

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Resolubilidade Global para uma Classe
de Sistemas de Campos Vetoriais
no Toro Tridimensional

Alexandre Kirilov

SÃO CARLOS - SP

2001

Resolubilidade Global para uma Classe de Sistemas de Campos Vetoriais no Toro Tridimensional

Alexandre Kirilov

Orientação

Professor Dr. Adalberto Panobianco Bergamasco

*Tese apresentada ao Programa de
Pós-Graduação em Matemática
da UFSCar como parte dos re-
quisitos para a obtenção do título
de Doutor em Matemática.*

UFSCar - São Carlos

Dezembro de 2001

Orientador

Prof. Dr. Adalberto P. Bergamasco

À Marisa

Agradecimentos

- Ao Adalberto, pela orientação e dedicação.
- Aos colegas do Depto. de Matemática da UFPR, pelo apoio e confiança.
- Aos professores do DM - UFSCar que contribuíram na minha formação.
- A todos os amigos que fiz em São Carlos.

Este trabalho contou parcialmente
com o apoio financeiro da CAPES

Abstract

In this work we consider systems of two vector fields on the 3-torus. We prove that global solvability for these systems (in the tube case, when the 1-form is closed and non-exact) is equivalent to all the sublevel and superlevel sets of a certain primitive being connected.

Resumo

Neste trabalho consideramos sistemas de dois campos vetoriais no toro tridimensional. Provamos que a resolubilidade global para estes sistemas (no caso tubo, quando a 1-forma associada é fechada e não exata) é equivalente a todos os conjuntos de subnível e supernível de uma certa primitiva serem conexos.

Sumário

Introdução	1
1 Considerações Iniciais	6
1.1 O Sistema de Equações	7
1.2 Funções Pseudoperiódicas	8
1.3 Condições de Compatibilidade	10
1.4 Enunciado do Teorema Principal	13
2 A Construção da Transversal (1ª parte)	14
2.1 Uma Curva Pré-Transversal	15
2.2 Caracterização dos Níveis Regulares	24
3 A Construção da Transversal (2ª parte)	32
3.1 Os Níveis Críticos	33
3.2 As <i>Traps</i>	38
3.3 A Construção da Transversal	44
4 Subníveis Conexos e a Resolubilidade Global	49
4.1 O Coeficiente $\hat{u}(t, \xi)$ Dependendo do Caminho	50
4.2 Caminhos de Integração	52
4.3 Construção da Solução	56

5	Subníveis Desconexos e a não-Resolubilidade Global	62
5.1	O Caso Modelo	63
5.2	Redução ao Caso Modelo	71
	Referências Bibliográficas	76

Introdução

Neste trabalho propomo-nos a estudar a resolubilidade global, no toro \mathbb{T}^3 , do sistema de campos vetoriais

$$\mathbb{L} = \begin{cases} L_1 = \partial_1 + ib_1(t)\partial_x \\ L_2 = \partial_2 + ib_2(t)\partial_x \end{cases}$$

com $b_1, b_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2, \mathbb{R})$, $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{T}^2$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ e $\partial_j = \frac{\partial}{\partial t_j}$ para $j = 1, 2$

Pedimos primeiramente que o \mathbb{L} seja involutivo, o que é equivalente a dizer que a 1-forma

$$b(t) = b_1(t)dt_1 + b_2(t)dt_2 \in \wedge^1 \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2) \text{ é fechada.}$$

Nosso objetivo é estabelecer condições para que, dadas $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^3)$, exista $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^3)$ satisfazendo $L_j u = f_j$, para $j = 1, 2$. Mas para que isto seja possível precisamos impor algumas condições sobre as funções $f_1(t, x)$ e $f_2(t, x)$.

Tais condições são: $L_1 f_2 = L_2 f_1$ e que os coeficientes parciais de Fourier $\hat{f}_1(t, 0)$ e $\hat{f}_2(t, 0)$ satisfaçam

$$\int_0^{2\pi} \hat{f}_1(r, 0, 0) dr = 0 \quad \text{e} \quad \int_0^{2\pi} \hat{f}_2(0, s, 0) ds = 0 \quad (\star)$$

Diremos que \mathbb{L} é Globalmente Resolúvel (GR) em \mathbb{T}^3 se para todo par de funções $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^3)$ satisfazendo $L_1 f_2 = L_2 f_1$ e a condição (\star) acima, existir $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^3)$ tal que $L_j u = f_j$, para $j = 1, 2$.

Este tipo de sistema, foi estudado por Treves, ver [T1] e [T2], no caso local e num contexto mais geral de operadores pseudodiferenciais sobre uma variedade \mathcal{C}^∞ e em todos os níveis do complexo diferencial associado.

No caso de nosso sistema de campos vetoriais \mathbb{L} , no primeiro nível deste complexo, os dois tipos de resolubilidade estudados por Treves são os seguintes:

$$(\mathcal{R}_1) \quad \forall f \in \mathcal{B}_{\mathbb{L}}\mathcal{C}^\infty(\Omega), \forall \mathcal{O}' \subset\subset \Omega', \exists u \in \mathcal{D}'(\mathcal{O}') \text{ tal que } \mathbb{L}u = f \text{ em } \mathcal{O}'$$

$$(\mathcal{R}_2) \quad \forall f \in \mathcal{B}_{\mathbb{L}}\mathcal{C}^\infty(\Omega), \forall \mathcal{O}' \subset\subset \Omega', \exists u \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}') \text{ tal que } \mathbb{L}u = f \text{ em } \mathcal{O}'$$

aqui $\Omega' \subset \Omega$ é um aberto fixado e $\mathcal{B}_{\mathbb{L}}\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ é o espaço das $f \in \wedge^1 \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ que satisfazem as condições de compatibilidade do sistema. E o resultado obtido é o seguinte:

Teorema [Treves] *Sejam $\Omega_r = \{t \in \mathcal{O}' ; B(t) < r\}$, com $r \in \mathbb{R}$. As seguintes afirmações a respeito de \mathbb{L} são equivalentes*

(i) \mathbb{L} é resolúvel no sentido (\mathcal{R}_1) ;

(ii) \mathbb{L} é resolúvel no sentido (\mathcal{R}_2) ;

(iii) *valem as condições $(\psi)_+$ e $(\psi)_-$ generalizadas, as quais são definidas da seguinte forma:*

$(\psi)_\pm$ $\forall \mathcal{O}' \subset\subset \Omega', \exists \mathcal{O} \subset\subset \Omega$ *contendo \mathcal{O}' tal que: $\forall r \in \mathbb{R}$ a interseção de $\mathcal{O}'_r = \mathcal{O}' \cap \Omega_r = \{t \in \mathcal{O}' ; \pm B(t) < r\}$ com qualquer componente conexa de Ω' , está contida numa componente fixa de $\mathcal{O}'_r = \mathcal{O} \cap \Omega_r$.*

Aqui $B(t) = \int_{t_0}^t b$ é uma integral curvilínea da 1-forma b , ao longo de qualquer caminho contido na variedade Ω , unindo t_0 e t .

Posteriormente, Cardoso-Hounie, ver [CH], estudaram a resolubilidade global de sistemas numa variedade \mathcal{C}^∞ compacta conexa orientável e sem bordo. Este estudo também foi feito num contexto mais geral de operadores lineares auto-adjuntos num espaço de Hilbert, os quais são ilimitados, positivos

e possuem inversa limitada. Além disto o resultado obtido refere-se a todos os níveis do complexo associado.

Em relação ao nosso sistema de campos vetoriais \mathbb{L} , o artigo [CH] permite-nos concluir o seguinte resultado *quando a 1-forma b é exata*:

Teorema [Cardoso-Hounie] *O sistema \mathbb{L} é globalmente resolúvel se, e somente se, os conjuntos de subnível $\Omega_r = \{t \in \Omega / B(t) < r\}$ e de supernível $\Omega^r = \{t \in \Omega / B(t) > r\}$ são conexos, $\forall r \in \mathbb{R}$. Aqui $B(t) = \int_{t_0}^t b$ é uma primitiva da 1-forma exata b definida na variedade Ω .*

Também no nosso trabalho estabelecemos condições necessárias e suficientes para que o sistema seja \mathbb{L} seja globalmente resolúvel no toro \mathbb{T}^3 , porém no caso em que

$$b(t) \in \wedge^1 \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2) \text{ é fechada, mas não exata.}$$

A condição que obtivemos igualmente relaciona a resolubilidade global com a conexidade de conjuntos de subnível e supernível. Porém neste caso b não possui primitiva em \mathbb{T}^2 . A solução que encontramos foi olhar estes conjuntos sobre o recobrimento universal \mathbb{R}^2 .

Começamos definindo os períodos

$$b_{10} = \int_0^{2\pi} b_1(\tau_1, 0) d\tau_1 \quad \text{e} \quad b_{20} = \int_0^{2\pi} b_2(0, \tau_2) d\tau_2$$

como b não é exata então $b_0 = (b_{10}, b_{20}) \neq (0, 0)$. Neste trabalho estamos interessados no caso em que b_{10} e b_{20} são incomensuráveis, ou seja, linearmente independentes sobre \mathbb{Q} .

Considere a primitiva $B \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ definida por $B(t) = \int_{t_0}^t \Pi^* b$. Aqui $\Pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ é a aplicação de recobrimento. Nosso principal resultado é o seguinte:

Teorema 1.4 *Seja $b \in \wedge^1 \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2)$ fechada com períodos incomensuráveis. Então o sistema \mathbb{L} é globalmente resolúvel em \mathbb{T}^3 se, e somente se, os subníveis $\Omega_r = \{\tau \in \mathbb{R}^2 / B(t) < r\}$ e os superníveis $\Omega^r = \{\tau \in \mathbb{R}^2 / B(t) > r\}$ forem conexos, para todo $r \in \mathbb{R}$.*

A demonstração deste teorema está dividida em duas partes. A suficiência no capítulo 3 e a necessidade no capítulo 4. As construções feitas nestes dois capítulos dependem fundamentalmente da existência de uma transversal para as componentes conexas ilimitadas de conjuntos de nível de B . A existência desta transversal será provada nos capítulos 2 e 3.

O caso que estudamos é chamado de *incomensurável*, uma referência a incomensurabilidade dos períodos b_{10} e b_{20} . O caso estudado em [CH] e chamado de *exato*, aqui a 1-forma b possui primitiva na própria variedade \mathbb{T}^2 .

Existe ainda o caso comensurável, em que os períodos da b_{10} e b_{20} são múltiplos racionais um do outro. Num certo sentido, este é um caso intermediário entre o incomensurável e o exato. Como várias técnicas desenvolvidas neste trabalho não se aplicam no caso comensurável decidimos não incluí-lo neste trabalho e pretendemos estudá-lo no futuro.

O caso de um único campo $L = \partial_t + ib(t)\partial_x$ definido em \mathbb{T}^2 , com $b \in C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{R})$ e $b \not\equiv 0$, foi estudado por Hounie, em [H]. Quando $b \not\equiv 0$ obtemos o seguinte:

$$L \text{ é (GR)} \Leftrightarrow b \text{ não muda de sinal.}$$

Aqui L é (GR) se para toda $f \in C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{R})$ satisfazendo $\int_0^{2\pi} \hat{f}(t, 0) dt = 0$ existir $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^1)$ tal que $Lu = f$.

Note que esta condição de b não mudar de sinal é equivalente a dizer que

$$\Omega_r = \{t \in \mathbb{R}; B(t) < r\} \quad \text{e} \quad \Omega^r = \{t \in \mathbb{R}; B(t) > r\}$$

são conexos, para todo $r \in \mathbb{R}$. Aqui $B(t) = \int_{t_0}^t b(\tau) d\tau$.

Conjectura O sistema involutivo $L_j = \partial_j + ib_j(t)\partial_x$ ($1 \leq j \leq n-1$), definido em $\mathbb{T}_t^{n-1} \times \mathbb{S}_x^1$ é (GR) se, e somente se todos os subníveis e superníveis da função $B(t) = \int_{t_0}^t \Pi^* b$ forem conexos.

A distribuição dos capítulos neste trabalho ficou da seguinte forma: no capítulo 1 introduzimos as notações e definições usadas neste trabalho; reescrevemos o sistema \mathbb{L} enfocando a 1-forma b e usando a linguagem de fibrados vetoriais; definimos resolubilidade global e reescrevemos o teorema (1.4) acima nesta nova linguagem.

Começamos o capítulo 2 usando um resultado de Arnold [A] para obter uma curva γ , chamada de pré-transversal, que possuirá muitas das propriedades que desejamos da transversal. Na última seção deste capítulo fazemos um estudo dos níveis regulares de uma função pseudoperiódica e conseguimos “melhorar” a curva pré-transversal.

O capítulo 3 começa com um estudo minucioso dos níveis críticos da primitiva B para detectar os tipos de problemas que impedem γ de ser transversal. Na última seção mostramos como modificar a curva γ para que ela torne-se a transversal procurada.

No capítulo 4 demonstramos a suficiência, isto é, supondo que todos os subníveis e superníveis de B são conexos mostramos que \mathbb{L} é globalmente resolúvel. A técnica utilizada aqui foi a de integrar os coeficientes parciais de Fourier $\hat{u}(t, \xi)$ do candidato a solução do sistema sobre caminhos de integração convenientes.

No capítulo 5 provamos a necessidade dos subníveis e superníveis serem conexos para que \mathbb{L} seja globalmente resolúvel. A idéia é mostrar que numa situação bastante especial, chamada de caso modelo, se existirem subníveis ou superníveis desconexos então \mathbb{L} não será globalmente resolúvel. A segunda parte do capítulo mostra como reduzir o caso geral para o caso modelo usando difeomorfismos do toro.

Capítulo 1

Considerações Iniciais

O objetivo deste capítulo é introduzir as notações e definições necessárias para enunciar o principal resultado deste trabalho, que relaciona a resolubilidade global de um sistema com a conexidade de certos conjuntos de subnível e supernível.

Na seção (1.1) apresentamos o sistema de equações \mathbb{L}^0 que estudaremos. A forma de apresentação, começando com uma 1-forma fechada $b \in \wedge^1 \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2)$ e usando a linguagem de fibrados vetoriais, foi introduzida por Treves e tem sido muito usada em artigos da área.

Na seção (1.2) definimos as médias da 1-forma b , as quais, por hipótese, são incomensuráveis. Também introduzimos o conceito de funções pseudo-periódicas e mostramos que a função $B(t) = \int_0^t \Pi^* b$, com $t \in \mathbb{R}^2$, é pseudo-periódica; aqui $\Pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ é o recobrimento universal do toro.

Na seção (1.3) determinamos as condições de compatibilidade para \mathbb{L}^0 , ou seja, as condições que uma certa $f \in \wedge^1 \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2)$ deve satisfazer para que faça sentido perguntar se existe solução para o sistema $\mathbb{L}^0 u = f$.

Finalmente, na seção (1.4), definimos o conceito de resolubilidade global para \mathbb{L}^0 e enunciamos o teorema já citado no primeiro parágrafo acima.

1.1 O Sistema de Equações

Denotaremos por $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ os espaços das funções infinitamente diferenciáveis, a valores reais, definidas sobre \mathbb{R}^n e \mathbb{T}^n respectivamente. E por $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ o espaço das distribuições definidas no toro \mathbb{T}^n . Neste trabalho teremos sempre $n = 2$ ou 3 .

Usaremos a notação $(t, x) \in \mathbb{T}^3$ indicando que $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{T}^2$ e $x \in \mathbb{T}^1$. Também adotaremos a notação $t = (t_1, t_2)$ em \mathbb{R}^2 e usaremos sempre a norma do máximo nestes espaços.

Seja $b \in \bigwedge^1 \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2)$ uma 1-forma *fechada*, isto é, existem $b_1, b_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2)$ tais que $b(t) = b_1(t)dt_1 + b_2(t)dt_2$ e $\partial_1 b_2 = \partial_2 b_1$.

Consideremos o subfibrado vetorial $T' \subset \mathbb{C} \otimes T^*(\mathbb{T}^3)$ gerado pela 1-forma $dx - ib \in \bigwedge^1 \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^3)$. Seu ortogonal $\mathcal{V} = (T')^\perp$ é um subfibrado vetorial de $\mathbb{C} \otimes T(\mathbb{T}^3)$ cujas fibras tem dimensão 2. O subfibrado \mathcal{V} é gerado pelos campos vetoriais

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} + ib_j(t) \frac{\partial}{\partial x}, \quad j = 1, 2$$

Assim $\mathcal{V} = \langle L_1, L_2 \rangle$ é uma estrutura localmente integrável de codimensão 1 sobre \mathbb{T}^3 .

Definimos o operador diferencial $\mathbb{L}^0 : \mathcal{D}'(\mathbb{T}^3) \longrightarrow \bigwedge^1 \mathcal{D}'(\mathbb{T}^3)$ pondo

$$\mathbb{L}^0 = d_t + ib(t) \wedge \partial_x \tag{1.1.1}$$

aqui d_t é a derivada exterior em \mathbb{T}^2 e $\partial_x = \partial/\partial x$. Note que \mathbb{L}^0 também pode ser visto como um operador de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^3)$ em $\bigwedge^1 \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^3)$.

Definimos também o operador $\mathbb{L}^1 : \bigwedge^1 \mathcal{D}'(\mathbb{T}^3) \longrightarrow \bigwedge^2 \mathcal{D}'(\mathbb{T}^3)$ usando a mesma expressão:

$$\mathbb{L}^1 = d_t + ib(t) \wedge \partial_x \tag{1.1.2}$$

Se $\omega(t, x) = \omega_1(t, x)dt_1 + \omega_2(t, x)dt_2 \in \wedge^1 \mathcal{D}'(\mathbb{T}^3)$ então

$$\mathbb{L}^1 \omega = (L_1 \omega_2 - L_2 \omega_1) dt_1 \wedge dt_2$$

Assim, dado $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^3)$ teremos

$$\begin{aligned} \mathbb{L}^1(\mathbb{L}^0 u) &= \mathbb{L}^1(d_t u + c(t) \wedge \partial_x u) \\ &= \mathbb{L}^1(L_1 u dt_1 + L_2 u dt_2) \\ &= (L_1(L_2 u) - L_2(L_1 u)) dt_1 \wedge dt_2 \\ &= i \left(\frac{\partial}{\partial t_2} b_1(t) - \frac{\partial}{\partial t_1} b_2(t) \right) \frac{\partial u}{\partial x} dt_1 \wedge dt_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto $\mathbb{L}^1 \mathbb{L}^0 = 0$ e a seqüência

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{T}^3) \xrightarrow{\mathbb{L}^0} \wedge^1 \mathcal{D}'(\mathbb{T}^3) \xrightarrow{\mathbb{L}^1} \wedge^2 \mathcal{D}'(\mathbb{T}^3) \longrightarrow 0$$

é um complexo diferencial.

Neste trabalho estamos interessados em estudar a resolubilidade global de \mathbb{L}^0 . A resolubilidade global do operador \mathbb{L}^1 foi estudada em [BCP].

1.2 Funções Pseudoperiódicas

Definição 1.1. Dizemos que uma função $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é pseudoperiódica se $H(t + 2\pi\eta) = H(t) + \omega(2\pi\eta)$ para todo $t \in \mathbb{R}^2$ e $\eta \in \mathbb{Z}^2$, sendo $\omega : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ um monomorfismo.

Pondo $r = \omega(0, 2\pi)$ e $s = \omega(2\pi, 0)$ teremos $\omega(2\pi\eta) = r\eta_1 + s\eta_2$, para todo $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{Z}^2$. Como o núcleo de ω contém apenas o ponto $(0, 0)$ então a única possibilidade de ocorrer $\omega(2\pi\eta) = \eta_1 r + \eta_2 s = 0$ será quando $\eta_1 = \eta_2 = 0$. Isto significa r e s são incomensuráveis, ou seja, estes números são linearmente independentes sobre \mathbb{Q} .

Portanto $\omega : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é um monomorfismo $\Leftrightarrow \omega(2\pi\eta) = \eta_1 r + \eta_2 s$, para todo $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{Z}^2$, com r e s incomensuráveis.

Lema 1.2. *H é pseudoperiódica se, e somente se, H é a soma de uma função periódica P com uma função linear $L(t) = rt_1 + st_2$, com r e s incomensuráveis e $t \in \mathbb{R}^2$.*

Prova: Suponha que $H(t) = P(t) + L(t)$ e tomemos $t \in \mathbb{R}^2$ e $\eta \in \mathbb{Z}^2$ então

$$H(t + 2\pi\eta) = P(t + 2\pi\eta) + L(t + 2\pi\eta) = P(t) + L(t) + L(2\pi\eta) = H(t) + L(2\pi\eta)$$

Como, por hipótese, r e s são incomensuráveis então H é pseudoperiódica.

Por outro lado, supondo que H é pseudoperiódica e tomando $P(t) = H(t) - \omega(t)$ teremos $H(t) = (H(t) - \omega(t)) + \omega(t) = P(t) + \omega(t)$. Aqui $L(t) = \omega(t)$ é linear e falta apenas mostrar que P é periódica, mas

$$\begin{aligned} P(t + 2\pi\eta) &= H(t + 2\pi\eta) - \omega(t + 2\pi\eta) \\ &= H(t) + \omega(2\pi\eta) - (\omega(t) + \omega(2\pi\eta)) \\ &= H(t) - \omega(t) = P(t) \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}^2$ e $\eta \in \mathbb{Z}^2$. ■

Considere agora a função

$$g(t_2) = \int_0^{2\pi} b_1(\tau_1, t_2) d\tau_1, \quad \text{com } t_2 \in [0, 2\pi]$$

Pelos teoremas de Fubini e Fundamental do Cálculo temos

$$\begin{aligned} g(t_2) - g(0) &= \int_0^{2\pi} (b_1(\tau_1, t_2) - b_1(\tau_1, 0)) d\tau_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^{t_2} \frac{\partial b_1}{\partial t_2}(\tau_1, \tau_2) d\tau_2 d\tau_1 \\ &= \int_0^{t_2} \int_0^{2\pi} \frac{\partial b_1}{\partial t_2}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 = \int_0^{t_2} \int_0^{2\pi} \frac{\partial b_2}{\partial t_1}(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int_0^{t_2} (b_2(2\pi, \tau_2) - b_2(0, \tau_2)) d\tau_2 = \int_0^{t_2} 0 d\tau_2 = 0 \end{aligned}$$

Portanto g é constante. Analogamente a função

$$h(t_1) = \int_0^{2\pi} b_2(t_1, \tau_2) d\tau_2 \quad \text{com } t_1 \in [0, 2\pi]$$

é constante.

Definimos então as médias

$$b_{10} = \int_0^{2\pi} b_1(\tau_1, 0) d\tau_1 \quad (1.2.1)$$

$$b_{20} = \int_0^{2\pi} b_2(0, \tau_2) d\tau_2 \quad (1.2.2)$$

Fazendo o pull-back de $b \in \wedge^1 \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2)$ através do recobrimento universal $\Pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ obtemos a 1-forma

$$(\Pi^*b)(t) = b_1(t)dt_1 + b_2(t)dt_2$$

com $b_1, b_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ e 2π -periódicas em cada variável.

Como \mathbb{R}^2 é simplesmente conexo e Π^*b é fechada então a 1-forma Π^*b é exata em \mathbb{R}^2 e a integral $\int_{t_0}^t \Pi^*b$ não depende do caminho de integração. Logo está bem definida a função

$$B(t) = \int_{t_0}^t \Pi^*b, \quad t \in \mathbb{R}^2 \quad (1.2.3)$$

Obviamente $B \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ porém, em geral, esta função não é periódica. Na verdade, B será periódica se, e somente se, a 1-forma b for exata. Porém neste trabalho estamos interessados no caso em que esta 1-forma é fechada e não exata. Além disto os períodos b_{10} e b_{20} deverão ser incomensuráveis

Segue do lema (1.1) acima, a função $B(t) = \int_0^t \Pi^*b$ é pseudoperiódica e

$$B(t) = P(t) + b_0 \cdot t \quad (1.2.4)$$

com $b_0 = (b_{10}, b_{20})$ e $P(t) = \int_0^t \Pi^*b - b_0 \cdot t$ periódica.

1.3 Condições de Compatibilidade

Nosso objetivo neste trabalho é estabelecer condições para que o sistema de equações

$$\mathbb{L}^0 u = f \quad (1.3.1)$$

tenha solução, para $f \in \wedge^1(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^3))$ dada, mas para que isto seja possível devemos impor algumas condições sobre as funções f_1 e f_2 .

Se existir $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^3)$ solução do sistema (1.3.1) então $L_1 f_2 = L_1(L_2 u) = L_2(L_1 u) = L_2 f_1$. Logo, para que o sistema (1.3.1) tenha solução, devemos começar exigindo que

$$L_1 f_2 = L_2 f_1 \quad (1.3.2)$$

ou equivalentemente que $\mathbb{L}^1 f = 0$ pois

$$\mathbb{L}^1 f = \mathbb{L}^1(f_1 dt_1 + f_2 dt_2) = (L_1 f_2 - L_2 f_1) dt_1 \wedge dt_2$$

Além desta condição, própria do sistema de equações \mathbb{L} , há uma segunda condição associada a compacidade do toro. Para enunciá-la começamos substituindo as séries parciais de Fourier

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \hat{u}(t, \xi) e^{i\xi x} \quad \text{e} \quad f(t, x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \hat{f}(t, \xi) e^{i\xi x}, \quad j = 1, 2$$

na equação $\mathbb{L}^0 u = f$, aqui $\hat{f}(t, \xi) = \hat{f}_1(t, \xi) dt_1 + \hat{f}_2(t, \xi) dt_2 \in \wedge^1 \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2)$, para todo $\xi \in \mathbb{Z}$.

Segue da continuidade de \mathbb{L}^0 em $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^3)$ e da unicidade de representação em séries de Fourier que

$$\left(d_t - \xi b(t) \right) \hat{u}(t, \xi) = \hat{f}(t, \xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad t \in \mathbb{T}^2 \quad (1.3.3)$$

Multiplicando esta equação pelo fator $e^{-\xi \tilde{B}(t)}$, com $\tilde{B}(t) = B(t) - b_0 \cdot t$, podemos reescrevê-la como $e^{-\xi \tilde{B}(t)} [d_t \hat{u} - \xi(b(t) - b_0) \hat{u} - \xi b_0 \hat{u}] = e^{-\xi \tilde{B}(t)} \hat{f}$.

Usando $d_t \tilde{B} = b - b_0$ e $d_t(e^{-\xi \tilde{B}} \hat{u}) = e^{-\xi \tilde{B}} \{d_t - \xi(b - b_0)\} \hat{u}$ obtemos a equação equivalente

$$(d_t - \xi b_0) \left(e^{-\xi \tilde{B}(t)} \hat{u}(t, \xi) \right) = e^{-\xi \tilde{B}(t)} \hat{f}(t, \xi) \quad \text{com} \quad (t, \xi) \in \mathbb{T}^2 \times \mathbb{Z} \quad (1.3.4)$$

Para prosseguir com as contas usaremos o seguinte resultado.

Lema 1.3. *Seja $\lambda = \lambda_1 dt_1 + \lambda_2 dt_2$, com $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ e consideremos a equação*

$$(d_t + \lambda)v(t) = g(t) \quad (1.3.5)$$

com $g(t) = g_1(t) dt_1 + g_2(t) dt_2 \in \wedge^1 \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2)$ satisfazendo $(d_t + \lambda)g(t) = 0$.

(i) Se $\lambda_1 \notin i\mathbb{Z}$, então (1.3.5) possui exatamente uma solução dada por

$$v(t) = e^{-\lambda t} \int_{(0,t_2)}^{(t_1,t_2)} e^{\lambda \cdot \tau} g(\tau) - \frac{e^{-\lambda \cdot t}}{1 - e^{2\pi\lambda_1}} \int_{(0,t_2)}^{(2\pi,t_2)} e^{\lambda \cdot \tau} g(\tau)$$

(ii) Se $\lambda_2 \notin i\mathbb{Z}$, então (1.3.5) possui exatamente uma solução dada por

$$v(t) = e^{-\lambda t} \int_{(t_1,0)}^{(t_1,t_2)} e^{\lambda \cdot \tau} g(\tau) - \frac{e^{-\lambda \cdot t}}{1 - e^{2\pi\lambda_2}} \int_{(t_1,0)}^{(t_1,2\pi)} e^{\lambda \cdot \tau} g(\tau)$$

(iii) Se $(\lambda_1, \lambda_2) \in i\mathbb{Z}^2$ e as integrais

$$\int_0^{2\pi} e^{\lambda_1 \tau_1} g_1(\tau_1, 0) d\tau_1 = 0 \quad e \quad \int_0^{2\pi} e^{\lambda_1 \tau_1} g_1(\tau_1, 0) d\tau_2 = 0$$

então uma solução para (1.3.5) é $v(t) = e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda \cdot \tau} g(\tau)$

Para demonstrar este lema basta usar o fator integrante para encontrar a solução geral da equação (1.3.5) em \mathbb{R}^2 e impor as condições de fronteira que implicarão na periodicidade.

Concluimos assim que a existência de soluções periódicas para a equação (1.3.4) depende dos números ξb_{10} e ξb_{20} estarem ou não em $i\mathbb{Z}$. Como b_{10} e b_{20} são reais e não nulos, então

$$(\xi b_{10}, \xi b_{20}) \in i\mathbb{Z}^2 \Leftrightarrow \xi = 0$$

Para cada $\xi \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ a equação (1.3.3) possui uma única solução. Porém quando $\xi = 0$ existirá solução somente quando as integrais

$$\int_0^{2\pi} \hat{f}_1(r, 0, 0) dr = 0 \quad e \quad \int_0^{2\pi} \hat{f}_2(0, s, 0) ds = 0 \quad (1.3.6)$$

Obtemos assim uma segunda condição de compatibilidade, ou seja, para que faça sentido a pergunta: Existe uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^3)$ solução para a equação $\mathbb{L}^0 u = f$? Devemos começar exigindo que $\mathbb{L}^1 f = 0$ e que valha a condição (1.3.6).

1.4 Enunciado do Teorema Principal

Nosso principal resultado estabelece condições para que a equação $\mathbb{L}^0 u = f$ tenha solução. Antes de enunciá-lo precisamos definir o que significa dizer que \mathbb{L}^0 é globalmente resolúvel.

Vamos denotar por

$$\mathbb{E} = \left\{ f \in \bigwedge^1 \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^3) / \mathbb{L}^1 f = 0 \text{ e vale (1.3.6)} \right\} \quad (1.4.1)$$

o Espaço das Funções Admissíveis para a Resolubilidade de \mathbb{L} , ou seja, o espaço das 1-formas para as quais faz sentido procurar solução para o sistema.

Definição 1.4. Dizemos que \mathbb{L}^0 é globalmente resolúvel (GR) em \mathbb{T}^3 se para toda 1-forma $f \in \mathbb{E}$ existir $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^3)$ tal que $\mathbb{L}^0 u = f$.

Teorema 1.5. Seja $b \in \bigwedge^1 \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2)$ fechada com períodos incomensuráveis e considere a função $B(t) = \int_0^t \Pi^* b$. Então o sistema $\mathbb{L}^0 = d_t + ib(t)\partial_x$ é (GR) se, e somente se, os subníveis $\Omega_r = \{\tau \in \mathbb{R}^2 / B(\tau) < r\}$ e os superníveis $\Omega^r = \{\tau \in \mathbb{R}^2 / B(\tau) > r\}$ forem conexos, para todo $r \in \mathbb{R}$.

A demonstração deste teorema está dividida em duas partes. A suficiência no capítulo 3 e a necessidade no capítulo 4. As construções feitas nestes dois capítulos dependem fundamentalmente da existência de uma transversal para as componentes conexas ilimitadas de conjuntos de nível de B . A existência desta transversal será provada nos capítulos 2 e 3.

Capítulo 2

A Construção da Transversal

(1ª parte)

Nosso objetivo é mostrar que existe uma curva fechada σ em \mathbb{T}^2 , não homóloga a zero e que não passa em nenhum ponto singular de b , cujo levantamento $\tilde{\sigma}$ a \mathbb{R}^2 é transversal a todas as componentes ilimitadas de conjuntos de nível de B .

O processo de construção desta curva passa por várias etapas e foi inspirada primeiramente no trabalho de Arnold, ver [A] pag. 86-88. Neste trabalho Arnold aborda o caso em que B é suave e está em posição geral (isto significa que todos os pontos críticos de B são isolados e os valores críticos são todos diferentes entre si). O caso em que B é pseudoperiódica e analítica-real foi resolvido por Bergamasco-Nunes-Zani, ver [BNZ-2].

Para resolver o caso \mathcal{C}^∞ foi necessário fazer um estudo detalhado dos conjuntos de nível de uma função pseudoperiódica suave. Como as técnicas usadas no estudo dos níveis críticos destas funções diferem muito daquelas utilizadas por Arnold, decidimos dividir a construção da transversal em dois capítulos. Nesta primeira parte introduzimos a curva obtida por Arnold e, analisando os níveis regulares da primitiva B , conseguimos melhorá-la um pouco.

Na segunda parte, contida no capítulo 3, estudaremos melhor os níveis críticos para efetivar a construção da transversal.

Na seção (2.1) obtemos uma curva γ , fora de $\Sigma = \{\tau; d_t B(\tau) = 0\}$, que intercepta transversalmente todos os conjuntos de nível ilimitados de B , com exceção de um número finito destes onde ocorrem pontos de tangências.

Na seção (2.2) constatamos que cada um dos níveis regulares de B possui uma única componente conexa ilimitada, a qual é difeomorfa a \mathbb{R} e tende a infinito, para ambos os lados, dentro de uma faixa não vertical, tais curvas serão chamadas *curvas normais*. Além disto mostramos que é possível modificar a curva γ obtida na seção anterior para que cada uma das curvas normais intercepte γ uma única vez.

Durante este capítulo todo vamos supor que as médias de b são negativas, ou seja, $b_{10} < 0$ e $b_{20} < 0$. Na página 72 adiante mostramos que sempre é possível supor isto.

2.1 Uma Curva Pré-Transversal

Vamos denotar por $\mathcal{F}(t)$ ao conjunto de nível de B que contém t , ou seja, $\mathcal{F}(t) = B^{-1}(\{B(t)\})$ e por $\mathcal{F}'(t)$ a componente conexa de $\mathcal{F}(t)$ que contém o ponto t .

Lema 2.1. *Se $b \in \wedge^1 C^0(\mathbb{T}^2)$ é fechada e $b_0 \neq 0$ então cada conjunto de nível $\mathcal{F}(t)$, com $t \in \mathbb{R}^2$ está contido numa faixa $S_t = \{\tau \in \mathbb{R}^2 / \alpha_t \leq b_0 \cdot \tau \leq \beta_t\}$.*

Prova: Considere a função periódica $P(t) = B(t) - b_0 \cdot t$, então $\forall s \in \mathcal{F}(t)$ temos $0 = B(s) - B(t) \leq 2\|P\|_\infty + b_0 \cdot (s - t) \Rightarrow b_0 \cdot t - 2\|P\|_\infty \leq b_0 \cdot s$.

Por outro lado $0 = B(s) - B(t) \geq -2\|P\|_\infty + b_0 \cdot (s - t)$ e assim $b_0 \cdot s \leq b_0 \cdot t + 2\|P\|_\infty$. Portanto

$$\mathcal{F}(t) \subset \{\tau \in \mathbb{R}^2 / b_0 \cdot t - 2\|P\|_\infty \leq b_0 \cdot \tau \leq b_0 \cdot t + 2\|P\|_\infty\} \quad \blacksquare$$

Uma conseqüência imediata do lema acima é que os conjuntos de subnível $\Omega_r = \{\tau/B(\tau) < r\}$ e de supernível $\Omega^r = \{\tau/B(\tau) > r\}$ de B contém um semiplano cada. O resultado a seguir fortalece esta constatação.

Teorema 2.2. (Arnold) *Seja $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função pseudoperiódica suave. Então qualquer subnível Ω_r (ou supernível Ω^r) de B contém exatamente uma componente conexa não limitada, a qual contém um semiplano.*

A prova detalhada deste resultado depende de alguns resultados que provaremos adiante e vamos deixá-la para o final desta seção (ver página 23).

O número real r é um *valor regular* da função B quando não existirem pontos críticos de B no nível r , ou seja, se $B(t) = r$ então $\nabla B(t) \neq 0$. Quando r é um valor regular dizemos que o nível correspondente é *regular*. Se existirem pontos críticos de B no nível r diremos que este é um *nível crítico*. Denotaremos o conjunto dos pontos críticos de B por $\Sigma = \{\tau/d_t B(\tau) = 0\}$.

O próximo resultado, que pode ser encontrado em [A], será usado na prova do teorema (2.4) adiante.

Lema 2.3. *Seja M uma variedade bidimensional compacta, orientada, com fronteira e $\omega \in \wedge^1 \mathcal{C}^1(M)$ fechada. Se G é uma c.c. de $\mathcal{R} = \mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$ então a integral de Lebesgue*

$$\int_{G \cap \partial M} \omega = 0$$

Teorema 2.4. (Arnold) *Se B é uma função pseudoperiódica suave em \mathbb{R}^2 então existe uma curva suave γ , fora de Σ , conectando um ponto $P \in \mathbb{R}^2$ com um de seus inteiros transladados $P + 2\pi(p, q)$, aqui $(p, q) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.*

Prova: Seja G uma c.c. qualquer do conjunto aberto $\mathcal{R} = \mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$. Como B é pseudoperiódica então a translação de G por vetores de $2\pi\mathbb{Z}$ também é uma c.c. de \mathcal{R} . Mas duas c.c. G e $G + \{2\pi(p, q)\}$ são disjuntas ou coincidem. Se coincidirem então para qualquer $P \in G$ teremos $P + 2\pi(p, q) \in G$. Como G é aberta e conexa então é conexa por caminhos, conseqüentemente existe um caminho $\gamma \subset \mathcal{R}$ conectando P e $P + 2\pi(p, q)$ e o resultado estará provado.

Resta estudar o caso em que nenhuma c.c. G de \mathcal{R} intercepta seus inteiros transladados. Vamos mostrar que esta situação não ocorre.

Suponha que para toda c.c. G de \mathcal{R} tenhamos $G \cap (G + \{2\pi(p, q)\}) = \emptyset$, $\forall (p, q) \in \mathbb{Z}$. Neste caso a projeção canônica $\Pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ leva cada G difeomorficamente sobre sua imagem $\Pi(G)$.

Considere as interseções de uma componente G fixada com as retas verticais $t_1 = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Cada uma destas interseções, denotadas por g_k , é a reunião enumerável de intervalos dois-a-dois disjuntos. Além disto, os inteiros transladados dos intervalos de g_k também são mutuamente disjuntos (pois $g_k \subset G$ e G não intercepta inteiros transladados).

Portanto a projeção de todos os intervalos de todos os conjuntos g_k , com $k \in \mathbb{Z}$, no toro \mathbb{T}^2 , constitui-se de uma reunião de arcos dois-a-dois disjuntos sobre o 1-ciclo $\sigma_1 = \{t \in \mathbb{T}^2; t_1 = 0\}$.

Considere agora a faixa $S_k = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2; 2k\pi \leq t_1 \leq 2(k+1)\pi\}$, com $k \in \mathbb{Z}$. Então $G \cap S_k$ é formado por, no máximo, uma quantidade enumerável de componentes conexas G_{jk} , aqui $j \in \mathbb{N}$. E cada uma destas c.c. pode ser projetada difeomorficamente no cilindro

$$C_l = \{(t_1, t_2); 2l\pi \leq t_1 \leq 2(l+1)\pi, t_2 \bmod(2\pi)\}$$

Aplicando o lema (2.3) acima a 1-forma $d_t B$ sobre o cilindro C_l teremos

$$\int_{G_{jk} \cap \partial C_l} d_t B = 0$$

mas $G_{jk} \cap \partial C_l = g_{jk} \cup (-g_{j(k+1)})$, o sinal negativo é devido a orientação da fronteira.

Como $dt_1 \equiv 0$, sobre g_{kj} , $\forall k \in \mathbb{Z}$ então $\int_{g_{jk}} \partial_1 B(t) dt_1 = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$. Assim

$$0 = \int_{G_{jk} \cap \partial C_l} d_t B = \int_{g_{jk}} d_t B - \int_{g_{j(k+1)}} d_t B = \int_{g_{jk}} \partial_2 B(t) dt_1 - \int_{g_{j(k+1)}} \partial_2 B(t) dt_1$$

Logo

$$\int_{g_{jk}} \partial_2 B(t) dt_1 = \int_{g_{j(k+1)}} \partial_2 B(t) dt_1, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Segue por indução que

$$\int_{g_{jk}} \partial_2 B(t) dt_1 = \int_{g_{jl}} \partial_2 B(t) dt_1, \quad \forall k, l \in \mathbb{N} \quad (2.1.1)$$

Somando sobre $j \in \mathbb{N}$ obtemos

$$\int_{g_k} \partial_2 B(t) dt_1 = \int_{g_l} \partial_2 B(t) dt_1, \quad \forall k, l \in \mathbb{N} \quad (2.1.2)$$

Mas a projeção dos conjuntos g_k sobre o 1-ciclo σ_1 de \mathbb{T}^2 são dois-a-dois disjuntos, portanto

$$\int_{\Pi(g_k)} \partial_2 B(t) dt_1 = \int_{\Pi(g_l)} \partial_2 B(t) dt_1, \quad \forall k, l \in \mathbb{N} \quad (2.1.3)$$

Agora duas situações distintas podem ocorrer. Num caso mais simples, se G não interceptar alguma reta do tipo $t_1 = 2k_0\pi$, com $k_0 \in \mathbb{Z}$ (por exemplo, se G for limitado), teremos $\int_{\Pi(g_{k_0})} \partial_2 B(t) dt_1 = 0$. Segue de (2.1.3) que

$$\int_{\Pi(g_k)} \partial_2 B(t) dt_1 = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

A situação complica um pouco quando G intercepta todas as retas $t_1 = 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Como $\Pi(g_k) \cap \Pi(g_l) = \emptyset$, $\forall k, l \in \mathbb{Z}$, então

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{\Pi(g_k)} \partial_2 B(t) dt_2 \right| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\Pi(g_k)} |\partial_2 B(t)| dt_2 \leq \int_{\sigma_1} |\partial_2 B(t)| dt_2 < +\infty$$

Segue de (2.1.3) que

$$\int_{\Pi(g_k)} \partial_2 B(t) dt_2 = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Somando primeiro em $k \in \mathbb{Z}$ e depois sobre todas as c.c. de \mathcal{R} concluímos que

$$\int_{\Pi(\mathcal{R} \cap \{t_1 = 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\})} \partial_2 B(t) dt_2 = 0$$

Como $\partial_2 B|_{\Sigma} \equiv 0$ e Σ é um conjunto mensurável, no sentido de Lebesgue, concluímos que

$$\int_{\sigma_1} \partial_2 B(t) dt_2 = 0$$

O que contraria a incomensurabilidade dos períodos de $b = d_t B$. Segue daqui que pelo menos uma das componentes conexas de \mathcal{R} intercepta um de seus transladados inteiros, o que conclui a prova do teorema. ■

O resultado a seguir é citado por Arnold, sem demonstração, na prova de um lema (ver [A], pag. 85, §3).

Proposição 2.5. *É possível deformar a curva γ de forma que a função $\beta := d_t B|_{\gamma}$ tenha apenas um número finito de singularidades isoladas (máximos e mínimos).*

Prova: Como $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$ é aberto e γ é compacta, obtemos uma vizinhança V de γ formada apenas por pontos regulares, assim $\nabla B(t) \neq 0, \forall t \in V$. Segue da forma local das submersões que cada ponto deste aberto pertence a uma vizinhança V_t folheada por curvas de nível de B . Seja $t \in \gamma$ e considere os vetores $v_B(t)$ e $v_{\gamma}(t)$ tangentes a $\mathcal{F}'(t)$ e γ em t respectivamente. Duas situações distintas podem ocorrer:

1. Se $v_B(t)$ e $v_{\gamma}(t)$ não forem paralelos então $\mathcal{F}'(t)$ é transversal a γ em t . Próximo deste ponto não precisaremos modificar γ e usaremos a continuidade do produto interno para encontrar uma vizinhança $U_t \subset V_t$ de t na qual $\mathcal{F}'(\tau)$ é transversal a $\gamma, \forall \tau \in U_t$.
2. Se $\langle v_B(t), v_{\gamma}(t) \rangle = 0$, escolhemos um vetor $v(t)$ qualquer que não seja paralelo a $v_{\gamma}(t)$ e consideramos a reta ρ que passa em t com vetor direção $v(t)$. Então $\mathcal{F}'(t)$ será transversal a ρ em t . Pela continuidade do produto interno encontramos uma vizinhança $U_t \subset V_t$ de t na qual $\mathcal{F}'(\tau)$ é transversal a $\rho, \forall \tau \in U_t$.

Apenas para uniformizar a notação, vamos escrever γ_t para denotar $\rho \cap U_t$, ou $\gamma \cap U_t$. Assim γ_t é o arco que passa em t e é transversal a todos os $\mathcal{F}'(\tau)$, com $\tau \in U_t$.

Como γ é compacta, extraímos uma subcobertura finita $U_{t_1} \cup \dots \cup U_{t_N}$ de $\{U_t\}_{t \in \gamma}$ e em cada interseção $U_{t_j} \cap U_{t_{j+1}}$ escolhemos um ponto τ_j qualquer, então $\mathcal{F}'(\tau_j)$ é transversal a γ_{t_j} num ponto τ_j^* e transversal a $\gamma_{t_{j+1}}$ em τ_j^{**} .

Vamos denotar por:

- σ_j o pedaço de $\mathcal{F}'(\tau_j)$ entre τ_j^* e τ_j^{**}
- σ_0 o pedaço de nível necessário para unir o ponto inicial de γ com γ_{t_1}
- σ_N o pedaço de nível necessário para unir o ponto final de γ com γ_{t_N}
- $\gamma_{t_j}^*$ o pedaço de γ_{t_j} necessário para unir as curvas σ_{j-1} e σ_j acima.

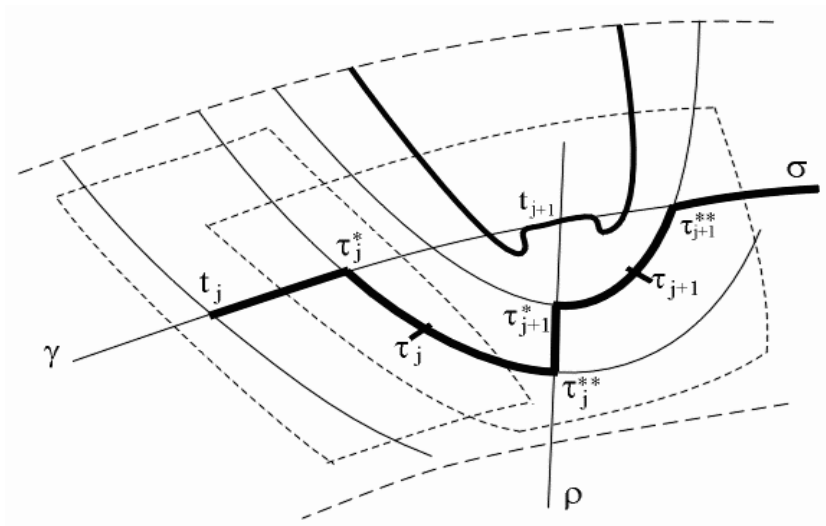


Figura 2.1: Primeiro passo em direção a redução do número de pontos críticos de $\beta = d_t B|_\gamma$

Obtemos assim uma curva \mathcal{C}^∞ por partes

$$\sigma = \sigma_0 \gamma_{t_1}^* \sigma_1 \gamma_{t_2}^* \sigma_2 \cdots \sigma_{N-1} \gamma_{t_N}^* \sigma_N$$

que é transversal as curvas de nível nos pedaços $\gamma_{t_j}^*$ e coincide com o nível em cada σ_k . Fazendo uma pequena modificação numa vizinhança W_k de cada σ_k , conseguimos fazer com que a nova σ_k fique transversal a todas as curvas de nível desta vizinhança ou que tangencie alguma curva de nível $\mathcal{F}'(\tau)$ de W_k de

modo que a nova curva σ_k permaneça integralmente de um dos lados $\mathcal{F}'(\tau)$, sem transpassá-la.

Por exemplo, na figura 2.1 acima, os trechos σ_j (entre τ_j^* e τ_j^{**}) e σ_{j+1} (entre τ_{j+1}^* e τ_{j+1}^{**}) fazemos as seguintes modificações:

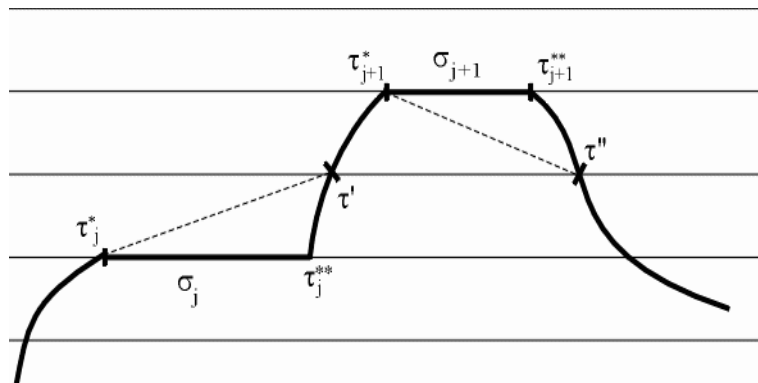


Figura 2.2: Modificação que deve ser feita em σ_j e σ_{j+1} para reduzir o número de pontos críticos de β

Assim fica fácil ver que o segmento $[[\tau_j^*, \tau']]$ é transversal a todos os níveis que ele intercepta. Além disto é possível suavizar a nova curva σ obtida sem estragar a transversalidade próximo de τ_j^* e de τ' .

No caso de σ_{j+1} surgirá um ponto de tangência. A modificação introduzida na próxima figura ajuda a visualizar melhor este fenômeno.

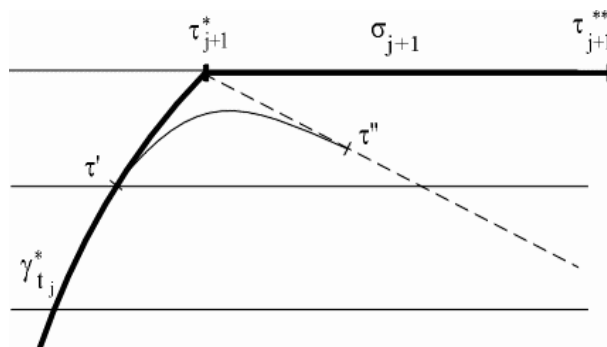


Figura 2.3: Aparecimento de um ponto de tangência

Suavizando σ obtemos uma curva \mathcal{C}^∞ que une um ponto com um de seus transladados inteiros e tangencia apenas um número finito de níveis de B , logo $\beta := d_t B|_\sigma$ tem apenas um número finito de singularidades isoladas, as quais são pontos de máximo ou de mínimo de β . ■

Observação 2.6. Fazendo mudança de variáveis conveniente podemos supor que $\Pi^{-1}(\Pi(\gamma))$ é o eixo $t_1 = 0$, ou qualquer um de seus transladados $t_1 = 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

De fato, se t_0 e $t_0 + 2\pi(m, n)$, com $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, são os pontos inicial e final de γ , a translação $t \mapsto t - t_0$ leva as extremidades de γ para os pontos $(0, 0)$ e $2\pi(m, n)$.

Como $m, n \in \mathbb{Z}$ então existem $p, q \in \mathbb{Z}$ relativamente primos tais que $pm + qn = 0$. Conseqüentemente, existem $r, s \in \mathbb{Z}$ tais que $pr + qs = 1$.

Então

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t'_1 \\ t'_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} p & q \\ -s & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

é um difeomorfismo de \mathbb{T}^2 com inversa

$$\begin{pmatrix} t'_1 \\ t'_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & -q \\ s & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t'_1 \\ t'_2 \end{pmatrix}$$

Este difeomorfismo transforma γ numa curva suave $\tilde{\gamma}$ com extremidades em $(0, 0)$ e $(0, 2\pi d)$, aqui $d = \text{mdc}(m, n)$, e a nova função $\tilde{\beta} := d_t \tilde{B}|_{\tilde{\gamma}}$ continua tendo um número finito de singularidades isoladas (máximos e mínimos).

Se $d = 1$ então a nova curva $\tilde{\gamma}$ conectará os pontos $(0, 0)$ e $(0, 2\pi)$ e não precisaremos modificá-la. Porém se $d > 1$ trocaremos $\tilde{\gamma}$ por outra curva $\tilde{\tilde{\gamma}}$, a qual é construída a partir de $\tilde{\gamma}$ da seguinte forma:

Primeiro consideramos a reunião $\Gamma := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{\gamma} + \{(0, 2\pi dk)\}$ de todos os transladados de $\tilde{\gamma}$ por múltiplos inteiros de $(0, 2\pi dk)$. Desta forma Γ é uma curva que divide o plano em duas regiões ilimitadas, cada uma contendo um semiplano. O passo seguinte é verificar se o ponto $(0, 2\pi)$ ficou a esquerda ou a direita de Γ . Suponha que esteja a direita (o outro caso é análogo).

Agora escolhemos um ponto $\bar{P} = (\bar{t}_1, \bar{t}_2) \in \tilde{\gamma}$ tal que $\bar{t}_1 \leq t_1$, $\forall t_1$ com $(t_1, t_2) \in \tilde{\gamma}$, ou seja, escolhemos um dos pontos de $\tilde{\gamma}$ que está mais a esquerda da reta $t_1 = 0$. Obviamente $\bar{t}_1 < 0$, pois $(0, 2\pi)$ está a direita de Γ .

Assim $\bar{P} + (0, 2\pi)$ está a esquerda de $\tilde{\gamma}$ (ou sobre $\tilde{\gamma}$). Além disto $\bar{P} + (0, 2\pi) \in \tilde{\gamma} + (0, 2\pi)$. Como $(0, 2\pi) \in \tilde{\gamma} + (0, 2\pi)$ e $(0, 2\pi)$ está a direita de Γ então $\tilde{\gamma} + (0, 2\pi)$ intercepta Γ .

Finalmente basta determinar o primeiro ponto Q nesta interseção e substituir a curva $\tilde{\gamma}$ pela nova curva $\tilde{\tilde{\gamma}}$ formada pelo trecho de $\tilde{\gamma} + (0, 2\pi)$ entre $(0, 2\pi)$ e Q e pelo trecho de Γ entre $(0, 0)$ e Q .

A projeção $\Pi(\tilde{\tilde{\gamma}})$ será uma curva fechada suave e homotópica ao 1-ciclo σ_2 . Segue do lema de Baer, ver Epstein [E], que arcos homotópicos são isotópicos, e pelo teorema (1.3), pag. 180 em Hirsch [H], concluímos que $\Pi(\tilde{\tilde{\gamma}})$ é difeotópico ao 1-ciclo σ_2 , ou seja, existe um difeomorfismo suave do toro \mathbb{T}^2 que manda $\Pi(\tilde{\tilde{\gamma}})$ sobre σ_2 .

Portanto podemos supor que $\Pi(\tilde{\tilde{\gamma}}) \equiv \sigma_2$, conseqüentemente $\Pi^{-1}(\Pi(\tilde{\tilde{\gamma}}))$ coincide com $t_1 = 2k\pi$, para $k \in \mathbb{Z}$.

Corolário 2.7. *Se $t \in \mathbb{R}^2$ então $\mathcal{F}(t)$ intercepta todas as retas $t_1 = 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, mas apenas um número finito destas retas são interceptadas mais de uma vez. Além disto este número (finito) é menor ou igual ao número de singularidades da função β no intervalo $[0, 2\pi]$.*

Prova: Como $\beta = B|_{t_1=2k\pi}$ é sobrejetora, $\forall k \in \mathbb{Z}$, então $\mathcal{F}(t)$ intercepta todas as retas $t_1 = 2k\pi$. Agora, pelo teorema de Rolle, cada vez que $\mathcal{F}(t)$ intercepta uma das retas $t_1 = 2k\pi$ mais de uma vez surge uma singularidade de β e pela proposição (2.5) o número de singularidades de β é finito. ■

Construímos assim retas que são transversais a quase todos os conjuntos de nível de B , com exceção de um número finito de tangências em cada trecho compacto. As retas $t_1 = 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, serão chamadas de *pré-transversais*. A partir destas retas construiremos a transversal.

Observação 2.8. Como $d_t B(0, t_2) \neq 0, \forall t_2 \in [0, 2\pi]$, usando a continuidade de B e a compacidade de $[0, 2\pi]$ obtemos uma vizinhança tubular $(-\delta, \delta) \times [0, 2\pi]$ sobre a qual $d_t B(\tau) \neq 0$. Devido a pseudoperiodicidade de B estendemos esta vizinhança tubular a uma faixa $\{|t_1| < \delta\}$ contendo o eixo $t_1 = 0$, sobre a qual $d_t B$ não se anula. Obviamente as transladadas inteiras desta faixa também gozam destas propriedades.

Conforme prometemos na página 16, vamos provar aqui o teorema (2.2).

Demonstração do Teorema 2.2 (p.16): Devemos provar que qualquer subnível Ω_r de uma função pseudoperiódica suave $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ contém exatamente uma componente conexa não limitada.

Pelo lema (2.1), cada conjunto de nível $\mathcal{F}(t)$, com $t \in \mathbb{R}^2$, está contido numa faixa $S_t = \{\alpha_t \leq b_0 \cdot \tau \leq \beta_t\}$, logo Ω_r possui uma c.c. ilimitada contendo o semiplano $\{b_0 \cdot \tau < \alpha_t\}$ e todas as outras c.c. de Ω_r estarão confinadas a faixa S_t .

Suponha, por absurdo, que Ω_r possua uma c.c. ilimitada $G \subset S_t$. Neste caso G deverá interceptar uma infinidade de retas do tipo $t_1 = 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$ e cada uma destas interseções conterà pelo menos um intervalo I_k .

Como $\partial G \subset \mathcal{F}(t)$ e para todo $s \in \mathcal{F}(t)$ temos $s + \eta \notin \mathcal{F}(t), \forall \eta \in 2\pi\mathbb{Z}^2$, então $\mathcal{F}(t)$ é difeomorfo a sua projeção $\Pi(\mathcal{F}(t))$ no toro \mathbb{T}^2 . Conseqüentemente G é difeomorfo a $\Pi(G)$ e todos os arcos $\Pi(I_k)$ são disjuntos.

Como em cada um dos intervalos I_k surge um ponto crítico de B chegamos a um absurdo, pois a função $d_t B|_{\sigma_1}$ tem apenas um número finito de singularidades. ■

2.2 Caracterização dos Níveis Regulares

Os níveis regulares desempenham papel fundamental em nosso trabalho, devido a sua caracterização simples e ao lema de Sard, o qual enunciamos aqui.

Teorema 2.9. (Lema de Sard) *Se $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ é de classe C^∞ e sobrejetiva então o conjunto dos valores críticos de f tem medida de Lebesgue nula. Em particular, o conjunto dos valores regulares de f é denso em \mathbb{R}^q .*

Se $B(t_0)$ um valor regular então $\mathcal{F}(t_0)$ é uma subvariedade mergulhada de \mathbb{R}^2 de dimensão 1, portanto cada componente conexa de $\mathcal{F}(t_0)$ é difeomorfa a \mathbb{R} ou a \mathbb{S}^1 . Se $\mathcal{F}'(t_0)$ for difeomorfa a \mathbb{S}^1 , usando a forma local das submersões e a compacidade da curva é possível encontrar uma vizinhança V de $\mathcal{F}'(t_0)$ difeomorfa a um anel de \mathbb{R}^2 formada apenas por curvas de nível regulares, cada uma difeomorfa a \mathbb{S}^1 e todas com níveis diferentes entre si.

Suponha agora que $\mathcal{F}'(t_0)$ é difeomorfa a uma reta e vamos analisar o comportamento desta curva. O difeomorfismo $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{F}'(t_0)$ induz uma orientação natural na curva $\mathcal{F}'(t_0)$.

Seja $K \subset\subset \mathbb{R}^2$ com $\mathcal{F}'(t_0) \cap K \neq \emptyset$ e tomemos um ponto $R = \varphi(r)$ arbitrário nesta interseção. Vamos supor que para cada $n \in \mathbb{N}$ exista um $\lambda_N > r + n$ tal que $\varphi(\lambda_N) \in K$.

Como K é compacto, a seqüência $\{\varphi(\lambda_N)\}$ tem uma subseqüência convergente $\varphi(\lambda_{n_j}) \rightarrow L \in K$, além disto podemos supor que $\{\lambda_{n_j}\}$ é estritamente crescente.

Como $B(\varphi(\lambda_{n_j})) = B(t_0)$, $\forall j$ então $B(L) = B(t_0) \Rightarrow L \in \mathcal{F}(t_0)$. Mas $B(t_0)$ é valor regular logo existe uma vizinhança de L , folheada por curvas de nível de B , na qual o valor $B(t_0)$ é atingido apenas sobre o arco que passa por L .

Como $\lambda_{n_j} \nearrow +\infty$ então, a partir de um certo índice, teremos $\varphi([\lambda_{n_j}, \lambda_{n_{j+1}}])$ contido neste arco que passa por L , portanto $\varphi(s) \rightarrow L$ quando $s \rightarrow +\infty$, o que é absurdo, pois neste caso $\mathcal{F}'(t_0)$ termina em L e não haverá nenhum arco passando por este ponto.

Analogamente, não existe uma seqüência de números reais $\sigma_N < r - n$ que satisfaça $\varphi(\sigma_N) \in K$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Portanto, dado $K \subset \mathbb{R}^2$ com $\mathcal{F}'(t_0) \cap K \neq \emptyset$ existem $P = \varphi(p)$ e $Q = \varphi(q)$ em $\mathcal{F}'(t_0)$ distintos tais que, apenas uma das três componentes conexas de $\mathcal{F}'(t_0) \setminus \{P, Q\}$ intercepta K , a saber: $\varphi([p, q])$. Noutras palavras, $\mathcal{F}'(t_0)$ escapa de qualquer compacto pré-fixado.

Agora, como B é pseudoperiódica, sabemos pelo lema (2.1) que $\mathcal{F}'(t_0)$ está contida numa faixa, escolhendo compactos convenientes, vemos que os extremos de $\mathcal{F}'(t_0)$ tendem a infinito dentro desta faixa e pelo corolário (2.2) as extremidades de $\mathcal{F}'(t_0)$ devem ir para lados opostos. Podemos resumir a discussão acima no seguinte resultado:

Proposição 2.10. *Se $\mathcal{F}(t_0)$ for um nível regular de uma função pseudoperiódica suave suas componentes conexas podem ser basicamente de duas formas:*

- *Limitada e difeomorfa a \mathbb{S}^1 : neste caso existe uma vizinhança V de $\mathcal{F}'(t_0)$, difeomorfa a um anel de \mathbb{R}^2 , formada apenas por níveis regulares, cada um destes difeomorfos a \mathbb{S}^1 e todos em níveis diferentes. Estas curvas serão chamadas de curvas (regulares) limitadas;*
- *Ilimitada e difeomorfa a \mathbb{R} , neste caso $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{F}'(t_0)$ tem exatamente duas componentes conexas ilimitadas, cada uma contendo um semiplano. Tais curvas serão chamadas de curvas normais.*

O próximo passo é mostrar que as curvas normais realmente existem e que, após uma mudança de variáveis, interceptarão cada uma das pré-transversais uma única vez.

Proposição 2.11. *Cada nível regular de uma função pseudoperiódica suave contém exatamente uma curva normal.*

Prova: Suponha, por absurdo, que algum nível regular $\mathcal{F}(t_0)$ da função pseudoperiódica $B \in \mathcal{C}^\infty$ não contenha curva normal, ou seja, $\mathcal{F}(t_0)$ é formado apenas por curvas limitadas. Pelo corolário (2.7) acima, o eixo $t_1 = 0$ intercepta apenas um número finito de componentes $\mathcal{F}'_1, \mathcal{F}'_2, \dots, \mathcal{F}'_N$ de $\mathcal{F}(t_0)$.

Lembremos que cada componente \mathcal{F}'_j tem uma vizinhança V_j difeomorfa a um anel de \mathbb{R}^2 , contendo apenas pontos regulares, na qual o valor $B(t_0)$ é atingido somente sobre \mathcal{F}'_j . Assim, para cada $j = 1, 2, \dots, N$, é possível escolher um $P_j \in V_j$ de modo que \mathcal{F}'_j esteja na componente conexa limitada de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{F}'(P_j)$.

Agora basta determinar o primeiro e último pontos onde o eixo $t_1 = 0$ intercepta cada $\mathcal{F}'(P_j)$ e substituir o segmento de reta determinado por estes pontos por um dos dois arcos correspondentes de $\mathcal{F}'(P_j)$.

Esta curva que acabamos de construir é \mathcal{C}^∞ por partes e conecta pontos de $\Omega_{B(t_0)}$ e $\Omega^{B(t_0)}$ sem passar por $B(t_0)$, o que é absurdo. Logo todo nível regular deve conter uma curva normal.

Para verificar que cada nível regular possui uma única curva normal, suponha que no nível $B(t_0)$ existam duas curvas normais \mathcal{F}'_1 e \mathcal{F}'_2 . Vamos denotar por Ω^- e Ω^+ a componente conexa ilimitada do subnível $\Omega_{B(t_0)}$ e do supernível $\Omega^{B(t_0)}$ respectivamente.

O aberto $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{F}'_1$ tem duas componentes conexas ilimitadas: $U_1^- \supset \Omega^-$ e $U_1^+ \supset \Omega^+$. A segunda curva \mathcal{F}'_2 está contida numa destas duas componentes. Suponha, por exemplo, que $\mathcal{F}'_2 \subset U_1^-$. Então a componente conexa ilimitada U_2^+ é disjunta de U_1^+ , conseqüentemente $\Omega^{B(t_0)}$ terá duas componentes conexas ilimitadas, o que contradiz o teorema (2.2) de [A]. ■

Corolário 2.12. *Curvas normais distintas assumem valores regulares distintos. Em particular, se a curva normal $\mathcal{F}'(t_0)$ está acima de outra curva normal $\mathcal{F}'(t)$ então $B(t_0) < B(t)$.*

Vários resultados deste capítulo foram inspirados na referência [BNZ-2], em particular, a técnica utilizada na demonstração do próximo resultado.

Proposição 2.13. *É possível modificar as curvas pré-transversais para que cada curva normal intercepte cada uma das pré-transversais exatamente uma vez fazendo-o transversalmente.*

Prova: Vamos denotar por σ o segmento $\llbracket(0,0);(0,2\pi)\rrbracket$. Pelo corolário (2.7), cada curva normal $\mathcal{F}'(t_0)$ intercepta todas as retas $t_1 = 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, porém apenas um número finito destas retas são interceptadas mais de uma vez. Portanto existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que as curvas normais $\mathcal{F}'(t_0)$ e $\mathcal{F}'(t_0 + (0, 2\pi))$ interceptam $t_1 = 2k_0\pi$ exatamente uma vez. Conseqüentemente as curvas normais $\mathcal{F}'(t_0 + (-2k_0\pi, 0))$ e $\mathcal{F}'(t_0 + (-2k_0\pi, 2\pi))$ interceptam $t_1 = 0$ uma única vez.

Agora a translação $t \mapsto t_0 + (-2k_0\pi, 0)$ faz com que as curvas normais $\mathcal{F}'(0, 0)$ e $\mathcal{F}'(0, 2\pi)$ interceptem σ exatamente uma vez. Além disto, se uma curva normal intercepta σ mais de uma vez, então todos os pontos de interseção estarão contidos no segmento σ . Logo basta provar que cada curva normal intercepta σ uma única vez, pois feito isto a pseudoperiodicidade de B garantirá que $\mathcal{F}'(t)$ interceptará cada uma das retas $t_1 = 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, exatamente uma vez.

Vamos dividir esta prova em 3 casos. O primeiro caso é essencialmente o mais importante, os dois casos seguintes conterão apenas técnicas para a redução ao primeiro caso.

Seja $\mathcal{F}'(t)$ uma curva normal. Pela proposição (2.10), existe um difeomorfismo $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{F}'(t)$, o qual induz uma orientação em $\mathcal{F}'(t)$.

Sejam $P_1 = \phi(r_1)$, $P_2 = \phi(r_2)$, \dots , $P_N = \phi(r_N)$ os pontos de interseção de $\mathcal{F}'(t)$ com σ , aqui $r_1 < r_2 < \dots < r_N$. Denotaremos por γ^* o trecho compacto de $\mathcal{F}'(t)$ entre P_1 e P_N .

(1º Caso) γ^* está contida na faixa $\{|t_1| < 2\pi\}$ e os pontos de interseção estão corretamente ordenados sobre a reta $t_1 = 0$.

Dizer que os pontos P_1, P_2, \dots, P_N estão corretamente ordenados sobre a reta $t_1 = 0$ significa que $|P_1| > |P_2| > \dots > |P_N|$ ou $|P_1| < |P_2| < \dots < |P_N|$.

Neste caso substituímos o segmento de reta $\llbracket P_1; P_N \rrbracket$ de σ por γ^* . Assim a nova curva $\tilde{\sigma}$ será \mathcal{C}^∞ por partes e coincidirá com γ^* no trecho entre P_1 e P_N .

Como todos os pontos do compacto γ^* são regulares, podemos escolher uma vizinhança \mathcal{V} de γ^* folheada por curvas de nível, todas com níveis diferentes entre si, na qual todos os pontos são regulares e não existem componentes limitadas de conjuntos de nível.

Agora escolhemos uma curva normal $\mathcal{F}'(Q)$, acima de $\mathcal{F}'(t)$, que intercepta $\{t_1 = 0\}$ em Q_1, \dots, Q_ν , tal que seu trecho compacto entre Q_1 e Q_ν esteja contido em \mathcal{V} .

Também escolhemos uma segunda curva normal $\mathcal{F}'(R)$, abaixo de $\mathcal{F}'(t)$, que intercepta $\{t_1 = 0\}$ em R_1, \dots, R_η com trecho compacto entre R_1 e R_η contido em \mathcal{V} .

Desta forma $Q_1, R_\eta \in \mathcal{V} \cap \{t_1 = 0\}$ e $|Q_1| > |P_1| > |P_N| > |R_\eta|$ ou $|Q_1| < |P_1| < |P_N| < |R_\eta|$, conforme Q_1 esteja acima ou abaixo de Q_N . Fazendo uma pequena modificação em $\tilde{\sigma}$ no trecho entre Q_1 e R_η obtemos uma nova curva $\tilde{\tilde{\sigma}}$ transversal a todos os conjuntos de nível contidos em \mathcal{V} . Finalmente, pela observação (2.6), transformamos $\tilde{\tilde{\sigma}}$ novamente em $\sigma = \llbracket(0, 0); (0, 2\pi)\rrbracket$

Importante observar que cada vez que aplicamos o processo acima a uma curva normal, o número de pontos críticos de $\beta = d_t B|_\sigma$ diminui no mínimo duas unidades. Como β tem apenas um número finito de pontos críticos, então após repetirmos este processo um certo número finito vezes, todas as curvas normais de B interceptarão as pré-transversais exatamente uma vez.

Apesar deste processo reduzir o número de pontos críticos de β ele, por si só, não elimina todos os pontos críticos. Veja, por exemplo, as figuras na página 43. Os pontos P e Q na figura (3.1) serão eliminados pelo processo acima. O ponto P da figura (3.2) certamente não será eliminado.

(2º Caso) γ^ está contida na faixa $\{|t_1| < 2\pi\}$ mas os pontos de interseção não estão corretamente ordenados sobre $t_1 = 0$.*

Aqui trabalharemos para eliminar os pontos que estão fora da ordem e recair no caso anterior.

Apenas para simplificar o raciocínio suponha que P_1 está acima de P_N . Se o ponto P_2 estiver entre P_1 e P_N não há o que fazer, suponha então que P_2 está acima de P_1 , então duas situações distintas podem ocorrer: ou P_2 é um ponto de tangência de γ^* com $\{t_1 = 0\}$; ou γ^* corta $\{t_1 = 0\}$ transversalmente em P_2 .

Na primeira situação, do tangenciamento, tomamos uma vizinhança \mathcal{V} de P_2 formada apenas por pontos regulares e folheada por curvas de nível de B , todas em níveis diferentes entre si. Além disto podemos supor que \mathcal{V} não contém nenhuma componente limitada de conjunto de nível.

A seguir escolhemos duas curvas normais $\mathcal{F}'(Q)$ e $\mathcal{F}'(R)$, acima de $\mathcal{F}'(t)$, que interceptam $\{t_1 = 0\}$ em pontos $Q_+, Q_-, R_+, R_- \in \mathcal{V}$, tais que os trechos de $\mathcal{F}'(Q)$ entre Q_+ e Q_- e de $\mathcal{F}'(R)$ entre R_+ e R_- estejam contidos em \mathcal{V} . Além disto $|Q_-| < |R_-| < |R_+| < |Q_+|$.

O próximo passo é modificar σ substituindo o segmento $[[R_-, R_+]]$ pelo trecho de $\mathcal{F}'(R)$ entre estes dois pontos, obtendo assim uma curva $\tilde{\sigma}$.

Finalmente usamos o outro trecho de curva normal, entre Q_- e Q_+ para modificar $\tilde{\sigma}$ de modo que a nova $\tilde{\tilde{\sigma}}$ seja transversal a quase todos os níveis entre $\mathcal{F}'(Q)$ e $\mathcal{F}'(R)$, exceto por um único nível onde ocorrerá um ponto de tangência, o qual por construção é diferente de $\mathcal{F}'(P_2)$.

Assim o ponto P_2 não interceptará mais a curva pré-transversal $\tilde{\tilde{\sigma}}$.

Na segunda situação, em que γ^* corta σ transversalmente em P_2 , observamos que existirá pelo menos mais um ponto P_j entre os restantes P_3, P_4, \dots, P_{N-1} no qual γ^* cortará transversalmente σ (passando do lado $t_1 < 0$ para $t_1 > 0$).

Agora voltamos nossa atenção para o trecho $\gamma^{**} \subset \gamma^*$ entre P_2 e P_j . Analogamente ao que fizemos na situação do tangenciamento, tomaremos uma vizinhança \mathcal{V} de γ^{**} , formada apenas por pontos regulares e folheada por curvas de nível, todos em níveis diferentes. Além disto podemos supor que \mathcal{V} não contém nenhuma componente limitada de conjunto de nível.

Escolhemos uma curva normal $\mathcal{F}'(Q)$, acima de $\mathcal{F}'(t)$, que intercepta a reta $t_1 = 0$ em pontos $Q_+, Q_- \in \mathcal{V}$, tais que o trecho de $\mathcal{F}'(Q)$ entre Q_+ e Q_- esteja contido em \mathcal{V} . Além disto $|Q_-| < |P_2| < |P_j| < |Q_+|$, ou $|Q_-| > |P_2| > |P_j| > |Q_+|$, conforme P_2 esteja abaixo ou acima de P_j .

A seguir modificamos σ substituindo o segmento $[[P_2, P_j]]$ por γ^{**} , obtendo assim a curva $\tilde{\sigma}$. Para finalizar fazemos com que $\tilde{\sigma}$ seja transversal a quase todos os níveis entre $\mathcal{F}'(t)$ e $\mathcal{F}'(Q)$, exceto por um único nível onde ocorrerá um ponto de tangência, o qual por construção é diferente de $\mathcal{F}'(P_2)$.

Assim eliminamos no mínimo 2 pontos que estavam fora de ordem: P_2 e P_j . Prosseguindo desta forma indutivamente eliminaremos todos os pontos que estão fora da ordem e recairemos no 1º caso.

(3º Caso) γ^* não está contida na faixa $\{|t_1| < 2\pi\}$.

Pelo corolário (2.7) sabemos que γ^* intercepta apenas um número finito de retas $t_1 = 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. A prova consiste em usar as técnicas de demonstração descritas no segundo caso acima (para eliminar pontos fora de ordem).

Em poucas palavras, o que fazemos aqui é determinar o maior $|k| > 0$ tal que $\gamma^* \cap \{|t_1| = 2k\pi\} \neq \emptyset$. A seguir determinamos todos os pontos $P_{jk}, j = 1, 2, \dots, \nu$ nesta interseção. Se estes pontos estiverem corretamente ordenados podemos eliminá-los todos de uma só vez, caso contrário iremos eliminando tais pontos por etapas.

Quando tivermos eliminado todos os pontos de $\gamma^* \cap \{|t_1| = 2k\pi\}$ faremos o mesmo para $k - 1$ depois para $k - 2$ e assim por diante. Repetimos o processo para $k < 0$ e assim reduzimos este caso ao anterior, e conseqüentemente ao 1º caso. Isto conclui a prova da proposição 2.13 ■

Se B não possui pontos singulares, isto é, $\Sigma = \emptyset$, então todas as curvas de nível de B serão curvas normais. Segue da proposição (2.13), corolário (2.12) e observação (2.8) que as retas $t_1 = 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, são as transversais procuradas.

Capítulo 3

A Construção da Transversal

(2ª parte)

No capítulo anterior obtivemos uma curva suave $\gamma \subset \{\tau \in \mathbb{R}^2; d_t B(\tau) \neq 0\}$, cuja projeção no toro \mathbb{T}^2 é não homóloga a zero. Além disto, mostramos que a restrição $\beta := d_t B|_\gamma$ tem apenas um número finito de singularidades isoladas (máximos e mínimos) e que γ intercepta cada curva normal uma única vez, fazendo-o transversalmente.

Neste capítulo mostraremos que, a partir da curva γ acima, é possível construir uma curva que transversal a todas as c.c. ilimitadas de conjunto de nível de B .

Na seção (3.1) iniciamos o estudo dos níveis críticos. Em linhas gerais, o que mostramos é que todo conjunto de nível crítico de B possui uma única componente conexa ilimitada que pode ser bem aproximada por curvas normais. Na seção (3.2) definimos *traps* e mostramos que todas as componentes limitadas dos conjuntos de nível estão contidas em *traps*. Finalmente na seção (3.3) descrevemos o processo para passar da curva pré-transversal γ para a transversal σ procurada.

Durante este capítulo todo estaremos supondo que $b_{10} < 0$ e $b_{20} < 0$. Na página 72 mostramos que sempre é possível supor isto.

3.1 Os Níveis Críticos

Os níveis críticos de uma função suave, mesmo sendo pseudoperiódica, podem ser bastante complicados, como por exemplo: conter patamares, curvas não retificáveis, seqüências de componentes limitadas convergindo para uma componente ilimitada, etc...

Na verdade é possível demonstrar que, dado qualquer conjunto fechado $F \subset \mathbb{R}^2$, existe uma função suave $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g^{-1}(0) = F$. Se F for um conjunto compacto e contido no quadrado $(0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$, este resultado também será verdadeiro para funções pseudoperiódicas.

Portanto em vez de tentar caracterizar os níveis críticos, usaremos os níveis regulares e suas boas propriedades para descobrir algumas propriedades dos níveis críticos.

Seja $\mathcal{F}'(t)$ uma curva normal com $B(t)$ valor regular. Pela proposição (2.10) sabemos que esta curva é difeomorfa a uma reta e que divide o plano em duas componentes conexas e ilimitadas, cada uma contendo um semiplano.

Vamos chamar de Γ_t^- a componente acima de $\mathcal{F}'(t)$ e de Γ_t^+ a componente abaixo de $\mathcal{F}'(t)$. A escolha desta notação deve-se principalmente ao corolário (2.12).

Definição 3.1. *Seja $B(t_0)$ um valor crítico e considere os seguintes conjuntos*

$$\mathbb{F}_{t_0}^\pm = \{t / \pm B(t) > \pm B(t_0) \text{ é valor regular e } \mathcal{F}'(t) \text{ é curva normal} \}$$

então definimos:

$$\Gamma_{t_0}^+ = \bigcup_{t \in \mathbb{F}_{t_0}^+} \Gamma_t^+ \quad e \quad \Gamma_{t_0}^- = \bigcup_{t \in \mathbb{F}_{t_0}^-} \Gamma_t^-$$

Vamos provar uma série de resultados a respeito dos conjuntos $\Gamma_{t_0}^\pm$, com $B(t_0)$ valor crítico, visando caracterizá-los. Quando $B(t_0)$ for um valor regular todas estas afirmações serão triviais ou conseqüência das proposições (2.10) e (2.11).

Proposição 3.2. *Cada um dos conjuntos $\Gamma_{t_0}^+$ e $\Gamma_{t_0}^-$ é não vazio, aberto, ilimitado e contém um semiplano.*

Prova: Como $b_0 \neq 0$, a função B não é constante. Na verdade, B é sobrejetiva e suave, segue do Teorema de Sard que o conjunto dos valores regulares de B é denso em \mathbb{R} , como todo conjunto de nível regular tem exatamente uma curva normal. Tomando um valor regular qualquer $t^+ \in \mathbb{F}_{t_0}^+$ teremos $\Gamma_t^+ \neq \emptyset$ aberto, ilimitado e contendo um semiplano, portanto $\Gamma_{t_0}^+$ é não vazio, ilimitado e contém este mesmo semi-plano. Além disto, $\Gamma_{t_0}^+$ é uma reunião de abertos, logo é aberto. Trocando todos os sinais positivos acima por negativos, obtemos a demonstração desta proposição para $\Gamma_{t_0}^-$. ■

Proposição 3.3. *Existem seqüências $\{u_j\} \subset \mathbb{F}_{t_0}^+$ e $\{v_j\} \subset \mathbb{F}_{t_0}^-$ tais que:*

$$\Gamma_{t_0}^+ = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_{u_j}^+ \quad \text{com} \quad \Gamma_{u_j}^+ \subset \Gamma_{u_{j+1}}^+ \quad \text{e} \quad \Gamma_{t_0}^- = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_{v_j}^- \quad \text{com} \quad \Gamma_{v_j}^- \subset \Gamma_{v_{j+1}}^-$$

Prova: Como o conjunto dos valores regulares de B é denso em \mathbb{R} então, para cada $j \in \mathbb{N}$ dado, existem pontos $u_j, v_j \in \mathbb{R}^2$ tais que $B(u_j)$ e $B(v_j)$ são valores regulares,

$$B(u_j) < B(t_0) + \frac{1}{j} \quad \text{e} \quad B(v_j) > B(t_0) - \frac{1}{j}$$

Como todo nível regular tem exatamente uma curva normal, então podemos supor que $\mathcal{F}'(u_j)$ e $\mathcal{F}'(v_j)$ são curvas normais e, passando a uma subsequência caso seja necessário, também podemos supor que a seqüência $\{B(v_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ é crescente e $\{B(u_j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ é decrescente. Desta forma temos

$$\Gamma_{u_j}^+ \subset \Gamma_{u_{j+1}}^+, \forall j \quad \text{e} \quad \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \Gamma_{t_j}^+ \subseteq \bigcup_{t \in \mathbb{F}_{t_0}^+} \Gamma_t^+$$

Para obter a inclusão contrária tomamos $\tau \in \mathbb{F}_{t_0}^+$, então $B(\tau) > B(t_0)$. Escolhendo $j \in \mathbb{N}$ tal que $j^{-1} < B(\tau) - B(t_0)$ teremos o correspondente $u_j \in \mathbb{F}_{t_0}^+$ e $B(\tau) > B(u_j) > B(t_0)$, portanto $\Gamma_\tau^+ \subseteq \Gamma_{u_j}^+ \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \Gamma_{u_j}^+$. Analogamente, usando a seqüência $\{v_j\}$ prova-se a afirmação para $\Gamma_{t_0}^-$. ■

Proposição 3.4. *$\partial\Gamma_{t_0}^+$ e $\partial\Gamma_{t_0}^-$ são ilimitadas.*

Prova: Primeiro notemos que $\Gamma_{t_0}^+ \cap \Gamma_{t_0}^- = \emptyset$. De fato, se $\tau \in \Gamma_{t_0}^+$, pela proposição 3.3 acima, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que τ está abaixo da curva normal

$\mathcal{F}'(u_j)$ e $B(u_j) > B(t_0)$. Segue do corolário (2.12) que não existe nenhum $t^* \in \mathbb{R}^2$ satisfazendo:

- (i) $B(t^*)$ é valor regular;
- (ii) $\mathcal{F}'(t^*)$ é curva normal;
- (iii) τ está acima de $\mathcal{F}'(t^*)$;
- (iv) $B(t_0) > B(t^*)$.

portanto $\tau \notin \Gamma_{t_0}^-$ donde segue que $\Gamma_{t_0}^+ \subset \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_{t_0}^-$, ou seja. $\Gamma_{t_0}^- \cap \Gamma_{t_0}^+ = \emptyset$.

Agora, para mostrar que as fronteiras de $\Gamma_{t_0}^+$ e de $\Gamma_{t_0}^-$ são ilimitadas vamos fixar dois pontos $P \in \mathbb{F}_{t_0}^+$ e $Q \in \mathbb{F}_{t_0}^-$. Como $\mathcal{F}'(P)$ e $\mathcal{F}'(Q)$ são curvas normais então, para cada $k \in \mathbb{Z}$ dado, existe um único ponto $P_k \in \mathcal{F}'(P) \cap \{t_1 = 2k\pi\}$ e $Q_k \in \mathcal{F}'(Q) \cap \{t_1 = 2k\pi\}$, pois as curvas normais interceptam cada uma das pré-transversais $t_1 = 2k\pi$ uma única vez. Considere então o segmento de reta $\llbracket P_k, Q_k \rrbracket$. Como $\Gamma_{t_0}^+ \cap \Gamma_{t_0}^- = \emptyset$, $P_k \in \Gamma_{t_0}^+$ e $Q_k \in \Gamma_{t_0}^-$ então, para cada $k \in \mathbb{Z}$ existem pontos $t_k^+ \in \llbracket P_k, Q_k \rrbracket \cap \partial\Gamma_{t_0}^+$ e $t_k^- \in \llbracket P_k, Q_k \rrbracket \cap \partial\Gamma_{t_0}^-$, não necessariamente únicos. Daqui segue que $\partial\Gamma_{t_0}^+$ e $\partial\Gamma_{t_0}^-$ são ilimitadas. ■

Proposição 3.5. *B é constante sobre $\partial\Gamma_{t_0}^+$ e $\partial\Gamma_{t_0}^-$.*

Prova: Sejam $P, Q \in \partial\Gamma_{t_0}^+$ pontos distintos, $\varepsilon > 0$ tal que os discos abertos $D(P, \varepsilon) \cap D(Q, \varepsilon) = \emptyset$ e tomemos $P_\varepsilon \in D(P, \varepsilon) \cap \Gamma_{t_0}^+$ e $Q_\varepsilon \in D(Q, \varepsilon) \cap \Gamma_{t_0}^+$. Pela proposição (3.3) e corolário (2.12) obtemos $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $P_\varepsilon, Q_\varepsilon \in \Gamma_{u_j}^+$, $\forall j \geq j_0$. Agora podemos construir duas seqüências de pontos $\{P_j\}$ e $\{Q_j\}$ contidas em $\Gamma_{t_0}^+$ escolhendo, para cada $j \geq j_0$ pontos $P_j \in \llbracket P_\varepsilon, P \rrbracket \cap \mathcal{F}'(u_j)$ e $Q_j \in \llbracket Q_\varepsilon, Q \rrbracket \cap \mathcal{F}'(u_j)$. Assim $B(P_j) = B(Q_j), \forall j \geq j_0$, $P_j \rightarrow P$ e $Q_j \rightarrow Q$. Segue pela continuidade de B que $B(P) = B(Q)$. Analogamente B é constante sobre a fronteira de $\Gamma_{t_0}^-$. ■

Proposição 3.6. *$\partial\Gamma_{t_0}^+$ e $\partial\Gamma_{t_0}^-$ são conexas.*

Prova: Suponha que $\partial\Gamma_{t_0}^+$ não seja conexa, então existem abertos não vazios $U', V' \subset \partial\Gamma_{t_0}^+$ tais que: $U' \cap V' = \emptyset$ e $U' \cup V' = \partial\Gamma_{t_0}^+$. Como a topologia de $\partial\Gamma_{t_0}^+$ é a topologia relativa então existem abertos $U, V \subset \mathbb{R}^2$ tais que: $U \cap V = \emptyset$, $U' = U \cap \partial\Gamma_{t_0}^+$, $V' = V \cap \partial\Gamma_{t_0}^+$ e $(U \cup V) \cap \partial\Gamma_{t_0}^+ = U' \cup V' = \partial\Gamma_{t_0}^+$.

Vamos fixar dois pontos $P \in U'$ e $Q \in V'$. Como U e V são abertos de \mathbb{R}^2 existe $\varepsilon > 0$ tal que o disco aberto $D(P, \varepsilon) \subset U$ e $D(Q, \varepsilon) \subset V$. Como $P, Q \in \partial\Gamma_{t_0}^+$ então os discos $D(P, \varepsilon)$ e $D(Q, \varepsilon)$ contém, ambos, pontos de $\Gamma_{t_0}^+$. Sejam $P_0 \in D(P, \varepsilon) \cap \Gamma_{t_0}^+$ e $Q_0 \in D(Q, \varepsilon) \cap \Gamma_{t_0}^+$. Pela proposição (3.3) e corolário (2.12) obtemos um $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $P_0, Q_0 \in \Gamma_{u_j}^+, \forall j \geq j_0$.

Agora, para cada $j \geq j_0$ escolhemos um $P_j \in \llbracket P_0, P \rrbracket \cap \mathcal{F}'(u_j)$ e $Q_j \in \llbracket Q_0, Q \rrbracket \cap \mathcal{F}'(u_j)$. Obtemos assim seqüências $P_j \rightarrow P$ e $Q_j \rightarrow Q$ que satisfazem $B(P_j) = B(Q_j), \forall j \geq j_0$.

Como cada $\mathcal{F}'(u_j)$ é uma curva normal que passa em $P_j \in U$, em $Q_j \in V$ e $U \cap V = \emptyset$ então, para todo $j \geq j_0$ a curva $\mathcal{F}'(u_j)$ contém pontos de $\mathbb{R}^2 \setminus (U \cup V)$. Vamos escolher em cada $\mathcal{F}'(u_j)$ um ponto R_j fora de $U \cup V$ e considerar a seqüência $\{R_j\}_{j \geq j_0}$.

Vamos também construir um compacto $K \subset \mathbb{R}^2$ que contenha a seqüência $\{R_j\}_{j \geq j_0}$ da seguinte forma: Como P e Q estão fixados tomamos $k \in \mathbb{N}$ tal que $2k\pi > |P| + |Q| + 1$ e considere a faixa vertical $\{|t_1| < 2k\pi\}$. Além disto os níveis $\mathcal{F}'(t_0)$ (que contém a fronteira de $\Gamma_{t_0}^+$) e $\mathcal{F}'(P_{j_0})$ (o nível mais alto que tomamos na seqüência acima) estão ambos contidos em faixas *não verticais*, logo existe uma faixa S de largura limitada, não vertical, contendo $\mathcal{F}'(P_j), \forall j$ e $\mathcal{F}'(t_0)$. Finalmente tomamos

$$K = S \cap \{|t_1| < 2k\pi\} \cap \overline{\Gamma_{t_0}^+}$$

Como este compacto contém todos os trechos das curvas normais $\mathcal{F}'(u_j)$ entre P_j e Q_j então $R_j \in K \setminus (U \cup V), \forall j$. Mas $K \setminus (U \cup V)$ também é compacto, logo a seqüência $\{R_j\}$ possui uma subseqüência convergente

$$R_{j_n} \rightarrow R \in K \setminus (U \cup V)$$

Note que R não pode estar em $\Gamma_{t_0}^+$, senão encontraríamos um $\delta > 0$ tal que o disco aberto $D(R, \delta) \subset \Gamma_{t_0}^+$ e pela proposição (3.3) existiria um j_δ tal que $R \in \Gamma^+(u_{j_\delta})$, Como $\Gamma^+(u_j) \subsetneq \Gamma^+(u_{j+1}), \forall j$ e $R_j \in \partial\Gamma^+(u_j)$ então R não poderia ser limite de nenhuma subseqüência de $\{R_j\}$. Portanto $R \in \partial\Gamma_{t_0}^+$ e $R \notin (U \cup V)$, o que é absurdo. ■

Proposição 3.7. $\partial\Gamma_{t_0}^+$ e $\partial\Gamma_{t_0}^-$ estão contidas numa mesma componente conexa de $\mathcal{F}(t_0)$. Em particular, todo nível crítico $\mathcal{F}(t_0)$ tem uma única componente conexa ilimitada.

Prova: Como $\partial\Gamma_{t_0}^+$ e $\partial\Gamma_{t_0}^-$ são conexas, ilimitadas, tendem a infinito dentro de uma faixa não vertical (nos dois sentidos) e $\partial\Gamma_{t_0}^+, \partial\Gamma_{t_0}^- \subseteq \mathcal{F}(t_0)$, então o nível crítico $\mathcal{F}(t_0)$ tem pelo menos uma componente conexa não limitada. A unicidade segue do corolário (2.7). ■

Corolário 3.8. $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{F}(t_0)$ tem exatamente duas componentes conexas ilimitadas: $\Gamma_{t_0}^+$ e $\Gamma_{t_0}^-$.

Portanto, se $B(t)$ for um nível crítico, o conjunto de nível $\mathcal{F}'(t)$ pode ser bastante complicado, mas algumas propriedades que os níveis regulares possuem são preservadas. Vamos reuni-las num só teorema para referência futura.

Teorema 3.9. *Seja $\mathcal{F}(t)$ um conjunto de nível crítico, ou seja, $B(t)$ é valor crítico, então:*

- $\mathcal{F}(t)$ tem uma única componente conexa não limitada $\mathcal{F}'(t_0)$, a qual tende a infinito para ambos os lados dentro de uma faixa $\{\alpha \leq b_0 \cdot \tau \leq \beta\}$.
- $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{F}'(t_0)$ tem exatamente duas componentes não limitadas: $\Gamma_{t_0}^+$ e $\Gamma_{t_0}^-$.

Em particular, componentes conexas não limitadas distintas estão em níveis distintos.

A grande diferença que aparece num nível crítico é a possibilidade do conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{F}'(t_0)$ poder ter mais componentes conexas (além das não limitadas $\Gamma_{t_0}^+$ e $\Gamma_{t_0}^-$). Claramente tais componentes serão limitadas e vamos chamá-las de *traps*. As *traps* merecerão uma atenção especial, pois são exatamente elas que dificultam a construção da transversal.

3.2 As Traps

Seja $\mathcal{F}'(t_0)$ a componente conexa não limitada do nível crítico $B(t_0)$. Como $\mathcal{F}'(t_0)$ é fechada então $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{F}'(t_0)$ é aberto, e todo aberto de \mathbb{R}^2 pode ser escrito como a reunião enumerável de suas componentes conexas, pois a topologia de \mathbb{R}^2 admite base enumerável de abertos. Logo vamos escrever

$$\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{F}'(t_0) = \Gamma_{t_0}^+ \cup \Gamma_{t_0}^- \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_{t_0}^j \right)$$

aqui $\Gamma_{t_0}^+$ e $\Gamma_{t_0}^-$ são as duas únicas componentes conexas não limitadas e cada $\Gamma_{t_0}^j$, com $j \in \mathbb{N}$, é uma componente *limitada*. Nos exemplos mais simples teremos $\Gamma_{t_0}^j = \emptyset$ a partir de um certo índice j_0 , mas pode ocorrer $\Gamma_{t_0}^j \neq \emptyset, \forall j$.

Definição 3.10. *Seja $\mathcal{F}'(t_0)$ a única componente não limitada do nível crítico $B(t_0)$. Cada uma das componentes conexas limitadas $\Gamma_{t_0}^j$ de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{F}'(t_0)$, quando existirem, serão chamadas de *traps* (A terminologia *trap* também é devida a Arnold.).*

Nosso objetivo neste trabalho é estabelecer alguma relação entre a resolubilidade global de um sistema com a conexidade de certos conjuntos de subnível e supernível. O próximo resultado ajuda a compreender de que maneira as *traps* se inserem neste contexto.

Proposição 3.11. *A função pseudoperiódica B possui subnível ou supernível desconexo se, e somente se, B admite traps.*

Prova: (\Leftarrow) Seja $\mathcal{F}'(t_0)$ a componente não limitada do nível crítico $B(t_0)$ e $\Gamma_{t_0}^1 \subset \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{F}'(t_0)$ uma *trap*. Como $\Gamma_{t_0}^1$ é aberto então para cada $P \in \Gamma_{t_0}^1$ existe $\varepsilon > 0$ tal que o disco aberto $D(P, \varepsilon) \subset \Gamma_{t_0}^1$. Também vamos tomar $Q \in \partial\Gamma_{t_0}^1 \subset \mathcal{F}'(t_0)$ tal que $\text{dist}(P, Q) = \text{dist}(P, \mathcal{F}'(t_0))$, então o segmento $\llbracket P, Q \rrbracket \setminus \{Q\} \subset \Gamma_{t_0}^1$.

Note que B não pode ser constante sobre o segmento $\llbracket P, Q \rrbracket$, senão teríamos $\llbracket P, Q \rrbracket \subset \mathcal{F}'(t_0)$ o que contraria a escolha de P . Na verdade, B não pode ser constante em nenhum subconjunto $\llbracket P_0, Q \rrbracket$ com $P_0 \in \llbracket P, Q \rrbracket \setminus \{P, Q\}$, caso contrário $\llbracket P_0, Q \rrbracket \subset \mathcal{F}'(t_0)$ e teríamos $\text{dist}(P, P_0) < \text{dist}(P, Q) = \text{dist}(P, \mathcal{F}'(t_0))$, o que não pode ocorrer. Portanto, existe $P_0 \in \llbracket P, Q \rrbracket$ tal que $B(P_0) \neq B(t_0)$.

Apenas para facilitar o raciocínio, vamos supor que $B(P_0) < B(t_0)$. Pelo Teorema de Sard, existe um valor regular r com $B(P_0) \leq r < B(t_0)$ e, pelo teorema do valor intermediário aplicado a $B|_{\llbracket P_0, Q \rrbracket}$ obtemos um ponto $R \in \llbracket P_0, Q \rrbracket$ tal que $B(R) = r < B(t_0)$. Segue da proposição (2.10), que $\mathcal{F}'(R)$ é difeomorfa ou a uma \mathbb{S}^1 ou a \mathbb{R} , porém a única curva normal do nível $r < B(t_0)$ está acima de $\mathcal{F}'(t_0)$, logo em R passa uma curva fechada difeomorfa a uma \mathbb{S}^1 . Além disto, existe uma vizinhança V , de $\mathcal{F}'(R)$, difeomorfa a um anel de \mathbb{R}^2 formada apenas por níveis regulares, cada um destes difeomorfos a \mathbb{S}^1 e todos com níveis diferentes entre si.

Tomemos um ponto $R_0 \in V$ que esteja na componente limitada de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{F}'(R)$, então $B(R_0) < B(R)$ ou $B(R_0) > B(R)$. No primeiro caso $B(R_0) \in \Omega_r$, $\mathcal{F}'(R) \subset \partial\Omega_r$ e sobre V o valor r é atingido apenas em $\mathcal{F}'(R)$, portanto Ω_r tem uma componente conexa limitada que está a uma distância positiva da componente ilimitada Ω_{r_0} do subnível. Daqui segue que o subnível é desconexo. Analogamente, se $B(R_0) > B(R)$, existirá um supernível desconexo.

(\Rightarrow) Suponha que não existam *traps*, ou seja, que $\forall t \in \mathbb{R}^2$ o conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{F}'(t)$ tenha apenas as duas componentes não limitadas Γ_t^+ e Γ_t^- . Então basta mostrar que $\Gamma_t^+ = \Omega^{B(t)}$ e $\Gamma_t^- = \Omega_{B(t)}$.

Por definição temos $\Gamma_t^+ \supset \Omega^{B(t)}$ e $\Gamma_t^- \supset \Omega_{B(t)}$. Para obter a inclusão contrária tomemos um ponto $\tau \notin \Gamma_t^+$ e vamos mostrar que ele também não está em $\Omega^{B(t)}$. Como não existem *traps*, então $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{F}'(t) = \Gamma_t^+ \cup \Gamma_t^-$. Como $\tau \notin \Gamma_t^+$ então $\tau \in \Gamma_t^-$ ou $\tau \in \mathcal{F}'(t)$.

Se $\tau \in \mathcal{F}'(t)$ então $B(\tau) = B(t) \Rightarrow \tau \notin \Omega^{B(t)}$. Agora, se $\tau \in \Gamma_t^-$ então existe um índice $j \in \mathbb{N}$ tal que $B(v_j) < B(t)$, $\mathcal{F}'(v_j)$ é uma curva normal abaixo de τ , portanto $\mathcal{F}'(t)$ está acima da componente conexa não limitada de $\mathcal{F}(t)$. Como $\Omega^{B(t)}$ está todo abaixo da componente não limitada de $\mathcal{F}(t)$ então $\tau \notin \Omega^{B(t)}$. Daqui segue que $\Gamma_t^+ \subset \Omega^{B(t)}$. Analogamente prova-se que $\Gamma_t^- \subset \Omega_{B(t)}$. ■

Já sabemos como são as *traps* e quando elas surgem. Agora precisamos localizá-las, ou seja, precisamos saber se alguma destas *traps* intercepta a curva pré-transversal.

Definição 3.12. *Seja $\mathcal{F}'(t_0)$ uma componente conexa limitada de um conjunto de nível considere os seguintes conjuntos*

$$\mathbb{G}_{t_0}^\pm = \{ t / \mathcal{F}'(t) \text{ é curva normal e } \mathcal{F}'(t_0) \subset \Gamma_t^\mp \}$$

$$\text{então definimos:} \quad \tilde{\Gamma}_{t_0}^+ = \bigcup_{t \in \mathbb{G}_{t_0}^+} \Gamma_t^+ \quad e \quad \tilde{\Gamma}_{t_0}^- = \bigcup_{t \in \mathbb{G}_{t_0}^-} \Gamma_t^-$$

Observe que os conjuntos $\tilde{\Gamma}_{t_0}^+$ e $\tilde{\Gamma}_{t_0}^-$ acima são muito parecidos com os conjuntos $\Gamma_{t_0}^+$ e $\Gamma_{t_0}^-$ que definimos na página 33. A diferença é que na definição (3.1) estávamos preocupados em provar que todo nível crítico possui uma componente ilimitada e que no complementar desta componente ilimitada podem existir *traps*, logo o ponto de partida era um valor crítico. Já na definição (3.12) partimos de uma componente limitada de nível e queremos mostrar que esta componente está contida dentro de uma *trap*.

Na prática, os conjuntos $\tilde{\Gamma}_{t_0}^+$ e $\Gamma_{t_0}^+$ podem coincidir. Por exemplo, no caso em que $\mathcal{F}'(t_0) \setminus \{t_0\}$ for difeomorfo a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e em t_0 tivermos uma cúspide, teremos $\tilde{\Gamma}_{t_0}^+ = \Gamma_{t_0}^+$.

Proposição 3.13. *Existem seqüências $\{u_j\} \subset \mathbb{G}_{t_0}^+$ e $\{v_j\} \subset \mathbb{G}_{t_0}^-$ tais que:*

$$\tilde{\Gamma}_{t_0}^+ = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_{u_j}^+ \quad \text{com} \quad \Gamma_{u_j}^+ \subset \Gamma_{u_{j+1}}^+ \quad \text{e} \quad \tilde{\Gamma}_{t_0}^- = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Gamma_{v_j}^- \quad \text{com} \quad \Gamma_{v_j}^- \subset \Gamma_{v_{j+1}}^-$$

Prova: Cada curva normal $\mathcal{F}'(t)$, com $t \in \mathbb{G}_{t_0}^+$, intercepta a reta $t_1 = 0$ uma única vez, portanto podemos escrever

$$\tilde{\Gamma}_{t_0}^+ = \bigcup_{\mathbb{G}_{t_0}^+ \cap \{t_1=0\}} \Gamma_t^+$$

Como o conjunto $\mathbb{G}_{t_0}^+ \cap \{t_1 = 0\}$ é limitado superiormente, pois qualquer elemento de $\mathbb{G}_{t_0}^-$ é uma cota superior para este conjunto, então $\mathbb{G}_{t_0}^+ \cap \{t_1 = 0\}$ admite um supremo, o qual chamaremos de t^+ . Agora basta escolher $u_j \in \mathbb{G}_{t_0}^+ \cap \{t_1 = 0\}$ satisfazendo

$$|u_j - t^+| < \frac{1}{j} \quad \text{e} \quad B(u_j) > B(u_{j+1}), \quad \text{com } j \in \mathbb{N}$$

e teremos a seqüência desejada. O processo de construção da seqüência $\{v_j\}$ é análogo. ■

A proposição acima corresponde à proposição (3.3) que provamos para $\Gamma_{t_0}^\pm$. Esta proposição é basicamente o que precisamos para repetir aqui os enunciados e provas de proposições correspondentes a (3.2), (3.4), (3.5) e (3.6). Portanto, consideramos provado o seguinte teorema.

Teorema 3.14. *Seja $\mathcal{F}'(t_0)$ uma componente conexa limitada de um conjunto de nível então:*

- (i) $\tilde{\Gamma}_{t_0}^+$ e $\tilde{\Gamma}_{t_0}^-$ são abertos, não limitados e cada um contém um semiplano.
- (ii) B é constante sobre $\partial\tilde{\Gamma}_{t_0}^+$ e $\partial\tilde{\Gamma}_{t_0}^-$.
- (iii) $\partial\tilde{\Gamma}_{t_0}^+$ e $\partial\tilde{\Gamma}_{t_0}^-$ são ilimitadas e conexas.

Como B é constante sobre cada um dos conjuntos conexos e não limitados $\partial\tilde{\Gamma}_{t_0}^+$ e $\partial\tilde{\Gamma}_{t_0}^-$, então podemos escolher pontos t^+ na interseção de $\partial\tilde{\Gamma}_{t_0}^+$ com $\{t_1 = 0\}$ e t^- na interseção de $\partial\tilde{\Gamma}_{t_0}^-$ com $\{t_1 = 0\}$ tais que

$$\partial\tilde{\Gamma}_{t_0}^+ \subset \mathcal{F}'(t^+) \quad \text{e} \quad \partial\tilde{\Gamma}_{t_0}^- \subset \mathcal{F}'(t^-)$$

Proposição 3.15. $\mathcal{F}'(t^+) \equiv \mathcal{F}'(t^-)$.

Prova: Suponha que $\mathcal{F}'(t^+) \neq \mathcal{F}'(t^-)$, neste caso $B(t^-) < B(t^+)$. Segue do lema de Sard que existe valor regular $B(t^-) < r < B(t^+)$. Como $\mathcal{F}'(t^+)$ e $\mathcal{F}'(t^-)$ são ilimitadas então a curva normal do nível regular r está entre estas duas curvas e deverá passar por baixo de $\mathcal{F}'(t_0^-)$ ou por cima de $\mathcal{F}'(t_0^+)$, o que é absurdo. Da maneira como foram definidos, $\partial\tilde{\Gamma}_{t_0}^+ \subset \mathcal{F}'(t^+)$ está acima de qualquer curva normal $\mathcal{F}'(t)$ que passe por baixo de $\mathcal{F}'(t_0)$ e $\partial\tilde{\Gamma}_{t_0}^- \subset \mathcal{F}'(t^-)$ está abaixo de qualquer curva normal $\mathcal{F}'(t)$ que passe acima de $\mathcal{F}'(t_0)$. Portanto $\mathcal{F}'(t^+) = \mathcal{F}'(t^-)$. ■

Esta última proposição nos diz que dado uma componente conexa limitada $\mathcal{F}'(t_0)$ (regular ou não) existe uma única componente conexa de nível não limitada $\mathcal{F}'(t^+)$ tal que $\mathcal{F}'(t_0)$ não está em $\Gamma_{t^+}^+$ nem em $\Gamma_{t^+}^-$, ou seja, $\mathcal{F}'(t_0)$ está numa *trap* definida por $\mathcal{F}'(t^+)$. Isto prova o seguinte resultado

Teorema 3.16. *Toda componente limitada de um conjunto de nível de B está contida em alguma trap.*

A componente conexa ilimitada de um nível crítico pode interceptar cada uma das curvas pré-transversais apenas de duas maneiras distintas: pode ser num único ponto (pertencente a um arco, que intercepta transversalmente a reta $t_1 = 0$) ou em vários pontos diferentes contidos na fronteira de *traps* determinadas pelo próprio nível. Neste último caso cada arco que passa por um dos pontos de interseção poderá ser transversal ou tangenciar a pré-transversal.

Lembremos que cada par de vezes que um nível intercepta a pré-transversal obtém-se entre estes dois pontos de interseção um ponto crítico de β . Portanto se um *trap* interceptar $t_1 = 0$ existirá pelo menos um ponto crítico de β no interior desta *trap*. Também poderão ocorrer pontos críticos de β na fronteira de alguma *trap*

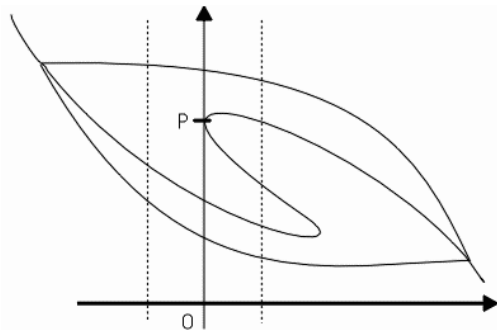


Figura 3.1: *traps* com pontos críticos na fronteira

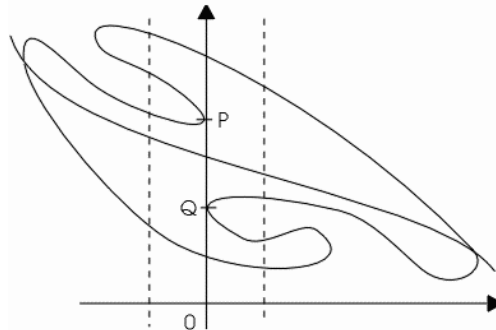


Figura 3.2: Duas *traps* com um mesmo ponto crítico na fronteira

Proposição 3.17. *Todo ponto crítico de β está contido em uma *trap* ou na fronteira de uma *trap*.*

Prova: Seja t_0 um ponto crítico de β . Se $\mathcal{F}'(t_0)$ for uma componente limitada, então pelo teorema (3.16) acima existe uma *trap* contendo $\mathcal{F}'(t_0)$. Como $\mathcal{F}'(t_0)$ não pode ser uma curva normal, pois nenhum ponto crítico de β está em curva normal, então resta apenas examinar o que ocorre quando $\mathcal{F}'(t_0)$ é não limitada e $B(t_0)$ é valor crítico. Nesta situação, t_0 não estará em nenhuma *trap*, pois as *traps* residem justamente no complementar de componentes ilimitadas de níveis críticos. Vamos mostrar que t_0 está na fronteira de alguma *trap*.

Como t_0 é ponto crítico isolado de β , vamos supor que t_0 seja um ponto de máximo local (o caso em que t_0 é mínimo local é análogo). Neste caso existe um $\varepsilon > 0$ tal que t_0 é o único ponto crítico de β no disco $D(t_0, \varepsilon)$, β é crescente no intervalo $I_{-\varepsilon} = \llbracket t_0 - (0, \varepsilon), t_0 \rrbracket$ e decrescente em $I_{+\varepsilon} = \llbracket t_0, t_0 + (0, \varepsilon) \rrbracket$.

Tomando $\varepsilon < \delta$ também teremos que $D(t_0, \varepsilon)$ é folheado pelos conjuntos de nível de B . Usando a regularidade de B é possível encontrar um nível $\mathcal{F}'(P)$ próximo de $\mathcal{F}'(t_0)$ que intercepta $I_{-\varepsilon}$ e $I_{+\varepsilon}$. Sejam P_- e P_+ os pontos abaixo e acima de t_0 onde $\mathcal{F}'(P)$ intercepta $I_{-\varepsilon}$ e $I_{+\varepsilon}$ respectivamente.

Como o valor crítico $B(t_0)$ é atingido uma única vez no intervalo $\llbracket P_-, P_+ \rrbracket$, exatamente em t_0 , então $\llbracket P_-, P_+ \rrbracket \setminus \{t_0\} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{F}'(t_0)$. Se o subintervalo $\llbracket P_-, P_+ \rrbracket$ estiver contido numa *trap* definida por $\mathcal{F}'(t_0)$ então t_0 estará na fronteira desta mesma *trap*. Logo resta apenas o caso em que $\llbracket P_-, P_+ \rrbracket$ está em $\Gamma_{t_0}^\pm$. Vamos mostrar que esta última situação não pode ocorrer.

Se, por exemplo, $\llbracket P_-, P_+ \rrbracket \subset \Gamma_{t_0}^+$, então pela definição de $\Gamma_{t_0}^-$, é possível obter um ponto $t \in \llbracket P_-, P_+ \rrbracket \setminus \{t_0\}$ tal que $B(t)$ é valor regular e $\mathcal{F}'(t)$ é uma curva normal, a qual interceptará $\llbracket P_-, P_+ \rrbracket$ em dois pontos distintos (um acima e outro abaixo de t_0), o que contradiz a proposição (2.13) e conclui a prova da proposição. ■

A demonstração acima prova o seguinte resultado, que será útil adiante.

Corolário 3.18. *Se $\mathcal{F}'(t_0)$ é a componente não limitada do nível crítico $B(t_0)$ e $\beta'(t_0) = 0$ então existe $\varepsilon > 0$ tal que $\llbracket t_0 - (0, \varepsilon), t_0 + (0, \varepsilon) \rrbracket \setminus \{t_0\}$ está contido numa *trap* definida por $\mathcal{F}'(t_0)$.*

3.3 A Construção da Transversal

Note que em alguns casos (mais simples) a curva pré-transversal $\{t_1 = 0\}$ que obtivemos já é a transversal procurada. Vamos descrever estes casos para esclarecer quais tipos de dificuldades deveremos encontrar no caso mais geral.

(1° caso) $\Sigma = \emptyset$. Aqui todos os conjuntos de nível são regulares, logo não existem *traps* nem c.c. de conjuntos de nível limitados. Portanto $\mathcal{F}'(t)$ é curva normal, $\forall t \in \mathbb{R}^2$. Como as curvas normais interceptam $\{t_1 = 0\}$

transversalmente uma única vez e cada nível regular tem uma única curva normal segue do corolário (2.12) que $\{t_1 = 0\}$ é a transversal procurada.

(2° caso) $\Sigma \neq \emptyset$, porém não existem *traps*. Como todos os pontos críticos de β e níveis limitados de B devem estar dentro de *traps* e estamos supondo que não existem *traps*, então somente níveis ilimitados interceptam $\{t_1 = 0\}$. Mas cada conjunto de nível tem exatamente uma componente ilimitada e as curvas normais interceptam $\{t_1 = 0\}$ transversalmente uma única vez, logo só falta mostrar que as componentes ilimitadas de um nível crítico também satisfazem estas mesmas propriedades. Com efeito, o teorema de Rolle garante que cada nível crítico ilimitado interceptará $\{t_1 = 0\}$ uma única vez, já para garantir que tal interseção ocorra transversalmente podemos repetir o procedimento utilizado na proposição (2.5).

(3° caso) *Existem traps, porém nenhuma intercepta $\{t_1 = 0\}$* . Quando existem *traps* temos automaticamente $\Sigma \neq \emptyset$, pois dentro de cada *trap* sempre há um ponto de máximo ou mínimo local. Como nenhuma *trap* intercepta $\{t_1 = 0\}$ então somente c.c. de níveis ilimitados interceptarão esta reta, como no caso anterior segue que $\{t_1 = 0\}$ é a transversal procurada.

(4° caso) *Existem traps interceptando $\{t_1 = 0\}$* . Este é o caso que nos dará mais trabalho e que justifica a necessidade de termos feito todo aquele estudo sobre *traps* na seção anterior. A idéia aqui é simplesmente “desviar” das *traps*. Os resultados que seguirão tornarão esta última frase mais clara.

Se existirem *traps* interceptando $\{t_1 = 0\}$ então, pelo teorema de Rolle, β terá pontos críticos.

Segue da proposição (2.5) que β tem apenas um número finito de pontos críticos isolados no intervalo $[0, 2\pi]$, os quais enumeraremos da seguinte forma:

$$|P_1| < |P_2| < \dots < |P_{2N}|$$

Observe que na notação acima estamos afirmando que o número de pontos críticos de β é sempre par. De fato, como β possui apenas pontos críticos não degenerados, $\mathcal{F}'(0, 2\pi)$ e $\mathcal{F}'(0, 0)$ são curvas normais cujos valores regulares $B(0, 2\pi) < B(0, 0)$ e β é decrescente numa vizinhança $(0, 0)$ e de $(0, 2\pi)$ então a cada ponto de mínimo de β deverá corresponder um ponto de máximo.

Como todo ponto crítico de β está no fecho de uma *trap* então existe uma *trap* T_1 cujo fecho contém P_1 . Na verdade, devido ao corolário (3.18) e ao fato de P_1 ser o “primeiro” ponto crítico de β no intervalo $[0, 2\pi]$ o ponto P_1 deverá estar no interior de uma *trap*.

Agora basta tomar um ponto $Q_1 \in \partial T$ qualquer e considerar a componente não limitada $\mathcal{F}'(Q_1)$ a qual intercepta a reta $t_1 = 0$ apenas um número finito de vezes (corolário (2.7)). Sejam Q'_1 e Q''_1 os pontos de menor e maior módulo em $\mathcal{F}'(Q_1) \cap \{t_1 = 0\}$ respectivamente.

Ao determinarmos $\mathcal{F}'(Q_1)$ pode ocorrer que todos os demais pontos críticos de β estejam em *traps* definidas por este nível, o que seria ótimo para nós. Porém, a única coisa que podemos afirmar com certeza é que, no mínimo, P_1 e P_2 estão contidas em *traps* definidas por $\mathcal{F}'(Q_1)$. Para explicar esta afirmação precisamos analisar melhor o comportamento de β .

Por hipótese $\mathcal{F}'(0, 0)$ é uma curva normal com β decrescente numa vizinhança da origem e P_1 é o primeiro ponto crítico de β , então β deverá ser decrescente no trecho $[[0, P_1]]$. A partir de P_1 a função β passará a ser crescente, mas por pouco tempo.

Como Q''_1 é o último ponto de interseção de $\mathcal{F}'(Q_1)$ com a reta $t_1 = 0$ e este ponto é regular, então existe uma vizinhança de Q''_1 formada apenas por pontos regulares, em particular existe um ponto R acima de Q''_1 tal que $\mathcal{F}'(R)$ é uma curva normal e todos os níveis $\mathcal{F}'(t)$ com $t \in [[Q''_1, R]]$ são componentes

não limitadas. (Caso contrário, se todas as componentes de nível que passam acima de Q_1'' fossem limitadas então existiria uma *trap* T contendo estes níveis e Q_1'' estaria na fronteira de T , contrariando a maximalidade da escolha de Q_1''). Portanto $\mathcal{F}'(t)$ é ilimitada $\forall t \in \llbracket Q_1'', R \rrbracket$, conseqüentemente β é decrescente neste intervalo, como Q_1'' é ponto regular da função β então existe um $R_0 \in \{t_1 = 0\}$ abaixo de Q_1'' tal que β é decrescente no intervalo $\llbracket R_0, R \rrbracket$.

Desta forma a função β é decrescente numa vizinhança de Q_1' e também numa vizinhança de Q_1'' . Além disto β tem um ponto de mínimo local em P_1 , portanto entre P_1 e R_0 deverá existir um ponto de máximo local, podem existir vários outros pontos de máximo e mínimo entre P_1 e R_0 , mas a existência de pelo menos um está assegurada. Isto prova que P_1 e P_2 estão contidos em *traps* definidas pela mesma componente não limitada $\mathcal{F}'(Q_1)$.

Se algum P_j estiver acima de Q_1'' repetimos o processo anterior. Tal ponto P_j estará numa *trap* T_j , tomaremos um $Q_j \in \partial T_j$ arbitrário e determinamos os pontos Q_j' e Q_j'' de menor e maior módulo na interseção de $\mathcal{F}'(Q_j)$ com a reta $t_1 = 0$. As *traps* definidas por $\mathcal{F}'(Q_j)$ conterão no mínimo dois pontos: P_j e P_{j+1} .

Repetimos este processo, no máximo mais $N - 2$ vezes, até encontrar todas as componentes ilimitadas cujas *traps* por elas definidas contém os pontos críticos de β . Vamos renomear estas c.c. ilimitadas para $\mathcal{F}'_1, \mathcal{F}'_2, \dots, \mathcal{F}'_N$. Assim $Q_j', Q_j'' \in \mathcal{F}'_j \cap \{t_1 = 0\}$ são, como antes, os pontos de menor e maior módulo nas interseções respectivamente. Também vamos fixar

$$\lambda = \min\{ |Q'_{j+1} - Q''_j| / 0 \leq j \leq N \}$$

onde convencionamos que $Q''_0 = (0, 0)$ e $Q'_{N+1} = (0, 2\pi)$.

Pelo corolário (2.7) sabemos que cada conjunto de nível pode interceptar apenas um número finito de retas $t_1 = 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, mais de uma vez, além disto este número finito é no máximo $2N$.

Portanto, para cada $j = 1, 2, \dots, N$, obtemos um inteiro $|k_j| \leq 2N + 1$ tal que a interseção de \mathcal{F}'_j com a reta $t_1 = 2k_j\pi$ contém somente o ponto X_j .

Agora basta escolher dois pontos $R'_j, R''_j \in \{t_1 = 0\}$ satisfazendo:

- (i) $\mathcal{F}'(R'_j)$ e $\mathcal{F}'(R''_j)$ são curvas normais
- (ii) R'_j está abaixo de Q'_j e $|R'_j - Q'_j| < \frac{1}{3}\lambda$
- (iii) R''_j está acima de Q''_j e $|R''_j - Q''_j| < \frac{1}{3}\lambda$

Sejam X'_j e X''_j respectivamente os pontos de interseção de $\mathcal{F}'(R'_j)$ e $\mathcal{F}'(R''_j)$ com a reta $\{t_1 = 2k_j\pi\}$. Vamos chamar de σ'_j o trecho de curva normal de $\mathcal{F}'(R'_j)$ entre R'_j e X'_j e de σ''_j o trecho de $\mathcal{F}'(R''_j)$ entre X''_j e R''_j . O passo seguinte é substituir cada um dos segmentos $[[Q'_j, Q''_j]]$ da curva pré-transversal $\{t_1 = 0\}$ pelo caminho $\sigma'_j \cup [[X'_j, X''_j]] \cup \sigma''_j$.

Obtemos assim uma nova curva σ unindo o ponto $(0, 0)$ a seu transladado $(0, 2\pi)$, a qual é transversal a praticamente todas as componentes conexas não limitadas de B , com exceção de um número finito de curvas normais $\mathcal{F}'(R'_j)$ e $\mathcal{F}'(R''_j)$ nas quais σ há uma coincidência nos trechos σ'_j e σ''_j respectivamente. Fazendo uma pequena modificação numa vizinhança de cada uma destas curvas, conseguimos fazer com que σ se torne transversal a todas as componentes não limitadas que interceptam esta curva.

Teorema 3.19. *Existe um 1-ciclo $\sigma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{T}^2$ não homólogo a zero cujo levantamento $\tilde{\sigma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ não intercepta $\Sigma = \{\tau / d_t B(\tau) = 0\}$ e é transversal a todas as componentes ilimitadas de conjuntos de nível de $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Além disto, $\tilde{\sigma}$ possui uma vizinhança tubular de raio $\delta > 0$ que não intercepta nenhuma componente limitada de conjunto de nível.*

Finalmente, por [H], podemos supor que $\sigma = [[(0, 0), (0, 2\pi)]]$, portanto $\{t_1 = 0\}$ é transversal a todas as componentes ilimitadas de conjunto de nível de B , e a vizinhança tubular acima será a faixa $\{|t_1| < \delta\}$.

Capítulo 4

Subníveis Conexos e a Resolubilidade Global

O objetivo deste capítulo é demonstrar a parte do teorema (1.5) relativa a suficiência, isto é, provaremos que uma condição suficiente para que \mathbb{L}^0 seja globalmente resolúvel é que todos os conjuntos de subnível Ω_r e de supernível Ω^r de B sejam conexos.

Na seção (3.1), supondo que existe uma distribuição u solução do sistema $\mathbb{L}^0 u = f$, com $f \in \bigwedge^1 \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^3)$, deduzimos a expressão dos coeficientes $\hat{u}(t, \xi)$ em função de um caminho de integração bastante especial.

Na seção (3.2) provamos que tais caminhos de integração especiais de fato existem e que seu comprimento pode ser razoavelmente controlado. Os resultados desta seção foram inspirados nas notas do curso: *Solvability of a Model in the Theory of Complexes of Pseudodifferential Operators*, ministrado pelo Professor François Trèves em Recife, ver [T2].

Na última seção deste capítulo, (3.3), mostramos que os coeficientes parciais de Fourier $\hat{u}(t, \xi)$ obtidos em (3.1) quando integrados sobre os caminhos obtidos em (3.2) correspondem à série parcial de Fourier de uma função $u(t, x)$ suave e 2π -periódica.

4.1 O Coeficiente $\hat{u}(t, \xi)$ Dependendo do Caminho

Dada $f \in \Lambda^1 \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^3)$ suponha que exista $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^3)$ solução do sistema de equações $\mathbb{L}^0 u = f$, com $\mathbb{L}^0 = d_t + ib(t) \wedge \partial_x$ e $b \in \Lambda^1 \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}_t^2)$ fechada. Aplicando a série parcial de Fourier no sistema obtemos, para cada $\xi \in \mathbb{Z}$, o sistema:

$$(d_t - \xi b(t) \wedge) \hat{u}(t, \xi) = \hat{f}(t, \xi), \quad t \in \mathbb{R}^2 \quad (4.1.1)$$

Multiplicando esta equação pelo fator integrante $e^{-\xi B(t)}$, teremos

$$d_t (e^{-\xi B(t)} \hat{u}(t, \xi)) = e^{-\xi B(t)} \hat{f}(t, \xi) \quad (4.1.2)$$

A equação homogênea correspondente a (4.1.2) é $d_t(e^{-\xi B(t)} \hat{u}(t, \xi)) = 0$, cuja solução geral é: $\hat{u}(t, \xi) = K_\xi e^{\xi B(t)}$, com $K_\xi \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}^2$ e $\xi \in \mathbb{Z}$ e uma solução particular da equação não-homogênea é

$$\hat{u}(t, \xi) = \int_{t_0}^t e^{-\xi[B(\tau) - B(t)]} \hat{f}(\tau, \xi) d\tau \quad (4.1.3)$$

Logo a solução geral da equação (4.1.1) é

$$\hat{u}(t, \xi) = \int_{t_0}^t e^{-\xi[B(\tau) - B(t)]} \hat{f}(\tau, \xi) d\tau + K_\xi e^{\xi B(t)} \quad (4.1.4)$$

com $K_\xi \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}^2$ e $\xi \in \mathbb{Z}$

Agora notemos que $d_t(e^{-\xi B(t)} \hat{f}(t, \xi)) = 0$, ou seja, a integral acima não depende do caminho de integração escolhido, portanto vamos supor que para cada $t_0 \in [0, 2\pi]^2$ exista um caminho $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ satisfazendo:

$$(i) \quad \gamma(0) = t_0 \text{ e } \gamma(2\pi) = t_0 + (2\pi, 0)$$

$$(ii) \quad \gamma \in \mathcal{C}^\infty([0, 2\pi])$$

$$(iii) \quad \gamma^{(k)}(0) = \gamma^{(k)}(2\pi), \quad \forall k = 1, 2, \dots$$

ou seja, vamos supor que em cada ponto do quadrado fundamental $[0, 2\pi]^2$ passa uma curva γ cuja projeção no toro \mathbb{T}^2 é uma curva fechada de classe \mathcal{C}^∞ não homóloga a zero.

Neste caso podemos reescrever a solução (4.1.4) na seguinte forma

$$\hat{u}(\gamma(s), \xi) = e^{\xi B(\gamma(s))} \int_0^s G(\sigma, \xi) d\sigma + K_\xi e^{\xi B(\gamma(s))} \quad (4.1.5)$$

$$\text{com } G(\sigma, \xi) = e^{-\xi B(\gamma(\sigma))} \hat{f}(\gamma(\sigma), \xi) \gamma'(\sigma)$$

Para que esta expressão defina uma função 2π -periódica precisamos impor que $\hat{u}(\gamma(0), \xi) = \hat{u}(\gamma(2\pi), \xi)$, mas

$$\hat{u}(\gamma(2\pi), \xi) = e^{\xi B(\gamma(2\pi))} \int_0^{2\pi} G(\sigma, \xi) d\sigma + K_\xi e^{\xi B(\gamma(2\pi))} \quad (4.1.6)$$

e

$$\hat{u}(\gamma(0), \xi) = K_\xi e^{\xi B(\gamma(0))} \quad (4.1.7)$$

portanto

$$K_\xi (e^{\xi B(\gamma(0))} - e^{\xi B(\gamma(2\pi))}) = e^{\xi B(\gamma(2\pi))} \int_0^{2\pi} G(\sigma, \xi) d\sigma \quad (4.1.8)$$

como $B(\gamma(2\pi)) - B(\gamma(0)) = \int_{t_0}^{t_0+(2\pi,0)} b = \int_0^{2\pi} b_1(\tau_1, 0) d\tau_1 = b_{10}$ então para $\xi \neq 0$ temos

$$K_\xi = \frac{e^{\xi B(\gamma(2\pi))}}{e^{\xi B(\gamma(0))} - e^{\xi B(\gamma(2\pi))}} \int_0^{2\pi} G(\sigma, \xi) d\sigma = \frac{1}{e^{-\xi b_{10}} - 1} \int_0^{2\pi} G(\sigma, \xi) d\sigma$$

Levando esta constante na solução geral (4.1.5) obtemos a seguinte expressão para a solução da equação (4.1.1)

$$\hat{u}(\gamma(s), \xi) = \int_0^s \omega d\sigma + \frac{1}{e^{-\xi b_{10}} - 1} \int_0^{2\pi} \omega d\sigma \quad (4.1.9)$$

com

$$\omega(\sigma, \xi) = e^{-\xi[B(\gamma(\sigma)) - B(\gamma(s))]} \hat{f}(\gamma(\sigma), \xi) \gamma'(\sigma)$$

Há um segundo caminho que será útil para nós, é a curva $\lambda : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuja projeção no toro \mathbb{T}^2 é uma curva fechada, não homóloga a zero, de classe \mathcal{C}^∞ satisfazendo

$$\lambda(0) = t_0 \text{ e } \lambda(2\pi) = t_0 - (2\pi, 0)$$

Para esta curva as expressões (4.1.4), (4.1.6), (4.1.7) e (4.1.8) continuam válidas. E apenas uma pequena diferença ocorrerá no denominador da fração que multiplica a segunda integral, pois $B(\lambda(2\pi)) - B(\lambda(0)) = -b_{10}$. Assim, para $\xi \neq 0$ a fórmula (4.1.5) permanecerá a mesma, exceto por este sinal que mudará de negativo para positivo. Vamos registrá-la aqui para referência futura.

$$\hat{u}(\lambda(s), \xi) = \int_0^s \omega d\lambda + \frac{1}{e^{+\xi b_{10}} - 1} \int_0^{2\pi} \omega d\sigma \quad (4.1.10)$$

com

$$\omega(\sigma, \xi) = e^{-\xi[B(\lambda(\sigma)) - B(\lambda(s))]} \hat{f}(\lambda(\sigma), \xi) \lambda'(\sigma)$$

Para concluir esta discussão, observe que quando $\xi = 0$ a solução geral (4.1.4) torna-se simplesmente

$$\hat{u}(t, 0) = \int_{t_0}^t \hat{f}(\tau, 0) d\tau + K_0 \quad (4.1.11)$$

Integrando sobre o caminho γ acima teremos

$$\hat{u}(\gamma(s), 0) = \int_0^s \hat{f}(\gamma(\sigma), 0) \gamma'(\sigma) d\sigma + K_0 \quad (4.1.12)$$

Assim quando $\int_0^{2\pi} \hat{f}(\gamma(\sigma), 0) \gamma'(\sigma) d\sigma = 0$, a expressão acima fornece uma solução para o sistema (4.1.1).

4.2 Caminhos de Integração

Lema 4.1. *Existe uma faixa $S = \{|b_0 \cdot \tau| < \nu\} \subset \mathbb{R}^2$ que contém todos os níveis $\mathcal{F}(t)$ com $t \in [-2\pi, 4\pi] \times [0, 2\pi]$*

Prova: Pelo lema (2.1), cada $\mathcal{F}(t)$, com $t \in \mathbb{R}^2$, está contido numa faixa S_t . Como $|b_0 \cdot t| \leq 2\pi(2|b_{10}| + |b_{20}|), \forall t \in [-2\pi, 4\pi] \times [0, 2\pi]$ então basta tomar $S = \{-\nu \leq b_0 \cdot \tau \leq \nu\}$ com $\nu = 2\|P\|_\infty + 2\pi(2|b_{10}| + |b_{20}|)$, veja (1.2.4). ■

Lema 4.2. *Seja $b \in \Lambda^1 \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^2)$ fechada com períodos incomensuráveis e $B = \int_0^t \Pi^* b$. Suponha que os conjuntos de subnível $\Omega_r = \{\tau : B(\tau) < r\}$ e de supernível $\Omega^r = \{\tau : B(\tau) > r\}$ sejam conexos, para todo $r \in \mathbb{R}$. Então*

$$K_r = \overline{\Omega_r} \cap ([0, 4\pi] \times \mathbb{R}) \cap S \quad e \quad K^r = \overline{\Omega^r} \cap ([0, 4\pi] \times \mathbb{R}) \cap S$$

são compactos e conexos por caminhos.

Prova: Como $b_{20} \neq 0$ então as faixas $[0, 4\pi] \times \mathbb{R}$ e $S = \{\tau ; |\leq b_0 \cdot \tau| \leq \nu\}$ não são paralelas, logo $([0, 4\pi] \times \mathbb{R}) \cap S \subset \subset \mathbb{R}^2$, daqui segue que K_r e K^r são compactos em \mathbb{R}^2 .

Para provar a conexidade por caminhos teremos um pouco mais de trabalho. Pelo teorema (3.19) as retas $t_1 = 0$ e $t_1 = 4\pi$ são transversais a todos os conjuntos de nível ilimitados de B , ou seja cada $\mathcal{F}'(t)$ ilimitado intercepta cada uma destas retas transversalmente uma única vez nos pontos $t' = (0, t'_2)$ e $t'' = (4\pi, t''_2)$.

Agora $B(t') = B(t'') = B(t)$ e B é decrescente sobre as transversais logo as semi-retas $\{(0, \tau_2); \tau_2 > t'_2\}$ e $\{(4\pi, \tau_2); \tau_2 > t''_2\}$ estão ambas contidas em $\Omega_{B(t)}$.

Sejam P e Q dois pontos quaisquer de $\Omega_r \cap ([0, 4\pi] \times \mathbb{R})$. Pela conexidade de Ω_r obtemos um caminho $\sigma : [0, 1] \rightarrow \Omega_r$ conectando os pontos P e Q . Suponha que $\sigma \not\subset \Omega_r \cap ([0, 4\pi] \times \mathbb{R})$, senão não há o que provar, neste caso existe $s \in [0, 1]$ tal que $\sigma(s) \notin [0, 4\pi] \times \mathbb{R}$. Caso $\sigma(s)$ esteja à esquerda da faixa $[0, 4\pi] \times \mathbb{R}$ o que fazemos é determinar os pontos $P_0 = \sigma(p_0)$ e $Q_0 = \sigma(q_0)$, respectivamente o primeiro e o último ponto de interseção do caminho σ com a transversal $t_1 = 0$, a seguir substituímos $\sigma([p_0, q_0])$ pelo segmento de reta $[[P_0, Q_0]]$ contido na semi-reta $\{(0, \tau_2); \tau_2 > t'_2\}$ obtendo um novo caminho σ_o unindo P e Q que não atinge pontos a esquerda de $t_1 = 0$. Caso σ_o passe por pontos a direita da transversal $t_1 = 4\pi$ repetimos o processo acima substituindo a parte do caminho que sai da faixa por um segmento de reta contido na semi-reta $\{(4\pi, \tau_2); \tau_2 > t''_2\}$ obtendo assim um novo caminho $\sigma_{oo} \subset \Omega_r$ que conecta P e Q e não atinge pontos a esquerda de $t_1 = 0$ nem pontos a direita de $t_1 = 4\pi$,

ou seja, $\sigma_{oo} \subset \Omega_r \cap ([0, 4\pi] \times \mathbb{R})$. Daqui segue que $\Omega_r \cap ([0, 4\pi] \times \mathbb{R})$ é conexo por caminhos.

Para mostrar que o compacto $K_r = \Omega_r \cap ([0, 4\pi] \times \mathbb{R}) \cap S$ é conexo por caminhos basta ver a reta $b_0 \cdot \tau = -\nu \subset \Omega_{B(t)}, \forall t \in ([0, 4\pi] \times [0, 2\pi])$ (com ν dado no lema (2.1)) e repetir a argumentação acima. A prova para K^r é análoga. ■

O próximo resultado mostra como escolher os caminhos de integração que usaremos na fórmula (4.1.9). Tanto o enunciado como a prova foram inspirados nas notas de curso [T2] de Treves.

Teorema 4.3. *Com as mesmas hipóteses do lema (4.2) existe uma constante $M > 0$ e, para cada $t \in [0, 2\pi]^2$ e $\xi \in \mathbb{Z}$ dados, existe um caminho poligonal $\gamma(t, \xi)$ conectando os pontos t e $t + (2\pi, 0)$ contido em K_r tal que:*

$$(i) \quad B(\tau) \leq B(t) + \frac{1}{|\xi| + 1}, \quad \forall \tau \in \gamma(t, \xi)$$

$$(ii) \quad \text{O comprimento } |\gamma(t, \xi)| < M(1 + |\xi|)$$

Demonstração: Seja \mathcal{D}_0 a coleção de todos os quadrados de \mathbb{R}^2 de lado 2π com vértices nos pontos de $2\pi\mathbb{Z}^2$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, denotemos por \mathcal{D}_k a imagem de \mathcal{D}_0 pela contração $t \mapsto 2^{-k}t$.

Vamos fixar $t \in [0, 2\pi]^2$ e $\xi \in \mathbb{Z}$, colocar $r = B(t) + \frac{1}{2(1 + |\xi|)}$ e considerar os conjuntos

$$\mathcal{A}_{kr} = \{Q \in \mathcal{D}_k ; Q \cap K_r \neq \emptyset\} \quad \mathcal{V}_{kr} = \bigcup_{Q \in \mathcal{A}_{kr}} Q$$

Note que cada $s \in \mathcal{V}_{kr}$ está contido num quadrado de diagonal $\frac{\pi\sqrt{2}}{2^{k-1}}$, o qual intercepta Ω_r num ponto s' , logo

$$B(s) \leq |B(s) - B(s')| + B(s') \leq \|b\|_\infty |s - s'| + r \leq \|b\|_\infty \frac{\pi\sqrt{2}}{2^{k-1}} + r$$

Agora bastaria escolher um k inteiro tal que $\|b\|_\infty \frac{\pi\sqrt{2}}{2^{k-1}} \leq \frac{1}{2(1 + |\xi|)}$, ou seja, satisfazendo $4\pi\sqrt{2}(|\xi| + 1) \leq 2^k$. Tendo em vista uma conta que faremos adiante vamos ser mais precisos nesta escolha; para este $\xi \in \mathbb{Z}$ fixado, tomaremos

o único $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$2^{k-1} < 4\pi\sqrt{2}(|\xi| + 1)\|b\|_\infty \leq 2^k \quad (4.2.1)$$

então

$$B(s) \leq \|b\|_\infty \frac{\pi\sqrt{2}}{2^{k-1}} + r \leq \frac{1}{2(1+|\xi|)} + r = B(t) + \frac{1}{1+|\xi|}$$

Assim para cada $t \in [0, 2\pi]$ e $\xi \in \mathbb{Z}$ fixados, obtemos um k tal que

$$B(s) \leq B(t) + \frac{1}{1+|\xi|}, \quad \forall s \in \mathcal{V}_{kr} \quad (4.2.2)$$

Agora, pelo lema (4.2), K_r é c.p.c. e, portanto, a reunião \mathcal{V}_{kr} dos quadrados $Q \in \mathcal{D}_k$ que interceptam K_r também é conexa por caminhos. Logo, é possível construir uma curva poligonal $\gamma(t, \xi)$ em \mathcal{V}_{kr} unindo os pontos t e $t + (0, 2\pi)$ que intercepta cada quadrado de \mathcal{V}_{kr} no máximo uma vez. O que verifica o item (i) enunciado no lema.

Apenas para esclarecer, como \mathcal{V}_{kr} é c.p.c. existe um caminho σ unindo t e $t + (0, 2\pi)$ contido em \mathcal{V}_{kr} . Podemos construir um caminho poligonal γ a partir de σ que intercepta cada quadrado de \mathcal{V}_{kr} no máximo uma vez da seguinte forma: em cada quadrado que σ passa determinamos o primeiro e o último ponto de interseção de σ com este quadrado, a seguir substituímos o pedaço de caminho entre estes dois pontos pelo segmento de reta que os une.

Para verificar o item (ii), seja N o número de quadrados em \mathcal{D}_0 que interceptam o compacto K_r , o número de quadrados em \mathcal{D}_k que interceptam K_r é no máximo $4^k N$. Como a diagonal de cada quadrado em \mathcal{V}_{kr} mede $\frac{\pi\sqrt{2}}{2^{k-1}}$ temos

$$\begin{aligned} |\gamma(t, \xi)| &\leq \frac{\pi\sqrt{2}}{2^{k-1}} 4^k N = (4\pi N\sqrt{2})2^{k-1} \\ &\stackrel{(4.2.1)}{\leq} (4\pi N\sqrt{2})(4\pi\sqrt{2}(1+|\xi|)\|b\|_\infty) = M(1+|\xi|) \end{aligned}$$

o que conclui a prova do teorema ■

O teorema a seguir é o análogo do teorema acima para superníveis, ele é necessário para estimar a expressão (4.1.10) quando $\xi > 0$.

Teorema 4.4. *Com as mesmas hipóteses do lema (4.2) existe uma constante $M > 0$ e, para cada $t \in [0, 2\pi]^2$ e $\xi \in \mathbb{Z}$ dados, existe um caminho poligonal $\gamma(t, \xi)$ conectando os pontos t e $t - (2\pi, 0)$ contido em K^r tal que:*

$$(i) \quad B(\tau) \geq B(t) - \frac{1}{|\xi| + 1}, \quad \forall \tau \in \gamma(t, \xi)$$

$$(ii) \quad \text{O comprimento } |\gamma(t, \xi)| < M(1 + |\xi|)$$

Prova: Basta aplicar o teorema anterior para a função $\tilde{B}(t) = -B(t)$ ■

Observação 4.5. Fazendo uma pequena correção nos caminhos acima podemos supor que eles são de classe C^∞ e ainda satisfazem os respectivos teoremas.

4.3 Construção da Solução

Nosso objetivo nesta seção é mostrar que o sistema \mathbb{L} é globalmente resolúvel, ou seja, que a equação $\mathbb{L}^0 u = f$ tem solução, $\forall f \in \mathbb{E}$ (o espaço \mathbb{E} foi definido em (1.4.1)). Na seção 1 deste mesmo capítulo, em (4.1.9), vimos que o candidato a solução deste sistema tem coeficientes parciais de Fourier em relação a x dados por

$$\hat{u}(t, \xi) = \int_{t_0}^t \omega d\tau + \frac{1}{e^{\xi b_{10}} - 1} \int_{t_0}^{t_0 + (2\pi, 0)} \omega d\tau$$

com $\omega(\tau, \xi) = e^{-\xi[B(\tau) - B(t)]} \hat{f}(\tau, \xi)$, para $t \in \mathbb{R}^2$ e $\xi \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$. Além disto, podemos supor que $\boxed{b_{10} < 0}$, fazendo a mudança de variáveis $(t_1, t_2) \mapsto (-t_1, t_2)$ caso seja necessário.

Pretendemos mostrar que a série formal $u(t, x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \hat{u}(t, \xi) e^{\xi \cdot x}$ é uma solução C^∞ do sistema $\mathbb{L}^0 u = f$. Para isto basta provar que $\hat{u}(t, \xi)$ e todas suas derivadas $\partial^{(\alpha, \beta)} \hat{u}(t, \xi)$ decaem mais rápido que qualquer potência negativa de $\xi \neq 0$.

Vamos começar chamando

$$H(t, \xi) = \int_{t_0}^t e^{-\xi B(\tau)} \hat{f}(\tau, \xi) d\tau \quad (4.3.1)$$

então

$$e^{\xi B(t)} H(t, \xi) = \int_{t_0}^t e^{-\xi[B(\tau)-B(t)]} \hat{f}(\tau, \xi) d\tau = \int_{t_0}^t \omega d\tau \quad (4.3.2)$$

derivando as expressões acima temos

$$\partial_j H(t, \xi) = e^{-\xi B(t)} \hat{f}_j(t, \xi) \quad (4.3.3)$$

$$\partial_j (e^{\xi B} H) = \partial_j (e^{\xi B}) H + e^{\xi B} (\partial_j H) = \xi (\partial_j B) e^{\xi B} H + \hat{f}_j \quad (4.3.4)$$

$$\begin{aligned} \partial_{kj}^2 (e^{\xi B} H) &= \partial_k (\partial_j (e^{\xi B} H)) = \partial_k \left(\xi (\partial_j B) e^{\xi B} H + \hat{f}_j \right) \\ &= \xi^2 e^{\xi B} H \left[(\partial_j B) (\partial_k B) + \frac{1}{\xi} \partial_k (\partial_j B) \right] + \xi \left[\hat{f}_k \partial_j B + \frac{1}{\xi} \partial_k \hat{f}_j \right] \end{aligned}$$

mais geralmente temos o seguinte resultado:

Lema 4.6. *Seja $\xi \neq 0$. Para cada par $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$ tal que $\alpha + \beta \geq 1$ vale a expressão*

$$\partial^{(\alpha, \beta)} (e^{\xi B} H) = \xi^{\alpha+\beta} e^{\xi B} H F_{(\alpha, \beta)} + \xi^{\alpha+\beta-1} G_{(\alpha, \beta)} \quad (4.3.5)$$

para H definida em (4.3.1), com

$$F_{(p, q)+e_j} = \begin{cases} \partial_j B & \text{se } p+q=0 \\ (\partial_j B) F_{(p, q)} + \frac{1}{\xi} \partial_j F_{(p, q)} & \text{se } p+q \geq 1 \end{cases}$$

e

$$G_{(p, q)+e_j} = \begin{cases} \hat{f}_j & \text{se } p+q=0 \\ \hat{f}_j F_{(p, q)} + \frac{1}{\xi} \partial_j G_{(p, q)} & \text{se } p+q \geq 1 \end{cases}$$

Demonstração: Os casos $\alpha + \beta = 1, 2$ foram verificados acima. Vamos completar a prova usando indução sobre a ordem das derivadas.

$$\begin{aligned} \partial^{(\alpha, \beta)+e_j} (e^{\xi B} H) &= \partial_j [\partial^{(\alpha, \beta)} (e^{\xi B} H)] = \partial_j [\xi^{\alpha+\beta} e^{\xi B} H F_{(\alpha, \beta)} + \xi^{\alpha+\beta-1} G_{(\alpha, \beta)}] \\ &= \xi^{\alpha+\beta} \partial_j (e^{\xi B} H) F_{(\alpha, \beta)} + \xi^{\alpha+\beta} e^{\xi B} H \partial_j F_{(\alpha, \beta)} + \xi^{\alpha+\beta-1} \partial_j G_{(\alpha, \beta)} \\ &= \xi^{\alpha+\beta} \left[\xi (\partial_j B) e^{\xi B} H + \hat{f}_j \right] F_{(\alpha, \beta)} + \xi^{\alpha+\beta} e^{\xi B} H \partial_j F_{(\alpha, \beta)} + \xi^{\alpha+\beta-1} \partial_j G_{(\alpha, \beta)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \xi^{\alpha+\beta+1} \left[F_{(\alpha,\beta)} \partial_j B + \frac{1}{\xi} \partial_j F_{(\alpha,\beta)} \right] e^{\xi B} H + \xi^{\alpha+\beta} \left[F_{(\alpha,\beta)} \hat{f}_j + \frac{1}{\xi} \partial_j G_{(\alpha,\beta)} \right] \\
&= \xi^{\alpha+\beta+1} F_{(\alpha,\beta)+e_j} e^{\xi B} H + \xi^{\alpha+\beta} G_{(\alpha,\beta)+e_j}
\end{aligned}$$

o que conclui a prova do lema. ■

No lema acima é importante observar que o termo $F_{(\alpha,\beta)}$ depende apenas das derivadas de B e de potências negativas de ξ , portanto $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$ fixado teremos $F_{(\alpha,\beta)}$ limitado.

Já o termo $G_{(\alpha,\beta)}$ depende de B , \hat{f}_1 e \hat{f}_2 e de suas derivadas (todas de ordem menor que $\alpha + \beta$) e também de potências negativas de ξ .

Como $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^3)$ então, para cada $(p, q) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$ e $N > 0$ dados, existe uma constante $K_{(p,q)}$ tal que

$$\left| \partial^{(p,q)} \hat{f}_j(t, \xi) \right| \leq \frac{K_{(p,q)}}{(1 + |\xi|)^N}, \quad \xi \in \mathbb{Z}, \quad t \in \mathbb{T}^2 \text{ e } j = 1, 2$$

tomando $C_{(\alpha,\beta)} = \max\{K_{(p,q)}; p + q \leq \alpha + \beta\}$ teremos

$$\left| \partial^{(p,q)} \hat{f}_j(t, \xi) \right| \leq \frac{C_{(\alpha,\beta)}}{(1 + |\xi|)^N} \tag{4.3.6}$$

para qualquer $\xi \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{T}^2$, $j = 1, 2$ e $(p, q) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$ com $p + q \leq \alpha + \beta$.

Analogamente, usando o fato que as derivadas de B são funções periódicas, obtemos uma constante $\tilde{C}_{(\alpha,\beta)} > 0$ tal que

$$\left| \partial^{(p,q)} B \right| \leq \tilde{C}_{(\alpha,\beta)} \tag{4.3.7}$$

para qualquer $\xi \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{T}^2$, $j = 1, 2$ e $(p, q) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$ com $p + q \leq \alpha + \beta$.

Como $G_{(\alpha,\beta)}$ é uma soma finita de parcelas, cada uma limitada “uniformemente” acima, denotando por $N_{(\alpha,\beta)}$ o número de parcela teremos:

$$|G_{(\alpha,\beta)}| \leq N_{(\alpha,\beta)} \tilde{C}_{(\alpha,\beta)} \frac{C_{(\alpha,\beta)}}{(1 + |\xi|)^N} = \frac{C_{(\alpha,\beta)}}{(1 + |\xi|)^N} \tag{4.3.8}$$

Para o termo $e^{\xi B} H$ temos o seguinte resultado.

Lema 4.7. Para cada $N \in \mathbb{N}$ dado existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left| \int_{\gamma(t,\xi)} \omega \right| \leq \frac{C}{(1 + |\xi|)^N}$$

com $\omega(\sigma, \xi) = e^{-\xi[B(\gamma(\sigma)) - B(\gamma(s))]} \hat{f}(\gamma(\sigma), \xi) \gamma'(\sigma)$.

Aqui $\gamma(t, \xi)$ é um dos caminhos obtido nos teoremas (4.3) ou (4.4) e a escolha do caminho correto depende do sinal de ξ .

Prova: Se $\xi < 0$ segue do lema (4.3) que $-\xi(B(\tau) - B(t)) \leq \frac{-\xi}{|\xi| + 1} \log 0$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \omega d\tau \right| &= \left| \int_{\gamma_{[0,s]}} e^{-\xi[B(\tau) - B(t)]} \hat{f}(\tau, \xi) d\tau \right| \\ &\leq \left(\sup_{\tau \in \gamma(t,\xi)} |e^{-\xi[B(\tau) - B(t)]} \hat{f}(\tau, \xi)| \right) |\gamma(t, \xi)| \\ &\leq \left(\sup_{\tau \in \gamma(t,\xi)} \left| e^{-\xi \frac{1}{1+|\xi|}} \hat{f}(\tau, \xi) \right| \right) C(1 + |\xi|) \\ &\leq e \left(\sup_{\tau \in \gamma(t,\xi)} |\hat{f}(\tau, \xi)| \right) C(1 + |\xi|) \\ &\leq e C' (1 + |\xi|)^{-(N+1)} C(1 + |\xi|) \\ &\leq C(1 + |\xi|)^{-N} \end{aligned}$$

Por outro lado, se $\xi > 0$ pelo lema (4.4) temos $-\xi(B(\tau) - B(t)) \leq \frac{\xi}{|\xi| + 1}$ para todo $\tau \in \gamma(t, \xi)$ e a estimativa acima continua verdadeira. ■

Como estamos interessados em analisar o crescimento das expressões (4.1.9) e (4.1.10), para completar nossa lista de estimativas que precedem a demonstração do teorema principal precisamos analisar o comportamento do termo $(e^{\xi b_{10}} - 1)^{-1}$ que aparece na expressão de $\hat{u}(t, \xi)$.

Lema 4.8. Existe uma constantes $C > 0$ tal que

$$0 < C^{-1} \leq |e^{\xi b_{10}} - 1| \leq C < \infty, \quad \forall \xi \in \mathbb{N}$$

Prova: Como $b_{10} < 0$ então $\xi b_{10} < b_{10} < 0$, $\forall \xi \in \mathbb{N}$ logo

$$|e^{\xi b_{10}} - 1| \leq e^{\xi b_{10}} + 1 \leq e^{b_{10}} + 1 < \sum_{k=0}^{\infty} (e^{b_{10}})^k = (1 - e^{b_{10}})^{-1}$$

Por outro lado, como $b_{10} < 0$ e $\xi \geq 1$ então $\xi b_{10} < b_{10} < 0$, $\forall \xi \in \mathbb{N}$, logo $e^{\xi b_{10}} < e^{b_{10}} < 1 \Rightarrow 1 - e^{\xi b_{10}} > 1 - e^{b_{10}} > 0$ e assim

$$|1 - e^{\xi b_{10}}| > 1 - e^{b_{10}}, \quad \forall \xi \in \mathbb{N}$$

Tomando $C = (1 - e^{b_{10}})^{-1}$ teremos o resultado desejado. ■

Definição 4.9. Dizemos que o sistema \mathbb{L}^0 é globalmente resolúvel (GR) no sentido clássico se para cada $f \in \mathbb{E}$ existir uma função $u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ tal que $\mathbb{L}^0 u = f$ em \mathbb{T}^2 .

Recordamos que aqui $\mathbb{E} = \left\{ f \in \Lambda^1 C^\infty(\mathbb{T}^3); \mathbb{L}^1 f = 0 \text{ e } \hat{f}_{10} = \hat{f}_{20} = 0 \right\}$ é o espaço das funções admissíveis para a resolubilidade do sistema \mathbb{L}^0 .

Teorema 4.10. Seja $b \in \Lambda^1 C^\infty(\mathbb{T}^2)$ fechada com períodos incomensuráveis e $B(t) = \int_0^t \Pi^* b$. Suponha que $b_{10} < 0$ e que os conjuntos de subnível $\Omega_r = \{\tau \in \mathbb{R}^2; B(\tau) < r\}$ e de supernível $\Omega^r = \{\tau \in \mathbb{R}^2; B(\tau) > r\}$ sejam conexos, para todo $r \in \mathbb{R}$. Então o sistema $\mathbb{L}^0 = d_t + ib(t) \wedge \partial_x$ é (GR) no sentido clássico.

Demonstração: Basta mostrar que os coeficientes $\hat{u}(t, \xi)$ decaem rapidamente. Primeiro notemos que dado $N > 0$ pelos lemas (4.7) e (4.8) temos

$$|\hat{u}(t, \xi)| \leq \left| \int_{t_0}^t \omega d\tau \right| + \frac{1}{|e^{\xi b_{10}} - 1|} \left| \int_{t_0}^{t_0 + (2\pi, 0)} \omega d\tau \right| \leq \frac{C}{(1 + |\xi|)^N}, \quad \text{para } \xi > 0$$

analogamente

$$|\hat{u}(t, \xi)| \leq \left| \int_{t_0}^t \omega d\tau \right| + \frac{1}{|e^{-\xi b_{10}} - 1|} \left| \int_{t_0}^{t_0 - (2\pi, 0)} \omega d\tau \right| \leq \frac{C}{(1 + |\xi|)^N}, \quad \text{para } \xi < 0$$

e quando $\int_0^{2\pi} \hat{f}(\gamma(\sigma), 0) \gamma'(\sigma) d\sigma = 0$, temos

$$|\hat{u}(\gamma(s), 0)| \leq \int_0^{2\pi} \left| \hat{f}(\gamma(\sigma), 0) \gamma'(\sigma) \right| d\sigma + |K_0| = C$$

Agora, quando $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$ tal que $\alpha + \beta \geq 1$ segue do lema (4.6) que

$$\begin{aligned}
 |\partial^{(\alpha, \beta)} \hat{u}(t, \xi)| &\leq |\xi|^{\alpha + \beta} \left| \int_{t_0}^t \omega \right| |F_{(\alpha, \beta)}| + |\xi|^{\alpha + \beta - 1} |G_{(\alpha, \beta)}| \\
 &\leq |\xi|^{\alpha + \beta} \frac{C_{(\alpha, \beta), N}}{(1 + |\xi|)^{N + \alpha + \beta}} C'_{(\alpha, \beta)} + |\xi|^{\alpha + \beta - 1} \frac{C''_{(\alpha, \beta), N}}{(1 + |\xi|)^{N + \alpha + \beta - 1}} \\
 &\leq \frac{C}{(1 + |\xi|)^N}
 \end{aligned}$$

$\forall \xi \neq 0, t \in [0, 2\pi]^2$ e $N > 0$. O que conclui a demonstração. ■

Capítulo 5

Subníveis Desconexos e a não-Resolubilidade Global

Neste capítulo demonstramos que a condição enunciada no teorema (1.5) é necessária, isto é, que uma condição necessária para que \mathbb{L}^0 seja globalmente resolúvel é que todos os conjuntos de subnível Ω_r e de supernível Ω^r de B sejam conexos.

Na seção (4.1) mostramos que numa situação bastante conveniente, a qual chamamos de *caso modelo*, se algum subnível (ou supernível) de B não for conexo então existirá $f \in \bigwedge^1 \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^3)$, satisfazendo as condições de compatibilidade (1.4.1), para a qual não existe $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^3)$ solução de $\mathbb{L}^0 u = f$.

Na seção (4.2) mostramos que o caso geral pode ser reduzido ao caso modelo através de difeomorfismos do toro.

Os resultados deste capítulo foram inspirados nos artigos *Global Analytic Hypoellipticity for a Class of Overdetermined Systems* e *Global Analytic Hypoellipticity and Pseudoperiodic Functions* de Bergamasco-Nunes-Zani citados nas referências bibliográficas.

5.1 O Caso Modelo

Chamaremos de caso modelo ao sistema \mathbb{L}^0 que satisfaz as seguintes condições: $b_{20} < b_{10} < 0$ e $b(0,0) = 0$. Além disto, $(0,0) \in \Pi^{-1}(\Sigma)$ e o máximo da função pseudoperiódica $B(t) = \int_0^t \Pi^* b$ sobre $[0, 2\pi]^2$ não é atingido na fronteira. Neste caso os subníveis são conexos devido a Proposição 3.11.

Nesta seção mostraremos que o caso modelo não é globalmente resolúvel apresentando uma 1-forma $f \in \bigwedge^1 \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^3)$ satisfazendo as condições de compatibilidade tal que não existe $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^3)$ solução do sistema $\mathbb{L}^0 u = f$.

A primeira dificuldade que enfrentamos é justamente como encontrar um par de funções $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^3)$ tais que $f = f_1 dt_1 + f_2 dt_2$ satisfaça as condições: $\mathbb{L}^1 f = 0$ e $\hat{f}_{10}(0) = \hat{f}_{20}(0) = 0$.

Como $\mathbb{L}^1 f = 0 \Leftrightarrow L_1 f_2 = L_2 f_1$, o plano é começar com uma função $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^3)$ e usar a relação

$$h := L_1 f_2 = L_2 f_1 \tag{5.1.1}$$

para encontrar os coeficientes parciais de Fourier de funções f_1 e f_2 que ainda sejam suaves sobre o toro \mathbb{T}^3 . Supondo que o sistema $\mathbb{L}^0 u = f$ tem solução poderemos igualmente encontrar os coeficientes parciais de Fourier $\hat{u}(t, \xi)$, com $\xi \in \mathbb{Z}$. A contradição surgirá do fato que tal seqüência não corresponderá a nenhuma distribuição definida sobre \mathbb{T}^3 .

Começamos substituindo as séries formais

$$h(t, x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\xi=1}^{\infty} \hat{h}(t, \xi) e^{i\xi x} \quad \text{e} \quad f_j(t, x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\xi=1}^{\infty} \hat{f}_j(t, \xi) e^{i\xi x}, \quad j = 1, 2$$

nas equações $L_1 f_2 = h$ e $L_2 f_1 = h$. Pela continuidade de L_j e unicidade de representação em séries parciais de Fourier obtemos, para cada $\xi \in \mathbb{N}$, as equações

$$\left(\frac{d}{dt_j} - \xi b_j(t) \right) \hat{f}_k = \hat{h}, \quad \text{com } 1 \leq j, k \leq 2, j \neq k$$

Como $b_{10} \neq 0$ e $b_{20} \neq 0$, cada uma destas equações admite uma única solução 2π -periódica, dada por

$$\hat{f}_1(t, \xi) = d_{2\xi} \int_0^{2\pi} e^{\xi\{B(t)-B(t_1, t_2-s_2)\}} \hat{h}(t_1, t_2 - s_2, \xi) ds_2 \quad (5.1.2)$$

$$\hat{f}_2(t, \xi) = d_{1\xi} \int_0^{2\pi} e^{\xi\{B(t)-B(t_1-s_1, t_2)\}} \hat{h}(t_1 - s_1, t_2, \xi) ds_1 \quad (5.1.3)$$

com $d_{j\xi} = \frac{1}{1 - e^{2\pi\xi b_{j0}}}$, para $j = 1, 2$ e $\xi \in \mathbb{N}$.

Analogamente, substituindo a série formal

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\xi \in \mathbb{N}} \hat{u}(t, \xi) e^{i\xi x}$$

em $L_j u = f_j$ chegaremos as equações $(d/dt_j - \xi b_j(t))\hat{u} = \hat{f}_j$, com $j = 1, 2$, cuja única solução, para cada $\xi \in \mathbb{N}$, é

$$\hat{u}(t, \xi) = d_{1\xi} d_{2\xi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\xi\{B(t)-B(t-s)\}} \hat{h}(t-s, \xi) ds_1 ds_2 \quad (5.1.4)$$

Retornando ao caso modelo, recordamos que o máximo de $B(t)$ sobre $[0, 2\pi]^2$ não é atingido na fronteira. Como B é contínua em $[0, 2\pi]^2$ então este máximo deverá ser atingido num ponto $t^* \in (0, 2\pi)^2$. Mas $B(0, 0) = 0$ logo $B(t^*) = M > 0$. Resumindo:

$$M = \max_{t \in [0, 2\pi]^2} B(t) = B(t^*) > 0 \quad \text{com } t^* = (t_1^*, t_2^*) \in (0, 2\pi)^2 \quad (5.1.5)$$

Os pontos da forma $(t_1, 0)$ e $(0, t_2)$, com $t_1, t_2 \in [0, 2\pi]$, estão na fronteira de $[0, 2\pi]^2$ e o máximo de B neste quadrado não ocorre na fronteira. Logo se pusermos

$$M' = \max_{t_1 \in [0, 2\pi]} B(t_1, 0) \quad \text{e} \quad M'' = \max_{t_2 \in [0, 2\pi]} B(0, t_2) \quad (5.1.6)$$

teremos $0 \leq M' < M$ e $0 \leq M'' < M$.

Para construir a função h anunciada em (5.1.1) precisamos definir algumas funções auxiliares. Começamos escolhendo uma função de corte $\chi_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$

tal que:

$$\begin{aligned}\chi_\varepsilon(t) &= 1 \quad \text{se } t \in Q_\varepsilon \\ \chi_\varepsilon(t) &= 0 \quad \text{se } t \in \mathbb{R}^2 \setminus Q_{2\varepsilon} \\ 0 &\leq \chi_\varepsilon(t) \leq 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}^2\end{aligned}$$

aqui $Q_\varepsilon = \{\tau \in \mathbb{R}^2; |\tau_j| < \varepsilon, j = 1, 2\}$ é o quadrado de lado 2ε centrado na origem e $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{3}$ é suficientemente pequeno para que

$$|B(t)| \leq \frac{M}{2}, \quad \forall t \in Q_{2\varepsilon} \quad (5.1.7)$$

Agora, definimos as funções

$$p(t) := \sum_{\eta \in 2\pi\mathbb{Z}^2} B(t - \eta) \cdot \chi_\varepsilon(t - \eta), \quad \forall t \in \mathbb{R}^2 \quad (5.1.8)$$

$$q(t) := \sum_{\eta \in 2\pi\mathbb{Z}^2} (|t - \eta|^2 - 1) \cdot \chi_\varepsilon(t - \eta) + 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}^2 \quad (5.1.9)$$

as quais são 2π -periódicas e de classe \mathcal{C}^∞ em \mathbb{R}^2 .

Finalmente definimos

$$\hat{h}(t, \xi) = \begin{cases} e^{-\xi(M - \lambda + P(t) + Kq(t))}, & \text{se } \xi \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \\ 0, & \text{se } \xi \in \mathbb{Z}_{\leq 0} \end{cases} \quad (5.1.10)$$

com $M = B(t^*) > 0$ e os valores $\lambda > 0$ e $K > 0$ serão escolhidos adiante.

Levando os coeficientes $\hat{h}(t, \xi)$ definidos acima nas fórmulas (5.1.2), (5.1.3) e (5.1.4) obtemos:

$$\hat{f}_1(t, \xi) = d_{2\xi} \int_0^{2\pi} e^{\xi\{B(t) - B(t_1, t_2 - s_2) - Kq(t_1, t_2 - s_2) + p(t_1, t_2 - s_2) - \lambda + M\}} ds_2 \quad (5.1.11)$$

$$\hat{f}_2(t, \xi) = d_{1\xi} \int_0^{2\pi} e^{\xi\{B(t) - B(t_1 - s_1, t_2) - Kq(t_1 - s_1, t_2) + p(t_1 - s_1, t_2) - \lambda + M\}} ds_1 \quad (5.1.12)$$

$$\hat{u}(t, \xi) = d_{1\xi} d_{2\xi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\xi\{B(t) - B(t - s) - Kq(t) + p(t) - \lambda + M\}} ds_1 ds_2 \quad (5.1.13)$$

Observação 5.1. Para concluir que $h, f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^3)$. Devemos mostrar que os coeficientes parciais de Fourier (5.1.10), (5.1.11), (5.1.12) e todas as suas derivadas tendem a zero rapidamente quando $\xi \rightarrow +\infty$.

Como $\hat{h}(\cdot, \xi)$, $\hat{f}_1(\cdot, \xi)$ e $\hat{f}_2(\cdot, \xi)$ são funções periódicas e suaves para $\xi \geq 1$, basta provar que esta convergência ocorre num quadrado de lado 2π qualquer. Sendo assim, optamos por trabalhar com

$$Q^* = -\frac{1}{2}t^* + [0, 2\pi]^2$$

recordando que $t^* \in (0, 2\pi)^2$ é tal que $B(t^*) = M$. Caso seja necessário, diminuiremos ε para que $Q_{2\varepsilon} \subset \text{int}(Q^*)$.

Neste quadrado as expressões de p e q assumem a forma mais simples:

$$p(t) = B(t) \cdot \chi_\varepsilon(t), \quad \forall t \in Q^* \quad (5.1.14)$$

$$q(t) = (|t|^2 - 1) \cdot \chi_\varepsilon(t) + 1, \quad \forall t \in Q^* \quad (5.1.15)$$

Lema 5.2. $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^3)$

Prova: Vamos chamar $\psi(t) = M + Kq(t) + p(t)$. Então em $Q^* \setminus Q_{2\varepsilon}$ temos $\chi_\varepsilon \equiv 0 \Rightarrow \psi = M + K \geq M/2$. Em Q_ε temos $\chi_\varepsilon \equiv 1$ e $|B(t)| \leq M/2$ logo $\psi(t) = M + K|t|^2 - B(t) \geq M - B(t) \geq M/2$. E em $Q_{2\varepsilon} \setminus Q_\varepsilon$ sabemos apenas que $|p(t)| \leq M/2$ e $q(t) \geq 0$. Portanto $\psi(t) = M + Kq(t) - p(t) \geq M - p(t) \geq M/2$.

Assim $\psi(t) \geq M/2, \forall t \in Q^*$. Tomando $\lambda < \frac{M}{4}$ teremos $\xi(\psi(t) - \lambda) > \xi \frac{M}{4}$ para $\xi \geq 1$ e

$$|\hat{h}(t, \xi)| = e^{-\xi(\psi(t) - \lambda)} < e^{-\xi \frac{M}{4}}, \quad \forall \xi \geq 1 \text{ e } t \in Q^* \quad (5.1.16)$$

Agora, se $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ então

$$\partial^{(\alpha, \beta)} \hat{h}(t, \xi) = \hat{h}(t, \xi) P(\xi, \alpha, \beta)$$

onde $P(\xi, \alpha, \beta)$ é uma expressão polinomial envolvendo apenas potências de ξ (até a ordem $\alpha + \beta$) e derivadas de ψ , as quais são limitadas. Logo existe uma constante $C_{\alpha, \beta}$ tal que

$$|P(\xi, \alpha, \beta)| \leq C_{\alpha, \beta} \xi^{\alpha + \beta}, \quad \forall \xi \geq 1$$

Daqui segue que

$$|\partial^{(\alpha,\beta)} \hat{h}(t, \xi)| = |\hat{h}(t, \xi)| |P(\xi, \alpha, \beta)| \leq C_{\alpha,\beta} \xi^{\alpha+\beta} e^{-\xi \frac{M}{4}}$$

e portanto $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^3)$. ■

Lema 5.3. *Se $\varphi(t, s) := B(t) - B(t - s) - M - Kq(t - s) - p(t - s)$, então*

$$\varphi(t, s) \leq 0, \quad \forall t, s \in \mathbb{R}^2$$

Prova: Se $t - s \in Q_\varepsilon$, temos $\chi_\varepsilon(t - s) = 1$ e $\varphi(t, s) = B(t) - M - K|t - s|^2 \leq 0$.
E se $t - s \in Q^* \setminus Q_\varepsilon$ temos $|t - s|^2 > \varepsilon^2$. Agora podemos escolher um K suficientemente grande para que

$$B(t) - B(t - s) - M - p(t - s) < K\varepsilon^2, \quad \forall (t - s) \in Q^* \setminus Q_\varepsilon$$

pois $B(t) - B(t - s) - M - p(t - s)$ é contínua sobre o compacto $Q^* \setminus Q_\varepsilon$.

Daqui segue que $\varphi(t, s) < 0, \forall (t - s) \in Q^* \setminus Q_\varepsilon$. ■

Corolário 5.4. $\varphi(t, s) = 0 \Leftrightarrow t = s = t^*$

Prova: Na demonstração acima obtivemos $\varphi(t, s) < 0, \forall (t - s) \in Q^* \setminus Q_\varepsilon$.
No quadrado Q_ε temos $\varphi(t, s) = B(t) - M - K|t - s|^2$. Logo $\varphi(t, t^*) = B(t) - M - K|t - t^*|^2 < B(t) - M < 0, \forall t \neq t^*$ e $\varphi(t^*, s) = -K|t^* - s| < 0, \forall s \neq t^*$. Como $\varphi(t^*, t^*) = 0$, segue o resultado. ■

Lema 5.5. *Existe $k > 1$ tal que $k^{-1} < |d_{j\xi}| < k, \forall \xi \in \mathbb{N}$ e $j = 1, 2$.*

A prova deste lema é análoga a prova de (4.8).

Proposição 5.6. $f_1 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^3)$

Prova: Na fórmula (5.1.11) aparece no expoente a seguinte função:

$$\varphi(t_1, t_2, 0, s_2) = B(t_1, t_2) - B(t_1, t_2 - s_2) - M - Kq(t_1, t_2 - s_2) - p(t_1, t_2 - s_2)$$

O termo $q(t_1, t_2 - s_2) = 0 \Leftrightarrow t_1 = 0, t_2 = s_2$ e neste ponto temos

$$\varphi(0, t_2, 0, t_2) = B(0, t_2) - M \leq M'' - M$$

Como $q(0, 0) = 0$, $\nabla q(0, 0) = (0, 0)$ e $\det Hq(0, 0) = 4 > 0$ então existem $K > 0$ e $\delta \in (0, \varepsilon)$ tais que

$$\varphi(t, s) = B(t) - B(t - s) - M - Kq(t - s) - p(t - s) \leq M'' - M$$

para todo $t, s \in Q^*$ tais que $|t - s| < \delta$.

Nos pontos $t, s \in Q^*$ que satisfazem $|t - s| \geq \delta$ temos $|t - s|^2 \geq \delta^2 > 0$. Aumentando K , caso seja necessário, conseguimos que

$$B(t) - B(t - s) - p(t - s) \leq K\delta^2$$

logo

$$\begin{aligned} \varphi(t_1, t_2, 0, s_2) &\leq K\delta^2 - M - Kq(t_1, t_2 - s_2) \\ &\leq K\delta^2 - M - K\{|t - s|^2 - 1\}\chi_\varepsilon(t - s) + 1\} \\ &\leq K\delta^2 - M - K[(\delta^2 - 1) + 1] \\ &= -M < M'' - M \end{aligned}$$

e portanto

$$\varphi(t, s) \leq M'' - M, \quad \forall t, s \in Q^* \text{ com } s_1 = 0$$

Voltando a fórmula (5.1.11) que fornece os coeficientes $\hat{f}_1(t, \xi)$, teremos

$$\begin{aligned} |\hat{f}_1(t, \xi)| &\leq |d_{2\xi}| \int_0^{2\pi} e^{\xi\{\varphi(t_1, t_2, 0, s_2) + \lambda\}} ds_2 \\ &\leq k \int_0^{2\pi} e^{\xi\{M'' - M + \lambda\}} ds_2 \\ &\leq 2k\pi e^{\xi\{M'' - M + \lambda\}} \end{aligned}$$

agora diminuimos λ , caso seja necessário, para que $\lambda < \frac{1}{2}(M - M'')$ e assim

$$|\hat{f}_1(t, \xi)| \leq 2k\pi e^{\xi \frac{M'' - M}{2}}, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \text{ e } t \in Q^*$$

Finalmente

$$\begin{aligned} |\partial^{(\alpha, \beta)} \hat{f}_1(t, \xi)| &\leq |d_{2\xi}| e^{\xi\lambda} \int_0^{2\pi} |\partial^{(\alpha, \beta)} e^{\xi\varphi(t_1, t_2, 0, s_2)}| ds_2 \\ &\leq k e^{\xi\lambda} \int_0^{2\pi} e^{\xi\varphi(t_1, t_2, 0, s_2)} |P(\xi, \alpha, \beta)| ds_2 \end{aligned}$$

aqui $P(\xi, \alpha, \beta)$ é uma expressão polinomial envolvendo potências de ξ (até a ordem $\alpha + \beta$) e derivadas de φ , as quais são todas limitadas. Portanto, para cada $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$, existe uma constante $C_{\alpha, \beta}$ tal que

$$|P(\xi, \alpha, \beta)| \leq C_{\alpha, \beta} \xi^{\alpha + \beta}, \quad \forall \xi \geq 1$$

logo

$$\begin{aligned} |\partial^{(\alpha, \beta)} \hat{f}_1(t, \xi)| &\leq k C_{\alpha, \beta} \xi^{\alpha + \beta} e^{\xi \lambda} \int_0^{2\pi} e^{\xi \varphi(t_1, t_2, 0, s_2)} ds_2 = k C_{\alpha, \beta} \xi^{\alpha + \beta} |\hat{f}_1(t, \xi)| \\ &\leq k C_{\alpha, \beta} \xi^{\alpha + \beta} 2k\pi e^{\xi \frac{M'' - M}{2}} = C'_{\alpha, \beta} \xi^{\alpha + \beta} e^{\xi \frac{M'' - M}{2}} \end{aligned}$$

Daqui segue que $f_1(t, x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\xi=1}^{\infty} \hat{f}_1(t, \xi) e^{i\xi x} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^3)$ ■

Proposição 5.7. $f_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^3)$

Prova: Usando os mesmos argumentos e contas da proposição anterior é possível mostrar que

$$\varphi(t, s) \leq M' - M, \quad \forall t, s \in Q^* \text{ com } s_2 = 0$$

Diminuindo λ , para que tenhamos $\lambda < \frac{1}{2}(M - M')$ e aumentando K , caso seja necessário, teremos

$$|\hat{f}_2(t, \xi)| \leq 2k\pi e^{\xi \frac{M' - M}{2}}, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \text{ e } t \in Q^*$$

Analisando as derivadas de $\hat{f}_2(t, \xi)$ concluiremos que $f_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^3)$. ■

O próximo passo é mostrar que a seqüência $\{\hat{u}(t, \xi)\}$ definida em (5.1.13) não pertence a nenhuma distribuição periódica. Para isto, precisaremos analisar melhor o comportamento de $\hat{u}(t^*, \xi)$. Neste ponto temos $B(t^*) = M$ e $\varphi(t^*, t^*) = 0$.

Começamos reescrevendo os coeficientes da expressão (5.1.13) na seguinte forma:

$$\hat{u}(t^*, \xi) = d_{1\xi} d_{2\xi} (I_\xi + J_\xi)$$

com

$$J_\xi = \iint_{|t^*-s| \geq \varepsilon} e^{\xi(\varphi(t^*,s)+\lambda)} ds_1 ds_2 \quad \text{e} \quad I_\xi = \iint_{|t^*-s| < \varepsilon} e^{\xi(\varphi(t^*,s)+\lambda)} ds_1 ds_2$$

Lema 5.8. *A integral J_ξ decai exponencialmente quando $\xi \rightarrow \infty$.*

Prova: Se $|t^* - s| \geq \varepsilon$ então

$$\begin{aligned} \varphi(t^*, s) &= B(t^*) - B(t^* - s) - M - K|t^* - s|^2 - p(t^* - s) \\ &\leq -B(t^* - s) - K\varepsilon^2 - p(t^* - s) \leq -m - K\varepsilon^2 \end{aligned}$$

com $m = \min_{|t^*-s| \geq \varepsilon} |B(t^* - s) + p(t^* - s)|$.

Agora podemos aumentar K para garantir que $-(m + K\varepsilon^2) < 0$ e diminuir λ para que $\lambda < \frac{1}{2}(m + K\varepsilon^2)$ assim

$$0 \leq J_\xi \leq 4\pi^2 e^{\frac{1}{2}\xi(-m-K\varepsilon^2)} \quad \blacksquare$$

Este lema diz basicamente que não precisamos nos preocupar com J_ξ , toda a informação que precisamos está concentrada próximo da origem, em $|t^* - s| < \varepsilon$.

Para avaliar o comportamento da integral I_ξ começamos observando que na região $|t^* - s| < \varepsilon$ temos $\chi_\varepsilon(t^* - s) = 1$, logo $\varphi(t^*, s) = -K|t^* - s|^2$ e temos

$$I_\xi = e^{\xi\lambda} \iint_{|t^*-s| < \varepsilon} e^{-\xi K|t^*-s|^2} ds_1 ds_2$$

Fazendo a mudança de variáveis $\sigma = \sqrt{\xi K} (t^* - s)$ obtemos

$$I_\xi = \frac{e^{\xi\lambda}}{\xi K} \iint_{|\sigma| < \varepsilon\sqrt{\xi K}} e^{-|\sigma|^2} d\sigma_1 d\sigma_2$$

Portanto

$$I_\xi = C(\xi) e^{\xi\lambda} \frac{1}{\xi K} \quad \text{com} \quad C(\xi) = \iint_{|\sigma| < \varepsilon\sqrt{\xi K}} e^{-|\sigma|^2} d\sigma_1 d\sigma_2$$

Observe que $\varepsilon\sqrt{K} \leq \varepsilon\sqrt{\xi K} < \infty$, $\forall \xi \geq 1$ e $K > 0$ logo a seqüência $\{C(\xi)\}$ é crescente e

$$C(1) = \iint_{|\sigma| < \varepsilon\sqrt{K}} e^{-|\sigma|^2} d\sigma_1 d\sigma_2 \leq C(\xi) \leq \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-|\sigma|^2} d\sigma_1 d\sigma_2 = \pi$$

portanto

$$C(1) e^{\xi\lambda} \frac{1}{\xi K} \leq I_\xi \leq \pi e^{\xi\lambda} \frac{1}{\xi K} \quad (5.1.17)$$

Como $\lambda, K, C(1) > 0$ então existe $\xi_0 \geq 1$ tal que $C(1)(\xi K)^{-1} \exp(\xi \frac{\lambda}{2}) \geq 1$, $\forall \xi \geq \xi_0$ logo

$$I_\xi \geq e^{\xi \frac{\lambda}{2}}, \quad \forall \xi \geq \xi_0$$

segue dos lemas (5.5) e (5.8) que

$$\hat{u}(t^*, \xi) = d_{1\xi} d_{2\xi} (I_\xi + J_\xi) \geq k^{-2} I_\xi \geq k^{-2} e^{\xi \frac{\lambda}{2}}, \quad \forall \xi \geq \xi_0$$

como $\hat{u}(t^*, \xi)$ cresce mais que qualquer polinômio em ξ , então esta seqüência não pode corresponder a nenhuma distribuição periódica definida em \mathbb{T}^3 .

5.2 Redução ao Caso Modelo

Seja $b \in \wedge^1 \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^2)$ fechada com períodos b_{10} e b_{20} incomensuráveis e suponha que a função pseudoperiódica $B(t) = \int_0^t \Pi^* b$ possua algum subnível ou supernível desconexo.

Nosso objetivo é mostrar que, após um número finito de difeomorfismos suaves do toro \mathbb{T}^2 , é possível transformar a situação geral acima no caso modelo, o qual possui as seguintes hipóteses:

$$(i) \quad b_{20} < b_{10} < 0$$

$$(ii) \quad b(0, 0) = 0 \text{ e } B(0, 0) = 0$$

$$(iii) \quad (0, 0) \in \Pi^{-1}(\Sigma)$$

$$(iv) \quad M = \max_{t \in [0, 2\pi]^2} B(t) = B(t^*) > 0 \text{ com } t^* \in (0, 2\pi)^2$$

Nossa hipótese é que B possui algum subnível ou supernível desconexo; segue da proposição (3.11) que B admite *traps*.

Seja T uma *trap* de B . Vamos tomar um ponto qualquer $t_0 \in \partial T$ e considerar o conjunto de nível $\mathcal{F}'(t_0)$, pela definição de *trap*, sabemos que $\mathcal{F}'(t_0)$ é um nível crítico ilimitado, $\partial T \subset \mathcal{F}'(t_0)$ e $T \subset \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{F}'(t_0)$.

Apenas para simplificar nossa prova, vamos supor que exista algum ponto $t \in T$ tal que $B(t) > B(t_0)$. Neste caso existirão superníveis desconexos Ω^r , com $r > B(t_0)$. No caso em que existem apenas subníveis desconexos, e todos os superníveis são conexos, a mudança de variáveis $(t, x) \mapsto (-t, -x)$ inverterá esta situação.

Para não sobrecarregar a notação, após cada mudança de variáveis vamos renomear as coordenadas de \mathbb{T}^2 novamente para $t = (t_1, t_2)$. Também usaremos esta mesma notação para as coordenadas em \mathbb{T}^2 .

Como $b_{20} \neq 0$ e $b_{10} \neq 0$, se ocorrer $b_{10} > 0$ usaremos o difeomorfismo $(t_1, t_2) \mapsto (-t_1, t_2)$ e se $b_{20} > 0$ usaremos $(t_1, t_2) \mapsto (t_1, -t_2)$. Finalmente se $b_{20} > b_{10}$ o difeomorfismo $(t_1, t_2) \mapsto (t_2, t_1)$ fará com que $b_{20} < b_{10} < 0$.

No restante desta seção, todos os difeomorfismos que usaremos preservarão os valores b_{10} e b_{20} .

No capítulo 2, mostramos que existe um novo sistema de coordenadas segundo o qual a reta $t_1 = 0$ intercepta exatamente uma vez cada componente ilimitada de conjunto de nível de B . Além disto a função $\beta(t_2) = B(0, t_2)$ é decrescente e existe $\delta > 0$ tal que $\mathcal{F}'(t) \cap \{|t_1| < \delta\}$ é constituído de um único arco de curva regular, $\forall t \in \{|t_1| < \delta\}$.

Como para todo $\tau \in \partial T$ temos $B(\tau) = B(t_0)$ e existem pontos $t \in T$ satisfazendo $B(t) > B(t_0)$ então pela compacidade de \bar{T} obtemos um ponto $t^\# \in \bar{T}$ tal que $B(t^\#) = \max_{\bar{T}} B(t) > B(t_0)$, conseqüentemente $t^\# \in T$.

Sejam t' e t'' os pontos em que $\mathcal{F}'(t_0)$ intercepta respectivamente $\{t_1 = 0\}$ e $\{t_1 = 2\pi\}$. Fazendo a translação $t \mapsto t - t'$ podemos supor que $\mathcal{F}'(t_0)$ intercepta $\{t_1 = 0\}$ exatamente na origem.

Também podemos supor que $B(0,0) = 0$, assim $B(t^\#) > 0$. Além disto, como b_{10} e b_{20} são negativos teremos $t'' = (2\pi, t_2'')$, com $-2\pi < t_2'' < 0$, pois B restrita a reta $t_1 = 2\pi$ é estritamente decrescente e $B(0, 2\pi) = 2\pi b_{10} < 0 = B(2\pi, t_2'') < 2\pi(b_{10} - B_{20}) = B(2\pi, 2\pi)$.

Pela proposição (3.3) e definição (3.1), obtemos uma seqüência de curvas normais $\{\mathcal{F}'(u_j)\}$, tal que $0 < B(u_j) < B(t_0) + \frac{1}{j} = \frac{1}{j}$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Tomando j_0 suficientemente grande para que $\frac{1}{j} < \frac{1}{2}B(t^\#)$ teremos

$$0 < B(u_j) < \frac{1}{2}B(t^\#), \quad \forall j \geq j_0$$

Como a *trap* T está contida na faixa $\{\delta < t_1 < 2\pi - \delta\}$ então existe um ponto crítico $P \in \partial\Omega^{B(t_0)} \cap \{\delta < t_1 < 2\pi - \delta\} \subset \mathcal{F}'(t_0)$. Caso contrário, se todos os pontos de $\partial\Omega^{B(t_0)} \cap \{\delta < t_1 < 2\pi - \delta\}$ fossem regulares então em cada um deles passaria um arco de curva regular e cada um deste pontos possuiria uma vizinhança folheada por arcos regulares de conjuntos de nível, todos pertencendo a níveis diferentes entre si. Donde concluímos que o trecho da fronteira de $\Omega^{B(t_0)}$ entre as retas $t_1 = 0$ e $t_1 = 2\pi$ é constituído de um único arco de curva regular, o que é absurdo.

Logo existe um ponto crítico $P \in \partial\Omega^{B(t_0)} \cap \{\delta < t_1 < 2\pi - \delta\}$. Como $B(P) = 0$, tomemos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno para que $B(t) < M/2$ para todo t no disco $D(P, \varepsilon)$.

A seguir tomamos uma curva normal $\mathcal{F}'(u_\#)$, com $j^\# \geq j_0$ que intercepte o disco $D(P, \varepsilon)$. Sejam P_α e P_ω respectivamente o primeiro e último pontos de interseção de $\mathcal{F}'(u_\#)$ com $D(P, \varepsilon)$, considerando a orientação natural que toda curva normal possui pelo fato de ser difeomorfa a \mathbb{R} .

Vamos construir uma curva suave λ , unindo $(0,0)$ a $(2\pi,0)$, da seguinte forma:

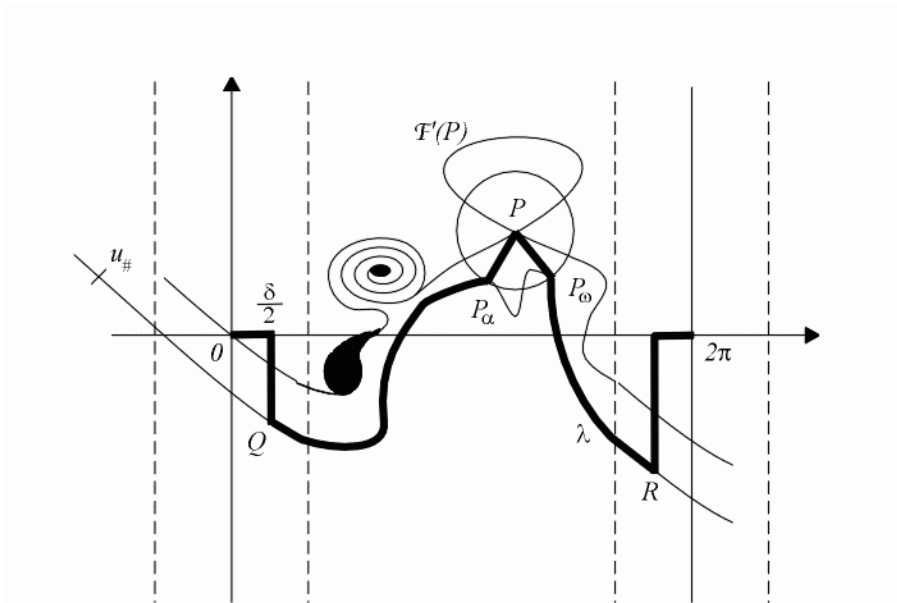


Figura 5.1: Tomando cuidado ao laçar a singularidade

- λ começa na origem e move-se horizontalmente até atingir o ponto $(0, \delta/2)$;
- desce verticalmente até atingir o ponto $Q = \mathcal{F}'(u_{\#}) \cap \{t_1 = \delta/2\}$;
- percorre o trecho de $\mathcal{F}'(u_{\#})$ entre Q e P_{α} ;
- segue o raio de $D(P, \varepsilon)$ entre P_{α} e P ;
- segue o raio de $D(P, \varepsilon)$ entre P e P_{ω} ;
- percorre o trecho de $\mathcal{F}'(u_{\#})$ entre P_{ω} e o ponto $R = \mathcal{F}'(u_{\#}) \cap \{t_1 = 2\pi - \delta/2\}$;
- sobe verticalmente até atingir o ponto $(2\pi - \delta/2, 0)$;
- segue horizontalmente até atingir o ponto $(2\pi, 0)$.

Fazendo uma pequena modificação em λ , obtemos uma nova $\lambda \in \mathcal{C}^{\infty}$. A projeção $\Pi(\lambda)$ desta curva no torto \mathbb{T}^2 é um 1-ciclo homotópico ao 1-ciclo canônico σ_1 , e coincide com σ_1 próximo da origem.

Pelo teorema 1.4, cap. 8, em [Hi], existe um difeomorfismo Φ do toro que manda $\Pi(\lambda)$ sobre σ_1 e coincide com a identidade numa vizinhança tubular, de raio $\delta/2$, de σ_2 ; preservando assim a transversalidade em $t_1 = 0$.

Nestas novas coordenadas obtemos $\delta_2 > 0$ tal que $B(t) < \frac{M}{2}$, para todo $t \in [0, 2\pi] \times (-\delta_2, \delta_2)$. Observe também que existe δ_3 tal que $B|_{t_1=\alpha}$ é decrescente, $\forall \alpha \in (-\delta_3, \delta_3)$.

Tomamos agora uma função $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suave e 2π -periódica tal que: $\theta(0) = p$, aqui $P = (p, 0)$, $\theta(t_2) \in [0, p]$ quando $t_2 \in [0, \delta_2] \cup [2\pi - \delta_2, 2\pi]$ e $\theta(t_2) \in [-\delta_3, \delta_3]$, para $t_2 \in [\delta_2, 2\pi - \delta_2]$.

Assim o gráfico de $\theta|_{[0, 2\pi]}$ está contido na reunião de retângulos

$$\left([0, 2\pi] \times [0, \delta_2]\right) \cup \left([-\delta_3, \delta_3] \times [0, \delta_2]\right) \cup \left([0, 2\pi] \times [2\pi - \delta_2, 2\pi]\right)$$

E o difeomorfismo $\psi(t_1, t_2) = (t_1 - \theta(t_2), t_2)$ manda $P = (p, 0)$ na origem e o gráfico de $\Pi(\theta)$ sobre σ_2 .

Com isto mostramos que B possui um máximo local em t^\sharp e que $B(t) < B(t^\sharp)/2$, em todos os pontos da fronteira de $[0, 2\pi]^2$. O que já seria suficiente para toda a construção que fazemos no caso modelo.

Apenas para simplificar a exposição das hipóteses do caso modelo, optamos por falar no máximo de B no quadrado todo. Obviamente tal ponto é um máximo local e $B(t^*) = \max \{B(\tau); \tau \in [0, 2\pi]^2\} \geq B(t^\sharp)$. Assim a redução ao caso modelo foi atingida.

Referências Bibliográficas

- [A] V. I. Arnold, *Topological and ergodic properties of closed 1-forms with incommensurable periods*. (Russian) Funktsional. Anal. i Prilozhen. **25** (1991), no. 2, 1–12, 96; translation in Functional Anal. Appl. **25** (1991), no. 2, 81–90.
- [B] A. Bergamasco, - *Remarks about global analytic hypoellipticity*, Trans. Amer. Math. Soc., **351** (1999), 4113- 4126.
- [BCM] A. Bergamasco, P. Cordaro e P. Malagutti, *Globally hypoelliptic systems of vector fields*, J. Funct. Anal. **114** (1993), 267–285.
- [BCP] A. Bergamasco, P. Cordaro e G. Petronilho, *Global Solvability for Certain Classes of Undetermined of Vector Fields*, Math. Z. **223** (1996), 223–274.
- [BNZ] A. Bergamasco, W. Nunes, e S. Zani, *Global Analytic Hypoellipticity and Pseudoperiodic Functions*, Math. Contemp. **18** (2000), 43–57.
- [BNZ-2] A. Bergamasco, W. Nunes, e S. Zani, *Global Analytic Hypoellipticity for a Class of Overdetermined Systems*, a aparecer.
- [BP] A. Bergamasco e G. Petronilho, *Global Solvability of a Class of Involutive Systems*, J. Math. Anal. and Appl. **233** (1999), 314–327.
- [CH] F. Cardoso, J. Hounie, *Global Solvability of an Abstract Complex*, Proc. AMS **65** (1977), 117–124.

- [E] D. B. A. Epstein, *Curves on 2-manifolds and isotopies*, Acta Math. **115** (1966), 83–107.
- [H] J. Hounie, *Global Hypoelliptic and Globally Solvable First Order Evolution Equations*, Trans. of AMS **65** (1979), 233–248.
- [Hi] M. W. Hirsch, *Differential topology*, Graduate Texts in Mathematics, No. 33, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [T] F. Trèves, *Hypoanalytic Structures*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992.
- [T1] F. Trèves, *Study of a Model in the Theory of Complexes of Pseudodifferential Operators*, Annals of Math. **104** (1976), 269–324.
- [T2] F. Trèves, *Solvability of a Model in the Theory of Complexes of Pseudodifferential Operators*, Notas de curso escritas por Jorge Hounie e publicadas pelo Depto. de Matemática da UFPE, Recife 1977