varepsilon>0} |\phi_\varepsilon * \psi_\delta * f| = \max\{\sup_{\delta\leq\varepsilon} |(\phi * \psi_{\delta/\varepsilon})_\varepsilon * f|, \sup_{\varepsilon\leq\delta} |(\phi_{\varepsilon/\delta} * \psi)_\delta * f|\}.$$

Seja $\mathcal{F}$ uma coleção finita de seminormas de $\mathcal{S}$ com $\|f\|_{H^1} \leq C\|\mathcal{M}_\mathcal{F} f\|_{L^1}$. De (i) $\{\phi * \psi_{\delta/\varepsilon}\}_{\delta\leq\varepsilon}$ é uma família uniformemente limitada, sendo assim existe $\theta_1 > 0$ tal que $\theta_1(\phi * \psi_{\delta/\varepsilon}) \in \mathcal{S}_\mathcal{F}$ para todo $\varepsilon \geq \delta$, logo

$$\sup_{\delta\leq\varepsilon} |\theta_1(\phi * \psi_{\delta/\varepsilon})_\varepsilon * f| \leq \sup_{\delta\leq\varepsilon} M_{\theta_1(\phi*\psi_{\delta/\varepsilon})} f \leq \sup_{\delta\leq\varepsilon} \mathcal{M}_\mathcal{F} f = \mathcal{M}_\mathcal{F} f.$$

Analogamente, existe $\theta_2 > 0$ tal que $\theta_2(\phi_{\varepsilon/\delta} * \psi) \in \mathcal{F}$ para todo $\varepsilon \leq \delta$, assim, $\sup_{\varepsilon\leq\delta} |(\phi_{\varepsilon/\delta} * \psi)_\delta * f| \leq \theta_2^{-1}\mathcal{M}_\mathcal{F} f$. Portanto

$$\|\psi_\delta * f\|_{H^1} \leq C\|\mathcal{M}_\mathcal{F} f\|_{L^1} \leq C\|f\|_{H^1} .$$

∎

Proposição 1.1.3 *(i) Seja* $\psi \in C_c^\infty(I(0,1))$, $\psi_\delta(x) = \delta^{-1}\psi(x/\delta)$ *e* $\int \psi = 1$. *Se* $f_\delta = \psi_\delta * f$ *então* $f_\delta \longrightarrow f$, $\delta \longrightarrow 0$, *em* H^1 .
(ii) $\{ \varphi \in C_c^\infty;\ \int \varphi = 0 \} \subset H^1$ *é denso.*

Prova:

(i) Primeiro, seja a um H^1-átomo, $s(a) \subset I = I(x_0, r)$. Seja $a_\delta = \psi_\delta * a$ então $s(a_\delta - a) \subset I(x_0, r+\delta) \subset I_1 = I(x_0, r+1)$, $(\delta \leq 1)$. Se $I_1^* = I(x_0, 2(r+1))$, escreva

$$\|a_\delta - a\|_{H^1} = \int_{\mathbb{R}} M_\phi(a_\delta - a)(x)dx = \int_{I_1^*} + \int_{{}^cI_1^*} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 \ .$$

Pela desigualdade de Schwartz e o fato que a função maximal é limitada em L^2 temos

$$|\mathcal{I}_1| \leq \|M_\phi(a_\delta - a)\|_{L^2}|I_1| \leq C\|a_\delta - a\|_{L^2}|I_1^*|^{1/2} \to 0\,, \quad \delta \to 0\,.$$

Por outro lado, se $x \in {}^cI_1^*$ e $\varepsilon < |x - x_0|/2$, então $|x - y| \geq \varepsilon$ para $y \in I_1$, como $s(\phi_\varepsilon) \subset I(0, \varepsilon)$ segue

$$\phi_\varepsilon * (a_\delta - a)(x) = \int_{I_1} \phi_\varepsilon(x - y)(a_\delta - a)(y)dy = 0.$$

Assim, podemos supor que $\varepsilon > |x-x_0|/2$ e como $\int a(x)dx = 0$ temos

$$\begin{aligned}
|\phi_\varepsilon * (a_\delta - a)(x)| &= \left| \int_{I_1} \phi_\varepsilon(x-y)(a_\delta(y) - a(y))dy \right| \\
&\leq \int_{I_1} |(\phi_\varepsilon(x-y) - \phi_\varepsilon(x-x_0))||(a_\delta(y) - a(y))|dy \\
&\leq C \int_{I_1} \frac{|y-x_0|}{\varepsilon^2} |a_\delta(y) - a(y)|dy \\
&\leq C \frac{r+1}{|x-x_0|^2} \int_{I_1} |a_\delta(y) - a(y)|dy \\
&\leq C \frac{r+1}{|x-x_0|^2} \|a_\delta - a\|_{L^1} .
\end{aligned}$$

Logo,

$$|\mathcal{I}_2| \leq C \int_{|x-x_0|>2(r+1)} \frac{r+1}{|x-x_0|^2} dx \, \|a_\delta - a\|_{L^1} \leq C\|a_\delta - a\|_{L^1} \to 0 \,, \quad \delta \to 0 \,.$$

Observamos que se $S_N = \sum_{k=1}^N \lambda_k a_k$ é uma combinação linear finita de H^1-átomos segue que $\|\psi_\delta * S_N\|_{H^1} \to 0$, $\delta \to 0$. Assim, dado $\rho > 0$ como $f = \sum_k \lambda_k a_k$ em H^1 existe N grande $\|S_N - f\|_{H^1} \leq \rho$, então

$$\|f_\delta\|_{H^1} \leq \|(f - S_N) * \psi_\delta\|_{H^1} + \|S_N * \psi_\delta\|_{H^1} \leq C\rho + \|S_N * \psi_\delta\|_{H^1} \leq (C+1)\rho \,,$$

para δ suficientemente pequeno.
(ii) Basta observar que dado a um H^1-átomo então $a_\delta = \psi_\delta * a \in C_c^\infty$, $\widehat{a_\delta}(0) = 0$ e por (i) temos $a_\delta \to a$, $\delta \to 0$. Daqui o resultado segue do teorema da decomposição atômica.

∎

O teorema a seguir, é importante por dar uma outra norma para o espaço $H^1(\mathbb{R})$ que resulta equivalente a norma $H^1(\mathbb{R})$ usual. Este teorema também dirá que se $f \in H^1(\mathbb{R})$ e H a transformada de Hilbert então $Hf \in L^1(\mathbb{R})$, tendo como consequência que $\widehat{Hf}(\xi) = -isgn(\xi)\widehat{f}(\xi)$ (onde $\widehat{\ }$ denota a transformada de Fourier e $sgn(\xi)$ a função sinal de ξ) é uma função contínua e isto só é possível se $\int f = \widehat{f}(\xi) = 0$. Iremos omitir a sua demonstração, que pode ser vista em [St] na página 114 e a recíproca em [GR] nas páginas 285-288.

Teorema 1.1.4 *Seja H a transformada de Hilbert,*

$$f \in H^1(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow f \,, Hf \ \textit{ estão em } L^1(\mathbb{R}) \,.$$

Além disso, existem constantes C_1 e C_2, independentes de f tais que

$$C_1(\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|Hf\|_{L^1(\mathbb{R})}) \leq \|f\|_{H^1} \leq C_2(\|f\|_{L^1} + \|Hf\|_{L^1}) \,.$$

Por este teorema ainda temos $\|Hf\|_{H^1} \leq C\big(\|Hf\|_{L^1}+\|HHf\|_{L^1}\big) \leq C\big(\|f\|_{H^1}+\|f\|_{L^1}\big) \leq 2C\|f\|_{H^1}$, uma vez que $HHf = -f$.

Este teorema será usado na proposicão e no lema seguintes;

Proposição 1.1.4 *Se $\psi \in \mathcal{S}$, $\psi_\delta(x) = \delta^{-1}\psi(x/\delta)$, $f \in H^1$ e $f_\delta = f * \psi_\delta$ então $f_\delta \longrightarrow 0\,,\ \delta \longrightarrow \infty\,,$ em H^1*

Prova:

Suponhamos inicialmente que $\psi \in C_c^\infty(I(0,1))$ e a um H^1-átomo com $s(a) \subset I = I(x_0, r)$ então

$$|\psi_\delta * a(x)| \leq \int_I |\psi_\delta(x-y) - \psi_\delta(x-x_0)||a(y)|dy \leq \frac{\|\psi'\|_{L^\infty}\, r}{\delta^2}.$$

Portanto,

$$\int |\psi_\delta * a(x)|dx \leq \int_{I(x_0, r+\delta)} \frac{\|\psi'\|_{L^\infty}\, r dx}{\delta^2} \leq \frac{\|\psi'\|_{L^\infty}\, 2r(r+\delta)}{\delta^2} \longrightarrow 0\,, \quad \delta \to \infty$$

Segundo, se $\psi \in \mathcal{S}$, considere $\phi \in C_c^\infty(-1,1)$ com $\phi = 1$ se $|x| \leq 1/2$ e $\phi_k(\cdot) = \phi(\cdot - k)$, com k variando nos números inteiros. Seja

$$\Phi_k(x) = \frac{\phi_k(x)}{\sum \phi_j(x)}\ ,$$

a coleção $\{\Phi_k\}$ é uma partição da unidade subordinada a cobertura localmente finita $\{I_k = I(k,1)\}_{k\in Z}$ de $\mathbb{R}$. Assim $\psi(x) = \sum_k \psi(x)\Phi_k(x) = \sum_k \Psi^k(x)$, e como $s(\Psi^k) \subset I_k$, e ϕ, ψ estão em $\mathcal{S}$ temos $\|(\Psi^k)'\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{(1+|k|)^2}$. Portanto, de maneira análoga ao primeiro caso temos

$$\begin{aligned}
\|a * \psi_\delta\|_{L^1} &\leq \sum_k \|a * \Psi_\delta^k\|_{L^1} \\
&\leq \sum_k \|(\Psi^k)'\|_{L^\infty} \frac{2r(r+\delta)}{\delta^2} \\
&\leq \left(\sum_k \frac{C}{(1+|k|)^2}\right) \frac{2r(r+\delta)}{\delta^2} \longrightarrow 0\,,\ \delta \longrightarrow \infty\,.
\end{aligned}$$

Analogamente, se $S_N = \sum_{k=1}^N \lambda_k a_k$ é uma combinação linear finita de H^1-átomos temos $\psi_\delta * S_N \longrightarrow 0\,,\ \delta \longrightarrow \infty$. Dada $f \in H^1$ e $\rho > 0$ como $f = \sum_k \lambda_k a_k$ existe N suficientemente grande tal que $\|f - S_N\|_{H^1} \leq \rho$, então

$$\begin{aligned}
\|\psi_\delta * f\|_{L^1} &\leq \|\psi_\delta * (f - S_N)\|_{L^1} + \|\psi_\delta * S_N\|_{L^1} \\
&\leq C\|f - S_N\|_{H^1} + \|\psi_\delta * S_N\|_{L^1} \\
&\leq (C+1)\rho\,, \quad \delta \longrightarrow \infty\ .
\end{aligned}$$

Daqui o resultado segue do teorema 1.1.4. ∎

O lema a seguir tem por consequência imediata que

$$\left\{ f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}); \int f(x)dx = 0 \right\} \subset \; H^1(\mathbb{R}) \ ,$$

e a sua demonstração foi retirada de [GR] das páginas 326-327.

Lema 1.1.1 *Suponha que xf, f estão $L^2(\mathbb{R})$ e $\int f(x)dx = 0$. Então*

$$\|f\|_{H^1}^2 \leq C\|f\|_{L^2}\,\|xf\|_{L^2}\,.$$

Prova:

Observamos que:

$$\int |f(x)|dx = \int_{|x|<r} |f(x)|dx + \int_{|x|>r} |x|\frac{|f(x)|}{|x|}dx = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2\,, \quad r > 0\,,$$

pela desigualdade de Schwartz

$$\mathcal{I}_1 \leq \|f\|_{L^2}(2r)^{1/2}, \quad \mathcal{I}_2 = \|xf\|_{L^2}\left(\int_{|x|>r}\frac{dx}{|x|^2}\right)^{1/2} = \|xf\|_{L^2}\,r^{-1/2}\,,$$

portanto, considerando $r = \|f\|_{L^2}^{-1}\|xf\|_{L^2}$ obtemos

$$\|f\|_{L^1}^2 \leq 8\|f\|_{L^2}\,\|xf\|_{L^2}\,.$$

Por outro lado, se H é a transformada de Hilbert, desde que $\int f = 0$ então

$$\begin{aligned} xHf(x) &= v.p.\frac{1}{\pi}\int \frac{x}{x-y}f(y)dy - v.p.\frac{1}{\pi}\int f(y)dy + v.p.\frac{1}{\pi}\int f(y)dy \\ &= v.p.\frac{1}{\pi}\int \frac{y}{x-y}f(y)dy + \frac{1}{\pi}\int f(y)dy = H(yf)(x)\,. \end{aligned}$$

Como H é limitada em L^2 então $xHf \in L^2$ e pela observação acima vem

$$\|Hf\|_{L^1}^2 \leq 8\|Hf\|_{L^2}\|xHf\|_{L^2} \leq C\|f\|_{L^2}\|xf\|_{L^2}\,.$$

Assim, pelo teorema 1.1.4 concluímos

$$\|f\|_{H^1}^2 \leq C(\|f\|_{L^1}^2 + \|Hf\|_{L^1}^2 + 2\|f\|_{L^1}\|Hf\|_{L^1}) \leq C\|f\|_{L^2}\|xf\|_{L^2}\,.$$

∎

1.2 O espaço $h^1(\mathbb{R})$

Nesta seção apresentamos a versão local do espaço de Hardy H^1, o espaço h^1 dada por D. Goldberg em [G] assim como algumas de suas propriedades que em algum sentido o tornam melhor que o espaço H^1 . As demonstrações dos fatos relatados abaixo podem ser encontradas em [G].

Definição 1.2.1 *Seja* $\phi \in C_c^\infty(I(0,1))$, $\int \phi\, dx = 1$, $\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}\phi(x/\varepsilon)$, *definimos*

$$h^1 = \{ \; f \in S' \, ; \sup_{0<\varepsilon<1} |f * \phi_\varepsilon(x)| = m_\phi f(x) \in L^1 \; \}.$$

A norma $\|f\|_{h^1} = \|m_\phi f\|_{L^1}$.

Existe um teorema análogo ao teorema 1.1.1, que mostra que h^1 é independente da escolha de ϕ. Uma consequência imediata da definição é que $H^1 \hookrightarrow h^1$. Também vale que $h^1 \hookrightarrow L^1$ e além disso é um **espaço de Banach**.

Daremos a seguir a **caracterização atômica** de h^1, para isto, vamos definir h^1-átomo que difere do H^1-átomo quando o intervalo I contendo o seu suporte tiver $|I| \geq 2$, mais precisamente temos;

Definição 1.2.2 *Um h^1-átomo é uma função a , satisfazendo:*
i) $s(a) \subset I$, para algum intervalo $I = I(x_0, r)$, (de centro x_0 e raio r),
ii) $\|a\|_\infty \leq |I|^{-1}$,
iii) Se $r < 1$ então $\int a(x)\, dx = 0$.

Consequentemente da definição vem que todo H^1-átomo é um h^1-átomo. Na verdade, se $s(a) \subset I = I(x_0, r)$, e $r < 1$ então a é um H^1-átomo e temos que $\|a\|_{h^1} \leq \|a\|_{H^1} \leq C$, com C independente de a. Se $I = I(x_0, r)$, $r > 1$, $I^* = I(x_0, 2r)$ então

$$\|a\|_{h^1} = \int m_\phi a(x)\, dx = \int_{I^*} + \int_{^cI^*} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 \, .$$

$\mathcal{I}_2$ é igual a zero, pois, se $x \in {}^cI^*$, $y \in I$, como $s(\phi_\varepsilon) \subset I(0, \varepsilon)$ então $|x - y| > |x - x_0| - |x_0 - y| > |x - x_0| - r > |x - x_0|/2 > r > 1$, daí $\phi_\varepsilon(x - y) = 0$, uma vez que $\varepsilon < 1$,implicando $\phi_\varepsilon * a(x) = 0$. Agora,

$$\mathcal{I}_1 = \int_{I^*} m_\phi a(x)\, dx \leq |I^*| \, \|\phi_\varepsilon\|_{L^1} \, \|a\|_{L^\infty} \leq |I^*|/|I| = C \, .$$

Conclusão: Existe $C > 0$ tal que

$$\|a\|_{h^1} \leq C \; , \quad \text{para todo } h^1\text{-átomo} \, .$$

A seguir o **teorema da decomposição atômica**:

Teorema 1.2.1 *Toda $f \in h^1$ se escreve como $f = \sum \lambda_k a_k$, em h^1 onde a_k são h^1-átomos, além disso, existem constantes positivas, C_1 e C_2 tais que*

$$C_1 \sum_k |\lambda_k| \leq \|f\|_{h^1} \leq C_2 \sum_k |\lambda_k| \,,$$

para toda $f \in h^1$.

Um fato importante que é válido para funções em h^1 e que será útil no **capítulo 3** é o seguinte:

Teorema 1.2.2 *Se $f \in h^1$, tem suporte $s(f) \subset (-\alpha, \alpha)$, então os h^1-átomos que aparecem na decomposição atômica de f podem ser tomados todos suportados em $(-\alpha - 2, \alpha + 2)$.*

Prova:

Decompondo f atômicamente temos

$$f = \sum \lambda_j a_j + \sum \Lambda_k B_k$$

com suportes $s(B_k) \subset J_k = J(x_k, r_k)$, $r_k \geq 1$, e $s(a_j) \subset I_j = I(x_j, r_j)$, $r_j < 1$. Seja $\chi \in C_c^\infty(-\alpha - 1, \alpha + 1)$, e $\chi = 1$ para $|x| \leq \alpha$, então

$$\begin{aligned} f &= \sum \lambda_j \chi a_j + \sum \Lambda_k \chi B_k \\ &= \sum \lambda_j \chi(x_j) a_j + \sum \lambda_j (\chi - \chi(x_j)) a_j + \sum \Lambda_k \chi B_k \\ &= \sum \lambda_j \tilde{a}_j + \sum \lambda_j \tilde{A}_j + \sum \Lambda_k \tilde{B}_k \,, \end{aligned}$$

onde somente as parcelas com $I_j \cap s(\chi) \neq \emptyset$ e $J_k \cap s(\chi) \neq \emptyset$, comparecem. Notemos que esta é a decomposição desejada. De fato, temos que $\tilde{B}_k = \chi B_k$ é um h^1-átomo com $s(\tilde{B}_k) \subset (-\alpha - 1, \alpha + 1)$ para todo k, $\tilde{A}_j = (\chi - \chi(x_j)) a_j$, é um h^1-átomo pois $s(\tilde{A}_j) \subset I_j \subset I(x_j, 1)$, e $\|\tilde{A}_j\|_\infty \leq 1$, e também $\tilde{a}_j = \chi(x_j) a_j$ é h^1-átomo, com $s(\tilde{a}_j) \subset I_j$. Como $r_j < 1$, e $I_j \cap s(\chi) \neq \emptyset$ vem que $I_j \subset s(\chi) + (-1, 1) \subset (-\alpha - 2, \alpha + 2)$. Além disso,

$$\|f\|_{h^1} \leq C \left\{ \sum 2|\lambda_j| + \sum |\Lambda_k| \right\} \leq 2C \|f\|_{h^1} \,.$$

∎

A seguir o análogo ao teorema 1.1.4 para $h^1(\mathbb{R})$:

Teorema 1.2.3 *Suponhamos que H é a transformada de Hilbert, e $\tilde{H}$ tal que a transformada de Fourier $\widehat{\tilde{H} f} = (1 - \phi) \widehat{H f}$, com $\phi \in C_c^\infty(I(0,1))$. Então $f \in h^1(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow f$, $\tilde{H} f$ estão em $h^1(\mathbb{R})$. Além disso, existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que*

$$C_1 (\|f\|_{L^1} + \|\tilde{H} f\|_{L^1}) \leq \|f\|_{h^1} \leq C_2 (\|f\|_{L^1} + \|\tilde{H} f\|_{L^1}) \,.$$

1.3 Quão melhor é h^1 do que o H^1 ?

A princípio o que torna h^1 diferente de H^1 é que na caracterização maximal ao invés de fazermos o supremo no intervalo infinito $\varepsilon > 0$, fazemos no intervalo finito $0 < \varepsilon < 1$. Com isto, se $f \in L^\infty$ tem suporte $s(f)$ limitado, como o suporte de $m_\phi(f)$ está contido na soma vetorial $s(f) + I(0,1)$ já que ϕ tem suporte contido em $I(0,1)$ então

$$\|f\|_{h^1} = \|m_\phi(f)\|_{L^1} \leq \|\phi\|_{L^1}\|f\|_{L^\infty}\,|s(f)+I(0,1)| < \infty \ .$$

Desta maneira, C_c^∞ está contido em h^1.

Listamos duas propriedades que o espaço H^1 não satisfaz:

• H^1 não contém C_c^∞

De fato, se $f \in H^1$ segue da decomposição atômica que $\int f(x)dx = 0$.

• H^1 não é estável pela multiplicação por função suave.

Considere o H^1- átomo $a(x) = 1/2$ se $0 < x < 1$ e $a(x) = -1/2$ se $-1 < x < 0$, $0 < \varphi \in S$, $s(\varphi) \subset (0,1)$ então $\varphi a \notin H^1$, já que $\int \varphi a \neq 0$.

Nos espaços h^1 estas duas propriedades são satisfeitas, mais precisamente:

Teorema 1.3.1 *C_c^∞ é um subconjunto denso de h^1.*

Teorema 1.3.2 *Os operadores pseudo-diferênciais de ordem zero são limitados em h^1.*

Ver [G] página 33.

1.4 Os espaços $BMO(\mathbb{R})$ e $bmo(\mathbb{R})$

Nesta seção apresentamos os espaços BMO e bmo que são respectivamente os duais de H^1 e h^1.

Definição 1.4.1 *Se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ é tal que*

$$\sup_I \inf_{a\in\mathbb{R}} \frac{1}{|I|}\int_I |f-a|\,dx = C < \infty \ ,$$

onde I intervalo em $\mathbb{R}$, dizemos que $f \in BMO(\mathbb{R})$. Módulo funções constantes, C define a norma $\|f\|_{BMO}$.

O seguinte teorema afirma que $\{H^1\}^* = BMO$, precisamente temos;

Teorema 1.4.1 *Dada $f \in BMO$, considere o funcional linear*

$$\ell(g) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx \ , \quad g \in H^1_a \ ,$$

onde H^1_a é o subespaço denso de H^1 das combinações lineares finita de H^1-átomos. Então ℓ tem uma única extensão limitada em H^1 e além disso, $\|\ell\| \leq C_1\|f\|_{BMO}$.

Reciprocamente, todo funcional linear ℓ em H^1 pode ser escrito como acima, com $f \in BMO$ e $\|f\|_{BMO} \leq C_2\|\ell\|$

Ver Stein [St] a paritr da página 142.

Teorema 1.4.2 *Se $f \in BMO(\mathbb{R})$ então $(1+|x|)^{-2} f \in L^1(\mathbb{R})$.*

Como consequência deste teorema segue que toda f em BMO define uma distribuição temperada. Ver Stein [St] página 141.

Na definição de h^1 ficou claro que $H^1 \hookrightarrow h^1$. Sendo assim $\{h^1\}^* = bmo \hookrightarrow BMO = \{H^1\}^*$ o que veremos da definição de bmo.

Definição 1.4.2 *Se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ é tal que*

$$\sup_{|I|\leq 1} \inf_{a\in\mathbb{R}} \frac{1}{|I|}\int_I |f-a|\,dx = C_1 < \infty$$

$$\sup_{|I|>1} \frac{1}{|I}\int_I |f|dx = C_2 < \infty\ ,$$

onde I intervalos em $\mathbb{R}$, então $f \in bmo(\mathbb{R})$. Definimos a norma $\|f\|_{bmo}$ como sendo a maior das constantes C_1, C_2.

Existe um teorema análogo ao teorema 1.4.1 que afirma que bmo é o dual do espaço h^1 e sua demontração pode ser vista em [G].

1.5 Uma aplicação do teorema T1

É um fato conhecido que o operador transformada de Hilbert H, é limitado em L^2 e isto vem de uma consequência imediata do teorema de Plancherel, somado ao fato que $\widehat{Hf}(\xi) = -isgn(\xi)\widehat{f}(\xi)$, assim temos $\|Hf\|_{L^2} = \|\widehat{Hf}\|_{H^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{H^2}$. Nesta seção daremos uma demonstração complicada deste fato, via o teorema de $T1$ de David e Journé [St] páginas 293-305, pois o método usado **será útil** no próximo capítulo.

Proposição 1.5.1 *Se $K_\varepsilon(x,y) = (x-y)/((x-y)^2+\varepsilon^2)$, $\varepsilon > 0$, então os operadores*

$$D^\varepsilon(f)(x) = \int K_\varepsilon(x,y)f(y)\,dy\,,$$

$${}^tD^\varepsilon(f)(x) = \int K_\varepsilon(y,x)f(y)\,dy$$

estão uniformemente limitados em $L^2(\mathbb{R})$.

Prova:

Para todo ε,

$$\begin{aligned} \left|K_\varepsilon(x,y)\right| &\leq \frac{1}{|x-y|}\ , & (1.1)\\ \left|\partial_x K_\varepsilon(x,y)\right| &\leq \frac{3}{|x-y|^2}\ , & (1.2)\\ \left|\partial_y K_\varepsilon(x,y)\right| &\leq \frac{3}{|x-y|^2}\ . & (1.3)\end{aligned}$$

Estas estimativas junto o teorema do valor médio implicam que os núcleos K_ε são padrões, isto é,

$$|K_\varepsilon(x,y)-K_\varepsilon(x_0,y)| \leq \frac{6\,|x-x_0|}{|x_0-y|^2}\ , \quad se \ \ 2\,|x-y| \geq |x_0-y|.$$

$$|K_\varepsilon(x,y)-K_\varepsilon(x,y_0)| \leq \frac{6\,|y-y_0|}{|y_0-x|^2}\ , \quad se \ \ 2\,|x-y| \geq |y_0-x|.$$

A seguir usaremos o fato que ${}^tK_\varepsilon(x,y) = -K_\varepsilon(x,y)$ para mostrar que dado um conjunto limitado de funções de $\mathcal{S}$ existe C independente de ε tal que

$$| < D^\varepsilon \varphi_1^{x_0,R}, \varphi_2^{x_0,R} > | \leq CR, \qquad \varphi_j^{x_0,R}(x) = \varphi_j(\tfrac{x-x_0}{R})\,,\ j=1,2$$

para todo x_0, $R>0$ e toda φ_1, φ_2 neste conjunto limitado.

De fato,

$$\begin{aligned} < D^\varepsilon \varphi_1^{x_0,R}, \varphi_2^{x_0,R} > &= \int D^\varepsilon \varphi_1^{x_0,R}(x)\varphi_2^{x_0,R}(x)\,dx \\ &= \int\int K_\varepsilon(x,y)\varphi_1^{x_0,R}(y)\,dy\,\varphi_2^{x_0,R}(x)dx\ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} < \varphi_1^{x_0,R}, {}^tD^\varepsilon \varphi_2^{x_0,R} > &= \int \varphi_1^{x_0,R}(x)\,{}^tD^\varepsilon \varphi_2^{x_0,R}(x)dx \\ &= \int \varphi_1^{x_0,R}(x)\int {}^tK_\varepsilon(x,y)\varphi_2^{x_0,R}(y)\,dy\,dx \\ &= -\int\int K_\varepsilon(x,y)\varphi_1^{x_0,R}(x)dx\,\varphi_2^{x_0,R}(y)\,dy\,,\end{aligned}$$

sendo assim, temos que

$$2 < D^\varepsilon \varphi_1^{x_0,R}, \varphi_2^{x_0,R} >= \int\int K_\varepsilon(x,y)(\varphi_1^{x_0,R}(y)\varphi_2^{x_0,R}(x) - \varphi_1^{x_0,R}(x)\varphi_2^{x_0,R}(y))\,dx\,dy\,.$$

Em seguida se fizermos $y' = (y - x_0)/R$, $x' = (x - x_0)/R$ e $h(x,y) = \varphi_1(y)\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\varphi_2(y)$, e de (1.1) obtemos

$$\begin{aligned} < {}^tD^\varepsilon \varphi_1^{x_0,R}, \varphi_2^{x_0,R} > &= \frac{R^2}{2}\left| \int\int K_\varepsilon(x_0 + Rx, x_0 + Ry) h(x,y)\, dx\, dy \right| \\ &\leq \frac{R^2}{2} \int\int \frac{3}{R|x-y|} |h(x,y)|\, dx\, dy\,. \end{aligned}$$

Como $h(x,x) = 0$ então $h(x,y) = (\int_0^1 \partial_y h(x, x + \theta(y-x))\, d\theta)(y-x) = \psi(x,y)(y-x)$, assim

$$| < D^\varepsilon \varphi_1^{x_0,R}, \varphi_2^{x_0,R} > | \leq \frac{3}{2} R \int\int |\psi(x,y)|\, dy\, dx = \frac{3}{2} C R\,,$$

uma vez que, φ_1, φ_2 estão num conjunto limitado de funções de $\mathcal{S}$.

Vejamos que existe $C > 0$ tal que $\|D^\varepsilon(1)\|_{BM0} \leq C$. De fato, temos por definição que

$$D^\varepsilon(1)(x) = D^\varepsilon(\chi_{I^*})(x) + \int \big[K_\varepsilon(x,y) - K_\varepsilon(x_0,y)\big](1 - \chi_{I^*})(y) dy$$

para $x \in I = I(x_0, r)$, $I^* = I(x_0, 2r)$. Logo de (1.2)

$$\begin{aligned} \frac{1}{|I|}\int_I |D^\varepsilon(1)(x)|\, dx &\leq \frac{1}{|I|}\left(\int_I |D^\varepsilon(\chi_{I^*})(x)|\, dx + \int_I \int_{{}^cI^*} \frac{6\,|x - x_0|}{|x_0 - y|^2} dy\, dx \right) \\ &\leq J_1 + \frac{6r}{|I|}\int_I dx \int_{{}^cI^*} \frac{dy}{|x_0 - y|^2} \\ &\leq J_1 + 3. \end{aligned}$$

Para estimar J_1 fazemos as mudanças de variáveis $y' = y - x_0$ e $x' = x - x_0$ transladamos o intervalo I de centro x_0 para o intervalo $I(0)$ de centro 0 preservando o comprimento do lado, então

$$\frac{1}{|I|}\int_I |D^\varepsilon(\chi_{I^*})(x)| dx = \frac{1}{|I|}\int_{I(0)} \left| \int_{I^*(0)} \frac{x - y}{(x-y)^2 + \varepsilon^2}\, dy \right| dx\,.$$

Por outro lado,

$$\int_{I^*(0)} = \int_{I^*(0)+x} - \int_{(I^*(0)+x)\setminus I^*(0)} + \int_{I^*(0)\setminus (I^*(0)+x)}$$

como,

$$\int_{I^*(0)+x} \frac{x-y}{(x-y)^2 + \varepsilon^2} dy = \int_{I^*(0)} \frac{-y}{y^2 + \varepsilon^2} dy = 0\ ,$$

temos, ($\triangle$ diferença simétrica)

$$\frac{1}{|I|}\int_I |D^\varepsilon(\chi_{I^*})(x)|dx \leq \frac{1}{|I|}\int_{I(0)}\int_{I^*(0)\triangle(I^*(0)+x)} \frac{|x-y|}{(x-y)^2+\varepsilon^2}\,dy\,dx$$
$$\leq \frac{1}{|I|}\int_{I^*(0)\triangle I*(x)}\int_{I(0)} \frac{1}{|x-y|}\,dx\,dy\,,$$

sendo $|x-y| > \frac{|I|}{2}$ então

$$\int_{I(0)} \frac{1}{|x-y|}dy \leq \frac{2}{|I|}|I^*(0)\triangle I^*(x)| \leq \frac{2(|I^*(0)|+|I^*(x)|)}{|I|} = 8\,.$$

Portanto para todo intervalo I em $\mathbb{R}$ temos

$$\frac{1}{|I|}\int_I |D^\varepsilon(1)(x)|dx \leq 11$$

isto é, $D^\varepsilon(1) \in BMO$ e $\|D^\varepsilon(1)\|_{BMO} \leq 11$ para todo ε.

Observando que ${}^tK_\varepsilon = -K_\varepsilon$ e assim conclui-se que $\|{}^tD^\varepsilon(1)\|_{BMO} \leq 11$ para todo ε. Desta maneira pelo teorema $T1$ podemos concluir que existe uma constante $C > 0$ independente de ε tal que

$$\|D^\varepsilon f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}\,.$$

∎

Como consequência desta proposição temos;

Corolário 1.5.1 *A transformada de Hilbert H é limitada em L^2.*

Prova:

Basta ressaltar que $< D^\varepsilon\varphi,\psi > \longrightarrow < H\varphi,\psi >\,,\ \varepsilon \longrightarrow 0\,,$ para toda φ, ψ $\in \mathcal{S}$ então

$$\begin{aligned}\|H\|_{L^2} &= \sup_{\|\varphi\|_{L^2}\leq 1}\ \sup_{\|\psi\|_{L^2}\leq 1} |< H\varphi,\psi >| \\ &\leq \sup_{\|\varphi\|_{L^2}\leq 1}\ \sup_{\|\psi\|_{L^2}\leq 1} \lim_{\varepsilon\to 0}|< D_\varepsilon\varphi,\psi >| \\ &\leq \|D_\varepsilon\|\,.\end{aligned}$$

Capítulo 2

Estimativa a priori em $L^1(H^1)$

Neste capítulo consideramos o campo em duas variáveis (x,t)

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - i\, b(t)\frac{\partial}{\partial x}\ , \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad |t| \leq T. \tag{2.1}$$

com b uma função real, suave e não negativa. Estamos interessados em responder a seguinte questão:

Dada $f \in L^\infty((-T,T), BMO(\mathbb{R}_x))$ existe $u \in L^\infty((-T,T), BMO(\mathbb{R}_x))$ com

$$Lu = f \ \ em \ \ \mathcal{D}'(\Omega)\ ,$$

em alguma vizinhança $\Omega = \mathbb{R}_x \times (-T,T)$.

Hounie e Tavares em [HT] exibiram $b(t) \geq 0$, suave tal que o campo L não é localmente resolúvel em $L^\infty(\Omega)$ para nenhuma vizinhança Ω da origem; este fato leva nos a seguinte pergunta: aumentando o espaço de L^∞ para $L^\infty(BMO)$ conseguimos encontrar solução desta equação no mesmo espaço $L^\infty(BMO)$? Para responder esta pergunta de maneira afirmativa provaremos a seguinte desigualdade a priori :

$$\|\varphi\|_{L^1((-T,T),H^1(\mathbb{R}_x))} \leq CT\|L\varphi\|_{L^1((-T,T),H^1(R_x))}\ , \tag{2.2}$$

para toda φ no espaço

$$\left\{ \varphi \in C_c^\infty((-T,T), \mathcal{S}(\mathbb{R}_x));\ \int \varphi(x,t)dx = 0\, ,\ t \in (-T,T) \right\}\ ,$$

onde denotamos por

$$\|\varphi\|_{L^1((-T,T),H^1(\mathbb{R}_x))} = \int_{-T}^{T} \|\varphi(\cdot,t)\|_{H^1(\mathbb{R}_x)} dt\,.$$

A desigualdade a priori (2.2) acima constitui o principal resultado deste capítulo.

2.1 Estimativas preliminares

Iniciamos considerando, $Z(x,t) = x + i\beta(t)$, com $\beta(t) = \int_0^t b(s)ds$ uma integral primeira para o campo L. Em seguida, fixado $t \in (-T,T)$, e $a > 0$ consideremos os retângulos

$$Q_t^+ = (-a,a) \times (t,T) \ , \qquad Q_t^- = (-a,a) \times (-T,t) \ ,$$

e para uma dada $\varphi \in C_c^\infty((-a,a) \times (-T,T))$, seja

$$^aU_\varepsilon^+(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial Q_t^+} \frac{\varphi(x',t') \ dZ(x',t')}{\varepsilon + i(Z(x,t) - Z(x',t'))} \ . \tag{2.3}$$

Segue do fato que $s(\varphi) \subset (-a,a) \times (-T,T)$ que $\varphi \, dZ \equiv 0$ em ∂Q_t^+, exceto no lado $(-a,a) \times t$, então

$$^aU_\varepsilon^+(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \frac{\varphi(x',t) \ dx'}{\varepsilon + i(x - x')} \ . \tag{2.4}$$

Por outro lado, pelo teorema de Green também temos que

$$^aU_\varepsilon^+(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{Q_t^+} d(\tilde{\varphi} \ dZ) \ ,$$

onde,

$$\tilde{\varphi}(x',t') = \frac{\varphi(x',t')}{\varepsilon + i(Z(x,t) - Z(x',t'))} \ .$$

Como podemos escrever $d\tilde{\varphi} = L\tilde{\varphi} \, dt' + \partial_x \tilde{\varphi} \, dZ$ então $d(\tilde{\varphi} \, dz) = L\tilde{\varphi} \, dt \wedge dZ$, com

$$L\tilde{\varphi}(x',t') = \frac{L\varphi(x',t')}{\varepsilon + i(Z(x,t) - Z(x',t'))} \ ,$$

uma vez que $L(Z) = 0$. Assim temos também que

$$\begin{aligned} ^aU_\varepsilon^+(x,t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{Q_t^+} \frac{L\varphi(x',t') \ dt' \wedge dZ}{\varepsilon + i(Z(x,t) - Z(x',t'))} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_t^T \int_{-a}^{a} \frac{L\varphi(x',t') \, dx' \, dt'}{x - x' - i(\beta(t') - \beta(t) + \varepsilon)} \ . \end{aligned} \tag{2.5}$$

De maneira análoga podemos definir

$$^aU_\varepsilon^-(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial Q_t^-} \frac{\varphi(x',t') \ dZ}{-\varepsilon + i(Z(x,t) - Z(x',t'))} \ ,$$

e obter as fórmulas

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \frac{\varphi(x',t) \, dx'}{-\varepsilon + i(x - x')} &= {}^aU_\varepsilon^-(x,t) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-T}^{t} \int_{-a}^{a} \frac{L\varphi(x',t') \, dx' \, dt'}{x - x' + i(\beta(t) - \beta(t') + \varepsilon)} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Somando (2.4) com (2.6) obtemos

$$({}^aU_\varepsilon^+ +{}^a U_\varepsilon^-)(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} \frac{\varepsilon\ \varphi(x',t)\ dx'}{\varepsilon^2+(x-x')^2} = (P_\varepsilon * \varphi(\cdot,t))(x'))\,, \tag{2.7}$$

onde

$$P(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}\ , \qquad P_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}P(x/\varepsilon)\,.$$

Em seguida se denotarmos por

$${}^+A^\varepsilon_{(t,t')}L\varphi(x,t') = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{(-a,a)}(x') \frac{L\varphi(x',t')\ dx'}{x-x'-i(\beta(t')-\beta(t)+\varepsilon)}\ , \tag{2.8}$$

onde $\chi_{(-a,a)}$ é a função característica do intervalo $(-a,a)$, obtemos de (2.5),

$${}^aU_\varepsilon^+(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_t^T {}^+A^\varepsilon_{(t,t')}L\varphi(x,t')\ dt'\,. \tag{2.9}$$

(Temos fórmulas análogas para ${}^aU_\varepsilon^-(x,t)$.)

Para t' fixo, (2.8) fornece um operador B^ε que age em funções de uma variável real da seguinte forma

$$\begin{aligned} B^\varepsilon f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x')\ dx'}{x-x'-i(\beta(t')-\beta(t)+\varepsilon)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K_\varepsilon(x,x')f(x')\,dx' + i\int_{-\infty}^{\infty} P_{\varepsilon'}(x-x')f(x')\,dx' \\ &= D^\varepsilon f(x) + iP_{\varepsilon'} * f(x)\,, \end{aligned} \tag{2.10}$$

onde,

$$K_\varepsilon(x,x') = \frac{x-x'}{(x-x')^2+(\varepsilon+\beta(t')-\beta(t))^2}\ , \qquad \varepsilon' = \varepsilon+\beta(t')-\beta(t) > 0\,.$$

É imediato do teorema 1.1.2 que

$$\|P_{\varepsilon'} * f\|_{L^1(\mathbb{R})} \le \|f\|_{H^1(\mathbb{R})}, \qquad f\in H^1(\mathbb{R}). \tag{2.11}$$

A proposição 1.5.1 dá a limitação uniforme dos operadores D^ε em L^2 isto somado ao fato que os kernels K_ε são padrões com constantes uniformes. Provaremos que os operadores D^ε são uniformemente limitados de $H^1(\mathbb{R})$ em $L^1(\mathbb{R})$, de fato, se a é um H^1-átomo com $s(a)\subset I = I(x_0,r)$ e $I^* = I(x_0,2r)$ então

$$\int_{I^*} |D^\varepsilon a(x)|\,dx \le \|D^\varepsilon a\|_{L^2}|I^*|^{1/2} \le \|D^\varepsilon\|_{L^2}\|a\|_{L^2}|I^*|^{1/2} \le C\frac{|I^*|^{1/2}}{|I|^{1/2}} \le C\,.$$

Por outro lado, como $\int a(x)dx = 0$, e os núcleos são padrões temos

$$\begin{aligned}
\int_{^cI^*} |D^\varepsilon a(x)|dx &\leq \int_{^cI^*} |K_\varepsilon(x,y) - K_\varepsilon(x,x_0)|dx \int_I |a(y)|dy \\
&\leq \int_{^cI^*} \frac{6r}{|x-x_0|^2}dx \\
&\leq C\,.
\end{aligned}$$

Portanto, usando a decomposição atômica, vem

$$\|D^\varepsilon f\|_{L^1} \leq C\|f\|_{H^1}\ , \quad f \in H^1(\mathbb{R})\,. \tag{2.12}$$

Desta maneira, podemos enunciar o seguinte:

Teorema 2.1.1 *Seja L o campo em (2.1). Então existe $C > 0$ tal que*

$$\|\varphi\|_{L^1((-a,a)\times(-T,T))} \leq C\,T\|L\varphi\|_{L^1((-T,T),H^1(\mathbb{R}_x))}\ , \tag{2.13}$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty((-a,a)\times(-T,T))$, com $\int \varphi(x,t)dx = 0$, para todo t.

Prova:
De (2.8), (2.10), (2.11), e (2.12) temos

$$\|{}^\pm A^\varepsilon_{(t,t')} L\varphi(\cdot,t')\|_{L^1(\mathbb{R}_x)} \leq C\,\|L\varphi(\cdot,t')\|_{H^1(\mathbb{R}_x)}. \tag{2.14}$$

Em seguida de (2.9) e (2.14) vem

$$\begin{aligned}
\|{}^aU^+_\varepsilon(\cdot,t) +^a U^-_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^1(-a,a)} &\leq \int_t^T \|{}^+A^\varepsilon_{(t,t')}L\varphi(\cdot,t')\|_{L^1(\mathbb{R}_x)}dt' \\
&+ \int_{-T}^t \|{}^-A^\varepsilon_{(t,t')}L\varphi(\cdot,t')\|_{L^1(\mathbb{R}_x)}dt' \\
&\leq C\,\|L\varphi\|_{L^1((-T,T),H^1(\mathbb{R}_x))}.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Por outro lado de (2.7) sabemos que

$$({}^aU^+_\varepsilon +^a U^-_\varepsilon)(\cdot,t) = P_\varepsilon * \varphi(\cdot,t)(x) \longrightarrow \varphi(x,t)\ , \quad \varepsilon \longrightarrow 0\,,$$

uniformemente em x, implicando

$$\|({}^aU^+_\varepsilon +^a U^-_\varepsilon)(\cdot,t)\|_{L^1(-a,a)} \to \|\varphi(\cdot,t)\|_{L^1(-a,a)}, \quad \varepsilon \longrightarrow 0.$$

Desta maneira de (2.15) segue

$$\|\varphi(\cdot,t)\|_{L^1(-a,a)} \leq C\|L\varphi\|_{L^1((-T,T),H^1(\mathbb{R}_x))}. \tag{2.16}$$

Integrando (2.16) em t de $-T$ a T obtemos

$$\|\varphi\|_{L^1((-a,a)\times(-T,T))} \leq C\,T\|L\varphi\|_{L^1((-T,T),H^1(\mathbb{R}_x))}.$$

∎

Tendo obtido a desigualdade (2.13) uma tentativa para se chegar a desigualdade (2.2) seria, considerar o fato que (ver teorema 1.1.4)

$$\|\varphi(\cdot,t)\|_{H^1(\mathbb{R}_x)} \leq C(\|\varphi(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}_x)} + \|H\varphi(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}_x)})$$

e no lado esquerdo desta desigualdade usar (2.13) para $\varphi(\cdot,t)$ e $H\varphi(\cdot,t)$. O empecilho para se fazer isto é devido ao fato que $H\varphi(\cdot,t)$ não tem suporte compacto em geral. Com o objetivo de sanar esta dificuldade iremos primeiro observar que a estimativa (2.14) é também válida para uma classe maior de funções a saber

$$\left\{\varphi \in C_c^\infty((-T,T),\mathcal{S}(\mathbb{R}_x))\,;\int \varphi(x,t)dx = 0 \text{ para todo } \ t\in(-T,T)\right\}.$$

De fato, dada $\varphi \in C_c^\infty((-T,T),\mathcal{S}(\mathbb{R}_x))$, e $a>0$ consideramos ${}^aU_\varepsilon^+(x,t)$ dado por (2.3) ou (2.5), (onde ressaltamos a sua dependência de a).

Segue do teorema da convergência dominada que

$$U_\varepsilon^+(x,t) = \lim_{a\to\infty} {}^aU_\varepsilon^+(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_t^T\int_{-\infty}^\infty \frac{L\varphi(x',t')\,dx'\,dt'}{x-x'+i(\beta(t)-\beta(t')+\varepsilon)}\ .$$

Por outro lado $s(\varphi(x,\cdot)) \subset (-T,T)$ então $\varphi\,dZ \equiv 0$ em $(-a,a)\times T$, e novamente pelo teorema de Green

$$\begin{aligned} {}^aU_\varepsilon^+(x,t) &= \int_{-a}^a \frac{\varphi(x',t)dx'}{\varepsilon+i(x-x')} + \frac{i}{2\pi}\int_t^T \frac{\varphi(a,t')\,b(t')\,dt'}{\varepsilon+i(x-a+i(\beta(t)-\beta(t')))} \\ &+ \frac{i}{2\pi}\int_t^T \frac{\varphi(-a,t')\,b(t')\,dt'}{\varepsilon+i(x+a+i(\beta(t)-\beta(t')))}\,. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Como $\varphi \in C_c^\infty((-T,T),\mathcal{S}_x)$ então $|\varphi(a,t')| \leq C/a$ para todo $t'\in(-T,T)$, portanto as duas integrais que aparecem em (2.17) vão a zero quando $a\to\infty$, sendo assim, temos

$$U_\varepsilon^+(x,t) = \lim_{a\to\infty} {}^aU_\varepsilon^+(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\varphi(x',t)}{\varepsilon+i(x-x')}dx'.$$

Fórmulas análogas se obtêm para $U_\varepsilon^-(x,t)$. Desta maneira,

$$(U_\varepsilon^+ + U_\varepsilon^-)(x,t) = (P_\varepsilon * \varphi(\cdot,t))(x) \longrightarrow \varphi(x,t)\,,\quad \varepsilon\longrightarrow 0\,,\quad \text{em } L^1(\mathbb{R}_x)\,.$$

Ressaltamos que o operador B^ε obtido como antes satisfaz

$$\begin{aligned} \|B^\varepsilon L\varphi(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}_x)} &\leq \|D^\varepsilon * L\varphi(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}_x)} + \|P_\varepsilon * L\varphi(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}_x)} \\ &\leq \|L\varphi(\cdot,t)\|_{H^1(\mathbb{R}_x)}\,. \end{aligned}$$

Tendo observado estes fatos, a demonstração do corolário seguinte é análoga ao teorema 2.1.1;

Corolário 2.1.1 *Existe $C > 0$ tal que*

$$\|\varphi\|_{L^1(\Omega_T)} \leq C\,T\,\|L\varphi\|_{L^1((-T,T),H^1(\mathbb{R}_x))}\,,$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty((-T,T),\mathcal{S}(\mathbb{R}_x))\,,\ \int \varphi(x,t)dx = 0$ *para todo* t*, onde* $\Omega_T = \mathbb{R}_x \times (-T,T)\,.$

2.2 A estimativa a priori

Neste momento estamos aptos para provar a estimativa (2.2);

Teorema 2.2.1 *Existe $C > 0$ tal que*

$$\|\varphi\|_{L^1((-T,T),H^1(\mathbb{R}_x))} \leq C\,T\,\|L\varphi\|_{L^1((-T,T),H^1(\mathbb{R}_x))},$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty((-T,T),\mathcal{S}(\mathbb{R}_x))$ *com* $\int \varphi(x,t)dx = 0$ *para todo* t*.*

Prova:
Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$

$$\phi(\xi) = \begin{cases} 1\,, & \text{se} \quad |\xi| \leq 1\,, \\ 0\,, & \text{se} \quad |\xi| \geq 2\,. \end{cases}$$

Para cada t fixo, considere a seqüência $\{\psi^\varepsilon(\cdot,t)\}_{\varepsilon>0}$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}_x)$ onde

$$\widehat{\psi^\varepsilon}(\xi,t) = (1-\phi(\xi/\varepsilon))\widehat{H\varphi(\cdot,t)}(\xi)$$

e H a transformada de Hilbert.

Assim do corolário 2.1.1

$$\|\psi^\varepsilon\|_{L^1(\Omega_T)} \leq C\,T \int_{-T}^{T} \|L\psi^\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^1(\mathbb{R}_x)}dt. \tag{2.18}$$

Por outro lado pela proposição 1.1.3

$$\psi^\varepsilon = H\varphi - (\check{\phi})_{1/\varepsilon} * H\varphi \longrightarrow H\varphi\,, \quad \varepsilon \longrightarrow 0\,,$$

$$\partial_x\psi^\varepsilon = H\partial_x\varphi - (\check{\phi})_{1/\varepsilon} * H\partial_x\varphi \to H\partial_x\varphi\,, \quad \varepsilon \longrightarrow 0\,,$$

em $H^1(\mathbb{R}_x)$ (onde $\check{}$ significa a transformada de Fourier inversa). Desta maneira quando $\varepsilon \longrightarrow 0$ em (2.18)

$$\|H\varphi\|_{L^1(\Omega_T)} \leq C\,T \int_{-T}^{T} \|LH\varphi(\cdot,t)\|_{H^1(\mathbb{R}_x)}dt. \tag{2.19}$$

Agora, como $LH = HL$ e H é um operador limitado em $H^1(\mathbb{R})$ de (2.19)

$$\|H\varphi\|_{L^1(\Omega_T)} \leq C\,T\|L\varphi\|_{L^1((-T,T),H^1(\mathbb{R}_x))}. \tag{2.20}$$

Finalmente, lembrando do teorema 1.1.4 temos

$$\|\varphi(\cdot,t)\|_{H^1(\mathbb{R}_x)} \;\; \leq \;\; C\left(\|\varphi(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}_x)} + \|H\varphi(\cdot,t)\|_{L^1(\mathbb{R}_x)}\right),$$

e em seguida, de (2.20) e novamente usando o corolário 2.1.1 obtemos

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{L^1((-T,T),H^1(\mathbb{R}_x))} &\leq C(\|\varphi\|_{L^1(\Omega_T)} + \|H\varphi\|_{L^1(\Omega_T)}) \\
&\leq C\,T\|L\varphi\|_{L^1((-T,T),H^1(\mathbb{R}_x))}.
\end{aligned}$$

∎

Corolário 2.2.1 *Seja $P = \partial_t + ib(t)\partial_x + c(t) = L + c(t)$, com b, c funções suaves, $b \geq 0$ e c complexa e limitada . Então existem $C > 0$, $T_0 > 0$ tal que para todo $T \leq T_0$*

$$\|\varphi\|_{L^1((-T,T),(H^1(\mathbb{R}_x))} \leq CT\|{}^tP\varphi\|_{L^1((-T,T),H^1(\mathbb{R}_x))}\,, \tag{2.21}$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty((-T,T),\mathcal{S}(\mathbb{R}_x))$, com $\int \varphi(x,t)dx = 0$ para todo t.

Prova:

Como ${}^tP = -L + c$, então do teorema 2.2.1

$$\|\varphi\|_{L^1((-T,T),H^1(\mathbb{R}_x))} \leq C\,T(\|{}^tP\varphi\|_{L^1((-T,T),H^1(\mathbb{R}_x))} + \|c\|_{L^\infty}\|\varphi\|_{L^1((-T,T),H^1(\mathbb{R}_x))})\,,$$

considerando $T_0 > 0$ com $C\,T_0\|c\|_{L^\infty} \leq 1/2$ temos

$$\|\varphi\|_{L^1((-T,T),(H^1(\mathbb{R}_x))} \leq CT\|{}^tP\varphi\|_{L^1((-T,T),H^1(\mathbb{R}_x))}\,, \tag{2.22}$$

para todo $T < T_0$. ∎

2.3 Resolubilidade Local em $L^\infty(BMO)$

Nesta seção veremos em que sentido a estimativa a priori obtida na seção anterior implica em resolubilidade local em $L^\infty(BMO)$. Iniciamos, supondo que o ponto em que iremos testar a resolubilidade local é a origem, e denotamos por $C_c^\infty(\mathcal{S}) = C_c^\infty((-T,T),\mathcal{S}(\mathbb{R}_x))$,

$$\tilde{C}_c^\infty(\mathcal{S}) = \left\{\varphi \in C_c^\infty(\mathcal{S});\int \varphi(x,t)dx = 0\,,\ \text{para todo } t\right\},$$

$$L^1(H^1) = L^1((-T,T), H^1(\mathbb{R}_x))\,, \quad \text{e} \quad L^\infty((-T,T), BMO(\mathbb{R}_x)) = L^\infty(BMO)\ .$$

Observamos que ${}^tP(\tilde{C}_c^\infty(\mathcal{S})) \subseteq \tilde{C}_c^\infty(\mathcal{S}) \subset L^1(H^1)$. Assim para uma dada $f \in L^\infty(BMO)$, consideramos o funcional linear $\lambda : {}^tP(\tilde{C}_c^\infty(\mathcal{S})) \longrightarrow \mathbb{C}$ definido por

$$\lambda(\psi) = \int f\varphi\,, \quad \text{onde} \quad \psi = {}^tP\varphi\,.$$

A desigualdade (2.22) mostra que λ está bem definido. Também de (2.22) temos que λ é contínuo em $\tilde{C}_c^\infty(\mathcal{S})$ dotado com a norma $L^1(H^1)$, pois

$$|\lambda(\psi)| \le \|f\|_{L^\infty(BMO)}\|\varphi\|_{L^1(H^1)} \le C\,T\|f\|_{L^\infty(BMO)}\|\psi\|_{L^1(H^1)}\,.$$

Sendo assim, do teorema de Hahn-Banach existe uma extensão Λ de λ para $L^1(H^1)$. Por outro lado, da dualidade entre $L^1(H^1)$ e $L^\infty(BMO)$ existe $u \in L^\infty(BMO)$ tal que $\Lambda = u$, logo $\lambda = \Lambda|_{\tilde{C}_c^\infty(\mathcal{S})} = u|_{\tilde{C}_c^\infty(\mathcal{S})}$. Portanto

$$< Pu, \varphi > = < u, {}^tP\varphi > = \lambda({}^tP\varphi) = \int f\varphi\,, \quad \varphi \in \tilde{C}_c^\infty(\mathcal{S})\,.$$

Ainda pelo teorema de Hahn-Banach temos

$$\|u\|_{L^\infty(BMO)} \le C\,T\|f\|_{L^\infty(BMO)}\,.$$

Por outro lado, notando que o conjunto

$$\tilde{C}_c^\infty = \left\{\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}); \int \varphi(x)dx = 0\right\},$$

é um subespaço de $C_c^\infty(\mathbb{R})$ de codimensão 1 (é núcleo de um funcional linear apropriado) então existe $\varphi_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R})\,,\ \int \varphi_0 = 1$, e a seguinte decomposição para $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$; $\psi = \varphi + \alpha\varphi_0$, com $\varphi \in \tilde{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ dependentes de ψ. Sendo assim, dada $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, e para cada t existem $\varphi \in \tilde{C}_c^\infty(\mathcal{S})$ e $\alpha(t)$ tal que $\psi(\cdot,t) = \varphi(\cdot,t) + \alpha(t)\varphi_0(\cdot)$, com $\int \psi(x,t)dx = \alpha(t) \in C_c^\infty(\mathbb{R}_t)$.

Desta maneira temos,

$$< Pu - f, \psi > = < u, {}^tP(\alpha\varphi_0) > - < f, \alpha\varphi_0 >\,,$$

por outro lado,

$$< f, \alpha\varphi_0 > = \int\int \psi(x,t) < f(.,t), \varphi_0 > dtdx = (1 \otimes v_0(t))(\psi)$$

$$\begin{aligned} < u, {}^tP(\alpha\varphi_0) > &= \int\int \partial_t\psi(x,t) < u(.,t), \varphi_0 > dtdx \\ &- i\int\int \psi(x,t) < (u\partial_x b)(.,t), \varphi_0 > dtdx \\ &- i\int\int \psi(x,t) < (ub)(.,t), \varphi_0' > dtdx \\ &= (1 \otimes v_1(t))(\psi) + (1 \otimes v_2(t))(\psi) + (1 \otimes v_3(t))(\psi)\,, \end{aligned}$$

e portanto

$$< Pu - f, \psi >= (1 \otimes (v_0 + v_1 + v_2 + v_3))(\psi)\,, \quad \psi \in C_c^\infty\,.$$

A idêntidade acima mostra que Pu coincide com f a menos de uma função que só depende de t. Entretanto, no espaço $L^\infty(BMO)$, elementos que diferem por uma função que só depende de t são equivalentes (consequência de que elementos de BMO estão definidos a menos de uma constante aditiva). Em resumo, as classes de Pu e f em $L^\infty(BMO)$ coincidem, e podemos enunciar:

Teorema 2.3.1 *Existe $T > 0$, tal que dada $f \in L^\infty((-T,T),(BMO(\mathbb{R}_x))$, existe $u \in L^\infty((-T,T), BMO(R_x))$ tal que $Pu = f$ no sentido fraco acima.*

Capítulo 3

Estimativa a priori em $L^1(h^1)$

No capítulo anterior provamos uma estimativa a priori em $L^1(H^1)$ para o operador no plano $P = \partial_t + ib(t)\partial_x + c(t)$, com b, c funções suaves, $b \geq 0$ e c complexa e limitada. As funções b, c neste caso, não podiam depender da variável x uma vez que H^1 não é estável por multiplicação de funções C^∞. Neste capítulo provaremos uma estimativa parecida para o operador no plano nas variáveis (x,t), dado por

$$P = \partial_t + ib(x,t)\partial_x + c(x,t) = L + c(x,t) \ , \tag{3.1}$$

para o espaço apropriado $L^1(h^1)$. Mais precisamente, o resultado principal deste capítulo é o seguinte:

Seja L o campo em (3.1), *b função real suave tal que para cada* x, *a aplicação* $t \mapsto b(x,t)$ *não muda de sinal. Então existem* $C > 0$, $T_0 > 0$ *tais que dados* $0 < T \leq T_0$, *e* $\varphi \in C_c^\infty((-a,a)\times(-T,T))$,

$$\|\varphi\|_{L^1((-T,T),h^1(\mathbb{R}_x))} \leq C\,T\|L\varphi\|_{L^1((-T,T),h^1(\mathbb{R}_x))} \ ,$$

onde denotamos por

$$\|\varphi\|_{L^1((-T,T),h^1(\mathbb{R}_x))} = \int_{-T}^{T} \|\varphi(\cdot,t)\|_{h^1(\mathbb{R}_x)} dt \, .$$

O método utilizado para obtenção das estimativas neste capítulo até chegar a estimativa desejada, será o método de Smith [S] que já foi usado por Hounie e Melo em [HM] para obter estimativas a priori em L^p quando $1 < p < \infty$.

3.1 A decomposição: $\varphi = \varphi_0 + \varphi^+ + \varphi^-$

Iniciamos considerando $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ dada por

$$\chi(\xi) = \begin{cases} 1\,, & \text{se} \quad |\xi| \leq 1\,, \\ 0\,, & \text{se} \quad |\xi| \geq 2 \end{cases}$$

e escrevemos $1 - \chi(\xi) = \psi^+(\xi) + \psi^-(\xi)$, onde

$$\psi^+(\xi) = \begin{cases} 1 - \chi(\xi)\,, & \text{se} \quad \xi \geq 0, \\ 0\,, & \text{se} \quad \xi \leq 0\,. \end{cases}$$

Dada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t)$, para cada t fixo, consideramos a decomposição

$$\begin{aligned} \varphi(\cdot,t) &= P_0\varphi(\cdot,t) + P^+\varphi(\cdot,t) + P^-\varphi(\cdot,t) \\ &= \varphi_0(\cdot,t) + \varphi^+(\cdot,t) + \varphi^-(\cdot,t), \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde, (de agora em diante $\mathcal{F}$ denotará a transformada de Fourier)

$$\begin{aligned} P_0\varphi(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\,\chi(\xi)\,\widehat{\varphi}(\xi,t)\,d\xi \\ &= \mathcal{F}^{-1}(\chi) * \varphi(\cdot,t)(x)\,, \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$P^+\varphi(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\,\psi^+(\xi)\,\widehat{\varphi}(\xi,t)\,d\xi\,, \tag{3.4}$$

$$P^-\varphi(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\,\psi^-(\xi)\,\widehat{\varphi}(\xi,t)\,d\xi\,. \tag{3.5}$$

Desta maneira de (3.2)

$$L\varphi = L\varphi_0 + L\varphi^+ + L\varphi^- = LP_0\varphi + LP^+\varphi + LP^-\varphi\,. \tag{3.6}$$

Neste momento temos em mente obter as seguintes estimativas:
Existe $C > 0$ tal que dada $\varphi \in C_c^\infty((-a,a)\times(-T,T))$,

$$\|\varphi_0\|_{L^1((-a,a)\times(-T,T))} \leq C\,T(\|L\varphi\|_{L^1((-T,T),h^1(\mathbb{R}_x))} + \|\varphi\|_{L^1((-T,T),h^1(\mathbb{R}_x))}), \tag{3.7}$$

$$\|\varphi^\pm\|_{L^1((-a,a)\times(-T,T))} \leq C\,T(\|L\varphi\|_{L^1((-T,T),h^1(\mathbb{R}_x))} + \|\varphi\|_{L^1((-T,T),h^1(\mathbb{R}_x))})\,. \tag{3.8}$$

Daqui pra frente, trataremos separadamente cada uma destas estimativas.

3.2 Estimativa para φ_0

Começamos com a estimativa (3.7) que é a mais fácil de se obter. Com efeito, derivando ambos os menbros da igualdade (3.3) obtemos

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}(x,t) = \mathcal{F}^{-1}(\xi\,\chi) * \varphi(\cdot,t)(x). \tag{3.9}$$

Considerando $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\int \phi \neq 0$, $\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}\phi(x/\varepsilon)$, $0 < \varepsilon < 1$ então

$$\phi_\varepsilon * \varphi_0(\cdot,t)(x) = \phi_\varepsilon * \eta_1 * \varphi(\cdot,t)(x)\,, \tag{3.10}$$

$$\phi_\varepsilon * \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}(\cdot,t)(x) = \phi_\varepsilon * \eta_2 * \varphi(\cdot,t)(x) \tag{3.11}$$

onde $\eta_1 = \mathcal{F}^{-1}(\chi)$, $\eta_2 = \mathcal{F}^{-1}(\xi\chi)$. Como, $\{\phi_\varepsilon * \eta_j\}_{0<\varepsilon<1}$ $j = 1,2$ é uma família limitada de funções de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ então (3.10) e (3.11) implicam

$$\left\|P_0\varphi(\cdot,t)\right\|_{h^1(\mathbb{R}_x)} = \left\|\sup_{0<\varepsilon<1} |\phi_\varepsilon * \eta_1 * \varphi(\cdot,t)|\right\|_{L^1(\mathbb{R}_x)} \leq C\|\varphi(\cdot,t)\|_{h^1(\mathbb{R}_x)}\,, \tag{3.12}$$

$$\left\|\frac{\partial P_0\varphi}{\partial x}(\cdot,t)\right\|_{h^1(\mathbb{R}_x)} = \left\|\sup_{0<\varepsilon<1} |\phi_\varepsilon * \eta_2 * \varphi(\cdot,t)|\right\|_{L^1(\mathbb{R}_x)} \leq C\|\varphi(\cdot,t)\|_{h^1(\mathbb{R}_x)}. \tag{3.13}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
|\phi_\varepsilon * \varphi_0(x,t)| &= \left|\int \phi_\varepsilon(x-x')\int_{-T}^{t} \frac{\partial \varphi_0}{\partial s}(x',s)\,ds\,dx'\right| \\
&= \left|\int \phi_\varepsilon(x-x')\Big(\int_{-T}^{t} L\varphi_0(x',s)\,ds - \int_{-T}^{t} i\,b(x',s)\frac{\partial \varphi_0}{\partial x'}(x',s)ds\Big)dx'\right| \\
&\leq \int_{-T}^{t}\Big(\,|\phi_\varepsilon * L\varphi_0(\cdot,s)(x)\,|\,ds + \left|\phi_\varepsilon * (b(\cdot,s)\frac{\partial \varphi_0}{\partial x'}(\cdot,s))(x)\right|\,\Big)\,ds \\
&\leq \int_{-T}^{T} m_\phi(L\varphi_0(\cdot,s))(x) + m_\phi(b(\cdot,s)\frac{\partial \varphi_0}{\partial x'}(\cdot,s))(x)\,ds\,,
\end{aligned} \tag{3.14}$$

fazendo $\varepsilon \longrightarrow 0$, $|\phi_\varepsilon * \varphi_0(\cdot,t)| \longrightarrow |\varphi_0(\cdot,t)|$ e em seguida integrando em x de $-a$ até a obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} |\varphi_0(x,t)|\,dx &\leq \int_{-T}^{T} \|L\varphi_0(\cdot,s)\|_{h^1(\mathbb{R}_x)}\,ds \\
&+ \int_{-T}^{T} \left\|b(\cdot,s)\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}(\cdot,s)\right\|_{h^1(\mathbb{R}_x)}\,ds.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Aqui, vamos precisar do seguinte lema:

Lema 3.2.1 *Suponha que $b, b' \in L^\infty(\mathbb{R})$. Existe $C > 0$ tal que*

$$\|bf\|_{h^1(\mathbb{R})} \leq C\,\|b\|_{Lip}\|f\|_{h^1(\mathbb{R})}, \qquad f \in h^1(\mathbb{R})$$

onde $\|b\|_{Lip} = \max\{\|b'\|_\infty, \|b\|_\infty\}$.

Prova:

Basta mostrar que existe $C > 0$ tal que

$$\|ba\|_{h^1} \leq C\,\|b\|_{Lip}$$

para todo a h^1-átomo.

Suponha que a é um h^1-átomo com $s(a) \subset I = I(x_0, r)$. Se $r > 1$ temos

$$|b(x)a(x)| \leq \|b\|_{Lip}\frac{1}{|I|},$$

assim $ba/\|b\|_{Lip}$ também é h^1-átomo e portanto

$$\|ba\|_{h^1(\mathbb{R})} \leq C\|b\|_{Lip}.$$

Agora se $r \leq 1$, seja $I^* = I(x_0, 2r)$ e $\phi \in C_c^\infty(I(0,1))$ com $\int \phi(x)dx = 1$ então

$$|\phi_\varepsilon * (ba)(x)\,| \leq \int |\phi_\varepsilon(x-y)|\,|b(y)|\,|a(y)|\,dy \leq \|b\|_\infty \frac{1}{|I|},$$

logo,

$$\int_{I^*} |\,m_\phi(ba)(x)\,|dx \leq C\,\|b\|_{Lip}.$$

Por outro lado, dado $x \notin I^*$, $y \in I$, como $s(\phi_\varepsilon) \subset I(0,\varepsilon)$, se $2\varepsilon < |x - x_0|$ então $|x-y| > |x-x_0| - |x_0 - y| > \varepsilon$ e portanto, $\phi_\varepsilon(x-y) = 0$ implicando $\phi_\varepsilon * (ba)(x) = 0$. Se $2\varepsilon > |x - x_0|$ como $\int a(y)dy = 0$, $0 < \varepsilon < 1$ então

$$\begin{aligned}
|\,\phi_\varepsilon * (ba)(x)\,| &\leq \int |\,\phi_\varepsilon(x-y)b(y) - \phi_\varepsilon(x-x_0)b(x_0)\,|\,|a(y)|dy \\
&\leq \int C\,|y - x_0|\left(\frac{\|b\|_{L^\infty}}{\varepsilon^2} + \frac{\|b'\|_{L^\infty}}{\varepsilon}\right)|a(y)|dy \\
&\leq \frac{C\,\|b\|_{Lip}}{\varepsilon^2}\int r\,|a(y)|dy \\
&\leq C\,\|b\|_{Lip}\frac{r}{|x-x_0|^2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{{}^cI^*} |m_\phi(ba)(x)|dx \leq C\,\|b\|_{Lip}\,r\int_{{}^cI^*} \frac{1}{|x-x_0|^2}dx \leq C\,\|b\|_{Lip}.$$

∎

Neste momento, estamos em condições de enunciar o seguinte:

Proposição 3.2.1 *Existe $C>0$ tal que dada $\varphi \in C_c^\infty((-a,a)\times(-T,T))$,*

$$\|\varphi_0\|_{L^1((-a,a)\times(-T,T))} \leq C\,T\left(\|L\varphi\|_{L^1((-T,T),h^1(\mathbb{R}_x))} + \|\varphi\|_{L^1((-T,T),h^1(\mathbb{R}_x))}\right). \tag{3.16}$$

Prova:

Vem do lema 3.2.1, mais (3.12), e (3.13) que

$$\left\|b(\cdot,t)\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}(\cdot,t)\right\|_{h^1(\mathbb{R}_x)} \leq C\left\|\frac{\partial P_0\varphi}{\partial x}(\cdot,t)\right\|_{h^1(\mathbb{R}_x)} \leq C\|\varphi(\cdot,t)\|_{h^1(\mathbb{R}_x)}. \tag{3.17}$$

Observando que,

$$L\varphi_0 = LP_0\varphi = P_0L\varphi + [L,P_0]\varphi, \tag{3.18}$$

de maneira análoga a (3.10) e (3.12) concluímos que

$$\|P_0L\varphi(\cdot,t)\|_{h^1(\mathbb{R}_x)} \leq C\,\|L\varphi(\cdot,t)\|_{h^1(\mathbb{R}_x)}. \tag{3.19}$$

Pelo fato que $[\partial_t, P_0]=0$ então

$$\begin{aligned}
[L,P_0]\varphi(\cdot,t) &= [ib(\cdot,t)\frac{\partial}{\partial x}, P_0]\varphi(\cdot,t)\\
&= ib(\cdot,t)\frac{\partial P_0\varphi}{\partial x}(\cdot,t) - P_0(ib\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\cdot,t)).
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Em seguida escrevemos

$$\begin{aligned}
P_0(ib\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\cdot,t)) &= \mathcal{F}^{-1}\chi(\xi) * (ib\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\cdot,t))\\
&= \eta_1 * (i\frac{\partial(b\varphi)}{\partial x}(\cdot,t)) - \eta_1 * (i\frac{\partial b}{\partial x}\varphi(\cdot,t))\\
&= \frac{\partial\eta_1}{\partial x} * (ib\varphi(\cdot,t)) - \eta_1 * (i\frac{\partial b}{\partial x}\varphi(\cdot,t))\\
&= \eta_2 * i(b\varphi(\cdot,t)) - \eta_1 * (i\frac{\partial b}{\partial x}\varphi(\cdot,t)),
\end{aligned} \tag{3.21}$$

onde $\eta_1 = \mathcal{F}^{-1}(\chi)$, $\eta_2 = \partial_x\eta_1$. Novamente, $\{\psi_\varepsilon * \eta_j\}_{0<\varepsilon<1}$, $j=1,2$ é uma família limitada de funções de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, isto implica

$$\left\|P_0(ib\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\cdot,t))\right\|_{h^1(\mathbb{R}_x)} \leq \|\varphi(\cdot,t)\|_{h^1(\mathbb{R}_x)}. \tag{3.22}$$

Assim de (3.20), (3.17) e (3.22) temos

$$\|[L,P_0]\varphi(\cdot,t)\|_{h^1(\mathbb{R}_x)} \leq C\|\varphi(\cdot,t)\|_{h^1(\mathbb{R}_x)}. \tag{3.23}$$

Portanto de (3.18), (3.19) e (3.23)

$$\|L\varphi_0(\cdot,t)\|_{h^1(\mathbb{R}_x)} \leq C\,(\|L\varphi(\cdot,t)\|_{h^1(\mathbb{R}_x)} + \|\varphi(\cdot,t)\|_{h^1(\mathbb{R}_x)}). \tag{3.24}$$

Finalmente, (3.15), (3.17) e (3.24) implicam

$$\|\varphi_0(\cdot,t)\|_{L^1(-a,a))} \leq C\,T\left(\|L\varphi\|_{L^1((-T,T),h^1(\mathbb{R}_x))} + \|\varphi\|_{L^1((-T,T),h^1(\mathbb{R}_x))}\right),$$

Integrando esta desigualdade em t de $-T$ até T temos a estimativa desejada,

$$\|\varphi_0\|_{L^1((-T,T)\times(-a,a))} \leq C\,T\left(\|L\varphi\|_{L^1((-T,T),h^1(\mathbb{R}_x))} + \|\varphi\|_{L^1((-T,T),h^1(\mathbb{R}_x))}\right).$$

∎

3.3 Estimativa para $\varphi^{\pm}$

Nosso objetivo em seguida, é demonstrar a desigualdade (3.8) . O método empregado para estimar φ_0 não funciona para $\varphi^{\pm}$, uma vez que φ_0 tem uma forma privilegiada, pois é convolução de duas funcões de $\mathcal{S}$. Para tratar de $\varphi^{\pm}$ iremos usar o método de Smith [S], o qual passaremos a descrever.

Iniciamos considerando os operadores

$$L^+ = \frac{\partial}{\partial t} - b(x,t)|D_x| \qquad \text{e} \qquad L^- = \frac{\partial}{\partial t} + b(x,t)|D_x|\,, \tag{3.25}$$

onde

$$|D_x|\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\,x\,\xi}|\xi|\widehat{\varphi}(\xi)d\xi, \qquad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \tag{3.26}$$

É fácil ver que se $s(\widehat{\varphi}) \subset (0,\infty)$ então $|D_x|\varphi = D_x\varphi$, ou se $s(\widehat{\varphi}) \subset (-\infty,0)$, $-|D_x|\varphi = D_x\varphi$, com $D_x = -i\,\partial_x$, $i = \sqrt{-1}$. Tendo observado isto, temos

$$L^+\varphi^+ = L\varphi^+, \qquad L^-\varphi^- = L\varphi^-. \tag{3.27}$$

Seguindo o método de Smith, associamos a L^+ (de modo análogo, se faz para L^-) um campo vetorial real em $\mathbb{R}^3$

$$\ell = \partial_t + b(x,t)\partial_y$$

e para cada ponto $(x,t,0)$ seja $\gamma(s)=(x(s),t(s),y(s))$ a curva integral de ℓ passando por $(x,t,0)$, i.é,

$$\begin{cases} x'(s) = & 0\,, & x(0)=x, \\ t'(s) = & 1\,, & t(0)=t, \\ y'(s) = & b(x(s),t(s))\,, & y(0)=0\,. \end{cases} \tag{3.28}$$

Desta maneira, $\gamma(s)=(x,s+t,y(s;t,x))$ onde

$$y(s;x,t)=\int_0^s b(x,t+s')\,ds'\,,$$

além disso, como $b(x,t+s')$ não muda de sinal, então $y(s;x,t)\geq 0$, para $s\geq 0$ ou para $s\leq 0$. Em seguida considere $U(x,t,y)=(P_y*\varphi^+(\cdot,t))(x)=e^{-y|D_x|}\varphi^+(x,t)$ a solução do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} (\partial_x^2+\partial_y^2)U(x,t,y)=0, & x\in \mathbb{R}, \qquad y>0 \\ U(x,t,0)=\varphi^+(x,t), \end{cases}$$

Notemos que $\partial_y e^{-y|D_x|}=-|D_x|e^{-y|D_x|}$, e $\partial_t e^{-y|D_x|}=e^{-y|D_x|}\partial_t$. Assim, desde que $U(x,\pm T,y)=0$ é possível expressar $\pm\varphi^+(x,t)=\pm U(x,t,0)$, como a linha integral de ℓU ao longo da curva integral de ℓ passando por $(x,t,0)$ da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} \mp\varphi^+(x,t) &= \pm\int_0^{\pm T-t}\frac{d}{ds}(U(x,s+t,y(s;x,t)))ds \\ &= \pm\int_0^{\pm T-t}\ell U(x,s+t,y(s;x,t))ds\,, \end{aligned}$$

fazendo $s'=t+s$ obtemos

$$\mp\varphi^+(x,t)=\pm\int_t^{\pm T}\ell U(x,s',y(s'-t,x,t))ds'\,,$$

e portanto

$$|\varphi^+(x,t)|\leq\int_{-T}^{T}|\ell U(x,s',y(s'-t;x,t))|\,ds'\,.$$

Em seguida tomando o supremo em y

$$|\varphi^+(x,t)|\leq\int_{-T}^{T}\sup_{0<y<1}|\ell U(x,s',y)|\,ds'. \tag{3.29}$$

Por outro lado,

$$\ell U(x,s',y) = e^{-y|D_x|} L\varphi^+(x,s') - [b, e^{-y|D_x|}]\, D_x\varphi^+(x,s'), \tag{3.30}$$

via integração por partes temos

$$\begin{aligned}
[b, e^{-y|D_x|}] D_x\varphi^+(x,s') &= -i\int \frac{b(x,s')-b(z,s')}{x-z} Q_y(x-z)\varphi^+(z,s')\,dz \\
&\quad + P_y * (\frac{\partial b}{\partial x}\varphi^+(\cdot,s'))(x) \\
&= -iQ_y * (\beta^x\varphi^+(\cdot,s'))(x) - iP_y * (\frac{\partial b}{\partial x}\varphi^+(\cdot,s'))(x),
\end{aligned} \tag{3.31}$$

onde $Q_y(x) = x/y^2 P'(x/y)$ e para s' fixo,

$$\beta^x(z) = \begin{cases} \frac{b(x)-b(z)}{x-z}, & \text{se} \quad z \neq x\,, \\ b'(x)\,, & \text{se} \quad z = x\,. \end{cases} \tag{3.32}$$

Assim de (3.30) e (3.31)

$$\begin{aligned}
\ell_* U(x,s') = \sup_{0<y<1} |\ell U(s',x,y)| &\le \sup_{0<y<1} |P_y * L\varphi^+(x,s')| \\
+ \sup_{0<y<1} |P_y * (\frac{\partial b}{\partial x}\varphi^+(\cdot,s'))(x)| &+ \sup_{0<y<1} |Q_y * (\beta^x\varphi^+(\cdot,s')(x)|
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Portanto de (3.29) e (3.33)

$$\begin{aligned}
|\varphi^+(x,t)| \le \int_{-T}^{T} \sup_{0<y<1} \Big(|P_y * L\varphi^+(\cdot,s')(x)| + |P_y * (\frac{\partial b}{\partial x}\varphi^+(\cdot,s'))(x)| \\
+ |Q_y * (\beta^x\varphi^+(\cdot,s'))(x)| \Big) ds'.
\end{aligned}$$

Em seguida integrando em relação a x de $-a$ até a temos

$$\begin{aligned}
\|\varphi(\cdot,t))\|_{L^1(-a,a)} &\le \|\sup_{0<y<1} |P_y * L\varphi^+|\,\|_{L^1((-a,a)\times(-T,T)} \\
&+ \|\sup_{0<y<1} |P_y * (\frac{\partial b}{\partial x}\varphi^+)|\,\|_{L^1((-a,a)\times(-T,T))} \\
&+ \|\sup_{0<y<1} |Q_y * (\beta^x\varphi^+)|\,\|_{L^1((-a,a)\times(-T,T))}.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Neste ponto precisamos dos seguintes teoremas:

Teorema 3.3.1 *Seja* $Q \in C^\infty(\mathbb{R})$ *com* $|Q^{(n)}(x)| \leq C_n/(1+|x|)^{n+2}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ *então*

$$\int_{\mathbb{R}} \sup_{y>0} |Q_y * f(x)|\, dx \leq C\, \|f\|_{H^1(\mathbb{R})}, \quad f \in H^1(\mathbb{R})\,.$$

Prova:

Considere $\phi \in C_c^\infty(I(0,1))$, com $\phi(x) = 1$, se $|x| \leq 1/2$. Como

$$1 = \phi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (\phi(2^{-k-1}x) - \phi(2^{-k}x))\,,$$

então

$$Q(x) = \phi(x)Q(x) + \sum_{k=1}^{\infty} Q(x)(\phi(2^{-k-1}x) - \phi(2^{-k}x)) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\Phi^{(k)}_{2^k}(x)$$

onde $\Phi^{(0)}(x) = \phi(x)Q(x)$, e para $k \geq 1$, $\Phi^{(k)}(x) = 2^{2k}(\phi(2^{-1}x) - \phi(x))Q(2^k x)$.

Agora, desde que $(\phi(2^{-1}x) - \phi(x))$ está suportada em $1/2 \leq |x| < 2$, juntamente com as estimativas para Q segue que a família $\{\Phi^{(k)}\}_k$ é uma família limitada de funções em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Portanto,

$$\sup_{y>0} |f * Q_y(x)| \leq \sum_k 2^{-k} \sup_{y>0} |\Phi^{(k)}_{y2^k} * f(x)| \leq \sum_k 2^{-k} \sup_{s>0} |\Phi^{(k)}_s * f(x)| \leq C\mathcal{M}f(x)$$

onde $\mathcal{M}f$ é a grande função maximal e com C uma constante que independe de k. ∎

Teorema 3.3.2 *Seja* $0 < \alpha < \infty$. *Seja* P *o kernel de Poisson em* $\mathbb{R}^2_+$ *e* Q *nas hipóteses do teorema anterior. Então existe* $C > 0$ *tal que*

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \sup_{0<y<1} |P_y * f(x)|\, dx \leq C\, \|f\|_{h^1(\mathbb{R})}, \quad f \in h^1(\mathbb{R})\,,$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \sup_{0<y<1} |Q_y * f(x)|\, dx \leq C\, \|f\|_{h^1(\mathbb{R})} \quad f \in h^1(\mathbb{R})\,.$$

Prova:

É suficiente que exista $C > 0$ tal que

$$\left\| \sup_{0<y<1} |P_y * a| \right\|_{L^1(-\alpha,\alpha)} \leq C$$

para todo h^1-átomo a.

Seja a um h^1-átomo com $s(a) \subset I = I(x_0, r)$. Se $r \leq 1$ então a é um H^1-átomo e do teorema 1.1.2 esta desigualdade se verifica para H^1-átomos.

Se $r > 1$ basta observar que

$$\sup_{0<y<1} |P_y * a(x)| \leq \|a\|_{L^\infty} \sup_{0<y<1} \|P_y\|_{L^1} \leq |I|^{-1}\|P\|_{L^1} \leq \|P\|_{L^1} = 1\,.$$

Analogamente se faz para Q via o teorema 3.3.1. ∎

Teorema 3.3.3 *Seja $0 < \alpha < \infty$. Suponha Q nas hipóteses do teorema anterior, $\beta \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que existe $K > 0$*

$$|\beta(x,y) - \beta(x,z)| \leq K\frac{|z-y|}{|x-y|}\ , \quad se \quad 2|x-y| \geq |x-z|\,.$$

Então existe $C > 0$ tal que

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \sup_{0<\varepsilon<1} |Q_y * (\beta^x f)(x)|\, dx \leq C\|f\|_{h^1(\mathbb{R})}\,,$$

com $\beta^x(y) = \beta(x,y)$, para toda $f \in h^1(\mathbb{R})$, e $s(f) \subset (-\alpha,\alpha)$.

Prova:

Seja a um h^1-átomo, com $s(a) \subset I$, $I = I(x_0, r)$. Se $r > 1$ então

$$\begin{aligned}
\int_{-\alpha}^{\alpha} \sup_{0<y<1} |Q_y * (\beta^x a)(x)|\, dx &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \sup_{0<y<1} \left| \int Q_y(x-z)\beta^x(z)a(z)\, dz \right| dx \\
&\leq \int_{-\alpha}^{\alpha} \sup_{0<y<1} \|\beta\|_{L^\infty}\|a\|_{L^\infty}\|Q_y\|_{L^1} \\
&\leq 2\alpha\|\beta\|_{L^\infty}\|Q\|_{L^1}\,.
\end{aligned}$$

Suponha que $r \leq 1$. Considerando a decomposição de Q vista no teorema 3.3.1, e observando que as funcões $\Phi^{(k)}_{2^k}$ que aparecem na decomposicão estão suportadas em $D_k = \{2^k \leq |x| \leq 2^{k+1}\}$ segue que se $s(a) \subset (-\alpha-2, \alpha+2)$, então $s(\Phi^{(k)}_{2^k} * a) \cap (-\alpha,\alpha) \subset [D_k + (-\alpha-2, \alpha+2)] \cap (-\alpha,\alpha) = \emptyset$, a menos de uma quantidade finita de índices k. Sendo assim, existem m, n dependentes de $(-\alpha,\alpha)$ tais que

$$Q_y * (\beta^x a)(x) = \sum_{k=m}^{n} 2^{-k}\Phi^{(k)}_{2^k y} * (\beta^x a)(x), \quad 0 < y < 1\,, \quad x \in (-\alpha,\alpha)\,.$$

Pelo teorema 1.2.2, se considerarmos os átomos de uma decomposição atômica de f, podemos supor que $s(a) \subset (-\alpha-2, \alpha+2)$. Por outro lado, a família $\{\Phi^{(k)}_{2^k}\}_{n\leq k\leq m}$ é limitada em $\mathcal{S}$ o que permite reduzir a estimativa a mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}} \sup_{0<\varepsilon<1} |\phi_\varepsilon * (\beta^x a)(x)|\, dx \leq C\ ,$$

para $\phi \in C_c^\infty(I(0,1))\,,\ \int \phi = 1$. Com efeito, inicialmente notemos que

$$\int_{I^*} \sup_{0<\varepsilon<1} |\phi_\varepsilon * (\beta^x a)(x)| dx \leq C\|\beta\|_{L^\infty}\ .$$

Por outro lado, seja $x \notin I^*$, $y \in I$. Como $s(\phi_\varepsilon) \subset I(0,\varepsilon)$, se $|x-x_0| > 2\varepsilon$ então $|x-y| > |x-x_0| - |x_0-y| > \varepsilon$ e portanto $\phi_\varepsilon * (\beta^x a)(x) = 0$. Se $2\varepsilon > |x-x_0|$ como $\int a(y)dy = 0$, $0 < \varepsilon < 1$ ($\varepsilon^{-2} > \varepsilon^{-1}$) então

$$
\begin{aligned}
|\phi_\varepsilon * (\beta^x a)(x)| &\leq \int |(\phi_\varepsilon(x-y)\beta^x(y) - \phi_\varepsilon(x-x_0)\beta^x(x_0)|\,|a(y)|\,dy \\
&\leq \int \left\{ \frac{1}{\varepsilon^2}\|\phi'\|_{L^\infty}\|\beta\|_{L^\infty}\,|x_0-y| + \frac{K}{\varepsilon}\|\phi\|_{L^\infty}\frac{|x_0-y|}{|x-x_0|} \right\} |a(y)|\,dy \\
&\leq \int C(\beta,K)\frac{|x_0-y|}{|x-x_0|^2}\,|a(y)|\,dy \ ,
\end{aligned}
$$

sendo assim, temos

$$
|\phi_\varepsilon * (\beta^x a)(x)| \leq C(\beta,K)\frac{r}{|x-x_0|^2}\int_I |a(y)|\,dy \leq C(\beta,K)\frac{r}{|x-x_0|^2} \ .
$$

Portanto

$$
\int_{{}^cI^*} \sup_{0<\varepsilon<1} |\phi_\varepsilon * (\beta^x a)(x)|\,dx \leq C(\beta,K)\,r\int_{{}^cI^*}\frac{1}{|x-x_0|^2}dx \leq C(\beta,K)\,.
$$

∎

Observando que Q em (3.34) está nas hipóteses dos teoremas 3.3.2 e 3.3.3, e também $\beta(x,y) = \beta^x(y)$ definida em (3.32), pois $\|\beta\|_{L^\infty} \leq \|b'\|_{L^\infty}$ e se $|x-y| \geq 1/2|x-x_0|$ então

$$
|\beta^x(y) - \beta^x(x_0)| \leq C\,\|b'\|_{L^\infty}\frac{|x_0-y|}{|x-x_0|}\,,
$$

portanto, podemos enunciar;

Teorema 3.3.4 *Existe $C>0$ tal que dada $\varphi \in C_c^\infty((-a,a)\times(-T,T))$*

$$
\|\varphi^\pm\|_{L^1((-a,a)\times(-T,T))} \leq CT\big(\|L\varphi\|_{L^1((-T,T),h^1(\mathbb{R}_x))} + \|\varphi\|_{L^1((-T,T),h^1(\mathbb{R}_x))}\big)\,. \tag{3.35}
$$

Prova:

De fato, aplicando os teoremas 3.3.2 e 3.3.3 em (3.34) temos

$$
\|\varphi^\pm(\cdot,t)\|_{L^1(-a,a)} \leq C\big(\|L\varphi^\pm\|_{L^1((-T,T),h^1(\mathbb{R}_x))} + \|\varphi^\pm\|_{L^1((-T,T),h^1(\mathbb{R}_x))}\big), \tag{3.36}
$$

em seguida integrando em relação a t de $-T$ até T obtemos

$$
\|\varphi^\pm\|_{L^1((-T,T)\times(-a,a))} \leq C\,T\,(\|L\varphi^\pm\|_{L^1((-T,T),h^1(\mathbb{R}_x))} + \|\varphi^\pm\|_{L^1((-T,T),h^1(\mathbb{R}_x))}\,); \tag{3.37}
$$

Agora de (3.27)

$$L\varphi^{\pm} = LP^{\pm}\varphi = P^{\pm}L\varphi + [L, P^{\pm}]\varphi\,. \tag{3.38}$$

Desde que $P^{\pm}$, $[L, P^{+}] = [b(\cdot, t), P^{+}]D_x$ são operadores pseudo-diferenciais de ordem zero na variável x e assim pelo teorema 1.3.2 são limitados em $h^1(\mathbb{R})$, logo de (3.37) vem

$$\|\varphi^{\pm}\|_{L^1((-a,a)\times(-T,T))} \leq CT\big(\|L\varphi\|_{L^1((-T,T),h^1(\mathbb{R}_x))} + \|\varphi\|_{L^1((-T,T),h^1(\mathbb{R}_x))}\big)\,.$$

∎

3.4 A estimativa a priori

De (3.2), (3.6), (3.16) e (3.35) temos;

Proposição 3.4.1 *Existe $C > 0$ tal que dada $\varphi \in C_c^{\infty}((-a, a) \times (-T, T))$*

$$\|\varphi\|_{L^1((-a,a)\times(-T,T))} \leq C\,T\big(\|L\varphi\|_{L^1((-T,T),h^1(\mathbb{R}_x))} + \|\varphi\|_{L^1((-T,T),h^1(\mathbb{R}_x))}\big)\,.$$

Estamos perto de obter a estimativa a priori desejada no início deste capítulo. Para isto, iremos fazer uso do teorema 1.2.3, que nos dá uma outra norma equivalente em $h^1(\mathbb{R})$. Antes porem, vamos precisar do seguinte lema;

Lema 3.4.1 *Seja $r(D)$ um operador pseudo-diferencial de ordem zero cujo símbolo $r(x,\xi) = r(\xi)$ independente de x. Além disso, assuma que existe $C > 0$ que*

$$\|f\|_{h^1} \leq C(\|f\|_{L^1} + \|r(D)f\|_{L^1})\,, \qquad f \in h^1.$$

Se K o núcleo associado a $r(D)$ para cada $\varepsilon > 0$ decompomos

$$\begin{aligned} r(D)f(x) &= <\chi(\varepsilon\,(x-\cdot))K, f> + <(1-\chi(\varepsilon\,(x-\cdot)))K, f> \\ &= r_1^{\varepsilon}(D)f(x) + r_2^{\varepsilon}(D)f(x), \end{aligned}$$

onde $\chi \in C_c^{\infty}(-2, 2)$ com $\chi(y) = 1$, se $|y| \leq 1$. Então existe ε_0 tal que para todo $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ existem constantes C_1, $C_2 > 0$ tais que

$$\|f\|_{h^1} \leq C_1(\|f\|_{L^1} + \|r_1^{\varepsilon}(D)f\|_{L^1}) \leq C_2\|f\|_{h^1}. \tag{3.39}$$

Prova:

Para cada $\varepsilon > 0$, $r_1^{\varepsilon}(D)$ é um operador pseudo-diferencial de ordem zero e assim pelo teorema 1.3.2 é limitado em h^1, então

$$\|f\|_{L^1} + \|r_1^{\varepsilon}(D)f\|_{L^1} \leq \|f\|_{h^1} + \|r_1^{\varepsilon}(D)f\|_{h^1} \leq C_2(\varepsilon)\|f\|_{h^1}.$$

Por outro lado, $\|r_2^\varepsilon(D)f\|_{L^1} \leq \|K_2^\varepsilon\|_{L^1}\|f\|_{L^1}$, além disso, $\|K_2^\varepsilon\|_{L^1} \longrightarrow 0$, $\varepsilon \longrightarrow 0$. Sendo assim, existe ε_0 tal que $\|K_2^\varepsilon\|_{L^1} \leq 1/2C$ para $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ e desta maneira

$$\begin{aligned}
\|f\|_{h^1} &\leq C(\|f\|_{L^1} + \|r(D)f\|_{L^1}) \\
&\leq C(\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|r_1^\varepsilon(D)f\|_{L^1(\mathbb{R})} + \frac{1}{2C}\|f\|_{L^1}) \\
&\leq C(\|f\|_{L^1} + \|r_1^\varepsilon(D)f\|_{L^1}) + \frac{1}{2}\|f\|_{h^1}\,.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|f\|_{h^1} \leq 2C(\|f\|_{L^1} + \|r_1^\varepsilon(D)f\|_{L^1}).$$

∎

Teorema 3.4.1 *Existem constantes $C\,, T_0 > 0$ tais que dados $0 < T \leq T_0$, e $\varphi \in C_c^\infty((-a,a)\times(-T,T))$,*

$$\|\varphi\|_{L^1((-T,T),h^1(\mathbb{R}_x))} \leq CT\|L\varphi\|_{L^1((-T,T),h^1(\mathbb{R}_x))}\,. \tag{3.40}$$

Prova:

Seja

$$\widehat{\widetilde{H}\varphi(\cdot,t)}(\xi) = (1-\phi)(\xi)\widehat{H\varphi(\cdot,t)}(\xi) \tag{3.41}$$

com $\phi \in C_c^\infty(-1,1)$. Temos que $\tilde{H}$ é um operador pseudo-diferencial de ordem zero que satisfaz as hipóteses do lema 3.39, logo existe uma decomposição $\widetilde{H} = \widetilde{H}_1^\varepsilon + \widetilde{H}_2^\varepsilon$, com $\widetilde{H}_1^\varepsilon : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}'$ satisfzendo (3.39), i.e.

$$\|\varphi(\cdot,t)\|_{h^1(\mathbb{R}_x)} \leq C(\|\varphi(\cdot,t)\|_{L^1(-a,a)} + \|\widetilde{H}_1^\varepsilon\varphi(\cdot,t)\|_{L^1(-a',a')}), \tag{3.42}$$

para alguma $C > 0$. Por outro lado por (3.35) temos

$$\|\widetilde{H}_1^\varepsilon\varphi\|_{L^1((-T,T)\times(-a',a'))} \leq C\,T\left(\|L\widetilde{H}_1^\varepsilon\varphi\|_{L^1((-T,T),h^1(\mathbb{R}_x))} + \|\widetilde{H}_1^\varepsilon\varphi\|_{L^1((-T,T),h^1(\mathbb{R}_x))}\right). \tag{3.43}$$

Novamente, como $L\widetilde{H}_1^\varepsilon = \widetilde{H}_1^\varepsilon L + [L,\widetilde{H}_1^\varepsilon]$, e $\widetilde{H}_1^\varepsilon$, $[L,\widetilde{H}_1^\varepsilon]$ são operadores pseudo-diferenciais de ordem zero na variável x e assim limitados em $h^1(\mathbb{R})$ (teorema 1.3.2), desta maneira de (3.43) temos

$$\|\widetilde{H}_1^\varepsilon\varphi\|_{L^1((-T,T)\times(-a',a'))} \leq C\,T(\|L\varphi\|_{L^1((-T,T),h^1(\mathbb{R}_x))} + \|\varphi\|_{L^1((-T,T),h^1(\mathbb{R}_x))}). \tag{3.44}$$

Somando (3.35), (3.42) e (3.44) obtemos

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{L^1((-T,T),h^1(\mathbb{R}_x))} &\leq C(\|\varphi\|_{L^1((-T,T)\times(-a,a)} + \|\widetilde{H}_1^{\varepsilon}\varphi\|_{L^1((-T,T)\times(-a',a'))}) \\ &\leq CT(\|\varphi\|_{L^1((-T,T),h^1(\mathbb{R}_x))} + \|L\varphi\|_{L^1((-T,T),h^1(\mathbb{R}_x))}).\end{aligned}$$

Existe T_0 tal que $CT \leq 1/2$ para todo $T \leq T_0$ e portanto

$$\|\varphi\|_{L^1((-T,T);h^1(\mathbb{R}_x))} \leq C\,T\|L\varphi\|_{L^1((-T,T),h^1(\mathbb{R}_x))}.$$

∎

3.5 Resolubilidade Local em $L^\infty(bmo)$

A estimativa a priori obtida na seção anterior implica;

Corolário 3.5.1 *Seja*

$$P = \frac{\partial}{\partial t} + ib(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + c(x,t)\,,$$

com b, c são funções suaves, b real, c complexa, limitada e P satisfazendo a condição $(\mathcal{P})$. *Existe uma vizinhança* $\Omega = (-T,T)\times(-a,a)$ *da origem tal que para toda* $f \in L^\infty((-T,T), bmo(\mathbb{R}_x))$, *existe* $u \in L^\infty((-T,T), bmo(\mathbb{R}_x))$ *satisfazendo*

$$Lu = f\,, \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(\Omega)$$

$$\|u\|_{L^\infty((-T,T),bmo(\mathbb{R}_x))} \leq C\,T\|f\|_{L^\infty((-T,T),bmo(\mathbb{R}_x))}.$$

Capítulo 4

Aplicações e Generalizações

Na literatura o Princípio da Similaridade é aplicado para as soluções clássicas da equação
$$\frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} = A\omega + B\bar{\omega}\,,$$
que são conhecidas por funções pseudo-analíticas ou funções analíticas generalizadas. Este princípio diz que toda solução contínua ω da equação anterior tem a forma $\omega = e^g h$, para h uma função holomorfa e g uma função contínua Hölder. Além disso, ω e h são similares no sentido que $\frac{\omega}{h}$ e $\frac{h}{\omega}$ são limitadas em compactos não contendo a origem. No paper [M], Meziani provou a validade do Princípio da Similaridade para os seguintes campos que satisfazem a condição $(\mathcal{P})$,
$$L_1 = \frac{\partial}{\partial t} - 3it^2\frac{\partial}{\partial x}\,, \quad L_2 = \frac{\partial}{\partial t} - ix\frac{\partial}{\partial x}$$
no sentido que se ω é solução de $L_j\omega = A\omega + B\bar{\omega}$, $(j = 1, 2)$ então ω tem a forma $\omega = e^g h$ com $L_j h = 0$. No entanto, para o campo de Mizohata
$$M = \frac{\partial}{\partial t} - it\frac{\partial}{\partial x}$$
que não satisfaz a condição $(\mathcal{P})$, verificou que o Princípio da Similaridade falha. Posteriormente em [BHS] Berhanu, Hounie e Santiago provaram um Princípio da Similaridade Generalizado (no sentido das distribuições) para campos da forma $L = \frac{\partial}{\partial t} + ib(x,t)\frac{\partial}{\partial x}$ com $b \leq 0$ ou $b \geq 0$. A estimativa provada no corolário 3.5.1 do capítulo anterior implica na validade do Princípio da Similaridade Generalizado para todos os campos que satisfazem a condição $(\mathcal{P})$.

Uma segunda seção deste capítulo estendemos a estimativa obtida no teorema 3.4.1. Isto é feito provando uma extensão do lema de Friedrichs em h^1 lema 5.2.1, que implicará na validade da mesma estimativa a priori para toda $u \in L^1(h^1) \cap \mathcal{E}'$ tal que $Lu \in L^1(h^1) \cap \mathcal{E}'$.

4.1 Princípio da Similaridade Generalizado

Considere $L = \frac{\partial}{\partial t} + ib(x,t)\frac{\partial}{\partial x}$ um campo vetorial suave definido em Ω um aberto retangular do plano, e satisfazendo a condição $(\mathcal{P})$.

Teorema 4.1.1 *Sejam L, Ω como acima e assuma que A e B são funções $L^\infty(\Omega)$ e $\omega \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ a solução do seguinte problema*

$$L\omega = A\omega + B\bar{\omega}\,, \qquad em \quad \mathcal{D}'(\Omega)\,. \tag{4.1}$$

Então todo ponto de Ω tem uma vizinhança Ω' onde ω se escreve como

$$\omega = e^g h\,, \quad Lh = 0\,, \quad \textit{no sentido das distribuições}\,,$$

onde $h \in L^{p'}_{loc}(\Omega')$, $g \in L^\infty(\mathbb{R}_t, bmo(\mathbb{R}_x))$, $e^g \in L^{q'}_{loc}(\Omega')$, para algum $p' \in [1,p)$, $q' \geq p/(p-1)$. Além disso, p' pode ser escolhido arbitrariamente próximo de p.

A demonstração deste teorema é inteiramente análoga à do teorema 3.1 em [BHS]. Aqui daremos o roteiro da demonstração feita lá.

Na demonstração deste teorema precisaremos do seguinte lema que vem como consequência do lema de Friedrichs para os espaços L^p, ver [H] na pág. 9.

Lema 4.1.1 *i) Sejam $p, q \in (1,\infty)$,$1/p + 1/q = 1$, $Lu = f$, u em $L^p_{loc}(\Omega)$, e $Lv = g$, v em $L^q_{loc}(\Omega)$. Então,*

$$L(uv) = (Lu)v + u(Lv) = fv + ug$$

ii) Seja $p \in (1,\infty]$ e $g \in L^\infty(\mathbb{R}, bmo(\mathbb{R}))$ tal que $Lg \in L^p(\Omega)$. Se $\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R},bmo(\mathbb{R}))}$ é suficientemente pequena então

$$L(e^g) = e^g Lg\,.$$

Como consequência da desigualdade de John-Niremberg (ver [St] pág.145) segue o lema;

Lema 4.1.2 *Seja $1 < q < \infty$, $g \in bmo$. Se $\|g\|_{bmo}$ é suficientemente pequena então $e^g \in L^q_{loc}$.*

Tendo observado estes lemas a demonstração do teorema 5.1.1 segue:

Prova:

Fixado um ponto, o corolário 3.5.1 garante a existência de Ω' uma vizinhança em Ω deste ponto, onde é possível resolver a equação

$$Lg = A + B\chi\frac{\bar{\omega}}{\omega} \quad em \quad \Omega'$$

com χ denotando a função característica do conjunto $\{\omega \neq 0\}$. Além disso, o corolário 3.5.1 diz que diminuindo Ω' suficientemente, a solução g desta equação tem norma $\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R},bmo(\mathbb{R}))}$ tão pequena quanto se queira. Assim do lema 5.1.2 podemos definir $h = e^{-g}\omega$. Em seguida, do lema 5.1.1 temos

$$Lh = L(e^{-g})\omega + e^{-g}L\omega = e^{-g}L(-g)\omega + e^{-g}L(\omega) = e^{-g}(-L\omega + L\omega) = 0\,.$$

Portanto

$$\omega = e^g h\,.$$

Além disso, é bom observar que dado $p' \in [1,p)$, diminuindo Ω arbitrariamente, temos que $\|g\|_{L^\infty(bmo)}$ fica suficientemente pequeno e o lema 5.1.2 implica $e^g \in L^{\frac{p'p}{p-p'}}$ e daí $\omega = e^g h \in L^{p'}_{loc}(\Omega')$. ∎

4.2 $\|u\|_{L^1(h^1)} \leq C\|Lu\|_{L^1(h^1)} \quad u, Lu \in L^1(h^1) \cap \mathcal{E}'$

Aqui daremos a prova deste lema no caso h^1. No final combinamos este lema com o terema 3.4.1 para obter a estimativa, $\|u\|_{L^1(h^1)} \leq C\|u\|_{L^1(h^1)}$ sempre que u, e Lu estão em $L^1(h^1) \cap \mathcal{E}'$.

Lema 4.2.1 (Friedrichs) *Suponha que $b, b' \in L^\infty$, $b \in C^\infty$ e $\phi \in C_c^\infty(-1,1)$. Então existe $C = C(\phi, b, b') > 0$ tal que*

$$\|b(f' * \phi_\varepsilon) - (bf') * \phi_\varepsilon\|_{h^1} \leq C(\phi, b, b')\|f\|_{h^1},$$

para $f \in h^1(\mathbb{R})$, e quando, $0 < \varepsilon < 1$. Além disso,

$$\|b(f' * \phi_\varepsilon) - (bf') * \phi_\varepsilon\|_{h^1} \longrightarrow 0\,, \quad \varepsilon \longrightarrow 0\,.$$

Prova:

Inicialmente, observamos que para uma função a, via integração por partes vem que

$$\begin{aligned} b(y)a' * \phi_\varepsilon(y) - (ba') * \phi_\varepsilon(y) &= \int \beta^y(y-z)a(y-z)\varphi_\varepsilon(z)dz \\ &\quad + \int b'(y-z)\phi_\varepsilon(z)a(y-z)dz \\ &= \varphi_\varepsilon * (\beta^{(y)}a)(y) + \phi_\varepsilon * (b'a)(y) \end{aligned}$$

onde $\varphi(z) = z\phi'(z)$, e

$$\beta^y(z) = \begin{cases} \frac{b(y)-b(z)}{y-z}\,, & z \neq y \\ b'(y)\,, & z = y\,. \end{cases}$$

Suponhamos a é um h^1-átomo, com $s(a) \subset I = I(x_0, r)$. Se $r \geq 1$ então

$$\begin{aligned} |b(a' * \phi_\varepsilon) - b(a' * \phi_\varepsilon)| &\leq \frac{\|b\|_{Lip}}{|I|}\left(\int |\varphi_\varepsilon(z)| + |\phi_\varepsilon(z)| dz\right) \\ &= \frac{\|b\|_{Lip}|I^*|}{|I|\,|I^*|}\left(\int |\phi'(z)||z| + |\phi(z)| dz\right) \\ &= \frac{C(\phi, b, b')}{|I^*|}. \end{aligned}$$

Desta maneira, $\bar{a} = ((b(a' * \phi_\varepsilon) - (ba') * \phi_\varepsilon)/C(\phi, b, b')$ é um h^1-átomo com $s(\bar{a}) \subset I^* = I(x_0, 2r)$ e assim

$$\|a\|_{h^1} \leq C(\phi, b, b')\|\bar{a}\|_{h^1} \leq \tilde{C}(\phi, b, b').$$

Se $r < 1$. Consideramos $\psi \in C_c^\infty(-1, 1)$, $\psi_\delta(x) = \delta^{-1}\psi(x/\delta)$, $\int \psi(x)dx = 1$. Vimos acima que

$$b(y)(a' * \phi_\varepsilon)(y) - (ba') * \phi_\varepsilon(y) = \varphi_\varepsilon * (\beta^{(y)}(\cdot)a(\cdot))(y) + \phi_\varepsilon * (b'a)(y),$$

assim

$$\|ba' * \phi_\varepsilon - (ba') * \phi_\varepsilon\|_{h^1} \leq \|\varphi_\varepsilon * (\beta^{(\cdot)}a)(\cdot)\|_{h^1} + \|\phi_\varepsilon * (b'a)\|_{h^1}$$

Como $\{\psi * \phi_\varepsilon\}_{0<\varepsilon<1}$ é uma família limitada de funções de $\mathcal{S}$ então pelo lema 3.2.1 temos

$$\|\phi_\varepsilon * (b'a)\|_{h^1} \leq C(b, b').$$

Resta analisar

$$\begin{aligned} \|\varphi_\varepsilon * (\beta^{(\cdot)}a)(\cdot)\|_{h^1} &= \int_{I^*} \sup_{0<\delta<1} |\psi_\delta * \{\varphi_\varepsilon * (\beta^{(\cdot)}a)(\cdot)\}(x)| dx \\ &+ \int_{{}^cI^*} \sup_{0<\delta<1} |\psi_\delta * \{\varphi_\varepsilon * (\beta^{(\cdot)}a)(\cdot)\}(x)| dx \\ &= \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2. \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &\leq \int_{I^*} \sup_{0<\delta<1} \int |\psi_\delta(x-y)| \int |\varphi_\varepsilon(y-z)\, \beta^{(y)}(z)\, a(z)|\, dz\, dy\, dx \\ &\leq \frac{\|b'\|_{L^\infty}}{|I|} \int_{I^*} \sup_{0<\delta<1} \int |\psi_\delta(x-y)| \int |\varphi_\varepsilon(y-z)| dz\, dy \\ &\leq C(\phi, b'). \end{aligned}$$

Em seguida vamos estimar $\mathcal{I}_2$.
Afirmação: Dado $x \notin {}^cI^*$ se $|x - x_0| \geq 2(\varepsilon + \delta)$ então $\psi_\delta * \{\varphi_\varepsilon * \beta^{(\cdot)}a(\cdot)\}(x) = 0$.

Com efeito,

$$
\begin{aligned}
\psi_\delta * \{\varphi_\varepsilon * \beta^{(\cdot)} a(\cdot)\}(x) &= \int\int \psi_\delta(y)\beta(x-y,z)\varphi_\varepsilon(x-y-z)a(z)dy\,dz \\
&= \int_{|x-z|<\varepsilon+\delta}\int \,dy\,dz \quad + \quad \int_{|x-z|>\varepsilon+\delta}\int \,dy\,dz \\
&= \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2\,.
\end{aligned}
$$

Do fato que, $|x-x_0| > 2r$ se $z \in I$ então $|x-z| > |x-x_0| - |z-x_0| > |x-x_0| - r > |x-x_0|/2 \geq \varepsilon+\delta$. Portanto $\mathcal{J}_1 = 0$. Por outro lado, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}_2 &= \int_{|x-z|>\varepsilon+\delta}\int_{|y|<\delta} + \int_{|x-z|>\varepsilon+\delta}\int_{|y|>\delta} \\
&= \mathcal{J}_2^1 + \mathcal{J}_2^2\,.
\end{aligned}
$$

Notemos que $\mathcal{J}_1^2 = 0$, pois se $|y| > \delta$ então $\psi_\delta(y) = 0$. Também $\mathcal{J}_2^1 = 0$, pois se $|x-z| > \varepsilon+\delta$ e $|y| < \delta$ então $|x-y-z| \geq |x-z| - |y| > \varepsilon+\delta-\delta = \varepsilon$ e assim $\varphi_\varepsilon(x-y-z) = 0$.

Portanto, para estimar $\mathcal{I}_2$ precisamos nos preocupar somente com o caso em que $|x-x_0| < 2(\varepsilon+\delta)$. Com isto em mente, temos que analizar dois casos: $\delta > \varepsilon$ ou $\delta < \varepsilon$.

caso $\delta > \varepsilon$:

Neste caso vem que $|x-x_0| < 2(\varepsilon+\delta) < 4\delta$. Em seguida escrevendo

$$
\begin{aligned}
\psi_\delta * \{\varphi_\varepsilon * (\beta^{(\cdot)} a)(\cdot)\}(x) &= \int\int \psi_\delta(y)\varphi_\varepsilon(x-y-z)\beta(x-y,z)\,dy\,a(z)\,dz \\
&= \int\int \psi_\delta(x-y-z)\beta(y+z,z)\varphi_\varepsilon(y)dy\,a(z)\,dz \\
&= \int\int \frac{1}{\delta}\psi(\frac{x-z}{\delta} - \frac{y}{\delta})\beta(y+z,z)\varphi_\varepsilon(y)\,dy\,a(z)\,dz\,,
\end{aligned}
$$

fazendo $\bar{y} = y/\delta$ (denotando ainda a nova variável por y) temos

$$
\psi_\delta * \{\varphi_\varepsilon * (\beta^{(\cdot)} a)(\cdot)\}(x) = \int \frac{1}{\delta}\int \psi\big(\frac{x}{\delta} - \frac{z}{\delta} - y\big)\beta(\delta(y+\frac{z}{\delta}),z)\varphi_{\frac{\varepsilon}{\delta}}(y)\,dy\,a(z)\,dz\,.
$$

Se denotarmos

$$
A^{\frac{\varepsilon}{\delta}}(z) = \int \psi\big(\frac{x}{\delta} - z - y\big)\varphi_{\frac{\varepsilon}{\delta}}(y)\beta(\delta(y+z),z)dy\,,
$$

segue que

$$
\psi_\delta * \{\varphi_\varepsilon * (\beta^{(\cdot)} a)(\cdot)\}(x) = \int \frac{1}{\delta} A^{\frac{\varepsilon}{\delta}}\big(\frac{z}{\delta}\big)\,a(z)\,dz\,.
$$

Agora do fato que $\int a(z)dz = 0$ vem

$$\psi_\delta * \{\varphi_\varepsilon * (\beta^{(\cdot)}a)(\cdot)\}(x) = \int \frac{1}{\delta}\Big(A^{\frac{\varepsilon}{\delta}}(\frac{z}{\delta}) - A^{\frac{\varepsilon}{\delta}}(\frac{x_0}{\delta})\Big)\, a(z)\, dz$$

Notando que $|(A^{\frac{\varepsilon}{\delta}})'(z)| \le C(\psi,\varphi,b')$ e $|x-x_0| \le 4\delta$, segue via o teorema do valor médio que

$$\begin{aligned} |\psi_\delta * \{\varphi_\varepsilon * (\beta^{(\cdot)}a)(\cdot)\}(x)| &\le C(\psi,\varphi,b') \int \frac{|z-x_0|}{\delta^2}\, |a(z)|dz \\ &\le C(\psi,\varphi,b')\, \frac{r}{\delta^2} \\ &\le \tilde{C}(\psi,\varphi,b')\, \frac{r}{|x-x_0|^2}\,. \end{aligned}$$

caso: $\delta < \varepsilon$

Neste caso vem que $|x-x_0| < 2(\varepsilon+\delta) < 4\varepsilon$. Depois escrevendo

$$\begin{aligned} \psi_\delta * \{\varphi_\varepsilon * (\beta^{(\cdot)}a)(\cdot)\}(x) &= \int\int \psi_\delta(y)\varphi_\varepsilon(x-y-z)\beta(x-y,z)\, dy\, a(z)\, dz \\ &= \int\int \psi_\delta(y)\frac{1}{\varepsilon}\varphi(\frac{x-z}{\varepsilon} - \frac{y}{\varepsilon})\beta(x-y,z)dy\, a(z)\, dz \end{aligned}$$

e fazendo a mudança $\bar{y} = y/\varepsilon$ (denotando ainda a nova variável por y) temos

$$\psi_\delta * \{\varphi_\varepsilon * (\beta^{(\cdot)}a)(\cdot)\}(x) = \int \frac{1}{\varepsilon}\int \psi_{\frac{\delta}{\varepsilon}}(y)\varphi(\frac{x}{\varepsilon} - \frac{z}{\varepsilon} - y)\beta\big(x-\varepsilon y, z\big)dy\, a(z)\, dz$$

Agora denotando

$$B^{\frac{\delta}{\varepsilon}}(z) = \int \psi_{\frac{\delta}{\varepsilon}}(y)\varphi(\frac{x}{\varepsilon} - z - y)\beta(x-\varepsilon y, \varepsilon z)dy\,,$$

temos

$$\psi_\delta * \{\varphi_\varepsilon * (\beta^{(\cdot)}a)(\cdot)\}(x) = \int \frac{1}{\varepsilon}B^{\frac{\delta}{\varepsilon}}(\frac{z}{\varepsilon})a(z)dz\,.$$

Novamente do fato que $\int a(z)dz = 0$ temos

$$\psi_\delta * \{\varphi_\varepsilon * (\beta^{(\cdot)}a)(\cdot)\}(x) = \int \frac{1}{\varepsilon}\Big(B^{\frac{\delta}{\varepsilon}}(\frac{z}{\varepsilon}) - B^{\frac{\delta}{\varepsilon}}(\frac{x_0}{\varepsilon})\Big)a(z)dz\,.$$

Depois de observar que $|(B^{\frac{\delta}{\varepsilon}})'(z)| \le C(\psi,\varphi,b')$, de maneira análoga ao caso anterior, vem que

$$|\psi_\delta * \{\varphi_\varepsilon * (\beta^{(\cdot)}a)(\cdot)\}(x)| \le C(\psi,\varphi,b')\frac{r}{\varepsilon^2} \le \tilde{C}(\psi,\varphi,b')\frac{r}{|x-x_0|^2}\,.$$

Portanto

$$\mathcal{I}_2 \leq C(\phi, b, b') \int_{{}^cI^*} \frac{r}{|x-x_0|^2} dx \leq C(\phi, b, b') .$$

Dada $f \in h^1$, pela decomposição atômica $f = \sum_k \lambda_k a_k$ em h^1 onde $a_k \in h^1_a \cap C^\infty_c$ então $\sum_k \lambda_k a_k = f$ em $\mathcal{S}'$ o que implica $\sum_k \lambda_k a'_k = f'$ e $\sum_k \lambda_k b a'_k = bf'$ em $\mathcal{S}'$, logo

$$\begin{aligned}
\|b(f' * \phi_\varepsilon) - (bf') * \phi_\varepsilon\|_{h^1} &\leq \sum_k |\lambda_k| \|b(a'_k * \phi_\varepsilon) - (ba'_k) * \phi_\varepsilon\|_{h^1} \\
&\leq C(\phi, b, b') \sum_k |\lambda_k| \\
&\leq C(\phi, b, b') \|f\|_{h^1} .
\end{aligned}$$

Finalmente, se $a \in C^1_c(I(x_0, r))$ desde que $g_\varepsilon = (ba') * \phi_\varepsilon - b(a' * \phi_\varepsilon) \to 0$ uniformemente quando $\varepsilon \to 0$, e esta suportada em $I(x_0, r+1)$ para $0 < \varepsilon < 1$ então

$$\begin{aligned}
\|g_\varepsilon\|_{h^1} &= \int \sup_{0<\delta<1} |\psi_\delta * g_\varepsilon(x)| dx \\
&\leq \int_{I(x_0, r+2)} \sup_{0<\delta<1} \|\psi_\delta\|_{L^1} \|g_\varepsilon\|_{L^\infty} \\
&= |I(x_0, r+2)| \|\psi\|_{L^1} \|g_\varepsilon\|_{L^\infty} \longrightarrow 0 \,, \varepsilon \longrightarrow 0 \,.
\end{aligned}$$

Observamos que para uma combinação linear finita de átomos suaves, $S_N = \sum_{k=1}^N \lambda_k a_k$, segue que $\|b(S'_N * \phi_\varepsilon) - (bS'_N) * \phi_\varepsilon\|_{h^1} \longrightarrow 0$, $\varepsilon \longrightarrow 0$. Como combinações lineares finitas de átomos suaves são densas em h^1, dado $\rho > 0$, temos que $\|f - S_N\| \leq \rho$, onde $S_N = \sum_{k=1}^N \lambda_k a_k$ com $a_k \in C^1$. Então

$$\begin{aligned}
\|b(f' * \phi_\varepsilon) - (bf' * \phi_\varepsilon)\|_{h^1} &\leq \|b(f - S_N)' * \phi_\varepsilon - \{b(f - S_N)'\} * \phi_\varepsilon\|_{h^1} \\
&+ \|b(S'_N * \phi_\varepsilon) - (bS'_N) * \phi_\varepsilon\|_{h^1} \\
&\leq C\|f - S_N\|_{h^1} + \rho \\
&\leq \rho(C+1) \,, \quad \varepsilon \longrightarrow 0 \,.
\end{aligned}$$

∎

Corolário 4.2.1 *Existe $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^1(h^1)} \leq C\|Lu\|_{L^1(h^1)} .$$

para toda $u \in \mathcal{E}' \cap L^1(h^1)$ com $Lu \in \mathcal{E}' \cap L^1(h^1)$.

Prova:

Com efeito, considere $\phi \in C^\infty_c(-1, 1)$, $\Phi(x, t) = \phi(x)\phi(t)$, e $u_\varepsilon = \Phi_\varepsilon * u = \phi_\varepsilon \overset{t}{*} \phi_\varepsilon \overset{x}{*} u = J_\varepsilon u$. Portanto pela estimativa provada no teorema 3.4.1 temos

$$\|u_\varepsilon\|_{L^1(h^1)} \leq C\|Lu_\varepsilon\|_{L^1(h^1)} .$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|Lu_\varepsilon\|_{L^1(h^1)} &\leq \|J_\varepsilon Lu\|_{L^1(h^1)} + \|[L, J_\varepsilon]u\|_{L^1(h^1)} \\ &\leq \|Lu\|_{L^1(h^1)} + \|[L, J_\varepsilon]u\|_{L^1(h^1)}\,, \end{aligned}$$

em seguida notando que $[L, J_\varepsilon] = ib\frac{\partial}{\partial x}J_\varepsilon - iJ_\varepsilon(b\frac{\partial}{\partial x})$ então pelo lema de Friedrichs temos

$$\|[L, J_\varepsilon]u\|_{L^1(h^1)} \leq \left\|b(\frac{\partial u}{\partial x} \overset{x}{*} \phi_\varepsilon) - (b\frac{\partial u}{\partial x}) \overset{x}{*} \phi_\varepsilon)\right\|_{L^1(h^1)} \longrightarrow 0\,, \quad \varepsilon \longrightarrow 0\,.$$

Portanto,

$$\|u\|_{L^1(h^1)} \leq C\|Lu\|_{L^1(h^1)}\,.$$

∎

Capítulo 5

Aplicações e Generalizações

Na literatura o Princípio da Similaridade é aplicado para as soluções clássicas da equação
$$\frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} = A\omega + B\bar{\omega}\,,$$
que são conhecidas por funções pseudo-analíticas ou funções analíticas generalizadas. Este princípio diz que toda solução contínua ω da equação anterior tem a forma $\omega = e^g h$, para h uma função holomorfa e g uma função contínua Hölder. Além disso, ω e h são similares no sentido que $\frac{\omega}{h}$ e $\frac{h}{\omega}$ são limitadas em compactos não contendo a origem. No paper [M], Meziani provou a validade do Princípio da Similaridade para os seguintes campos que satisfazem a condição $(\mathcal{P})$,
$$L_1 = \frac{\partial}{\partial t} - 3it^2\frac{\partial}{\partial x}\,, \quad L_2 = \frac{\partial}{\partial t} - ix\frac{\partial}{\partial x}$$
no sentido que se ω é solução de $L_j\omega = A\omega + B\bar{\omega}$, $(j = 1, 2)$ então ω tem a forma $\omega = e^g h$ com $L_j h = 0$. No entanto, para o campo de Mizohata
$$M = \frac{\partial}{\partial t} - it\frac{\partial}{\partial x}$$
que não satisfaz a condição $(\mathcal{P})$, verificou que o Princípio da Similaridade falha. Posteriormente em [BHS] Berhanu, Hounie e Santiago provaram um Princípio da Similaridade Generalizado (no sentido das distribuições) para campos da forma $L = \frac{\partial}{\partial t} + ib(x,t)\frac{\partial}{\partial x}$ com $b \leq 0$ ou $b \geq 0$. A estimativa provada no corolário 3.5.1 do capítulo anterior implica na validade do Princípio da Similaridade Generalizado para todos os campos que satisfazem a condição $(\mathcal{P})$.

Uma segunda seção deste capítulo estendemos a estimativa obtida no teorema 3.4.1. Isto é feito provando uma extensão do lema de Friedrichs em h^1 lema 5.2.1, que implicará na validade da mesma estimativa a priori para toda $u \in L^1(h^1) \cap \mathcal{E}'$ tal que $Lu \in L^1(h^1) \cap \mathcal{E}'$.

5.1 Princípio da Similaridade Generalizado

Considere $L = \frac{\partial}{\partial t} + ib(x,t)\frac{\partial}{\partial x}$ um campo vetorial suave definido em Ω um aberto retangular do plano, e satisfazendo a condição $(\mathcal{P})$.

Teorema 5.1.1 *Sejam L, Ω como acima e assuma que A e B são funções $L^\infty(\Omega)$ e $\omega \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ a solução do seguinte problema*

$$L\omega = A\omega + B\bar{\omega}\,, \qquad em \quad \mathcal{D}'(\Omega)\,. \tag{5.1}$$

Então todo ponto de Ω tem uma vizinhança Ω' onde ω se escreve como

$$\omega = e^g h\,, \quad Lh = 0\,, \quad \textit{no sentido das distribuições}\,,$$

onde $h \in L^{p'}_{loc}(\Omega')$, $g \in L^\infty(\mathbb{R}_t, bmo(\mathbb{R}_x))$, $e^g \in L^{q'}_{loc}(\Omega')$, para algum $p' \in [1,p)$, $q' \geq p/(p-1)$. Além disso, p' pode ser escolhido arbitrariamente próximo de p.

A demonstração deste teorema é inteiramente análoga à do teorema 3.1 em [BHS]. Aqui daremos o roteiro da demonstração feita lá.

Na demonstração deste teorema precisaremos do seguinte lema que vem como consequência do lema de Friedrichs para os espaços L^p, ver [H] na pág. 9.

Lema 5.1.1 *i) Sejam $p, q \in (1,\infty)$,$1/p + 1/q = 1$, $Lu = f$, u em $L^p_{loc}(\Omega)$, e $Lv = g$, v em $L^q_{loc}(\Omega)$. Então,*

$$L(uv) = (Lu)v + u(Lv) = fv + ug$$

ii) Seja $p \in (1,\infty]$ e $g \in L^\infty(\mathbb{R}, bmo(\mathbb{R}))$ tal que $Lg \in L^p(\Omega)$. Se $\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R},bmo(\mathbb{R}))}$ é suficientemente pequena então

$$L(e^g) = e^g Lg\,.$$

Como consequência da desigualdade de John-Niremberg (ver **??** pág.145) segue o lema;

Lema 5.1.2 *Seja $1 < q < \infty$, $g \in bmo$. Se $\|g\|_{bmo}$ é suficientemente pequena então $e^g \in L^q_{loc}$.*

Tendo observado estes lemas a demonstração do teorema 5.1.1 segue:

Prova:

Fixado um ponto, o corolário 3.5.1 garante a existência de Ω' uma vizinhança em Ω deste ponto, onde é possível resolver a equação

$$Lg = A + B\chi\frac{\bar{\omega}}{\omega} \quad em \quad \Omega'$$

com χ denotando a função característica do conjunto $\{\omega \neq 0\}$. Além disso, o corolário 3.5.1 diz que diminuindo Ω' suficientemente, a solução g desta equação tem norma $\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R},bmo(\mathbb{R}))}$ tão pequena quanto se queira. Assim do lema 5.1.2 podemos definir $h = e^{-g}\omega$. Em seguida, do lema 5.1.1 temos

$$Lh = L(e^{-g})\omega + e^{-g}L\omega = e^{-g}L(-g)\omega + e^{-g}L(\omega) = e^{-g}(-L\omega + L\omega) = 0\,.$$

Portanto

$$\omega = e^g h\,.$$

Além disso, é bom observar que dado $p' \in [1,p)$, diminuindo Ω arbitrariamente, temos que $\|g\|_{L^\infty(bmo)}$ fica suficientemente pequeno e o lema 5.1.2 implica $e^g \in L^{\frac{p'p}{p-p'}}$ e daí $\omega = e^g h \in L^{p'}_{loc}(\Omega')$. ∎

5.2 $\|u\|_{L^1(h^1)} \leq C\|Lu\|_{L^1(h^1)} \quad u, Lu \in L^1(h^1) \cap \mathcal{E}'$

Aqui daremos a prova deste lema no caso h^1. No final combinamos este lema com o terema 3.4.1 para obter a estimativa, $\|u\|_{L^1(h^1)} \leq C\|u\|_{L^1(h^1)}$ sempre que u, e Lu estão em $L^1(h^1) \cap \mathcal{E}'$.

Lema 5.2.1 (Friedrichs) *Suponha que $b, b' \in L^\infty$, $b \in C^\infty$ e $\phi \in C_c^\infty(-1,1)$. Então existe $C = C(\phi, b, b') > 0$ tal que*

$$\|b(f' * \phi_\varepsilon) - (bf') * \phi_\varepsilon\|_{h^1} \leq C(\phi, b, b')\|f\|_{h^1},$$

para $f \in h^1(\mathbb{R})$, e quando, $0 < \varepsilon < 1$. Além disso,

$$\|b(f' * \phi_\varepsilon) - (bf') * \phi_\varepsilon\|_{h^1} \longrightarrow 0\,, \quad \varepsilon \longrightarrow 0\,.$$

Prova:

Inicialmente, observamos que para uma função a, via integração por partes vem que

$$\begin{aligned} b(y)a' * \phi_\varepsilon(y) - (ba') * \phi_\varepsilon(y) &= \int \beta^y(y-z)a(y-z)\varphi_\varepsilon(z)dz \\ &\quad + \int b'(y-z)\phi_\varepsilon(z)a(y-z)dz \\ &= \varphi_\varepsilon * (\beta^{(y)}a)(y) + \phi_\varepsilon * (b'a)(y) \end{aligned}$$

onde $\varphi(z) = z\phi'(z)$, e

$$\beta^y(z) = \begin{cases} \frac{b(y)-b(z)}{y-z}\,, & z \neq y \\ b'(y)\,, & z = y\,. \end{cases}$$

Suponhamos a é um h^1-átomo, com $s(a) \subset I = I(x_0, r)$. Se $r \geq 1$ então

$$\begin{aligned} |b(a' * \phi_\varepsilon) - b(a' * \phi_\varepsilon)| &\leq \frac{\|b\|_{Lip}}{|I|}\left(\int |\varphi_\varepsilon(z)| + |\phi_\varepsilon(z)| dz\right) \\ &= \frac{\|b\|_{Lip}|I^*|}{|I|\,|I^*|}\left(\int |\phi'(z)||z| + |\phi(z)| dz\right) \\ &= \frac{C(\phi, b, b')}{|I^*|}. \end{aligned}$$

Desta maneira, $\bar{a} = ((b(a' * \phi_\varepsilon) - (ba') * \phi_\varepsilon)/C(\phi, b, b')$ é um h^1-átomo com $s(\bar{a}) \subset I^* = I(x_0, 2r)$ e assim

$$\|a\|_{h^1} \leq C(\phi, b, b')\|\bar{a}\|_{h^1} \leq \tilde{C}(\phi, b, b').$$

Se $r < 1$. Consideramos $\psi \in C_c^\infty(-1, 1)$, $\psi_\delta(x) = \delta^{-1}\psi(x/\delta)$, $\int \psi(x)dx = 1$. Vimos acima que

$$b(y)(a' * \phi_\varepsilon)(y) - (ba') * \phi_\varepsilon(y) = \varphi_\varepsilon * (\beta^{(y)}(\cdot)a(\cdot))(y) + \phi_\varepsilon * (b'a)(y),$$

assim

$$\|ba' * \phi_\varepsilon - (ba') * \phi_\varepsilon\|_{h^1} \leq \|\varphi_\varepsilon * (\beta^{(\cdot)}a)(\cdot)\|_{h^1} + \|\phi_\varepsilon * (b'a)\|_{h^1}$$

Como $\{\psi * \phi_\varepsilon\}_{0<\varepsilon<1}$ é uma família limitada de funções de $\mathcal{S}$ então pelo lema 3.2.1 temos

$$\|\phi_\varepsilon * (b'a)\|_{h^1} \leq C(b, b').$$

Resta analisar

$$\begin{aligned} \|\varphi_\varepsilon * (\beta^{(\cdot)}a)(\cdot)\|_{h^1} &= \int_{I^*} \sup_{0<\delta<1} |\psi_\delta * \{\varphi_\varepsilon * (\beta^{(\cdot)}a)(\cdot)\}(x)| dx \\ &+ \int_{{}^cI^*} \sup_{0<\delta<1} |\psi_\delta * \{\varphi_\varepsilon * (\beta^{(\cdot)}a)(\cdot)\}(x)| dx \\ &= \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2. \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &\leq \int_{I^*} \sup_{0<\delta<1} \int |\psi_\delta(x-y)| \int |\varphi_\varepsilon(y-z)\, \beta^{(y)}(z)\, a(z)|\, dz\, dy\, dx \\ &\leq \frac{\|b'\|_{L^\infty}}{|I|} \int_{I^*} \sup_{0<\delta<1} \int |\psi_\delta(x-y)| \int |\varphi_\varepsilon(y-z)| dz\, dy \\ &\leq C(\phi, b'). \end{aligned}$$

Em seguida vamos estimar $\mathcal{I}_2$.
Afirmação: Dado $x \notin {}^cI^*$ se $|x - x_0| \geq 2(\varepsilon + \delta)$ então $\psi_\delta * \{\varphi_\varepsilon * \beta^{(\cdot)}a(\cdot)\}(x) = 0$.

Com efeito,

$$\begin{aligned}\psi_\delta * \{\varphi_\varepsilon * \beta^{(\cdot)}a(\cdot)\}(x) &= \int\int \psi_\delta(y)\beta(x-y,z)\varphi_\varepsilon(x-y-z)a(z)dy\,dz \\ &= \int_{|x-z|<\varepsilon+\delta}\int \;dy\,dz \quad + \quad \int_{|x-z|>\varepsilon+\delta}\int \;dy\,dz \\ &= \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2\,.\end{aligned}$$

Do fato que, $|x-x_0| > 2r$ se $z \in I$ então $|x-z| > |x-x_0| - |z-x_0| > |x-x_0| - r > |x-x_0|/2 \geq \varepsilon+\delta$. Portanto $\mathcal{J}_1 = 0$. Por outro lado, podemos escrever

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_2 &= \int_{|x-z|>\varepsilon+\delta}\int_{|y|<\delta} + \int_{|x-z|>\varepsilon+\delta}\int_{|y|>\delta} \\ &= \mathcal{J}_2^1 + \mathcal{J}_2^2\,.\end{aligned}$$

Notemos que $\mathcal{J}_1^2 = 0$, pois se $|y| > \delta$ então $\psi_\delta(y) = 0$. Também $\mathcal{J}_2^1 = 0$, pois se $|x-z| > \varepsilon+\delta$ e $|y| < \delta$ então $|x-y-z| \geq |x-z| - |y| > \varepsilon+\delta-\delta = \varepsilon$ e assim $\varphi_\varepsilon(x-y-z) = 0$.

Portanto, para estimar $\mathcal{I}_2$ precisamos nos preocupar somente com o caso em que $|x-x_0| < 2(\varepsilon+\delta)$. Com isto em mente, temos que analizar dois casos: $\delta > \varepsilon$ ou $\delta < \varepsilon$.

caso $\delta > \varepsilon$:

Neste caso vem que $|x-x_0| < 2(\varepsilon+\delta) < 4\delta$. Em seguida escrevendo

$$\begin{aligned}\psi_\delta * \{\varphi_\varepsilon * (\beta^{(\cdot)}a)(\cdot)\}(x) &= \int\int \psi_\delta(y)\varphi_\varepsilon(x-y-z)\beta(x-y,z)\,dy\,a(z)\,dz \\ &= \int\int \psi_\delta(x-y-z)\beta(y+z,z)\varphi_\varepsilon(y)dy\,a(z)\,dz \\ &= \int\int \frac{1}{\delta}\psi(\frac{x-z}{\delta} - \frac{y}{\delta})\beta(y+z,z)\varphi_\varepsilon(y)\,dy\,a(z)\,dz\,,\end{aligned}$$

fazendo $\bar{y} = y/\delta$ (denotando ainda a nova variável por y) temos

$$\psi_\delta * \{\varphi_\varepsilon * (\beta^{(\cdot)}a)(\cdot)\}(x) = \int\frac{1}{\delta}\int \psi\big(\frac{x}{\delta} - \frac{z}{\delta} - y\big)\beta(\delta(y+\frac{z}{\delta}),z)\varphi_{\frac{\varepsilon}{\delta}}(y)\,dy\,a(z)\,dz\,.$$

Se denotarmos

$$A^{\frac{\varepsilon}{\delta}}(z) = \int \psi\big(\frac{x}{\delta} - z - y\big)\varphi_{\frac{\varepsilon}{\delta}}(y)\beta(\delta(y+z),z)dy\,,$$

segue que

$$\psi_\delta * \{\varphi_\varepsilon * (\beta^{(\cdot)}a)(\cdot)\}(x) = \int \frac{1}{\delta}A^{\frac{\varepsilon}{\delta}}\big(\frac{z}{\delta}\big)\,a(z)\,dz\,.$$

Agora do fato que $\int a(z)dz = 0$ vem

$$\psi_\delta * \{\varphi_\varepsilon * (\beta^{(\cdot)}a)(\cdot)\}(x) = \int \frac{1}{\delta}\Big(A^{\frac{\varepsilon}{\delta}}(\frac{z}{\delta}) - A^{\frac{\varepsilon}{\delta}}(\frac{x_0}{\delta})\Big)\, a(z)\, dz$$

Notando que $|(A^{\frac{\varepsilon}{\delta}})'(z)| \leq C(\psi,\varphi,b')$ e $|x-x_0| \leq 4\delta$, segue via o teorema do valor médio que

$$\begin{aligned} |\psi_\delta * \{\varphi_\varepsilon * (\beta^{(\cdot)}a)(\cdot)\}(x)| &\leq C(\psi,\varphi,b') \int \frac{|z-x_0|}{\delta^2}\, |a(z)| dz \\ &\leq C(\psi,\varphi,b')\, \frac{r}{\delta^2} \\ &\leq \tilde{C}(\psi,\varphi,b')\, \frac{r}{|x-x_0|^2}\,. \end{aligned}$$

caso: $\delta < \varepsilon$
Neste caso vem que $|x-x_0| < 2(\varepsilon+\delta) < 4\varepsilon$. Depois escrevendo

$$\begin{aligned} \psi_\delta * \{\varphi_\varepsilon * (\beta^{(\cdot)}a)(\cdot)\}(x) &= \int\int \psi_\delta(y)\varphi_\varepsilon(x-y-z)\beta(x-y,z)\, dy\, a(z)\, dz \\ &= \int\int \psi_\delta(y)\frac{1}{\varepsilon}\varphi(\frac{x-z}{\varepsilon} - \frac{y}{\varepsilon})\beta(x-y,z)dy\, a(z)\, dz \end{aligned}$$

e fazendo a mudança $\bar{y} = y/\varepsilon$ (denotando ainda a nova variável por y) temos

$$\psi_\delta * \{\varphi_\varepsilon * (\beta^{(\cdot)}a)(\cdot)\}(x) = \int \frac{1}{\varepsilon}\int \psi_{\frac{\delta}{\varepsilon}}(y)\varphi\big(\frac{x}{\varepsilon} - \frac{z}{\varepsilon} - y\big)\beta\big(x-\varepsilon y, z\big)dy\, a(z)\, dz$$

Agora denotando

$$B^{\frac{\delta}{\varepsilon}}(z) = \int \psi_{\frac{\delta}{\varepsilon}}(y)\varphi(\frac{x}{\varepsilon} - z - y)\beta(x-\varepsilon y, \varepsilon z)dy\,,$$

temos

$$\psi_\delta * \{\varphi_\varepsilon * (\beta^{(\cdot)}a)(\cdot)\}(x) = \int \frac{1}{\varepsilon}B^{\frac{\delta}{\varepsilon}}(\frac{z}{\varepsilon})a(z)dz\,.$$

Novamente do fato que $\int a(z)dz = 0$ temos

$$\psi_\delta * \{\varphi_\varepsilon * (\beta^{(\cdot)}a)(\cdot)\}(x) = \int \frac{1}{\varepsilon}\Big(B^{\frac{\delta}{\varepsilon}}(\frac{z}{\varepsilon}) - B^{\frac{\delta}{\varepsilon}}(\frac{x_0}{\varepsilon})\Big)a(z)dz\,.$$

Depois de observar que $|(B^{\frac{\delta}{\varepsilon}})'(z)| \leq C(\psi,\varphi,b')$, de maneira análoga ao caso anterior, vem que

$$|\psi_\delta * \{\varphi_\varepsilon * (\beta^{(\cdot)}a)(\cdot)\}(x)| \leq C(\psi,\varphi,b')\frac{r}{\varepsilon^2} \leq \tilde{C}(\psi,\varphi,b')\frac{r}{|x-x_0|^2}\,.$$

Portanto

$$\mathcal{I}_2 \leq C(\phi, b, b') \int_{{}^cI^*} \frac{r}{|x-x_0|^2} dx \leq C(\phi, b, b')\,.$$

Dada $f \in h^1$, pela decomposição atômica $f = \sum_k \lambda_k a_k$ em h^1 onde $a_k \in h^1_a \cap C^\infty_c$ então $\sum_k \lambda_k a_k = f$ em $\mathcal{S}'$ o que implica $\sum_k \lambda_k a'_k = f'$ e $\sum_k \lambda_k b a'_k = bf'$ em $\mathcal{S}'$, logo

$$\begin{aligned} \|b(f' * \phi_\varepsilon) - (bf') * \phi_\varepsilon\|_{h^1} &\leq \sum_k |\lambda_k| \|b(a'_k * \phi_\varepsilon) - (ba'_k) * \phi_\varepsilon\|_{h^1} \\ &\leq C(\phi, b, b') \sum_k |\lambda_k| \\ &\leq C(\phi, b, b') \|f\|_{h^1}\,. \end{aligned}$$

Finalmente, se $a \in C^1_c(I(x_0, r))$ desde que $g_\varepsilon = (ba') * \phi_\varepsilon - b(a' * \phi_\varepsilon) \to 0$ uniformemente quando $\varepsilon \to 0$, e esta suportada em $I(x_0, r+1)$ para $0 < \varepsilon < 1$ então

$$\begin{aligned} \|g_\varepsilon\|_{h^1} &= \int \sup_{0<\delta<1} |\psi_\delta * g_\varepsilon(x)| dx \\ &\leq \int_{I(x_0, r+2)} \sup_{0<\delta<1} \|\psi_\delta\|_{L^1} \|g_\varepsilon\|_{L^\infty} \\ &= |I(x_0, r+2)| \|\psi\|_{L^1} \|g_\varepsilon\|_{L^\infty} \longrightarrow 0\,, \varepsilon \longrightarrow 0\,. \end{aligned}$$

Observamos que para uma combinação linear finita de átomos suaves, $S_N = \sum_{k=1}^N \lambda_k a_k$, segue que $\|b(S'_N * \phi_\varepsilon) - (bS'_N) * \phi_\varepsilon\|_{h^1} \longrightarrow 0$, $\varepsilon \longrightarrow 0$. Como combinações lineares finitas de átomos suaves são densas em h^1, dado $\rho > 0$, temos que $\|f - S_N\| \leq \rho$, onde $S_N = \sum_{k=1}^N \lambda_k a_k$ com $a_k \in C^1$. Então

$$\begin{aligned} \|b(f' * \phi_\varepsilon) - (bf' * \phi_\varepsilon)\|_{h^1} &\leq \|b(f - S_N)' * \phi_\varepsilon - \{b(f - S_N)'\} * \phi_\varepsilon\|_{h^1} \\ &+ \|b(S'_N * \phi_\varepsilon) - (bS'_N) * \phi_\varepsilon\|_{h^1} \\ &\leq C\|f - S_N\|_{h^1} + \rho \\ &\leq \rho(C+1)\,, \quad \varepsilon \longrightarrow 0\,. \end{aligned}$$

∎

Corolário 5.2.1 *Existe $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^1(h^1)} \leq C\|Lu\|_{L^1(h^1)}\,.$$

para toda $u \in \mathcal{E}' \cap L^1(h^1)$ com $Lu \in \mathcal{E}' \cap L^1(h^1)$.

Prova:

Com efeito, considere $\phi \in C^\infty_c(-1, 1)$, $\Phi(x, t) = \phi(x)\phi(t)$, e $u_\varepsilon = \Phi_\varepsilon * u = \phi_\varepsilon \overset{t}{*} \phi_\varepsilon \overset{x}{*} u = J_\varepsilon u$. Portanto pela estimativa provada no teorema 3.4.1 temos

$$\|u_\varepsilon\|_{L^1(h^1)} \leq C\|Lu_\varepsilon\|_{L^1(h^1)}\,.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\|Lu_\varepsilon\|_{L^1(h^1)} &\leq \|J_\varepsilon Lu\|_{L^1(h^1)} + \|[L, J_\varepsilon]u\|_{L^1(h^1)} \\ &\leq \|Lu\|_{L^1(h^1)} + \|[L, J_\varepsilon]u\|_{L^1(h^1)}\,,\end{aligned}$$

em seguida notando que $[L, J_\varepsilon] = ib\frac{\partial}{\partial x}J_\varepsilon - iJ_\varepsilon(b\frac{\partial}{\partial x})$ então pelo lema de Friedrichs temos

$$\|[L, J_\varepsilon]u\|_{L^1(h^1)} \leq \left\|b(\frac{\partial u}{\partial x} \overset{x}{*} \phi_\varepsilon) - (b\frac{\partial u}{\partial x}) \overset{x}{*} \phi_\varepsilon)\right\|_{L^1(h^1)} \longrightarrow 0\,, \quad \varepsilon \longrightarrow 0\,.$$

Portanto,

$$\|u\|_{L^1(h^1)} \leq C\|Lu\|_{L^1(h^1)}\,.$$

∎

Referências Bibliográficas

[BF] R. Beals e C. Fefferman, On local solvability of partial differential equations, Ann. Math. 97, 552-571, (1973).

[BHS] S. Berhanu, J. Hounie e P. Santiago, A similarity principle for complex vector fields and aplications, Trans. Amer. Math. Soc., a aparecer, (2000).

[FS] C. Fefferman e E.M. Stein, H^p Spaces of several variables, Acta Mathematica 129, 137-193, (1972).

[G] D. Goldberg, A local version of real Hardy Spaces, Duke Mathematical Journal, vol 46, 27-42, (1979).

[GR] J.Garcia-Cuerva and J.L. Rubio de Francia ,Weighted Norm Inequalities and Related Topics, Mathematics Studies 116, North-Holland (1985).

[H] L. Hormander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators III, Springer- Verlag, (1984).

[HL] J. Hounie e E. P. de Lemos, Local solvability in L^p of first-order linear operators, Journal of mathematical analysis and applications 197, 42-53, (1996).

[HM] J. Hounie e M. E. Melo, Local a priori estimativas in L^p for first order linear operators with nonsmooth coefficients, Manuscripta Mathematica 94, 151-167 (1997).

[HS] J.Hounie e P. Santiago, Local Solvability in L^p of first order semilinear equations 137-147, Matemática Contemporânea, vol 10, (1996).

[HT] J. Hounie e J. Tavares, On removable singularities of locally solvable differential operators, Inventiones Mathematicae 126, 589-623 (1996).

[M] A. Meziani, On the Similarity Principle for Planar Vector Fields: Application to Second Order PDE, J. of Diff. Equations 157, 1-19 (1999).

[S] H. Smith, A elementary proof of local solvability in two dimensions under condition (Ψ), Ann. of Math., 136, 335-337, (1992).

[St] E. Stein, Harmonic Analysis - Real-Variável Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals Princeton University Press, (1993).

[SW] E. M. Stein e G. Weiss, On the theory of harmonic functions of several variables, the theory of H^p Spaces, Acta. Math., 103, 25-62, (1960).