UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dinâmica e Espectro de Hamiltonianos Quânticos Discretos Unidimensionais

Roberto de Almeida Prado

São Carlos - SP
Outubro de 2005

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dinâmica e Espectro de Hamiltonianos Quânticos Discretos Unidimensionais

Roberto de Almeida Prado

Tese apresentada ao PPG-M da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática

São Carlos - SP

Outubro - 2005

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária/UFSCar

P896de

Prado, Roberto de Almeida.
Dinâmica e espectro de Hamiltonianos quânticos discretos unidimensionais / Roberto de Almeida Prado -- São Carlos : UFSCar, 2005.
61 p.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2005.

1. Análise matemática. 2. Física matemática. 3. Operadores de Schrödinger. 4. Operadores de Dirac. 5. Dinâmica. 6. Espectro. I. Título.

CDD: 515 (20ª)

Orientador

Prof. Dr. César Rogério de Oliveira

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, por ter me dado saúde, sabedoria e tranqüilidade, para a realização deste trabalho.

À minha família pelo amor, apoio moral e pela confiança depositada em mim. A ela não só agradeço, mas também dedico este trabalho.

Ao César Rogério pela orientação, dedicação profissional, paciência, incentivo e amizade. Um exemplo a ser seguido.

Aos professores do DM-UFSCAR pelos ensinamentos transmitidos dentro e fora da sala de aula.

Aos colegas da pós-graduação pela amizade e pelo ótimo ambiente de trabalho.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Sumário

Resumo ix

Abstract xi

0 Introdução e Resultados 1

1 Limite Não-Relativístico e Preliminares 13

1.1 Limite Não-Relativístico 13

1.2 Preliminares: Modelo de Dirac 16

1.3 Preliminares: Modelo Quase-Balístico 25

2 Modelo de Dirac 29

2.1 Localização Dinâmica e Espectro Pontual 29

2.2 Transporte 37

2.3 Comparação Dinâmica 39

3 Modelo Quase-Balístico 45

3.1 Transporte Quase-Balístico 45

3.2 Aplicações 49

3.2.1 Anosov e Axioma A 49

3.2.2 Aplicação de Duplicação 50

3.2.3 Aplicações Unidimensionais Caóticas 50

3.2.4 Modelo de Anderson 51

3.2.5 Modelo de Anderson-Bernoulli 52
3.2.6 Rotações na Circunferência 52
3.2.7 Almost Mathieu 54
3.2.8 Bilhar Circular 54
3.2.9 Aplicação Twist 54
3.2.10 Rotações nos Toros 55

Resumo

Introduz-se um operador tight-binding de Dirac unidimensional e demonstra-se que para realizações típicas de potenciais de Bernoulli aleatórios, assumindo dois valores (sem correlações), seu espectro é pontual puro para todos os valores da massa; o caso massa zero apresenta transporte para valores específicos da energia e o caso massivo apresenta localização dinâmica (excluindo alguns valores particulares da energia). Além disso, comparam-se os momentos dinâmicos para massas distintas e potenciais gerais, especialmente nos casos Bernoulli massivo e massa zero. Considera-se também uma família de operadores de Schrödinger discretos unidimensionais (e sua versão Dirac) com potenciais gerados por certos sistemas dinâmicos, e sob certas hipóteses demonstra-se que tais operadores apresentam transporte quase-balístico para um conjunto G_δ denso de condições iniciais. As aplicações desse último resultado incluem potenciais gerados por sistemas dinâmicos Axioma A, modelo de Anderson, rotações nos toros, entre outros; em particular, apresentam-se novos exemplos de operadores de Schrödinger (e Dirac) com transporte quase-balístico e espectro pontual.

Abstract

An one-dimensional Dirac tight-binding operator is introduced and it is shown that for typical realizations of two-valued random Bernoulli potentials (without correlations), its spectrum is pure point for all values of the mass; the zero mass case presents transport for specific values of the energy and the massive case presents dynamical localization (excluding some particular values of the energy). Furthermore, for general potentials and distinct masses the dynamical moments are compared, especially the massless and massive Bernoulli cases. It is also considered a family of one-dimensional discrete Schrödinger operators (and its Dirac version) with potentials generated by certain dynamical systems, and under certain hypotheses it is shown that such operators present quasi-ballistic transport for a dense G_δ set of initial conditions. Applications of that last result include potentials generated by Axiom A dynamical systems, Anderson model, rotations in the torus, among others; in particular, new examples of Schrödinger (and Dirac) operators with quasi-ballistic transport and point spectrum are presented.

Capítulo 0

Introdução e Resultados

Hamiltonianos quânticos, i.e., modelos de Schrödinger e Dirac, com potenciais gerados por sistemas dinâmicos são objetos de estudo bem interessantes que têm sido considerados em questões dinâmicas e espectrais na literatura física-matemática, principalmente suas versões discretas unidimensionais. Embora não estabelecido explicitamente, é natural esperar que quanto mais "caótico" for o sistema dinâmico, mais singular será o correspondente espectro; os casos extremos podem ser representados por potenciais periódicos de um lado, que impõem espectro absolutamente contínuo e transporte balístico (ver Definição 0.3), e potenciais aleatórios de outro lado, que levam a espectro pontual e ausência de transporte (limitação no tempo dos momentos dinâmicos do operador posição; ver Definição 0.1). No caso de partículas carregadas, transporte corresponderia à condução elétrica.

Nesta tese fizemos um estudo, baseando-nos em trabalhos recentes da literatura, de propriedades dinâmicas e espectrais para duas classes de Hamiltonianos quânticos. Tais modelos e propriedades constituem os principais resultados de [20, 21, 22].

Começamos imaginando que em cada vértice n da rede unidimensional $\mathbb{Z}$ é fixado um átomo a_n que gera um potencial V_n. O Hamiltoniano de Schrödinger tight-binding para uma partícula nesse ambiente é dado por (com $\hbar = 1$ e massa $m > 0$)

$$(H_{tb}\psi)_n = -\frac{1}{2m}(\Delta\psi)_n + V_n\psi_n = \frac{1}{2m}(-\psi_{n+1} - \psi_{n-1} + 2\psi_n) + V_n\psi_n. \quad (1)$$

Neste modelo supõe-se que não há interações entre as eventuais partículas distintas.

A primeira classe de Hamiltonianos quânticos que será estudada neste trabalho é uma versão discreta do modelo de Dirac [6, 49] unidimensional, a qual pode ser interpretada como uma versão relativística de (1). Com o intuito de descrevê-la, consideremos uma partícula de massa $m \geq 0$ movendo-se na rede $\mathbb{Z}$, sob a ação de um potencial real $\tilde{V} = (V_n)$ construído como acima. O operador tight-binding de Dirac unidimensional proposto é

$$\mathbb{D}(m, c) = \mathbb{D}_0(m, c) + \tilde{V}\, Id_2 = c\mathcal{B} + mc^2\sigma_3 + \tilde{V}\, Id_2, \tag{2}$$

com $c > 0$ representando a velocidade da luz,

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{D}^* \\ \mathcal{D} & 0 \end{pmatrix},$$

σ_3 a matriz de Pauli usual, Id_2 a matriz identidade 2×2 e $\mathcal{D}$ o operador diferença finita (uma contrapartida discreta da primeira derivada) definido por

$$(\mathcal{D}\psi)_n = \psi_{n+1} - \psi_n.$$

$(\mathcal{D}^*\psi)_n = \psi_{n-1} - \psi_n$ é o adjunto de $\mathcal{D}$ de modo que $\mathbb{D}_0(m, c) = c\mathcal{B} + mc^2\sigma_3$ é um operador auto-adjunto limitado atuando sobre $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)$ e seu quadrado é dado por

$$\mathbb{D}_0(m, c)^2 = \begin{pmatrix} c^2\mathcal{D}\mathcal{D}^* + m^2c^4 & 0 \\ 0 & c^2\mathcal{D}\mathcal{D}^* + m^2c^4 \end{pmatrix}.$$

Esta igualdade lembra a relação entre momento $\vec{p}$ e energia E em mecânica quântica relativística [6], dada por $E^2 = c^2\vec{p}^2 + m^2c^4$. Denotando por $\sigma(\mathcal{H})$ o espectro de um operador auto-adjunto $\mathcal{H}$, é bem conhecido que $\sigma(-\Delta) = [0, 4]$, e como $\mathcal{D}^*\mathcal{D} = \mathcal{D}\mathcal{D}^* = -\Delta$,

$$\sigma(\mathbb{D}_0(m, c)) = \left[-c\sqrt{4 + m^2c^2}, -mc^2\right] \cup \left[mc^2, c\sqrt{4 + m^2c^2}\right].$$

No caso em que o potencial $\tilde{V}$ é uma seqüência limitada, $\mathbb{D}(m, c)$ é também um operador auto-adjunto limitado atuando sobre $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)$.

Será mostrado que o limite não-relativístico [6, 49] do resolvente do operador de Dirac discreto (2) é o resolvente do operador de Schrödinger discreto (1) (quando projetado sobre um subespaço apropriado; ver Seção 1.1). Isto é um suporte importante para este modelo de Dirac. Outro ponto que vale a pena destacar para o modelo (2) é a presença do fenômeno chamado Zitterbewegung (ver [20] para os detalhes).

A classe principal de Hamiltonianos quânticos que consideraremos para estudar propriedades dinâmicas e espectrais é a família de operadores de Dirac sobre $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)$

$$\mathbb{D}_\omega(m,c) = \begin{pmatrix} mc^2 & c\mathcal{D}^* \\ c\mathcal{D} & -mc^2 \end{pmatrix} + V_\omega Id_2, \quad \omega \in \Omega = \{-V, V\}^{\mathbb{Z}}, \tag{3}$$

definidos como em (2), em que $V_\omega(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, são variáveis aleatórias de Bernoulli independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) assumindo os valores $\pm V$, $V > 0$, com medida de probabilidade comum μ (não-trivial) e medida produto $\mathbf{P} = \prod_{n\in\mathbb{Z}} \mu\left(V_\omega(n)\right)$. Chamaremos tal família de modelo de Dirac-Bernoulli.

Vamos fixar algumas notações e em seguida definir os principais conceitos dinâmicos que serão abordados neste trabalho. Seja $P^\omega_{I,m}$ o projetor espectral de $\mathbb{D}_\omega(m,c)$ sobre um intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Denotemos por $\delta_n^\pm$ os elementos da base canônica de $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)$, para os quais todas as entradas são $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, exceto a n-ésima entrada que é dada por $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ para os índices subscritos $+$ e $-$, respectivamente. Para $q > 0$, seja $|X|^q$ o momento de ordem q do operador posição sobre $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)$, i.e.,

$$|X|^q\Psi = \sum_n |n|^q \left(\langle\delta_n^+, \Psi\rangle\delta_n^+ + \langle\delta_n^-, \Psi\rangle\delta_n^-\right).$$

Definição 0.1 *Dizemos que o operador $\mathbb{D}_\omega(m,c)$ apresenta localização dinâmica em um intervalo espectral I se para todo $q > 0$ e para todo estado inicial $\Psi \in \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)$ decaindo exponencialmente,*

$$\sup_t M^{(q)}_{\Psi,I,\omega}(m,t) := \sup_t \langle P^\omega_{I,m} e^{-i\mathbb{D}_\omega(m,c)t}\Psi, |X|^q P^\omega_{I,m} e^{-i\mathbb{D}_\omega(m,c)t}\Psi\rangle < \infty$$

$\boldsymbol{P}-$qtp (para quase todo ω com relação a $\boldsymbol{P}$). Caso contrário, dizemos que $\mathbb{D}_\omega(m,c)$ apresenta transporte quântico em I. Se $I = \sigma(\mathbb{D}_\omega(m,c))$, então $M^{(q)}_{\Psi,I,\omega}(m,t)$ será denotado por $M^{(q)}_{\Psi,\omega}(m,t)$.

A definição acima adapta-se para qualquer operador de Schrödinger ou Dirac. Para verificar a presença de transporte quântico será conveniente usar a seguinte média temporal dos momentos dinâmicos de ordem $q > 0$:

$$A^{(q)}_{\Psi,\omega}(m,T) := \frac{2}{T}\int_0^\infty e^{-2t/T} M^{(q)}_{\Psi,\omega}(m,t)\, dt, \tag{4}$$

definida para $m \geq 0$ e $T > 0$. Esta definição de média temporal é virtualmente equivalente à média Cesàro, no sentido de que os expoentes de difusão para tais médias coincidem (ver Lema 1.11), e a principal razão técnica para trabalhar com este tipo de transformada de Laplace é o Lema 1.10.

Um dos objetivos deste trabalho é estudar os fenômenos de localização dinâmica e transporte, além do tipo espectral, para o modelo de Dirac-Bernoulli definido por (3). Será apresentada a demonstração do seguinte resultado, o qual resume uma de nossas principais contribuições (ver Teoremas 2.1, 2.2, 2.3 e 2.6 para afirmações precisas):

Teorema 0.2 *Seja $(\mathbb{D}_\omega(m,c))_{\omega\in\Omega}$ a família de operadores definidos por (3). Então $\boldsymbol{P}-$qtp,*

(i) *$\mathbb{D}_\omega(m,c)$ tem espectro pontual puro para todo $m \geq 0$;*

(ii) *$\mathbb{D}_\omega(m,c)$ com $m > 0$, apresenta localização dinâmica em seu espectro, exceto para os quatro valores de energia $E = \pm c\sqrt{2+m^2c^2} \pm c/\sqrt{2}$ e $E = 0$;*

(iii) *$\mathbb{D}_\omega(0,c)$ apresenta transporte quântico em seu espectro para as energias $E_V = \pm V$ com $V \in (0,c]$, $V \neq c/\sqrt{2}$.*

O problema de localização dinâmica tem sido intensivamente estudado durante os últimos anos, especialmente no caso de operadores de Schrödinger contínuos e discretos aleatórios [19, 29]; em particular, para o modelo de Anderson-Bernoulli, isto é, o modelo de Schrödinger com potenciais de

Bernoulli. O que usualmente demonstra-se é a chamada localização exponencial [1, 11, 27, 50], i.e., espectro pontual puro e autofunções decaindo exponencialmente. Por outro lado, sabe-se que localização exponencial não implica em localização dinâmica; o primeiro exemplo que surgiu na literatura para justificar este fato foi o operador almost Mathieu sob perturbação de posto 1 [23], para o qual os autores verificaram a presença de espectro pontual e transporte quase-balístico (ver Definição 0.3). Para demonstrar localização dinâmica é necessário, além da localização exponencial, um controle preciso do decaimento das autofunções, chamado SULE [23, 29], que pode ser obtido através do método análise de multiescala, uma técnica inicialmente desenvolvida por Fröhlich e Spencer [28, 27], e simplificada por von Dreifus e Klein (ver [50] e Lema 1.7).

Uma motivação para estudar localização dinâmica para o modelo de Dirac-Bernoulli vem do modelo dimerizado aleatório [19, 26], que é o modelo de Anderson-Bernoulli com potenciais V_n designados a pares de posições: $V_{2n} = V_{2n+1} = \pm V$ para todo n (esta correlação local não é exigida no modelo de Dirac-Bernoulli). Este modelo apresenta, para quase toda realização do potencial, espectro pontual puro para todos os valores de $V \neq 0$ [19]. Foi também encontrado numericamente em [26] e mostrado rigorosamente em [19, 33] a existência de energias críticas (no sentido de [33]; ver Definição 1.8) para as quais o expoente de Lyapunov se anula e o correspondente operador apresenta transporte; localização dinâmica foi obtida em [19] somente depois de projetar sobre intervalos de energia fechados, não contendo tais energias críticas. Apesar da similaridade entre as matrizes de transferência dos dois modelos, não é imediata a adaptação dos resultados de localização e transporte para o modelo de Dirac-Bernoulli, e cada passo precisa ser verificado; alguns pontos não serão detalhados pois seguem exatamente as mesmas linhas de sua contrapartida Schrödinger.

Com respeito a transporte quântico, este foi encontrado em modelos polimerizados aleatórios [33] e em modelos palindrômicos aleatórios [12] (ambos incluindo o importante modelo dimerizado aleatório), devido a existência de energias críticas (no sentido da Definição 1.8). Recentemente, para operadores de Schrödinger discretos unidimensionais, Damanik, Sütő e Tcheremchantsev [16] desenvolveram um método geral (adaptável para o modelo de Dirac discreto (2)) que permite obter limites inferiores dinâmicos através de limites superiores para a norma das matrizes de transferência, e eles aplicaram esse método para modelos de substituição, modelos Sturmianos, além de outros. Damanik, Lenz e Stolz [15] apresentaram uma extensão deste método para operadores de Schrödinger contínuos unidimensionais, com aplicação para o modelo de Anderson-Bernoulli contínuo.

Um outro método para obter transporte através de limites superiores sobre as matrizes de transferência (também adaptável para o modelo de Dirac discreto (2)) foi desenvolvido ultimamente por Germinet, Kiselev e Tcheremchantsev [30], e aplicado a operadores de Schrödinger com potenciais aleatórios com decaimento, fornecendo assim novos modelos com espectro pontual puro e transporte quântico. O modelo de Dirac-Bernoulli com massa zero também apresenta este fenômeno (ver Teorema 0.2), para potenciais sem correlações e sem propriedades de decaimento. Mencionamos os artigos [17, 47, 48] para referências adicionais sobre transporte quântico.

Uma questão que não abordaremos aqui, mas que vale a pena citar, é o estudo de limites superiores dinâmicos. Demonstrar tais limites é mais difícil do que investigar transporte quântico, pois é preciso controlar totalmente a média temporal dos momentos dinâmicos, enquanto para transporte basta limitar inferiormente uma restrição apropriada desta média. Desenvolver métodos para obter limites superiores tem sido objeto de várias pesquisas e existem atualmente dois trabalhos importantes neste sentido; ver [18, 47].

Uma outra classe de Hamiltonianos quânticos que consideraremos para investigar transporte (em alguns casos também o tipo espectral) é a família de operadores de Schrödinger $H^W_{\omega,S}$, e também suas versões de Dirac (2), sobre $\ell^2(\mathbb{N})$ (com condição de fronteira de Dirichlet) ou $\ell^2(\mathbb{Z})$, definida por

$$(H^W_{\omega,S}\psi)(n) = (-\Delta\psi)(n) + \lambda F(S^n\omega)\psi(n) + W(n)\psi(n), \quad \omega \in \Omega, \tag{5}$$

em que (Ω, d) é um espaço métrico compacto, $-\Delta$ é o Laplaciano discreto como em (1), λ é um número real positivo, S é uma transformação sobre Ω (invertível no caso da rede $\mathbb{Z}$), $F : \Omega \to \mathbb{R}$ satisfaz a condição de Lipschitz, i.e., existe $L > 0$ tal que

$$|F(\theta) - F(\omega)| \leq Ld(\theta, \omega), \quad \forall\ \theta, \omega \in \Omega, \tag{6}$$

e, para algum $\eta > 0$ e $0 < \tilde{C} < \infty$, a perturbação W satisfaz

$$|W(n)| \le \tilde{C}(1+|n|)^{-1-\eta}, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

Chamaremos a família $(H^W_{\omega,S})_{\omega\in\Omega}$ definida acima de modelo quase-balístico (embora nossos resultados se aplicam a casos particulares desse modelo). Observe que $H^W_{\omega,S}$ são operadores auto-adjuntos limitados e que qualquer perturbação com suporte compacto satisfaz (7). Optamos em trabalhar com a versão Schrödinger por ser tecnicamente mais simples, embora os resultados apresentados aqui possam ser adaptados de modo análogo para o modelo de Dirac discreto.

De forma similar a (4), definimos a média temporal dos momentos dinâmicos de ordem $q > 0$, associados ao estado inicial δ_1 (um membro da base canônica de ℓ^2), por

$$A^W_{\omega,S}(q,T) := \frac{2}{T}\int_0^\infty e^{-2t/T} \sum_n (1+n^2)^{q/2}\ |\langle \delta_n, e^{-itH^W_{\omega,S}}\delta_1\rangle|^2\ dt. \tag{8}$$

Aqui foi conveniente usar $(1+n^2)^{1/2}$ no lugar de $|n|$, por razões técnicas.

A presença de transporte quântico (mais precisamente, quase-balístico) será investigada através dos expoentes de difusão superior

$$\beta^+_{\omega,S,W}(q) := \limsup_{T\to\infty} \frac{\log A^W_{\omega,S}(q,T)}{q\ \log T}\ . \tag{9}$$

Os expoentes de difusão inferior serão denotados por

$$\beta^-_{\omega,S,W}(q) := \liminf_{T\to\infty} \frac{\log A^W_{\omega,S}(q,T)}{q\ \log T}\ . \tag{10}$$

Optamos em usar os expoentes acima, ao invés das correspondentes médias temporais, simplesmente para facilitar a notação. É interessante observar que um resultado análogo ao Teorema 2.9 é válido para o modelo $H^W_{\omega,S}$, e com isso obtêm-se que $0 \le \beta^-_{\omega,S,W}(q) \le \beta^+_{\omega,S,W}(q) \le 1$ para todo $q > 0$.

Definição 0.3 *Se $\beta^-_{\omega,S,W}(q) = 1$ para todo $q > 0$, o operador $H^W_{\omega,S}$ é dito apresentar transporte balístico. Se $\beta^+_{\omega,S,W}(q) = 1$ para todo $q > 0$, o operador $H^W_{\omega,S}$ é dito apresentar transporte quase-balístico.*

Neste trabalho adaptamos o método de transporte inicialmente desenvolvido para o operador almost Mathieu em [23], e depois aperfeiçoado em [30], para um contexto um tanto diferente, o qual nos permite fornecer novos exemplos de operadores quânticos do tipo (5) com transporte quase-balístico, alguns deles com espectro pontual puro. Nossos principais resultados a esse respeito estão resumidos no próximo teorema (ver Seção 3.2 para afirmações detalhadas).

Teorema 0.4 *Seja $H^W_{\omega,S}$ definido por (5) sobre $\ell^2(\mathbb{N})$ com S e W(como em (7)) fixados. Se o potencial $V_\omega(n) = F(S^n\omega)$ é gerado por um dos seguintes itens:*

(i) sistemas dinâmicos Axioma A;

(ii) aplicação de duplicação;

(iii) modelo de Anderson;

(iv) rotações nos toros com condição analítica sobre F,

então existe um conjunto G_δ denso $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ de modo que para cada $\omega \in \tilde{\Omega}$, o operador $H^W_{\omega,S}$ apresenta transporte quase-balístico. Além disso, sob perturbações de posto 1 da forma $W = \kappa\langle\delta_1,\cdot\rangle\delta_1,\ \kappa \in \mathbb{R}$, existem operadores $H^W_{\omega,S}$ correspondentes a potenciais V_ω gerados por (iv), com espectro pontual puro e transporte quase-balístico.

Rotações na circunferência $\mathbf{S^1}$ são de longe os sistemas dinâmicos mais considerados para gerar potenciais quânticos [32, 9, 39]; suas versões a valores finitos [4, 24, 14], juntamente com sistemas dinâmicos potenciais de substituição [37, 38], são modelos matemáticos de quase-cristais unidimensionais com predominância de espectro singular contínuo. Esses sistemas não são considerados "caóticos"; os paradigmas de sistemas caóticos são o Anosov e, mais generalmente, os sistemas dinâmicos Axioma A.

Como movimento caótico imita aleatoriedade, é natural conjecturar que para operadores quânticos com potenciais gerados por sistemas Axioma A (e outros sistemas caóticos) existe uma predominância de espectro pontual e ausência de transporte. Um pequeno passo nesta direção é dado pelos resultados de [10] sobre localização de Anderson para potenciais relacionados a aplicação de duplicação $\theta \mapsto 2\theta$ sobre $\mathbf{S^1}$ e também automorfismos torais hiperbólicos. Por outro lado, uma de nossas aplicações mostra que para um conjunto genérico (i.e., G_δ denso) de condições iniciais de sistemas Axioma A, assim como de sistemas dinâmicos caóticos definidos em Devaney [25], os operadores quânticos associados apresentam transporte quase-balístico; ver Seção 3.2 para detalhes e outros exemplos.

Agora os resultados dinâmicos e espectrais para o modelo de Dirac-Bernoulli (3) e para o modelo quase-balístico (5) serão brevemente resumidos (com mais detalhes do que nos Teoremas 0.2 e 0.4). Começamos com os resultados para o modelo de Dirac-Bernoulli. Usando como ferramenta uma forma particular do Teorema de Furstenberg (Lema 1.3), será mostrado (ver Teoremas 2.1, 2.2 e 2.3) que o expoente de Lyapunov $\Gamma_m(E)$ é estritamente positivo para as energias $E \in \sigma(\mathbb{D}_\omega(m,c))$, exceto para: $E = \pm V$ com $V \in (0,c]$, $V \neq c/\sqrt{2}$, no caso $m = 0$; e se $m \geq 0$ para ($E_V = 0$, $V = c\sqrt{2+m^2c^2}$) e os quatro pares de energia-potencial ($E_V = \pm c\sqrt{2+m^2c^2} \pm c/\sqrt{2}$, $V = c/\sqrt{2}$).

Para todas as energias E com $\Gamma_m(E) > 0$, uma estimativa inicial para localização (Lema 1.6) e a estimativa de Wegner (Lema 1.5) serão verificadas; usando a análise de multiescala (Lema 1.7) e adaptando a construção de [29] para o modelo $\mathbb{D}_\omega(m,c)$, será mostrado (ver Teoremas 2.1 e 2.2) que o espectro de $\mathbb{D}_\omega(m,c)$ é pontual puro $\mathbf{P}-$qtp e as correspondentes autofunções são semi-uniformemente exponencialmente localizadas (SULE) [23, 29]. Isto implica imediatamente em localização dinâmica (ver [29]).

No caso massa zero ($m = 0$), os valores $E = \pm V$ com $V \in (0,c]$, $V \neq c/\sqrt{2}$, são energias críticas para o operador $\mathbb{D}_\omega(0,c)$ e isto implica ($\mathbf{P}-$qtp) limitação superior para as matrizes de transferência na vizinhança dessas energias (ver Lemas 2.4 e 2.5). Adaptando as idéias de [33] (ver também [16]) para $\mathbb{D}_\omega(0,c)$ segue (ver Teorema 2.6) que para um spinor inicial Ψ bem localizado no espaço e para $T \geq 1$, existe $0 < C_q(\omega) < \infty$ de forma que

$$A^{(q)}_{\Psi,\omega}(0,T) \geq C_q(\omega) T^{q-1/2} \qquad \mathbf{P} - qtp$$

(ou expoente $q-1$ em vez de $q-1/2$, para todo ω), ou seja, $\mathbb{D}_\omega(0,c)$ apresenta transporte quântico apesar da ausência de uma componente contínua em seu espectro.

No caso dos pares energia-potencial ($E_V = \pm c\sqrt{2+m^2c^2} \pm c/\sqrt{2},\ V = c/\sqrt{2}$) e ($E_V = 0,\ V = c\sqrt{2+m^2c^2}$) será mostrado (ver Teorema 2.3) que o expoente de Lyapunov Γ_m se anula, mas não foi possível dar uma resposta sobre localização dinâmica para eles. No entanto, para estes casos existe um limite superior dinâmico balístico (na verdade, válido para qualquer potencial $\tilde{V}$) estabelecido no Teorema 2.9.

Para massas distintas $m, m' \geq 0$, mas m próximo de m', é esperado que os momentos dinâmicos $M_\Psi^{(q)}(m,t)$ associados aos operadores $\mathbb{D}(m,c)$ (ver Definição 0.1) acompanhem de perto os momentos $M_\Psi^{(q)}(m',t)$ associados a $\mathbb{D}(m',c)$ (ambos com o mesmo potencial), pelo menos por um período pequeno de tempo. O próximo resultado será uma desigualdade confirmando tal expectativa; fazendo uso da fórmula de DuHamel, será mostrado (ver Teorema 2.7) que para um estado inicial Ψ com apenas uma componente não-nula, existe $0 < K_q < \infty$ tal que, para todo $t > 0$,

$$\left| M_\Psi^{(q)}(m,t) - M_\Psi^{(q)}(m',t) \right| \leq K_q |m - m'| c^2\, t^{q+2}.$$

Em particular, para o modelo de Dirac-Bernoulli, esta relação com $m > 0$ e $m' = 0$ fornece quantitativamente uma estimativa de como, para tempos pequenos, a dinâmica do regime localizado acompanha a do regime não-localizado (ver também Corolário 2.8).

Passemos aos resultados válidos para o modelo quase-balístico definido por (5). O resultado dinâmico que apresentaremos pode ser resumido como (ver Teorema 3.1 para uma afirmação precisa): Se existir um conjunto denso de condições iniciais em Ω, para o qual as matrizes de transferência são limitadas superiormente em intervalos de energia com medida de Lebesgue positiva, e se as iterações de S satisfazem uma condição apropriada do tipo continuidade, então obtém-se um conjunto G_δ denso $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ de modo que para qualquer $\omega \in \tilde{\Omega}$, o operador $H_{\omega,S}^W$ apresenta transporte quase-balístico.

Com relação ao tipo espectral, ressaltamos um resultado conhecido (ver Teorema 3.3) que será usado em algumas aplicações: Se o expoente de Lyapunov correspondente a $H_{\omega,S}^{W=0}$ for estritamente positivo para energias no espectro, então sob perturbação de posto 1 da forma $W = \kappa\langle\delta_1,\cdot\rangle\delta_1$, o operador $H^W_{\omega,S}$ sobre $\ell^2(\mathbb{N})$ tem espectro pontual puro para ω qtp (com respeito a uma medida ergódica) e κ qtp (com respeito a medida de Lebesgue). Existe uma versão restrita ao caso da rede $\mathbb{Z}$. Como este resultado conhecido será importante para algumas aplicações, apresentaremos um esboço de sua demonstração.

Aplicaremos o resultado dinâmico acima para vários tipos de potenciais $V_\omega(n) = F(S^n\omega)$ (ver Seção 3.2): Anosov e sistemas Axioma A, aplicação de duplicação, aplicações unidimensionais caóticas, modelo de Anderson e rotações nos toros com condição analítica sobre F. Para o caso particular de rotações incomensuráveis nos toros, sob perturbações de posto 1, além do transporte quase-balístico existe também a presença de espectro pontual puro (ver Subseções 3.2.10 e 3.2.6).

Esta tese é organizada da seguinte forma: no Capítulo 1 discutimos o limite não-relativístico para o modelo de Dirac discreto (2), e coletamos alguns conceitos e resultados preliminares para os operadores de Dirac-Bernoulli $\mathbb{D}_\omega(m,c)$ definidos por (3), assim como para os operadores de Schrödinger $H^W_{\omega,S}$ definidos por (5). No Capítulo 2 apresentamos os resultados sobre localização dinâmica, transporte e espectro pontual para $\mathbb{D}_\omega(m,c)$; em particular, demonstramos o Teorema 0.2. Além disso, comparamos os momentos dinâmicos com massas diferentes e mesmo potencial, especialmente nos casos de Dirac-Bernoulli massivo e massa zero, e também apresentamos um limite superior dinâmico balístico para os momentos. No Capítulo 3 apresentamos os resultados sobre transporte quase-balístico e espectro pontual para $H^W_{\omega,S}$, e dedicamos uma seção para as aplicações desses resultados; em particular, demonstramos o Teorema 0.4.

Capítulo 1

Limite Não-Relativístico e Preliminares

Neste capítulo discutiremos o limite não-relativístico para o modelo de Dirac discreto (2), e coletaremos alguns conceitos e resultados preliminares para os operadores de Dirac-Bernoulli $\mathbb{D}_\omega(m,c)$, assim como para os operadores de Schrödinger $H^W_{\omega,S}$ (modelo quase-balístico). Tais conceitos e resultados serão importantes para os próximos capítulos e também para as demonstrações dos Teoremas 0.2 e 0.4 (ver Introdução). Além disso, este capítulo deve servir para fixar algumas notações.

1.1 Limite Não-Relativístico

Nesta seção consideraremos o operador de Dirac discreto $\mathbb{D}(m,c)$ definido por (2), com $m>0$ fixado e c como um parâmetro. Por simplicidade, $\mathbb{D}(c)$ denotará $\mathbb{D}(m,c)$, o qual é suposto ser auto-adjunto com potencial real $\tilde{V}$.

O limite não-relativístico significa considerar c tendendo a infinito, e como a energia de repouso mc^2 é uma quantidade puramente relativística, ela deve ser subtraída antes de tomar este limite. Será considerado a convergência na norma dos operadores resolventes $\left(\mathbb{D}(c)-mc^2-z\right)^{-1}$, com $z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. O Teorema abaixo descreve o tal limite não-relativístico, em que Λ é o projetor sobre o subespaço das "energias positivas" e ΛH_∞ corresponde ao operador de Schrödinger (1).

Teorema 1.1 *Se $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, então*

$$\lim_{c \to \infty} \Big(\mathbb{D}(c) - mc^2 - z \Big)^{-1} = \Lambda \left(H_\infty - z \right)^{-1},$$

em que $\Lambda = \frac{1}{2}\left(Id_2 + \sigma_3 \right)$ *e* $H_\infty = \frac{\mathcal{B}^2}{2m} + \tilde{V}\Lambda$, *com o limite na norma de operadores limitados.*

Para demonstrar o Teorema 1.1 usaremos o

Lema 1.2 *Se $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, então*

$$\Big(\mathbb{D}(c) - mc^2 - z \Big)^{-1} = \left(\Lambda + \frac{c\mathcal{B} + z}{2mc^2} \right) S(c) \left(Id + \tilde{V} \frac{c\mathcal{B} + z}{2mc^2} S(c) \right)^{-1} \tag{1.1}$$

sendo Id o operador identidade e

$$S(c) = \left(H_\infty - z - \frac{z^2}{2mc^2} \right)^{-1} = \left(Id - \frac{z^2}{2mc^2} \left(H_\infty - z \right)^{-1} \right)^{-1} \left(H_\infty - z \right)^{-1}.$$

Demonstração: Note que

$$\Big(\mathbb{D}_0(c) + mc^2 + z \Big) \Big(\mathbb{D}_0(c) - mc^2 - z \Big) = c^2 \mathcal{B}^2 - 2mc^2 z - z^2.$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} \Big(\mathbb{D}_0(c) - mc^2 - z \Big)^{-1} &= \frac{\mathbb{D}_0(c) + mc^2 + z}{2mc^2} \left(\frac{\mathcal{B}^2}{2m} - z - \frac{z^2}{2mc^2} \right)^{-1} \\ &= \left(\Lambda + \frac{c\mathcal{B} + z}{2mc^2} \right) S_0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

com $S_0 = \left(\frac{\mathcal{B}^2}{2m} - z - \frac{z^2}{2mc^2} \right)^{-1}$. Por outro lado, usando a relação de operadores

$$(U + B)^{-1} = (Id + U^{-1}B)^{-1} U^{-1}$$

com $U = \frac{\mathcal{B}^2}{2m} - z - \frac{z^2}{2mc^2}$ e $B = \tilde{V}\Lambda$, obtém-se

$$S(c) = S_0 \left(Id + \tilde{V}\Lambda S_0 \right)^{-1}. \tag{1.3}$$

Portanto, de (1.2) e (1.3) resulta que

$$\begin{aligned}
\left(\mathbb{D}(c) - mc^2 - z\right)^{-1} &= \left(\mathbb{D}_0(c) - mc^2 - z\right)^{-1}\left(Id + \tilde{V}\left(\mathbb{D}_0(c) - mc^2 - z\right)^{-1}\right)^{-1} \\
&= \left(\Lambda + \frac{c\mathcal{B} + z}{2mc^2}\right) S_0 \left(Id + \tilde{V}\Lambda S_0 + \tilde{V}\frac{c\mathcal{B} + z}{2mc^2} S_0\right)^{-1} \\
&= \left(\Lambda + \frac{c\mathcal{B} + z}{2mc^2}\right) S(c) \left(Id + \tilde{V}\frac{c\mathcal{B} + z}{2mc^2} S(c)\right)^{-1} . \qquad \square
\end{aligned}$$

Agora vamos apresentar a

Demonstração **(Teorema 1.1)**: Como $(H_\infty - z)^{-1}$ é limitado para $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ e

$$\left\| \frac{z^2}{2mc^2} (H_\infty - z)^{-1} \right\| < 1$$

para c suficientemente grande, pode-se expandir

$$S(c) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^2}{2mc^2} (H_\infty - z)^{-1} \right)^n (H_\infty - z)^{-1} , \tag{1.4}$$

com a soma convergindo na norma de operadores.

Para qualquer $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ fixado e c suficientemente grande,

$$\left\| T(c) := \tilde{V}\frac{c\mathcal{B} + z}{2mc^2} S(c) \right\| < 1$$

e portanto

$$(Id + T(c))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-T(c))^n \ . \tag{1.5}$$

Substituindo (1.4) e (1.5) em (1.1) obtêm-se a expansão

$$\left(\mathbb{D}(c) - mc^2 - z\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_n(z)}{c^n}$$

em que

$$R_0(z) = \Lambda (H_\infty - z)^{-1} ,$$

$$R_1(z) = \Lambda (H_\infty - z)^{-1} \frac{\mathcal{B}}{2m} + \frac{\mathcal{B}}{2m} (H_\infty - z)^{-1} \Lambda \ , \text{ etc.},$$

com a soma convergindo na norma de operadores. Disto segue o resultado procurado. $\square$

Encerraremos esta seção descrevendo uma outra maneira (não-rigorosa) de olhar o limite não-relativístico. De fato, considere a equação de Dirac em $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)$:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\phi^+\\ \phi^-\end{pmatrix} = \mathbb{D}(m,c)\begin{pmatrix}\phi^+\\ \phi^-\end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Definindo $\begin{pmatrix}\phi^+\\ \phi^-\end{pmatrix} = e^{-imc^2t}\begin{pmatrix}\psi^+\\ \psi^-\end{pmatrix}$ e substituindo em (1.6) obtêm-se

$$i\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\psi^+\\ \psi^-\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}\mathcal{D}^*\psi^-\\ \mathcal{D}\psi^+\end{pmatrix} - 2mc^2\begin{pmatrix}0\\ \psi^-\end{pmatrix} + \tilde{V}\begin{pmatrix}\psi^+\\ \psi^-\end{pmatrix}.$$

Para valores grandes de c, uma solução aproximada da segunda equação acima é $\psi^- = \mathcal{D}\psi^+/2mc$, e inserindo isto na primeira equação resulta em

$$i\frac{\partial\psi^+}{\partial t} = \frac{1}{2m}\mathcal{D}^*\mathcal{D}\psi^+ + \tilde{V}\psi^+. \tag{1.7}$$

Similarmente, considerando $\begin{pmatrix}\phi^+\\ \phi^-\end{pmatrix} = e^{imc^2t}\begin{pmatrix}\psi^+\\ \psi^-\end{pmatrix}$ encontra-se

$$i\frac{\partial\psi^-}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\mathcal{D}\mathcal{D}^*\psi^- + \tilde{V}\psi^-. \tag{1.8}$$

Como $\mathcal{D}^*\mathcal{D} = \mathcal{D}\mathcal{D}^* = -\Delta$, então (1.7) e (1.8) correspondem às equações de Schrödinger tight-binding unidimensionais associadas a (1) com energias positivas e negativas, respectivamente.

1.2 Preliminares: Modelo de Dirac

Nesta seção coletaremos algumas ferramentas e conceitos que serão usados no Capítulo 2 para obter os resultados dinâmicos e espectrais para o modelo de Dirac-Bernoulli $\mathbb{D}_\omega(m,c)$ definido por (3).

Seja $\Psi = \begin{pmatrix}\psi^+\\ \psi^-\end{pmatrix}$ uma solução da equação de autovalores

$$(\mathbb{D}_\omega(m,c) - E)\Psi = 0.$$

Então verifica-se que

$$\begin{pmatrix}\psi^+(n+1)\\ \psi^-(n)\end{pmatrix} = T_m^{V_\omega(n)}(E)\begin{pmatrix}\psi^+(n)\\ \psi^-(n-1)\end{pmatrix},$$

com

$$T_m^V(E) = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{m^2c^4 - (E-V)^2}{c^2} & \dfrac{mc^2 + E - V}{c} \\ \\ \dfrac{mc^2 - E + V}{c} & 1 \end{pmatrix}.$$

A matriz de transferência da posição k até a posição n é introduzida por

$$\Phi_m^\omega(E,n,k) = \begin{cases} T_m^{V_\omega(n-1)}(E)\, T_m^{V_\omega(n-2)}(E) \cdots T_m^{V_\omega(k)}(E) & n > k, \\ \\ Id_2 & n = k, \\ \\ (\Phi_m^\omega(E,k,n))^{-1} & n < k. \end{cases}$$

Observe que $T_m^V(E)$ é um elemento de $SL(2, \mathbb{R})$.

Pelo Teorema de Furstenberg e Kesten [7], $\mathbf{P}-$qtp o expoente de Lyapunov correspondente a $\mathbb{D}_\omega(m,c)$:

$$\Gamma_m(E) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|n|} \ln \|\Phi_m^\omega(E,n,1)\|$$

existe e é independente de ω. Para estudar a positividade de Γ_m, $m \geq 0$, será usada a seguinte forma particular do Teorema de Furstenberg [7]:

Lema 1.3 *Seja $\mathcal{G}_m(E)$ o menor subgrupo fechado de $SL(2,\mathbb{R})$ gerado pelas matrizes $T_m^V(E)$ e $T_m^{-V}(E)$. Então $\Gamma_m(E) > 0$ se*

- *$\mathcal{G}_m(E)$ não é compacto e*
- *não existe medida de probabilidade sobre $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ (o conjunto de todas as direções de $\mathbb{R}^2$) que é invariante sob a ação de $\mathcal{G}_m(E)$, o que é equivalente à afirmação: a órbita $\mathcal{G}_m(E) \cdot \tilde{x} := \{T_m \cdot \tilde{x},\ T_m \in \mathcal{G}_m(E)\}$ de cada direção $\tilde{x} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ contém pelo menos três elementos.*

Vamos fixar algumas notações. Se $L > 0$ e $n \in \mathbb{Z}$, consideremos o subconjunto finito de $\mathbb{Z}$

$$\Lambda_L(n) = \left\{ k \in \mathbb{Z} :\ |k - n| \leq \frac{L}{2} \right\}$$

com fronteira

$$\partial\Lambda_L(n) = \{(k,k') : \ k \in \Lambda_L(n), \ k' \notin \Lambda_L(n), \ |k - k'| = 1\}.$$

Abusaremos da notação escrevendo $k \in \partial\Lambda_L(n)$ para indicar que $(k,k') \in \partial\Lambda_L(n)$ para algum k'. Denotemos por $\mathbb{D}_\omega^{\Lambda_L(n)}(m,c)$ o operador $\mathbb{D}_\omega(m,c)$ restrito a $\ell^2(\Lambda_L(n), \mathbb{C}^2)$ com condição de fronteira zero fora de $\Lambda_L(n)$.

Os elementos de matriz de um operador $\mathcal{O}$ sobre $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)$ são dados por

$$\mathcal{O}_{nk} = \begin{pmatrix} \langle \delta_n^+, \mathcal{O}\delta_k^+ \rangle & \langle \delta_n^+, \mathcal{O}\delta_k^- \rangle \\ \\ \langle \delta_n^-, \mathcal{O}\delta_k^+ \rangle & \langle \delta_n^-, \mathcal{O}\delta_k^- \rangle \end{pmatrix}$$

com "norma"

$$\|\mathcal{O}_{nk}\|^2 = |\langle \delta_n^+, \mathcal{O}\delta_k^+ \rangle|^2 + |\langle \delta_n^+, \mathcal{O}\delta_k^- \rangle|^2 + |\langle \delta_n^-, \mathcal{O}\delta_k^+ \rangle|^2 + |\langle \delta_n^-, \mathcal{O}\delta_k^- \rangle|^2.$$

Definição 1.4 *Sejam $\gamma > 0$ e $E \in \mathbb{R}$. Dizemos que $\Lambda_L(n)$ é $(\gamma, E)-$regular (para um potencial V_ω fixado) se $E \notin \sigma(\mathbb{D}_\omega^{\Lambda_L(n)}(m,c))$ e*

$$\left\| \left(\mathbb{D}_\omega^{\Lambda_L(n)}(m,c) - E \right)^{-1}_{nk} \right\| \leq e^{-\gamma L/2}$$

para todo $k \in \partial\Lambda_L(n)$. Caso contrário, dizemos que $\Lambda_L(n)$ é $(\gamma, E)-$singular.

Agora dois resultados importantes requeridos para a análise de multi-escala serão descritos. O primeiro é a estimativa de Wegner, adaptada de [11] para o operador de Dirac discreto (a demonstração será omitida, pois ela é longa e bem similar ao caso Schrödinger).

Lema 1.5 *Seja $\mathbb{D}_\omega(m,c)$ definido por (3) e seja I um intervalo de energia compacto. Para quaisquer $\delta \in (0,1)$ e $\tau > 0$, existem $L_0 = L_0(I, \delta, \tau, m) > 0$ e $a = a(I, \delta, \tau, m) > 0$ de modo que*

$$\boldsymbol{P}\left\{ \omega : \mathrm{dist}\left(E, \sigma(\mathbb{D}_\omega^{\Lambda_L(0)}(m,c)) \right) \leq e^{-\tau L^\delta} \right\} \leq e^{-aL^\delta}$$

para todo $E \in I$ e $L \geq L_0$.

O segundo resultado é a estimativa inicial para localização, adaptada de [50] (a demonstração também será omitida, devido a similaridade com o caso Schrödinger).

Lema 1.6 *Seja $\mathbb{D}_\omega(m,c)$ definido por (3) e sejam $\epsilon > 0$, $\delta \in (0,1)$ dados. Para cada $E_0 \in \mathbb{R}$ fixado, existem $L_0 = L_0(E_0,\epsilon,\delta,m) > 0$ e $r = r(E_0,\epsilon,\delta,m) > 0$ de modo que*

$$\boldsymbol{P}\left\{\omega : \Lambda_L(0) \text{ é } (\Gamma_m(E_0)-\epsilon, E_0) - \text{regular}\right\} \geq 1 - e^{-rL^\delta}$$

para todo $L \geq L_0$.

Como a análise de multiescala (Teorema 2.2 de [50]) é o núcleo da demonstração de localização dinâmica, vamos descrever resumidamente esta técnica adapatada para o modelo de Dirac $\mathbb{D}_\omega(m,c)$.

Lema 1.7 *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Suponha que, para algum $L_0 = L_0(I,m) > 0$, tem-se:*

(H1) $\boldsymbol{P}\left\{\omega : \forall\ E \in I,\ \Lambda_{L_0}(n) \text{ ou } \Lambda_{L_0}(j) \text{ é } (\gamma_0, E) - \text{regular}\right\} \geq 1 - 1/L_0^{2p}$ *para algum $p > 1$, $\gamma_0(m) > 0$ e quaisquer $n, j \in \mathbb{Z}$ com $|n-j| > L_0$;*

(H2) $\boldsymbol{P}\left\{\omega : \operatorname{dist}\Big(E, \sigma(\mathbb{D}_\omega^{\Lambda_L(0)}(m,c))\Big) \leq e^{-L^\delta}\right\} \leq 1/L^r$ *para algum δ em $(0,1)$, $r > 4p+6$, para todo E com $\operatorname{dist}(E,I) \leq \frac{1}{2}e^{-L^\delta}$ e todo $L \geq L_0$.*

Então existe $\alpha \in (1,2)$, de modo que se for definida a seqüência $L_{k+1} = L_k^\alpha$ $(k = 0,1,2,...)$ e escolhido $\gamma(m) \in (0,\gamma_0)$, encontra-se $\mathcal{C} < \infty$ de forma que se $L_0 > \mathcal{C}$, então para qualquer $k = 0,1,2,...$,

$$\boldsymbol{P}\left\{\omega : \forall\ E \in I,\ \Lambda_{L_k}(n) \text{ ou } \Lambda_{L_k}(j) \text{ é } (\gamma, E) - \text{regular}\right\} \geq 1 - 1/L_k^{2p}$$

para quaisquer $n, j \in \mathbb{Z}$ com $|n-j| > L_k$.

Observações:

i) As hipóteses $(H1)$ e $(H2)$ acima são conseqüências dos Lemas 1.6 e 1.5, respectivamente.

ii) O Lema 1.7 é um processo indutivo que translada a estimativa probabilística $(H1)$, estabelecida na escala inicial L_0, para qualquer outra escala L_k construída conforme o enunciado.

Com o intuito de obter localização dinâmica por meio do Lema 1.7, as seguintes propriedades de $\mathbb{D}_\omega(m,c)$ serão utilizadas:

(P1) Com respeito à medida espectral de $\mathbb{D}_\omega(m,c)$, para quase toda energia existe um autovetor polinomialmente limitado (ver [5, 43]).

(P2) Se $E \notin \sigma(\mathbb{D}_\omega^{\Lambda_L(n)}(m,c))$ e $\mathbb{D}_\omega(m,c)\Psi = E\Psi$, então

$$\begin{aligned}\Psi(n) &= -\left(\mathbb{D}_\omega^{\Lambda_L(n)}(m,c) - E\right)^{-1}_{nk_1}\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Psi(k_1-1) \\ &\quad -\left(\mathbb{D}_\omega^{\Lambda_L(n)}(m,c) - E\right)^{-1}_{nk_2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}\Psi(k_2+1),\end{aligned}$$

com $\{(k_1,k_1-1),(k_2,k_2+1)\} = \partial\Lambda_L(n)$.

Demonstração: Defina o operador de fronteira $\mathcal{F}_{\Lambda_L(n)}$ pelos seus elementos de matriz

$$\left(\mathcal{F}_{\Lambda_L(n)}\right)_{jk} = \begin{cases} -\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{se } j-1=k,\ j\in\Lambda_L(n),\ k\notin\Lambda_L(n); \\ -\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} & \text{se } j+1=k,\ j\in\Lambda_L(n),\ k\notin\Lambda_L(n); \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{de outra maneira.} \end{cases}$$

Tem-se

$$l^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}^2) = l^2(\Lambda_L(n),\mathbb{C}^2) \oplus l^2(\mathbb{Z}\setminus\Lambda_L(n),\mathbb{C}^2)$$

e

$$\mathbb{D}_\omega(m,c) = \mathbb{D}_\omega^{\Lambda_L(n)}(m,c) + \mathbb{D}_\omega^{\mathbb{Z}\setminus\Lambda_L(n)}(m,c) - \mathcal{F}_{\Lambda_L(n)}.$$

Segue desta igualdade e da hipótese que

$$\left[\left(\mathbb{D}_\omega^{\Lambda_L(n)}(m,c) - E\right)\Psi\right](n) = \left(\mathcal{F}_{\Lambda_L(n)}\Psi\right)(n).$$

Daí, usando o fato que $E \notin \sigma(\mathbb{D}_\omega^{\Lambda_L(n)}(m,c))$ obtemos

$$\begin{aligned}\Psi(n) &= \left(\mathbb{D}_\omega^{\Lambda_L(n)}(m,c)-E\right)^{-1}\left(\mathcal{F}_{\Lambda_L(n)}\Psi\right)(n)\\ &= \sum_{(k,k')\in\ \partial\Lambda_L(n)} \left(\mathbb{D}_\omega^{\Lambda_L(n)}(m,c)-E\right)^{-1}_{nk}\left(\mathcal{F}_{\Lambda_L(n)}\right)_{kk'}\Psi(k').\end{aligned}$$

O resultado segue então das definições de $\left(\mathcal{F}_{\Lambda_L(n)}\right)_{kk'}$ e $\partial\Lambda_L(n)$. □

Seja $(H_\omega)_{\omega\in\Omega}$ uma família aleatória de Hamiltonianos de Schrödinger ou Dirac polimerizados como em [33], i.e., construídos por justaposição aleatória de blocos de tamanho finito, e denotemos por $T^\pm(E)$ as correspondentes matrizes de transferência polimerizadas ($\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é qualquer seqüência de sinais $+$ e $-$ com probabilidades p_+ e $p_- = 1-p_+$ respectivamente). Por exemplo, no caso do modelo dimerizado aleatório os blocos são (V,V) e $(-V,-V)$, e as matrizes associadas são dadas por

$$T^\pm(E) = \begin{pmatrix} E\mp V & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} (E\mp V)^2-1 & -(E\mp V)\\ E\mp V & -1\end{pmatrix}.$$

A nulidade do expoente de Lyapunov associado a H_ω é considerado um indicador de um possível transporte. Isto acontece na seguinte situação:

Definição 1.8 *Uma energia $E\in\mathbb{R}$ é dito crítica para a família $(H_\omega)_{\omega\in\Omega}$ se as matrizes $T^\pm(E)$ são elípticas (i.e. $|tr\ T^\pm(E)|<2$) ou iguais a $\pm Id_2$, e comutam.*

Esta definição será usada na Seção 2.2 para obter o resultado sobre transporte para o modelo de Dirac-Bernoulli com massa zero. O próximo resultado estabelece relações entre as matrizes de transferência com energias diferentes.

Lema 1.9 *Sejam $E\in\mathbb{R},\ N>0,\ m\geq 0$ e considere*

$$L_m^\omega(N) := \sup_{1\leq n\leq N}\|\Phi_m^\omega(E,n,1)\|\ .$$

Então, existe uma constante $C_1(\omega)>0$ de modo que, para $1\leq n\leq N$ e $\zeta\in\mathbb{C}$,

$$\|\Phi_m^\omega(E+\zeta,n,1)\| \leq L_m^\omega(N)e^{\frac{|\zeta|}{c}\left(\frac{|\zeta|}{c}+C_1(\omega)\right)L_m^\omega(N)n}.$$

Demonstração: Um argumento indutivo mostra que, para $n > 1$ e $\zeta \in \mathbb{C}$, podemos escrever a identidade (fórmula de variação das energias)

$$\Phi_m^\omega(E+\zeta, n, 1) = \Phi_m^\omega(E, n, 1) - \zeta \sum_{j=1}^{n-1} \Phi_m^\omega(E+\zeta, n, j+1)\, B_\zeta^\omega(E, j)\, \Phi_m^\omega(E, j, 1),$$

com

$$B_\zeta^\omega(E, j) = \frac{\zeta}{c^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{c}\begin{pmatrix} \frac{2}{c}(E - V_\omega(j)) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por iteração, usando a hipótese e a identidade acima, obtemos

$$\begin{aligned} \|\Phi_m^\omega(E+\zeta, n, 1)\| &\leq L_m^\omega(N)\left[1 + \frac{|\zeta|}{c}\left(\frac{|\zeta|}{c} + C_1(\omega)\right) L_m^\omega(N)\right]^{n-1} \\ &\leq L_m^\omega(N) e^{\frac{|\zeta|}{c}\left(\frac{|\zeta|}{c} + C_1(\omega)\right) L_m^\omega(N) n}, \end{aligned}$$

para algum $0 < C_1(\omega) < \infty$ e para $1 \leq n \leq N$. $\square$

Agora, para $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ e $m \geq 0$, introduzimos as funções de Green com duas componentes

$$\begin{pmatrix} G_{m,\omega}^+(z, n) \\ G_{m,\omega}^-(z, n) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \left\langle \delta_n^+, (\mathbb{D}_\omega(m, c) - z)^{-1}\, \delta_0^+ \right\rangle \\ \left\langle \delta_n^-, (\mathbb{D}_\omega(m, c) - z)^{-1}\, \delta_0^+ \right\rangle \end{pmatrix},$$

de modo que

$$(\mathbb{D}_\omega(m, c) - z)\begin{pmatrix} G_{m,\omega}^+(z, n) \\ G_{m,\omega}^-(z, n) \end{pmatrix} = \delta_0^+(n)\ .$$

Usando as matrizes de transferência, obtêm-se para $n \leq 0$,

$$\begin{pmatrix} G_{m,\omega}^+(z, n) \\ G_{m,\omega}^-(z, n-1) \end{pmatrix} = \Phi_m^\omega(z, n, 0)\begin{pmatrix} G_{m,\omega}^+(z, 0) \\ G_{m,\omega}^-(z, -1) \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

e para $n \geq 1$,

$$\begin{pmatrix} G_{m,\omega}^+(z, n) \\ G_{m,\omega}^-(z, n-1) \end{pmatrix} = \Phi_m^\omega(z, n, 1)\begin{pmatrix} G_{m,\omega}^+(z, 1) \\ G_{m,\omega}^-(z, 0) \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

O Lema a seguir fornece uma relação importante (adaptada do Lema 3.2 de [35]) entre a média temporal dos momentos dinâmicos definida por (4) e as funções de Green definidas acima. Esta relação será usada na demonstração do Teorema 2.6.

Lema 1.10 *Para $z = E + i/T$ $(T > 0)$ e $m \geq 0$ tem-se*

$$A^{(q)}_{\delta_0^+,\omega}(m,T) = \frac{1}{\pi T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^q \int_{\mathbb{R}} (|G^+_{m,\omega}(z,n)|^2 + |G^-_{m,\omega}(z,n)|^2)\ dE.$$

Demonstração: Basta mostrar que (a outra parte é similar)

$$\frac{2}{T}\int_0^\infty e^{-2t/T}|\langle \delta_n^+, e^{-i\mathbb{D}_\omega(m,c)t}\delta_0^+\rangle|^2\ dt = \frac{1}{\pi T}\int_{\mathbb{R}} |G^+_{m,\omega}(E+i/T,n)|^2\ dE.$$

Para isto, considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t/T}\langle \delta_n^+, e^{-i\mathbb{D}_\omega(m,c)t}\delta_0^+\rangle & \text{se } t \geq 0, \\ 0 & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Note que $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Pelo Teorema Espectral

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t/T}\int_{\mathbb{R}} e^{-iE't}\ d\mu^\omega_{m,\delta_n^+}(E') & \text{se } t \geq 0, \\ 0 & \text{se } t < 0, \end{cases}$$

com a medida espectral $\mu^\omega_{m,\delta_n^+}$ definida por

$$\left\langle \delta_n^+, (\mathbb{D}_\omega(m,c) - z)^{-1}\,\delta_0^+ \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu^\omega_{m,\delta_n^+}(t)}{t-z}\ .$$

Denote por $\mathcal{F}^{-1}$ a inversa da transformada de Fourier. Usando o fato que $f \in L^1(\mathbb{R})$ e o Teorema de Fubini temos que

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}^{-1}f)(E) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_0^\infty e^{iEt}e^{-t/T}\int_{\mathbb{R}} e^{-iE't}\ d\mu^\omega_{m,\delta_n^+}(E')\ dt \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^\infty e^{it\left(E+i/T-E'\right)}\ dt\right) d\mu^\omega_{m,\delta_n^+}(E') \\
&= -\frac{i}{(2\pi)^{1/2}}\int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu^\omega_{m,\delta_n^+}(E')}{E'-(E+i/T)} \\
&= -\frac{i}{(2\pi)^{1/2}}\ G^+_{m,\omega}(E+i/T,n)\ .
\end{aligned}$$

Portanto, como $f \in L^2(\mathbb{R})$ segue que

$$\begin{aligned}\frac{2}{T}\int_0^\infty e^{-2t/T}|\langle\delta_n^+, e^{-i\mathbb{D}_\omega(m,c)t}\delta_0^+\rangle|^2\,dt &= \frac{2}{T}\,\|f\|_2^2 = \frac{2}{T}\,\|\mathcal{F}^{-1}f\|_2^2\\ &= \frac{2}{T}\int_{\mathbb{R}}|(\mathcal{F}^{-1}f)(E)|^2\,dE\\ &= \frac{1}{\pi T}\int_{\mathbb{R}}|G^+_{m,\omega}(E+i/T,n)|^2\,dE,\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. $\square$

É interessante observar que devido ao Lema 1.10 e as relações (1.9) e (1.10), pode-se obter limites inferiores dinâmicos sem precisar de informações adicionais sobre propriedades da medida espectral. Vamos terminar esta seção demonstrando que os expoentes de crescimento para a média temporal usada em (4) e para a média Cesàro são iguais (resultado adaptado de [31]).

Lema 1.11 *Seja h uma função mensurável não-negativa, com $h(t) \le Ct^n$ para algum $C > 0$ e $n \ge 0$ (em particular, se $h(t) = M_\Psi^{(q)}(m,t)$ use o Teorema 2.9). Então*

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{\log\left(\int_0^T h(t)dt\right)}{\log T} = \liminf_{T\to\infty}\frac{\log\left(\int_0^\infty e^{-2t/T}h(t)dt\right)}{\log T}.$$

Vale uma igualdade similar para $\limsup$.

Demonstração: Denote por β_e e β_d, respectivamente, o lado esquerdo e direito na relação acima. Note que para $0 \le t \le T$ tem-se $e^{-2} \le e^{-2t/T} \le 1$, e daí vale a desigualdade

$$\int_0^T h(t)dt \le e^2\int_0^\infty e^{-2t/T}h(t)dt,$$

o que implica $\beta_e \le \beta_d$. Por outro lado, tem-se para cada $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-2t/T}h(t)dt &\le \int_0^{T^{1+\epsilon}} h(t)dt + C\int_{T^{1+\epsilon}}^\infty e^{-2t/T}\,t^n dt\\ &\le \int_0^{T^{1+\epsilon}} h(t)dt + \tilde{C}e^{-2T^\epsilon}T^n.\end{aligned}$$

Como, para cada $\epsilon > 0$ fixado, $e^{-2T^\epsilon}T^n \longrightarrow 0$ quando $T \to \infty$, segue que $\beta_d \le (1+\epsilon)\beta_e$ para todo $\epsilon > 0$. Portanto $\beta_e = \beta_d$. $\square$

1.3 Preliminares: Modelo Quase-Balístico

Nesta seção coletaremos alguns conceitos e resultados preliminares que serão usados no Capítulo 3 para obter os resultados dinâmicos e espectrais para o modelo quase-balístico $H^W_{\omega,S}$ definido por (5). Esta seção pode ser adaptada de modo análogo para a correspondente versão discreta de Dirac.

Similarmente à Seção 1.2, vamos introduzir as matrizes de transferência $\Phi^W_{\omega,S}$ associadas aos operadores $H^W_{\omega,S}$. Essas matrizes são unicamente definidas pela condição que

$$\begin{pmatrix} \psi(n+1) \\ \psi(n) \end{pmatrix} = \Phi^W_{\omega,S}(E,n,0) \begin{pmatrix} \psi(1) \\ \psi(0) \end{pmatrix}$$

para toda solução ψ da equação de autovalores

$$H^W_{\omega,S}\psi = E\psi.$$

Daí,

$$\Phi^W_{\omega,S}(E,n,0) = \begin{cases} T^W_{\omega,S}(E,n)\dots T^W_{\omega,S}(E,1) & n \geq 1, \\ Id_2 & n = 0, \\ (T^W_{\omega,S}(E,n+1))^{-1}\dots(T^W_{\omega,S}(E,0))^{-1} & n \leq -1, \end{cases}$$

com

$$T^W_{\omega,S}(E,k) = \begin{pmatrix} E - \lambda F(S^k\omega) - W(k) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Seja ν uma medida de probabilidade ergódica sobre o espaço métrico compacto Ω, com respeito à transformação $S : \Omega \to \Omega$. Como na Seção 1.2, o Teorema de Furstenberg e Kesten [7] assegura que $\nu-$qtp o expoente de Lyapunov

$$\Gamma^W_S(E) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|n|} \ \ln \|\Phi^W_{\omega,S}(E,n,0)\|$$

existe e é independente de ω.

Denotemos por $\mu^W_{\omega,S}$ a medida espectral associada ao par $(H^W_{\omega,S}, \delta_1)$ e introduzimos os "momentos espectrais locais" (definidos em [30]) por

$$K_{\mu^W_{\omega,S}}(r,\epsilon) := \frac{1}{\epsilon}\int_{\mathbb{R}} \left(\mu^W_{\omega,S}(x-\epsilon, x+\epsilon)\right)^r dx \ , \tag{1.11}$$

para $r > 0$ e $\epsilon > 0$. Um ponto chave para a demonstração do resultado sobre transporte quase-balístico (Teorema 3.1) é o seguinte limite inferior para os expoentes de difusão $\beta^+_{\omega,S,W}(q)$:

Lema 1.12 *Para todo $q > 0$, se $r = (1+q)^{-1}$ tem-se*

$$\beta^+_{\omega,S,W}(q) \geq \limsup_{\epsilon\to 0} \frac{\log K_{\mu^W_{\omega,S}}(r,\epsilon)}{(r-1)\log\epsilon} \ .$$

A demonstração do Lema 1.12 segue diretamente do Teorema 2.1 de [2] e Lemas 2.1 e 2.3 de [3]. O próximo resultado converte um limite superior sobre a norma das matrizes de transferência em um limite inferior sobre a medida espectral; para a sua demonstração ver Proposição 2.1 de [30].

Lema 1.13 *Seja $H^W_{\omega,S}$ o operador definido por (5) sobre $\ell^2(\mathbb{N})$ e seja I um intervalo compacto. Existe uma constante universal C_1 e, para todo $\gamma > 0$ e $\rho > 0$, existe uma constante $C_2 = C_2(I,\gamma,\rho)$, de modo que para todo $\epsilon \in (0,1)$ e todo $x \in I$ tem-se*

$$\mu^W_{\omega,S}(x-\epsilon, x+\epsilon) \geq C_1 \int_{x-\frac{\epsilon}{2}}^{x+\frac{\epsilon}{2}} \frac{dE}{\|\Phi^W_{\omega,S}(E,N,0)\|^2} \ - \ C_2\epsilon^\gamma \ ,$$

com $N = [\epsilon^{-1-\rho}]$ (parte inteira).

Cabe aqui observarmos, como foi feito após a demonstração do Lema 1.10, que devido aos Lemas 1.12 e 1.13, é possível obter limites inferiores dinâmicos sem estudar o tipo espectral. Com o intuito de estabelecer relações entre as matrizes de transferência com condições iniciais diferentes, o próximo resultado será usado.

Lema 1.14 *Sejam $E \in \mathbb{R}$, $N > 0$ e considere*

$$L^\omega_S(N) := \sup_{1\leq n\leq N} \|\Phi^W_{\omega,S}(E,n,0)\| \ .$$

Então, para $1 \leq n \leq N$ e $\theta \in \Omega$,

$$\|\Phi^W_{\theta,S}(E,n,0)\| \leq L^\omega_S(N) e^{L^\omega_S(N)\lambda|F(S^n\theta)-F(S^n\omega)|n}.$$

Demonstração: Um argumento indutivo mostra que, para $\theta, \omega \in \Omega$ e $n \geq 1$, podemos escrever a identidade (fórmula de variação das condições iniciais)

$$\Phi^W_{\theta,S}(E,n,0) = \Phi^W_{\omega,S}(E,n,0) + \lambda \sum_{j=1}^{n} \Phi^W_{\omega,S}(E,n,j)\ B^{\theta,\omega}_S(n)\ \Phi^W_{\theta,S}(E,j,1)\ ,$$

sendo

$$B^{\theta,\omega}_S(n) = \begin{pmatrix} F(S^n\omega) - F(S^n\theta) & 0 \\ & \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por iteração, usando que $\|\Phi^W_{\omega,S}(E,n,0)\| \leq L^\omega_S(N)$ para todo $1 \leq n \leq N$, obtemos

$$\begin{aligned} \|\Phi^W_{\theta,S}(E,n,0)\| &\leq L^\omega_S(N)\left[1 + \lambda|F(S^n\theta) - F(S^n\omega)|\ L^\omega_S(N)\right]^{n-1} \\ &\leq L^\omega_S(N) e^{L^\omega_S(N)\lambda|F(S^n\theta)-F(S^n\omega)|n}, \end{aligned}$$

para $1 \leq n \leq N$. $\square$

Agora descreveremos dois resultados que serão usados na investigação do tipo espectral de $H^W_{\omega,S}$ com $W = \kappa\langle\delta_1,\cdot\rangle\delta_1$, $\kappa \in \mathbb{R}$ (ver Teorema 3.3). Os detalhes serão apresentados somente para o caso da rede $\mathbb{Z}$. Para cada $\theta \in \Omega$ e cada transformação S sobre Ω, consideremos a função $R_{\theta,S} : \mathbb{R} \to (0,\infty]$ definida por

$$R_{\theta,S}(E) = \int \frac{d\mu^0_{\theta,S}(x)}{(E-x)^2}\ ,$$

em que $\mu^0_{\theta,S} = \mu^{W=0}_{\theta,S}$. O primeiro resultado relaciona $R_{\theta,S}(E)$ com as soluções da equação de autovalores

$$H^0_{\theta,S}\psi = E\psi. \tag{1.12}$$

Ver Teorema 2.4 de [44] para sua demonstração.

Lema 1.15 *Seja $H^0_{\theta,S}$ o operador definido por (5) sobre $\ell^2(\mathbb{Z})$, com $W \equiv 0$. Então $R_{\theta,S}(E) < \infty$ se e somente se* *(i)* E *não é um autovalor de* $H^0_{\theta,S}$*;*

(ii) Vale uma das seguintes condições :

(ii.1) A equação (1.12) tem uma solução ℓ^2 *em* $(0,\infty)$ *com* $\psi(0)=0$*;*

(ii.2) (1.12) tem uma solução ℓ^2 *em* $(-\infty,0)$ *com* $\psi(0)=0$*;*

(ii.3) (1.12) tem soluções ℓ^2 $\psi_\pm$*, em ambos* $(0,\infty)$ *e* $(-\infty,0)$*, com* $\psi_+(0)\neq 0$ *e* $\psi_-(0)\neq 0$*.*

O segundo resultado é o critério de Simon-Wolff [45]. Antes de enunciá-lo, relembremos que o subespaço cíclico gerado por $\phi\in\ell^2$, para um operador auto-adjunto $\mathcal{H}$, é o fecho de $\{(\mathcal{H}-z)^{-1}\phi : z\in\mathbb{C}\}$; o vetor ϕ é cíclico para $\mathcal{H}$ se tal subespaço é todo ℓ^2. Denotemos por ℓ a medida de Lebesgue (normalizada, se necessário).

Lema 1.16 *Seja* $H^W_{\omega,S}$ *o operador definido por (5) sobre* $\ell^2(\mathbb{Z})$*, com* $W = \kappa\langle\delta_1,\cdot\rangle\delta_1$*,* $\kappa\in\mathbb{R}$*. Fixe um intervalo* $[a,b]$*. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $R_{\omega,S}(E)<\infty$ *para* $E\in[a,b]$ $\ell-qtp$*;*

(ii) restrito ao subespaço cíclico gerado por δ_1*, o operador* $H^W_{\omega,S}$ *tem espectro pontual puro em* $[a,b]$*, para* κ $\ell-qtp$*.*

Capítulo 2

Modelo de Dirac

Neste capítulo consideraremos os operadores de Dirac-Bernoulli $\mathbb{D}_\omega(m, c)$ definidos por (3), e usaremos os resultados preliminares da Seção 1.2 para estudar propriedades dinâmicas (localização dinâmica e transporte) e o tipo espectral de tais operadores. Além disso, compararemos os momentos dinâmicos $M_\Psi^{(q)}(m, t)$ associados aos operadores $\mathbb{D}(m, c)$ definidos por (2), para massas diferentes e potenciais gerais. Encerraremos o capítulo com um limite superior dinâmico balístico para os momentos, também válido para potenciais gerais.

2.1 Localização Dinâmica e Espectro Pontual

O objetivo desta seção é apresentar os resultados sobre localização dinâmica e espectro pontual para os operadores $\mathbb{D}_\omega(m, c)$. Tais resultados estão reunidos no seguinte conjunto de teoremas:

Teorema 2.1 *Seja* $(\mathbb{D}_\omega(m, c))_{\omega\in\Omega}$ *a família de operadores definidos por (3) e considere* $V \in (0, c]$, $V \neq c/\sqrt{2}$. *Então* $\boldsymbol{P}-$*qtp, o expoente de Lyapunov* Γ_m *satisfaz*

(i) (i.1) $\Gamma_m(E \neq \pm V) > 0$ *para* $m \geq 0$,

(i.2) $\Gamma_m(E = \pm V) > 0$ *para* $m > 0$,

(i.3) $\Gamma_0(E = \pm V) = 0$.

(ii) *Seja $m \geq 0$; então $\boldsymbol{P}-$qtp, $\sigma(\mathbb{D}_\omega(m,c))$ é pontual puro.*

(iii)(iii.1) *Seja $m > 0$. Então $\boldsymbol{P}-$qtp, o operador $\mathbb{D}_\omega(m,c)$ apresenta localização dinâmica em seu espectro.*

(iii.2) *Para qualquer intervalo fechado $I \subset \sigma(\mathbb{D}_\omega(0,c))$, com $\pm V \notin I$, o operador $\mathbb{D}_\omega(0,c)$ apresenta localização dinâmica em I.*

Teorema 2.2 *Seja $(\mathbb{D}_\omega(m,c))_{\omega\in\Omega}$ com $m \geq 0$, a família de operadores definidos por (3) e considere $V > c$, $V \neq c\sqrt{2+m^2c^2}$. Então $\boldsymbol{P}-$qtp, o espectro de $\mathbb{D}_\omega(m,c)$ é pontual puro e este operador apresenta localização dinâmica em seu espectro.*

Teorema 2.3 *Seja $(\mathbb{D}_\omega(m,c))_{\omega\in\Omega}$ com $m \geq 0$, a família de operadores definidos por (3) e considere $V = c/\sqrt{2}$ (respectivamente, $V = c\sqrt{2+m^2c^2}$). Então as mesmas conclusões do Teorema 2.1 (respec., Teorema 2.2) valem, exceto para as quatro possibilidades de energias $E_V = \pm c\sqrt{2+m^2c^2} \pm c/\sqrt{2}$ (respec., $E_V = 0$). O fato é que $E_V = \pm c\sqrt{2+m^2c^2} \pm c/\sqrt{2}$ (respec., $E_V = 0$) são energias tais que $\Gamma_m(E_V) = 0$.*

Observemos que o fato de haver casos de energias/potenciais excluídos acima, é devido a não ter sido possível aplicar o Lema 1.3. Agora vamos apresentar as demonstrações dos Teoremas 2.1, 2.2 e 2.3. Em particular, serão demonstrados os itens (i) e (ii) do Teorema 0.2 (ver Introdução).

Demonstração **(Teoremas 2.1 e 2.2)**: A estratégia da demonstração é baseada na referência [19], onde o operador de Schrödinger dimerizado aleatório foi estudado. Como para o operador de Dirac discreto existem o papel particular desempenhado pela massa e algumas possibilidades diferentes para as matrizes de transferência, será apresentada uma demonstração bastante detalhada. A idéia é mostrar que dados $\epsilon > 0$ e $I \subset \sigma(\mathbb{D}_\omega(m,c))$ um intervalo de energia compacto não contendo os valores de V excluídos, para cada $0 < \gamma < \Gamma_m(I) := \inf\{\Gamma_m(E) : E \in I\}$ existe uma constante $C(\omega,\epsilon,\gamma)$ e, para cada autofunção $\varphi_{j,\omega} = \begin{pmatrix} \varphi^+_{j,\omega} \\ \varphi^-_{j,\omega} \end{pmatrix}$ com energia $E_{j,\omega} \in I$, existe um "centro" $z_{j,\omega} \in \mathbb{Z}$, de forma que

$$\|\varphi_{j,\omega}(n)\| \leq C(\omega, \epsilon, \gamma) e^{\gamma |z_{j,\omega}|^{\epsilon}} e^{-\gamma |n - z_{j,\omega}|}, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}. \tag{2.1}$$

Se Ψ decai exponencialmente com taxa $\tau > 0$ e se $q > 0$, sabe-se que (2.1) (condição SULE) implica a existência de uma constante $C_\Psi(m, I, \omega)$ com

$$\sup_t M^{(q)}_{\Psi,I,\omega}(m,t) \leq C_\Psi(m, I, \omega) \qquad \mathbf{P} - qtp\ ,$$

i.e., o operador $\mathbb{D}_\omega(m,c)$ apresenta localização dinâmica em I (ver Seção 2 em [29]).

Para demonstrar (ii) e (2.1), é suficiente mostrar que o expoente de Lyapunov é estritamente positivo, pois neste caso valem os Lemas 1.5 e 1.6. Usando a análise de multiescala (Lema 1.7), juntamente com as propriedades (**P1**) e (**P2**), e seguindo a demonstração do Teorema 3.1 de [29] (adaptada apropriadamente para $\mathbb{D}_\omega(m,c)$), obtêm-se (ii) e (2.1).

Agora a demonstração de (i). Lembre-se (ver Seção 1.2) que $\mathbf{P}-$qtp o expoente de Lyapunov Γ_m existe e é independente de ω. Primeiramente, consideremos as energias $E \neq \pm V$ e mostremos que $\Gamma_m(E \neq \pm V) > 0$ para todo $m \geq 0$ e para todo $E \in \sigma(\mathbb{D}_\omega(m,c))$. De fato, seja $\mathcal{G}_m(E)$ como no Lema 1.3. Tome $\alpha = E - V$, $\beta = E + V$ e reescreva $T^V_m(E) = T^{(\alpha)}_m$, $T^{-V}_m(E) = T^{(\beta)}_m$. No caso presente, $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$.

Como o problema é simétrico em α e β, a demonstração é reduzida ao estudo dos 3 casos:

a) $T^{(\alpha)}_m$ e $T^{(\beta)}_m$ são elípticas ($|tr\ T^{(\alpha)}_m| < 2,\ |tr\ T^{(\beta)}_m| < 2$);

b) $T^{(\alpha)}_m$ é parabólica ($|tr\ T^{(\alpha)}_m| = 2$);

c) $T^{(\alpha)}_m$ é hiperbólica ($|tr\ T^{(\alpha)}_m| > 2$).

Note que nos casos **b)** e **c)** o grupo $\mathcal{G}_m(E)$ não é compacto.

Caso a) Como $T^{(\alpha)}_m$ e $T^{(\beta)}_m$ são elípticas, tem-se $|\alpha|, |\beta| \in (mc^2, c\sqrt{4 + m^2c^2})$. Neste caso, tais matrizes não comutam. Como o operador

$$T^{(\alpha)}_m T^{(\beta)}_m\ (T^{(\alpha)}_m)^{-1} (T^{(\beta)}_m)^{-1}$$

construído de dois elementos elípticos não-comutativos é hiperbólico, segue que $\mathcal{G}_m(E)$ não é compacto. Além disso, note que

$$tr\ (T_m^{(\alpha)})^2 = \frac{\alpha^4}{c^4} - \left(2m^2 + \frac{4}{c^2}\right)\alpha^2 + m^2c^2(4+m^2c^2) + 2$$

(análogo para $T_m^{(\beta)}$). Daí, se $\alpha^2 \neq 2c^2 + m^2c^4$ ou $\beta^2 \neq 2c^2 + m^2c^4$, então $T_m^{(\alpha)}$ e $(T_m^{(\alpha)})^2$ ou $T_m^{(\beta)}$ e $(T_m^{(\beta)})^2$ são elípticas. Como elementos elípticos não tem pontos fixos em $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, segue que para qualquer $\tilde{x} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, $\mathcal{G}_m(E)\cdot\tilde{x}$ contém pelo menos os três elementos $\tilde{x}$, $T_m^{(\alpha)}\cdot\tilde{x}$, $(T_m^{(\alpha)})^2\cdot\tilde{x}$ ou $\tilde{x}$, $T_m^{(\beta)}\cdot\tilde{x}$, $(T_m^{(\beta)})^2\cdot\tilde{x}$. Portanto, pelo Lema 1.3, $\Gamma_m(E) > 0$. Se, por outro lado, $\alpha^2 = 2c^2 + m^2c^4$ e $\beta^2 = 2c^2 + m^2c^4$, então $E = 0$ e $V = c\sqrt{2+m^2c^2}$, que é um dos pares excluídos descritos no Teorema 2.3.

Caso b) Suponha que $T_m^{(\alpha)}$ é parabólica, isto é, $|\alpha| = mc^2$ ou $|\alpha| = c\sqrt{4+m^2c^2}$. Primeiro vamos discutir a possibilidade $\alpha = mc^2$ (o caso $\alpha = -mc^2$ é similar). Neste caso,

$$T_m^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 & 2mc \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{e então} \quad (T_m^{(\alpha)})^n = \begin{pmatrix} 1 & 2nmc \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Seja $\{e_1, e_2\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Considerando um vetor $x = x_1e_1 + x_2e_2$ e denotando por $\tilde{x}$ sua direção, conclui-se que $\lim_{n\to\infty}(T_m^{(\alpha)})^n\cdot\tilde{x} = \tilde{e}_1$. Se $\breve{\mu}$ é uma medida de probabilidade que é invariante sob a ação de $\mathcal{G}_m(E)$, e se $f \in C_0^\infty(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2))$, então pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue tem-se

$$f(\tilde{e}_1) = \lim_{n\to\infty}\int f\left((T_m^{(\alpha)})^n\cdot\tilde{x}\right)\, d\breve{\mu}(\tilde{x})\ .$$

Isto significa que $\breve{\mu} = \delta_{\tilde{e}_1}$. Por outro lado, a matriz $T_m^{(\beta)}$ não deixa invariante a direção $\tilde{e}_1$, pois

$$T_m^{(\beta)}\ e_1 = \left(1 + \frac{m^2c^4 - \beta^2}{c^2}\right)e_1 + \frac{-\beta + mc^2}{c}\ e_2 \quad \text{e} \quad \beta \neq mc^2\ .$$

Portanto, não existe medida invariante sob a ação de $\mathcal{G}_m(E)$, e daí pelo Lema 1.3, obtêm-se $\Gamma_m(E) > 0$.

Considere agora a possibilidade $\alpha = c\sqrt{4+m^2c^2}$ (o caso $\alpha = -c\sqrt{4+m^2c^2}$ é similar). Neste caso, um autovetor de

$$T_m^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} -3 & mc+\sqrt{4+m^2c^2} \\ \\ mc-\sqrt{4+m^2c^2} & 1 \end{pmatrix}$$

é $v_1 = \left(\frac{mc+\sqrt{4+m^2c^2}}{2}, 1\right)$. Escolhendo $v_2 = \left(\frac{-mc+\sqrt{4+m^2c^2}}{2}, -1\right)$ um vetor ortogonal a v_1, a matriz $T_m^{(\alpha)}$ na base $\{v_1, v_2\}$ é dada por

$$\begin{pmatrix} -1 & -4-m^2c^2+mc\sqrt{4+m^2c^2} \\ \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Repetindo os cálculos anteriores para este caso, obtêm-se $\breve{\mu} = \delta_{\tilde{v}_1}$. Mas $T_m^{(\beta)}$ não deixa invariante a direção $\tilde{v}_1$, exceto para $\beta = 0$ ou $\beta = c\sqrt{4+m^2c^2} = \alpha$, que são excluídos pois a primeira condição implica $E = -V$ e a segunda implica $V = 0$. Portanto, não existe medida invariante e daí, pelo Lema 1.3, $\Gamma_m(E) > 0$.

Caso c) Suponha agora que $T_m^{(\alpha)}$ é hiperbólica (então $|\alpha| < mc^2$ ou $|\alpha| > c\sqrt{4+m^2c^2}$). É suficiente estudar a órbita das autodireções de $T_m^{(\alpha)}$, a saber

$$e_m^{\epsilon} = \begin{pmatrix} \alpha^2 - m^2c^4 + \epsilon\sqrt{(\alpha^2-m^2c^4)(\alpha^2-m^2c^4-4c^2)} \\ \\ 2c(\alpha - mc^2) \end{pmatrix}, \quad \epsilon = \pm 1.$$

Se $T_m^{(\beta)}$ é hiperbólica, então a órbita de e_m^{ϵ} é infinita. Daí, $\Gamma_m(E) > 0$ pelo Lema 1.3. Se $T_m^{(\beta)}$ é parabólica, retorna-se ao caso b). Finalmente, suponha que $T_m^{(\beta)}$ é elíptica. Se $T_m^{(\beta)}\tilde{e}_m^{\epsilon} \neq \tilde{e}_m^{-\epsilon}$, então $T_m^{(\beta)}\tilde{e}_m^{\epsilon}$ não pode pertencer as autodireções de $T_m^{(\alpha)}$ e sua órbita é infinita. Daí, $\Gamma_m(E) > 0$ pelo Lema 1.3. Se $T_m^{(\beta)}\tilde{e}_m^{\epsilon} = \tilde{e}_m^{-\epsilon}$, então após alguns cálculos obtêm-se as equações

$$\left(1 + m^2c^2 - \frac{\beta^2}{c^2}\right)(\alpha^2 - m^2c^4 + \epsilon u) = 4(m^2c^4 - \beta\alpha) + (\alpha^2 - m^2c^4 - \epsilon u)$$

com $\epsilon = \pm 1$ e $u = \sqrt{(\alpha^2 - m^2c^4)(\alpha^2 - m^2c^4 - 4c^2)} \neq 0$. Isto implica $\beta^2 = 2c^2 + m^2c^4$ e $\alpha = \beta \pm c\sqrt{2}$, donde $V = c/\sqrt{2}$ e $E = \pm c\sqrt{2 + m^2c^2} - c/\sqrt{2}$. O caso simétrico em que $T_m^{(\beta)}$ é hiperbólica implica $\alpha^2 = 2c^2 + m^2c^4$ e $\beta = \alpha \pm c\sqrt{2}$, donde $V = c/\sqrt{2}$ e $E = \pm c\sqrt{2 + m^2c^2} + c/\sqrt{2}$. Esses são pares excluídos que serão discutidos na demonstração do Teorema 2.3.

Considere agora a energia $E = V$ (o caso $E = -V$ é análogo). Note que $\alpha = 0$ e $\beta = 2V$. Primeiro será discutido o caso $m > 0$. As duas matrizes de transferência possíveis são

$$T_m^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 + m^2c^2 & mc \\ mc & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad T_m^{(\beta)} = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{m^2c^4 - 4V^2}{c^2} & \dfrac{mc^2 + 2V}{c} \\ \dfrac{mc^2 - 2V}{c} & 1 \end{pmatrix}.$$

Observe que $T_m^{(\alpha)}$ e $T_m^{(\beta)}$ não comutam, e que $T_m^{(\alpha)}$ é hiperbólica. É suficiente estudar este caso para $\beta = c\sqrt{4 + m^2c^2}$ ($T_m^{(\beta)}$ é parabólica). As autodireções de $T_m^{(\alpha)}$ são

$$e_m^{\delta} = \begin{pmatrix} \dfrac{mc + \delta\sqrt{4 + m^2c^2}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \delta = \pm 1.$$

As matrizes $T_m^{(\alpha)}$ e $T_m^{(\beta)}$ na base $\{e_m^1, e_m^{-1}\}$ são dadas, respectivamente, por

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_{-1} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} -1 & 4 + m^2c^2 - mc\sqrt{4 + m^2c^2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

com

$$\lambda_1 \lambda_{-1} = \left(1 + \frac{m^2c^2}{2} + \frac{mc\sqrt{4 + m^2c^2}}{2}\right)\left(1 + \frac{m^2c^2}{2} - \frac{mc\sqrt{4 + m^2c^2}}{2}\right) = 1.$$

Suponha que $T_m^{(\alpha)}$ ocorra com probabilidade $0 < p < 1$ e $T_m^{(\beta)}$ ocorra com probabilidade $1 - p$. Denote por n_α (respec. n_β) o número de vezes que $T_m^{(\alpha)}$ (respec. $T_m^{(\beta)}$) ocorre no produto $\Phi_m^{\omega}(E, n, 1)$. Supondo, sem perda de generalidade, que $T_m^{V_\omega(1)}(E) = T_m^{(\alpha)}$, tem-se

$$\Phi_m^\omega(E,n,1) = \begin{pmatrix} \lambda_1^{n_\alpha} & C_n P(\lambda_1, \lambda_{-1}) \\ \\ 0 & \lambda_{-1}^{n_\alpha} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{P}-$qtp, em que C_n é uma constante e $P(\lambda_1, \lambda_{-1})$ é um polinômio em λ_1 e λ_{-1}. Assim,

$$\left\|\Phi_m^\omega(E,n,1)\right\| \geq \left\| \begin{pmatrix} \lambda_1^{n_\alpha} \\ \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \lambda_1^{n_\alpha}, \quad \lambda_1 > 1,$$

e portanto $\mathbf{P}-$qtp,

$$\Gamma_m(E=V) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|n|} \ln \|\Phi_m^\omega(E,n,1)\| \geq (\ln \lambda_1) \lim_{n\to\infty} \frac{n_\alpha}{|n|} = (\ln \lambda_1) p > 0.$$

Agora será discutido o caso $m = 0$. Neste caso,

$$T_0^{(\alpha)} = Id_2 \quad \text{e} \quad T_0^{(\beta)} = \begin{pmatrix} 1 - 4V^2/c^2 & 2V/c \\ \\ -2V/c & 1 \end{pmatrix}.$$

Então, encontra-se

$$\lim_{n\to\infty} \|(T_0^{(\beta)})^n\|^{1/n} = 1$$

se $V \in (0, c]$ e

$$\lim_{n\to\infty} \|(T_0^{(\beta)})^n\|^{1/n} > 1$$

se $V > c$. Daí, se $V \in (0, c]$, $V \neq c/\sqrt{2}$, então

$$\Gamma_0(E=V) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_\beta}{|n|} \ln \|(T_0^{(\beta)})^{n_\beta}\|^{1/n_\beta} = (1-p)\ln 1 = 0,$$

e $\Gamma_0(E = V) > 0$ se $V > c$. $\square$

Demonstração **(Teorema 2.3)**: Analisando a demonstração dos Teoremas 2.1 e 2.2, observa-se que para $V = c/\sqrt{2}$ (respec. $V = c\sqrt{2 + m^2c^2}$)

tem-se $\Gamma_m(E_V \neq \pm c\sqrt{2+m^2c^2} \pm c/\sqrt{2}) > 0$ (respec. $\Gamma_m(E_V \neq \ 0) > 0$) e então as mesmas conclusões do Teorema 2.1 (respec. Teorema 2.2) valem. Resta mostrar que Γ_m se anula para $(V = c\sqrt{2+m^2c^2},\ E_V = 0)$ e os quatro pares $(V = c/\sqrt{2},\ E_V = \pm c\sqrt{2+m^2c^2} \pm c/\sqrt{2}\ )$. Note que em todos esses casos $E_V \in \sigma(\mathbb{D}_\omega(m,c))$ $\mathbf{P}-$qtp.

Primeiro será tratado o caso $(V = c/\sqrt{2},\ E_V = -c\sqrt{2+m^2c^2} - c/\sqrt{2}\ )$ (os outros três casos excluídos para $V = c/\sqrt{2}$ são similares). Neste caso, tem-se $\beta = -c\sqrt{2+m^2c^2}$ e $\alpha = \beta - c\sqrt{2}$. Os autovetores de $T_m^{(\alpha)}$ são dados por

$$\begin{pmatrix} \dfrac{2c - \sqrt{2}\beta + \epsilon\sqrt{4c^2 + 2m^2c^4 - 2\sqrt{2}c\beta}}{\beta - c\sqrt{2} - mc^2} \\ \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \epsilon = \pm 1,$$

e olhando para as matrizes na base formada por esses dois vetores, o estudo é reduzido ao produto de matrizes dos dois tipos abaixo:

$$\begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & \kappa_- \\ \kappa_+ & 0 \end{pmatrix}$$

com $\lambda_+\lambda_- = 1$ e $\kappa_+\kappa_- = -1$, sendo

$$\lambda_\pm = -1 + \frac{\sqrt{2}\beta}{c} \pm \frac{\sqrt{4c^2 + 2m^2c^4 - 2\sqrt{2}c\beta}}{c}$$

e

$$\kappa_\pm = \Big(-\frac{\beta}{c} + mc\Big)\Big(\frac{2c - \sqrt{2}\beta \pm \sqrt{4c^2 + 2m^2c^4 - 2\sqrt{2}c\beta}}{\beta - c\sqrt{2} - mc^2}\Big) + 1.$$

Além disso,

$$(T_m^{(\beta)})^2 = \begin{pmatrix} -1 & mc + \beta/c \\ \\ mc - \beta/c & 1 \end{pmatrix}^2 = -Id_2\ .$$

Assim, a demonstração de que

$$\Gamma_m(E_V = -c\sqrt{2+m^2c^2} - c/\sqrt{2},\ V = c/\sqrt{2}\ ) = 0$$

é análoga ao caso Schrödinger (ver a demonstração do Teorema 2.4 em [19]).

Agora considere o caso excluído ($V = c\sqrt{2+m^2c^2}$, $E_V = 0$). Neste caso, $\alpha^2 = \beta^2 = 2c^2 + m^2c^4$. Como $\alpha \neq \beta$ (caso contrário, $V = 0$), então $\alpha = -\beta = \pm c\sqrt{2+m^2c^2}$. Notando que $(T_m^{(\alpha)})^2 = (T_m^{(\beta)})^2 = -Id_2$ e $T_m^{(\alpha)} T_m^{(\beta)}$ é hiperbólica, a demonstração de que

$$\Gamma_m(E_V = 0,\ V = c\sqrt{2+m^2c^2}\ ) = 0$$

é novamente análoga ao correspondente caso Schrödinger (ver a demonstração do Teorema 2.4 em [19]). $\square$

2.2 Transporte

Nesta seção apresentaremos o resultado sobre transporte quântico para os operadores de Dirac-Bernoulli $\mathbb{D}_\omega(0,c)$ com massa zero ($m = 0$). Tais operadores têm energias críticas $E_V = \pm V$ para $V \in (0, c]$, $V \neq c/\sqrt{2}$, como na Definição 1.8, pois $T_0^V(V) = Id_2$ e $T_0^{-V}(V)$ é elíptica ou $T_0^{-V}(-V) = Id_2$ e $T_0^V(-V)$ é elíptica. Assim, existe uma matriz Q real e invertível satisfazendo

$$Q\ T_0^{\pm V}(E_V)\ Q^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\eta_\pm) & -\mathrm{sen}(\eta_\pm) \\ \mathrm{sen}(\eta_\pm) & \cos(\eta_\pm) \end{pmatrix}.$$

Como os autovalores desta matriz são $e^{i\eta_\pm}$ e $e^{-i\eta_\pm}$, para ambos os casos acima segue que $\eta_+ - \eta_- \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (uma condição requerida para os resultados de [33]). Usando as variáveis de Prüfer modificadas, os shifts de fase, as somas oscilatórias e as estimativas de desvio amplo, como em [33] (adaptados adequadamente para $\mathbb{D}_\omega(0,c)$), obtêm-se o seguinte resultado (detalhes omitidos):

Lema 2.4 *Seja $\kappa > 0$ arbitrário. Então existem $b > 0$ e $C < \infty$ tais que para cada $N \in \mathbb{N}$, existe um conjunto $\Omega_N(\kappa) \subset \Omega$ com $\boldsymbol{P}(\Omega_N(\kappa)) \leq Ce^{-bN^\kappa}$ e*

$$\|\Phi_0^\omega(E,n,1)\| \leq C$$

para todo $\omega \in \Omega \backslash \Omega_N(\kappa)$, $E \in [E_V - N^{-\kappa-1/2}, E_V + N^{-\kappa-1/2}]$ e $1 \leq n \leq N$.

Por outro lado, como $\|Q\ T_0^{\pm V}(E_V)\ Q^{-1}\| = 1$, expandindo $T_0^{\pm V}(E_V+\epsilon)$ em potências de ϵ obtêm-se

$$\|Q\ T_0^{\pm V}(E_V+\epsilon)\ Q^{-1}\| \leq 1 + a|\epsilon|$$

para $|\epsilon| \leq \delta,\ \ 0 < a < \infty,$ e deduz-se o seguinte

Lema 2.5 *Para cada $\delta > 0$ existe $C < \infty$, de forma que para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $E \in [E_V - \delta, E_V + \delta]$, tem-se*

$$\|\Phi_0^\omega(E, n, 1)\| \leq Ce^{C\delta|n-1|}.$$

Agora vamos apresentar o resultado sobre transporte para os operadores $\mathbb{D}_\omega(0,c)$; em particular, abordaremos o item (iii) do Teorema 0.2 (ver Introdução). Recorde a média temporal $A_{\Psi,\omega}^{(q)}(0,T)$ definida em (4).

Teorema 2.6 *Seja $(\mathbb{D}_\omega(0,c))_{\omega\in\Omega}$ a família de operadores definidos por (3) e considere $V \in (0,c]$, $V \neq c/\sqrt{2}$. Então, para $q > 0$ e Ψ com apenas uma componente não-nula, existe $0 < C_q(\omega) < \infty$ de modo que para $T \geq 1$,*

(i) $A_{\Psi,\omega}^{(q)}(0,T) \geq C_q(\omega)T^{q-1/2}$ $\qquad \boldsymbol{P} - qtp,$

(ii) $A_{\Psi,\omega}^{(q)}(0,T) \geq C_q(\omega)T^{q-1}$ $\qquad$ *para todo ω,*

i.e., $\mathbb{D}_\omega(0,c)$ apresenta transporte quântico em seu espectro.

Demonstração:
(i) Demonstraremos o teorema para $\Psi = \delta_0^+$ (o caso geral é análogo). Dado $\kappa > 0$, pelo Lema 2.4 existem $b > 0$ e $C < \infty$ de modo que, aplicando esse lema para $N = [T]$, juntamente com o Lema 1.9 para $m = 0$ e $\zeta = i/T$, conclui-se que existem $\tilde{C} < \infty$ e um conjunto $\Omega_N(\kappa) \subset \Omega$ com $\mathbf{P}(\Omega_N(\kappa)) \leq Ce^{-bN^\kappa}$ satisfazendo

$$\|\Phi_0^\omega(E + i/T, n, 1)\| \leq \tilde{C} \tag{2.2}$$

para todo $\omega \in \Omega\backslash\Omega_N(\kappa)$, $E \in I_V = [E_V - N^{-\kappa-1/2}, E_V + N^{-\kappa-1/2}]$ e $1 \leq n \leq N$. Supondo que

$$|G_{0,\omega}^+(E + i/T, 1)|^2 + |G_{0,\omega}^-(E + i/T, 0)|^2 \geq B_1(\omega) > 0,$$

segue de (1.10) e da igualdade $\|\Phi_0^\omega(E+i/T,n,1)^{-1}\| = \|\Phi_0^\omega(E+i/T,n,1)\|$ que

$$\max\{|G_{0,\omega}^+(E+i/T,n)|^2, |G_{0,\omega}^-(E+i/T,n-1)|^2\} \geq \frac{B_1(\omega)}{2\|\Phi_0^\omega(E+i/T,n,1)\|^2} \, .$$

Assim, substituindo (2.2) e a relação acima no Lema 1.10, obtêm-se $\mathbf{P}-$qtp,

$$\begin{aligned} A_{\delta_0^+,\omega}^{(q)}(0,T) &\geq \frac{1}{\pi T} \sum_{0 \leq n \leq [T]} n^q \int_{I_V} \frac{B_1(\omega)}{2C^2}\, dE \;\geq\; B_q(\omega) T^q N^{-\kappa-1/2} \\ &\geq C_q(\omega) T^{q-1/2-\kappa}, \end{aligned}$$

para alguma constante $C_q(\omega) > 0$. Se, por outro lado,

$$|G_{0,\omega}^+(E+i/T,0)|^2 + |G_{0,\omega}^-(E+i/T,-1)|^2 \geq B_2(\omega) > 0,$$

então obtêm-se a mesma estimativa de modo análogo, usando (1.9) em vez de (1.10). Como $\kappa > 0$ é arbitrário, conclui-se o resultado.
(ii) Segue dos argumentos acima usando o Lema 2.5 no lugar do Lema 2.4.
$\square$

2.3 Comparação Dinâmica

O objetivo desta seção é comparar os momentos dinâmicos $M_\Psi^{(q)}(m,t)$ (ver Definição 0.1) associados aos operadores $\mathbb{D}(m,c)$ definidos por (2), para massas diferentes e potenciais gerais; em particular para os casos Bernoulli massivo e massa zero. Além disso, será apresentado um limite superior balístico para os momentos dinâmicos, também válido para potenciais gerais (ver Teorema 2.9).

O principal resultado desta seção é o

Teorema 2.7 *Sejam $\mathbb{D}(m,c)$ e $\mathbb{D}(m',c)$ operadores de Dirac sobre $l^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}^2)$ definidos por (2) com o mesmo potencial $\tilde{V}$, e seja Ψ o estado inicial com apenas uma componente não-nula. Dado $T > 0$, existe uma constante $B_q > 0$ de modo que*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| M_\Psi^{(q)}(m,t) - M_\Psi^{(q)}(m',t) \right| \leq B_q \, |m-m'| c^2 \, T^{q+2}. \qquad (2.3)$$

Demonstração: Observe que para $m = m'$ o resultado é imediato. Suponha $m \neq m'$. Para a demonstração assumiremos que $m > 0,\ m' = 0$ e $\Psi = \delta_0^+$ (o caso $m > 0,\ m' > 0$ e Ψ como na hipótese é similar).

Para $\alpha > 0$ fixado, considere o espaço de Banach

$$B_\alpha := \left\{ \varphi \in l^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2) :\ \|\varphi\|_\alpha = \sup_{k \in \mathbb{Z}} e^{\alpha|k|} \Big(|\langle \delta_k^+, \varphi \rangle| + |\langle \delta_k^-, \varphi \rangle| \Big) < \infty \right\}.$$

Como $\mathbb{D}(m,c)$ é um operador limitado em B_α, segue que

$$\begin{aligned} |\langle \delta_n^+, e^{-i\mathbb{D}(m,c)t}\delta_0^+ \rangle| + |\langle \delta_n^-, e^{-i\mathbb{D}(m,c)t}\delta_0^+ \rangle| &\leq \|e^{-i\mathbb{D}(m,c)t}\delta_0^+\|_\alpha \ e^{-n\alpha} \\ &\leq e^{-n\alpha + t\|\mathbb{D}(m,c)\|_\alpha}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Para $k \in \mathbb{N}$ denote por X^k a restrição do operador posição X ao conjunto $\{n \in \mathbb{Z} :\ |n| \leq k\}$ e por $M_{\delta_0^+}^{(q),k}(m,t)$ o correspondente momento dinâmico. Então, para todo $t \leq \dfrac{\alpha\ k}{2\|\mathbb{D}(m,c)\|_\alpha}$, usando (2.4) tem-se

$$\left| M_{\delta_0^+}^{(q)}(m,t) - M_{\delta_0^+}^{(q),k}(m,t) \right| =$$

$$\begin{aligned} = \sum_{|n|>k} |n|^q \left(\left| \langle \delta_n^+, e^{-i\mathbb{D}(m,c)t}\delta_0^+ \rangle \right|^2 + \left| \langle \delta_n^-, e^{-i\mathbb{D}(m,c)t}\delta_0^+ \rangle \right|^2 \right) \\ \leq\ C_1(q)k^q e^{-k\alpha + 2t\|\mathbb{D}(m,c)\|_\alpha} \leq\ C_1(q)k^q. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Além disso, segue da fórmula de DuHamel que

$$M_{\delta_0^+}^{(q),k}(m,t) - M_{\delta_0^+}^{(q),k}(0,t) =$$

$$-i\int_0^t \left\langle \delta_0^+, e^{i\mathbb{D}(m,c)t}|X^k|^q e^{-i\mathbb{D}(m,c)(t-s)} \left(\mathbb{D}(m,c) - \mathbb{D}(0,c)\right) e^{-i\mathbb{D}(0,c)s}\delta_0^+ \right\rangle ds$$

$$+i\int_0^t \left\langle \delta_0^+, e^{i\mathbb{D}(m,c)(t-s)}(\mathbb{D}(m,c) - \mathbb{D}(0,c))e^{i\mathbb{D}(0,c)s}|X^k|^q e^{-i\mathbb{D}(0,c)t}\delta_0^+ \right\rangle ds.$$

Daí, para $t \leq \dfrac{\alpha\ k}{2\|\mathbb{D}(m,c)\|_\alpha}$, usando (2.4), o fato do operador $e^{i\mathbb{D}(m,c)t}$ sobre $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)$ ser unitário e Cauchy-Schwarz, encontra-se

$$\begin{aligned} \left| M_{\delta_0^+}^{(q),k}(m,t) - M_{\delta_0^+}^{(q),k}(0,t) \right| &\leq\ C_2(q)mc^2 k^{q+1} t\ e^{-k\alpha + t\|\mathbb{D}(m,c)\|_\alpha} \\ &\leq\ C_2(q)mc^2 \frac{\alpha}{2\|\mathbb{D}(m,c)\|_\alpha}\ k^{q+2}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Assim, de (2.5) e (2.6) obtêm-se

$$\left| M_{\delta_0^+}^{(q)}(m,t) - M_{\delta_0^+}^{(q)}(0,t) \right| \leq B_q m c^2 \frac{\alpha}{2\|\mathbb{D}(m,c)\|_\alpha} \, k^{q+2},$$

para todo $t \leq \dfrac{\alpha \, k}{2\|\mathbb{D}(m,c)\|_\alpha}$.

Agora, para cada $T > 0$, escolha k sendo o menor inteiro de modo que

$$k \geq \frac{2\|\mathbb{D}(m,c)\|_\alpha}{\alpha} \, T.$$

Portanto, para todo $t \leq T$,

$$\left| M_{\delta_0^+}^{(q)}(m,t) - M_{\delta_0^+}^{(q)}(0,t) \right| \leq B_q m c^2 T^{q+2}. \qquad \square$$

Com respeito ao modelo de Dirac-Bernoulli (3), a relação (2.3) para $m > 0$ e $m' = 0$ fornece uma estimativa de como, para tempos pequenos e/ou massa suficientemente pequena, a dinâmica do regime localizado acompanha a do regime não-localizado. Em termos da média temporal dos momentos dinâmicos $A_{\Psi,\omega}^{(q)}(m,T)$, definida em (4), tem-se

Corolário 2.8 *Seja $(\mathbb{D}_\omega(m,c))_{\omega\in\Omega}$ com $m \geq 0$, a família de operadores definidos por (3) e considere $V \in (0,c]$, $V \neq c/\sqrt{2}$. Então, para $q > 0$ e Ψ com apenas uma componente não-nula, existe $\tilde{C}_{q,\omega} > 0$ tal que para $T \geq 1$,*

$$\left| 1 - \frac{A_{\Psi,\omega}^{(q)}(m,T)}{A_{\Psi,\omega}^{(q)}(0,T)} \right| \leq \tilde{C}_{q,\omega} \, m c^2 T^{5/2} \qquad \boldsymbol{P} - qtp \; .$$

Note que o expoente na potência de T não depende de q.

Demonstração: Aplicando o Teorema 2.7 com $m > 0$ e $m' = 0$, segue que para todo $T > 0$,

$$\left| A_{\Psi,\omega}^{(q)}(m,T) - A_{\Psi,\omega}^{(q)}(0,T) \right| \leq \Upsilon(q+3) \; C_{q,\omega} \, m c^2 T^{q+2},$$

em que $\Upsilon(q) = \int_0^\infty e^{-u} u^{q-1} du$ (função gama). Pelo Teorema 2.6 (i), existe uma constante $B_q(\omega) > 0$ tal que para $T \geq 1$,

$$A_{\Psi,\omega}^{(q)}(0,T) \geq B_q(\omega) T^{q-1/2} \qquad \mathbf{P} - qtp,$$

e o resultado segue com $\tilde{C}_{q,\omega} = \Upsilon(q+3)\ C_{q,\omega}/B_q(\omega)$. $\square$

O Teorema seguinte estabelece um limite superior bem geral para os momentos dinâmicos; note que ele é válido para qualquer potencial $\tilde{V}$ e não é restrito ao caso Bernoulli.

Teorema 2.9 *Sejam $\mathbb{D}(m,c)$ com $m \geq 0$, os operadores de Dirac definidos por (2) e Ψ com apenas uma componente não-nula (portanto, no domínio de $|X|^q$ para todo $q > 0$). Então, para cada $q \in \mathbb{N}$, existe $0 < K_q(\tilde{V}, m, c) < \infty$ de forma que*

$$M_\Psi^{(q)}(m,t) \leq K_q(\tilde{V}, m, c)\ t^q, \quad t \geq 1.$$

Demonstração: Os argumentos serão uma variação de [42]. Defina o operador

$$p := i\,[\mathbb{D}(m,c), X] = ci \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{D}^* - 1 \\ \mathcal{D} + 1 & 0 \end{pmatrix}$$

com $[\cdot\ ,\ \cdot]$ denotando o comutador. Note que p é auto-adjunto e limitado. Sejam

$$X(t) = e^{i\mathbb{D}(m,c)t} X e^{-i\mathbb{D}(m,c)t} \quad \text{e} \quad p(t) = e^{i\mathbb{D}(m,c)t} p\ e^{-i\mathbb{D}(m,c)t}.$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}X(t) = i\,[\mathbb{D}(m,c), X(t)] = e^{i\mathbb{D}(m,c)t} i\,[\mathbb{D}(m,c), X]\, e^{-i\mathbb{D}(m,c)t} = p(t),$$

e portanto

$$X(t) = X + \int_0^t p(s)\, ds.$$

Usando esta relação, a limitação $\|p(t)\| = \|p\| < \infty$ para todo t, a desigualdade de Cauchy-Schwarz, e mantendo somente os termos dominantes para t grande, segue que para $t \geq 1$ e $q \in \mathbb{N}$, existe $C_q(\tilde{V}, m, c) > 0$ tal que

$$\begin{aligned} M_\Psi^{(q)}(m,t) &= \langle \Psi, |X(t)|^q \Psi \rangle \\ &\leq C_q(\tilde{V}, m, c) \int_0^t \cdots \int_0^t \langle \Psi, p(s_1) \cdots p(s_q) \Psi \rangle\, ds_1 \cdots ds_q \\ &\leq C_q(\tilde{V}, m, c) \|p\|^q\, t^q = K_q(\tilde{V}, m, c)\, t^q. \qquad \square \end{aligned}$$

Observações:

i) Usando o Teorema 2.9 obtêm-se (para $q \in \mathbb{N}$)

$$\left| M_{\Psi}^{(q)}(m,t) - M_{\Psi}^{(q)}(m',t) \right| \leq \tilde{K}_q(\omega, m, m', c)\ t^q,$$

mas sem a expressão para a constante $\tilde{K}_q(\omega, m, m', c)$. O preço pago pela dependência explícita das massas e da velocidade da luz no Teorema 2.7 é o expoente $q+2$ em vez de q. Da mesma forma, o expoente $5/2$ no Corolário 2.8 poderia ser substituído por $3/2$, mas sem a dependência precisa de m e c na constante multiplicativa resultante.

ii) É possível ajustar a constante K_q no Teorema 2.9 de modo que o limite superior valha com $t \geq \varepsilon$, para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, em vez de $t \geq 1$. Como $M_{\Psi}^{(q)}(m,t) \geq M_{\Psi}^{(q')}(m,t)$ para $q \geq q'$, é evidente que $M_{\Psi}^{(q)}(m,t) \leq K_{\lceil q \rceil}(\tilde{V}, m, c)\ t^{\lceil q \rceil}$ para q real.

Capítulo 3

Modelo Quase-Balístico

Neste capítulo consideraremos os operadores de Schrödinger $H^W_{\omega,S}$ definidos por (5) (modelo quase-balístico), juntamente com suas versões discretas de Dirac, e usaremos os resultados preliminares da Seção 1.3 para estudar o comportamento dinâmico (transporte quase-balístico) e o tipo espectral de tais operadores. Dedicaremos a Seção 3.2 para as aplicações dos resultados sobre transporte e espectro.

3.1 Transporte Quase-Balístico e Espectro Pontual

Nesta seção apresentaremos o resultado sobre transporte quase-balístico (Teorema 3.1) para os operadores $H^W_{\omega,S}$ e também um resultado espectral (Teorema 3.3) que será usado em algumas aplicações.

O principal resultado teórico deste capítulo é o

Teorema 3.1 *Sejam $H^W_{\omega,S}$ os operadores definidos por (5) sobre $\ell^2(\mathbb{N})$, com S e W (como em (7)) fixados. Suponha que exista um conjunto denso $\mathcal{A}$ de condições iniciais em Ω, de modo que para cada $\omega \in \mathcal{A}$ é possível encontrar um intervalo fechado $J^\omega_S \subset \sigma(H^0_{\omega,S})$ (i.e., o espectro no caso $W \equiv 0$) com $\ell(J^\omega_S) > 0$ e $0 < C_\omega(S) < \infty$ de forma que*

$$\|\Phi^0_{\omega,S}(E,n,0)\| \leq C_\omega(S), \quad \forall\ E \in J^\omega_S \quad e \quad \forall\ n \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Suponha também que existam $0 < C < \infty$ e uma função não-decrescente

$h_S : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *satisfazendo*

$$d(S^n\theta, S^n\omega) \leq Cd(\theta,\omega)h_S(n), \quad \forall\ \theta,\omega \in \Omega \quad e \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Então, existe um conjunto G_δ *denso* $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ *de modo que para cada* $\omega \in \tilde{\Omega}$*, o operador* $H^W_{\omega,S}$ *apresenta transporte quase-balístico.*

Observações:

i) O Teorema 3.1 pode ser adaptado para a correspondente versão discreta de Dirac e também para $\ell^2(\mathbb{Z})$.

ii) O conjunto $\tilde{\Omega}$ no Teorema 3.1 não depende da perturbação W (incluindo o caso $W \equiv 0$).

(iii) Neste trabalho (e talvez na maior parte das aplicações futuras) o conjunto $\mathcal{A}$ no Teorema 3.1 é composto de órbitas periódicas da aplicação S.

Com o intuito de demonstrar o Teorema 3.1, o seguinte resultado técnico será usado:

Lema 3.2 *Seja* $K_{\mu^W_{\theta,S}}(r,\epsilon)$ *definido por (1.11) e* $\mathcal{A}$ *o conjunto descrito no Teorema 3.1. Para cada* $\omega \in \mathcal{A}$*, existe* $\epsilon(\omega,S) > 0$ *de modo que para todo* $0 < \epsilon < \epsilon(\omega,S)$*, é possível escolher* $\delta(\epsilon,\omega,S) > 0$ *de forma que se* $d(\theta,\omega) < \delta(\epsilon,\omega,S)$*, então para qualquer* $r \in (0,1)$ *existe* $0 < C_r < \infty$ *com*

$$K_{\mu^W_{\theta,S}}(r,\epsilon) \geq\ C_r\ \frac{\epsilon^{-1+r}}{\log(\epsilon^{-1})}\ .$$

Demonstração: Para cada $\omega \in \mathcal{A}$ fixado, existem um intervalo fechado $J^\omega_S \subset \sigma(H^0_{\omega,S})$ com $\ell(J^\omega_S) \geq L_\omega(S) > 0$ e $0 < C_\omega(S) < \infty$ de forma que

$$\|\Phi^0_{\omega,S}(E,n,0)\| \leq C_\omega(S), \quad \forall\ E \in J^\omega_S \ \text{ e } \ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Como W satisfaz (7), pelo Teorema 2 de [16] segue que

$$\|\Phi^W_{\omega,S}(E,n,0)\|^2 \leq \tilde{C}_\omega(S), \quad \forall\ E \in J^\omega_S \ \text{ e } \ \forall\ n \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

Escolha $\epsilon(\omega,S) > 0$ tal que se $\epsilon < \epsilon(\omega,S)$, então para qualquer $r \in (0,1)$,

$$\max\{\tilde{C}_\omega(S), L_\omega(S)^{-1}\} \leq \Big(\log(\epsilon^{-1})\Big)^{1/(1+r)}. \tag{3.3}$$

Agora note que, por (6) e pela hipótese do Teorema 3.1, tem-se

$$|F(S^n\theta) - F(S^n\omega)| \le Ld(S^n\theta, S^n\omega) \le LCd(\theta,\omega)h_S(n), \tag{3.4}$$

para quaisquer $\theta, \omega \in \Omega$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. Escolha $\rho > 0$. Como uma conseqüência de (3.2), (3.4) e Lema 1.14, obtêm-se que para $\omega \in \mathcal{A}$ fixado e para qualquer $\epsilon < \epsilon(\omega, S)$,

$$\begin{aligned} \|\Phi^W_{\theta,S}(E,n,0)\|^2 &\le \tilde{C}_\omega(S) e^{2\lambda \tilde{C}_\omega(S) LCd(\theta,\omega) h_S([\epsilon^{-1-\rho}])\epsilon^{-1-\rho}} \\ &\le 2\lambda LC\tilde{C}_\omega(S), \end{aligned} \tag{3.5}$$

para todo $E \in J^\omega_S$ e para todo $1 \le n \le [\epsilon^{-1-\rho}]$, em que requeremos $d(\theta,\omega)$ suficientemente pequena (o que determina $\delta(\epsilon,\omega,S) > 0$) de modo que

$$2\lambda \log(\epsilon^{-1}) LCd(\theta,\omega) h_S([\epsilon^{-1-\rho}])\epsilon^{-1-\rho} \le \log(2\lambda LC).$$

Assim, pelo Lema 1.13 com $\gamma = 2$, por (3.3) e (3.5), segue que para ϵ suficientemente pequeno,

$$\begin{aligned} \mu^W_{\theta,S}(E-\epsilon, E+\epsilon) &\ge C_1 (2\lambda LC\tilde{C}_\omega(S))^{-1}\epsilon - C_2\epsilon^2 \\ &\ge C_3 \frac{\epsilon}{(\log(\epsilon^{-1}))^{1/(1+r)}}, \end{aligned}$$

para todo $E \in J^\omega_S$. Portanto, para qualquer $r \in (0,1)$ e $\epsilon < \epsilon(\omega, S)$, segue de (1.11), (3.3) e da desigualdade acima que

$$K_{\mu^W_{\theta,S}}(r,\epsilon) \ge C_r \frac{\epsilon^{-1+r}}{(\log(\epsilon^{-1}))^{r/(1+r)}} \ell(J^\omega_S) \ge C_r \frac{\epsilon^{-1+r}}{\log(\epsilon^{-1})}. \quad \square$$

Observação: O Lema 3.2 vale se a função logarítmica é substituída por qualquer $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $\lim_{t\to\infty} g(t) = \infty$ e $\lim_{t\to\infty} g(t)/t = 0$.

Agora vamos apresentar a

Demonstração **(Teorema 3.1)**: Para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, defina o conjunto

$$B_n = \left\{ \theta \in \Omega \;\middle|\; \exists\, \epsilon < \frac{1}{n} : \; K_{\mu^W_{\theta,S}}(r,\epsilon) \ge \; C_r \frac{\epsilon^{-1+r}}{\log(\epsilon^{-1})} \right\}.$$

Como $\mathcal{A}$ é denso em Ω, pelo Lema 3.2 cada B_n contém um conjunto aberto denso. Portanto, pelo Teorema de Baire, $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ contém um conjunto G_δ denso, que denotaremos por $\tilde{\Omega}$. Note que para cada $\theta \in \tilde{\Omega}$ existe uma seqüência $\epsilon_n \to 0$ de forma que

$$K_{\mu_{\theta,S}^W}(r, \epsilon_n) \geq \; C_r \; \frac{\epsilon_n^{-1+r}}{\log(\epsilon_n^{-1})} \; ,$$

para qualquer $r \in (0,1)$. Escolhendo $r = (1+q)^{-1}$, segue do Lema 1.12 que para qualquer $\theta \in \tilde{\Omega}$ e para todo $q > 0$, $\beta^+_{\theta,S,W}(q) = 1$, i.e., o operador $H^W_{\theta,S}$ apresenta transporte quase-balístico. □

Com respeito ao tipo espectral, temos a seguinte conseqüência do critério de Simon-Wolff (ver Lema 1.16):

Teorema 3.3 ([44]) *Sejam $H^W_{\omega,S}$ os operadores definidos por (5) sobre $\ell^2(\mathbb{Z})$ com $W = \kappa\langle\delta_1,\cdot\rangle\delta_1$, $\kappa \in \mathbb{R}$. Fixe um intervalo $[a,b]$. Se $\Gamma^0_S(E) > 0$ para $E \in [a,b]$ $\ell - qtp$, então restrito ao subespaço cíclico gerado por δ_1, o operador $H^W_{\omega,S}$ tem espectro pontual puro em $[a,b]$, para κ $\ell - qtp$ e ω $\nu - qtp$.*

Demonstração: Por hipótese, $\Gamma^0_S(E) > 0$ para $E \in [a,b]$ $\ell - qtp$. O Teorema de Ruelle-Oseledec [40] implica que existem soluções $\psi_\pm$ da equação (1.12), para $E \in [a,b]$ $\ell - qtp$, que estão em ℓ^2 em $\pm\infty$ (i.e., elas decaem exponencialmente). Daí, pelo Lema 1.15, ou E é um autovalor de $H^0_{\theta,S}$ ou $R_{\theta,S}(E) < \infty$. Como $H^0_{\theta,S}$ tem somente uma quantidade enumerável de autovalores, é possível concluir que $R_{\theta,S}(E) < \infty$ para $E \in [a,b]$ $\ell - qtp$. Portanto, segue do Lema 1.16 que, restrito ao subespaço cíclico gerado por δ_1, o operador $H^W_{\theta,S}$ tem espectro pontual puro em $[a,b]$, para θ $\nu - qtp$ e κ $\ell - qtp$. □

Observação: O Teorema 3.3 tem uma versão análoga para $\ell^2(\mathbb{N})$; neste caso, como o vetor δ_1 é cíclico para $H^0_{\omega,S}$, as conclusões do Teorema valem em $\ell^2(\mathbb{N})$.

3.2 Aplicações

Esta seção é dedicada às aplicações dos Teoremas 3.1 e 3.3. Algumas delas fornecem exemplos de operadores quânticos com transporte quase-balístico e espectro pontual (pontual puro no caso $\ell^2(\mathbb{N})$). Tais aplicações são as principais contribuições deste capítulo e cada uma delas tem uma contrapartida para o modelo de Dirac discreto. Em particular, será demonstrado o Teorema 0.4 (ver Introdução).

3.2.1 Anosov e Axioma A

Seja M uma variedade compacta diferenciável. Recordemos que um difeomorfismo $S : M \to M$ satisfaz o Axioma A de Smale [34] se seu conjunto não-errante $\Omega = \Omega(S)$ é hiperbólico com respeito a S e o conjunto de pontos periódicos de S é denso em Ω. Sabe-se que para sistemas dinâmicos Axioma A, o conjunto Ω é uma união finita (disjunta) de conjuntos fechados, invariantes e transitivos (i.e., existe uma órbita densa); cada um deles é chamado de conjunto básico para S.

Pela hiperbolicidade de $\Omega(S)$, existem $C > 0$ e $\gamma > 1$ com

$$d(S^n\theta, S^n\omega) \leq C\gamma^{|n|}d(\theta,\omega), \qquad \forall\ \theta,\omega \in \Omega \ \text{ e } \ \forall\ n \in \mathbb{Z} \text{ (ou } \mathbb{N}).$$

Agora, tomando $F : M \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciável, a condição de Lipschitz (6) é imediatamente satisfeita. Assim, o Teorema 3.1 é aplicável com $\mathcal{A}$ sendo o conjunto de condições iniciais constituído das órbitas periódicas de S (a hipótese (3.1) é satisfeita devido à [36, 23]). Portanto, existe um conjunto G_δ denso $\tilde{\Omega} \subset \Omega$, de modo que para cada condição inicial $\omega \in \tilde{\Omega}$, o operador de Schrödinger $H^W_{\omega,S}$ apresenta transporte quase-balístico.

É interessante notar que devido à hiperbolicidade de Ω o conjunto de pontos periódicos de S é no máximo enumerável, de modo que para sistemas Axioma A "caóticos", o conjunto G_δ denso para o qual ocorre transporte quase-balístico é de fato não-trivial (ou seja, distinto de $\mathcal{A}$).

Recordemos também que se M é hiperbólico com respeito a S, então S é dito ser um difeomorfismo Anosov. Esse sistema satisfaz o Axioma A e portanto vale a conclusão acima sobre transporte quase-balístico. Parece ser uma questão em aberto se para difeomorfismos Anosov os conjuntos não-errantes Ω sempre coincidem com M; no caso de difeomorfismo Anosov sobre o toro $\mathbf{T^2}$ sabe-se que existe exatamente um conjunto básico e este coincide com o toro inteiro.

3.2.2 Aplicação de Duplicação

Considere o operador $H^W_{\theta,S}$ definido por (5) sobre $\ell^2(\mathbb{N})$, com S a transformação sobre $\Omega = [0, 2\pi]$ dada por $S\theta = 2\theta \pmod{2\pi}$ e $F = \cos : \Omega \to \mathbb{R}$ (ou mais geral, F continuamente diferenciável e periódica não-constante). Note que F satisfaz a condição de Lipschitz. O conjunto

$$\mathcal{A} = \{\theta \ \text{ cuja expansão na base 2 é periódica}\}$$

é denso em Ω. Como cada elemento de $\mathcal{A}$ corresponde a uma órbita periódica de S, segue de [36, 23] que $\mathcal{A}$ satisfaz a hipótese do Teorema 3.1. Além disso, para quaisquer $\theta, \omega \in \Omega = [0, 2\pi]$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$d(S^n\theta, S^n\omega) = |2^n\theta - 2^n\omega| = 2^n d(\theta, \omega).$$

Portanto, pelo Teorema 3.1, existe um conjunto G_δ denso $\tilde{\Omega} \subset [0, 2\pi]$ de modo que para qualquer $\theta \in \tilde{\Omega}$ e para todo $q > 0$, $\beta^+_{\theta,S,W}(q) = 1$. Observe que $\tilde{\Omega}$ é não-trivial, pois $\mathcal{A}$ é enumerável em Ω.

Agora fixe $\delta > 0$ (pequeno) e $\lambda > 0$ suficientemente pequeno. Bourgain e Schlag [10] demonstraram que para $\theta \in [0, 2\pi]$ $\ell - qtp$, o operador $H^0_{\theta,S}$ tem espectro pontual puro em $[-2+\delta, -\delta] \cup [\delta, 2-\delta]$ com autofunções decaindo exponencialmente. Em particular, $\Gamma^0_S(E) > 0$ para $E \in [-2+\delta, -\delta] \cup [\delta, 2-\delta]$. Como em princípio $\tilde{\Omega}$ pode ter medida nula, não podemos concluir que existe elemento de $\tilde{\Omega}$ cujo operador correspondente tem espectro pontual.

3.2.3 Aplicações Unidimensionais Caóticas

Seja I um intervalo compacto em $\mathbb{R}$ e $S : I \to I$ uma aplicação continuamente diferenciável. Suponha que restrito a $\Lambda \subset I$ a aplicação S é caótica como na definição de Devaney ([25], pg. 50), ou seja, é sensitiva sobre as condições iniciais, topologicamente transitiva, e os pontos periódicos são densos em Λ. Os potenciais para os operadores de Schrödinger (5) sobre $\ell^2(\mathbb{N})$ serão as próprias órbitas de S, de modo que F é a aplicação identidade (ou qualquer outra função Lipschitz). As hipóteses sobre F e S no Teorema 3.1 são claramente satisfeitas, assim como a existência do conjunto $\mathcal{A}$.

Exemplos específicos são os polinômios de Tchebycheff [25]; por exemplo, $x \mapsto 4x^3 - 3x$ e $x \mapsto 8x^4 - 8x^2 + 1$ são caóticos sobre $[-1, 1]$. Para $r > 2 + \sqrt{5}$, a aplicação $S_r(x) = rx(1-x)$ é caótica sobre o conjunto $\Lambda \subset [0, 1]$ de pontos que nunca escapam de $[0, 1]$ por meio das iteradas de S_r; para $r = 4$ a aplicação S_4 é caótica sobre $\Lambda = [0, 1]$.

Portanto, para a família de operadores $H^W_{x,S}$, com S caótica como acima, existe um conjunto G_δ denso $\tilde{\Omega} \subset \Lambda$ de modo que para qualquer $x \in \tilde{\Omega}$, o correspondente operador apresenta transporte quase-balístico. É um problema em aberto bem interessante dizer algo sobre o espectro de tais operadores. Ele é "em geral" pontual puro como diz a intuição? O que dizer sobre $x \in \tilde{\Omega}$?

3.2.4 Modelo de Anderson

Considere o operador $H^W_{\omega,S}$ definido por (5) sobre $\ell^2(\mathbb{Z})$, sendo S o shift sobre $\Omega = [-1, 1]^{\mathbb{Z}}$ dado por $(S\omega)_j = \omega_{j+1}$ e $F : \Omega \to [-1, 1]$ definida por $F(\omega) = \omega_0$. Assume-se que $\omega_n = (S^n\omega)_0 = F(S^n\omega)$ são variáveis aleatórias i.i.d. com medida de probabilidade comum μ, não-concentrada em um único ponto e $\int |\omega_n|^\alpha d\mu(\omega_n) < \infty$ para algum $\alpha > 0$. Denote por $\nu = \prod_{n\in\mathbb{Z}} \mu$ a medida de probabilidade sobre Ω. A métrica sobre Ω é dada por

$$d(\omega, \theta) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{d_0(\omega_j, \theta_j)}{2^{|j|}} ,$$

sendo d_0 a métrica discreta. Para quaisquer $\omega, \theta \in \Omega$, tem-se

$$|F(\omega) - F(\theta)| = |\omega_0 - \theta_0| \leq 2d(\omega, \theta),$$

e portanto F é Lipschitz. O conjunto $\mathcal{A}$ de seqüências periódicas em Ω é denso em Ω. Como cada seqüência periódica determina uma órbita periódica de S, segue de [36, 23] que $\mathcal{A}$ satisfaz a hipótese do Teorema 3.1. Além disso, para quaisquer $\omega, \theta \in \Omega$ e para todo $n \in \mathbb{Z}$, tem-se

$$d(S^n\omega, S^n\theta) \leq 2^{|n|} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{d_0(\omega_{j+n}, \theta_{j+n})}{2^{|j+n|}} = d(\omega, \theta)\ 2^{|n|}.$$

Portanto, pelo Teorema 3.1, existe um conjunto G_δ denso $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ de modo que para qualquer $\omega \in \tilde{\Omega}$ e para todo $q > 0$, $\beta^+_{\omega,S,W}(q) = 1$. Observe que $\tilde{\Omega}$ é não-trivial, pois $\mathcal{A}$ é enumerável em Ω.

Em [11, 41, 50] foi demonstrado que para ω $\nu - qtp$, $H^0_{\omega,S}$ tem espectro pontual puro com autofunções decaindo exponencialmente. Em particular, $\Gamma^0_S(E) > 0$ para todo E. Como na Aplicação 3.2.2, não podemos concluir que existem elementos de $\tilde{\Omega}$ cujos operadores correspondentes apresentam espectros pontuais. O transporte quase-balístico obtido acima deveria ser contrastado com a localização dinâmica mostrada $\nu - qtp$ em [29], para este modelo. Em seguida um importante caso particular é destacado.

3.2.5 Modelo de Anderson-Bernoulli

Tome $H^W_{\omega,S}$ como na Aplicação 3.2.4, com $\Omega = \{a_1, \ldots, a_k\}^{\mathbb{Z}}$, $a_i \in \mathbb{R}$, e para cada $n \in \mathbb{Z}$, a medida μ dada por $\mu(\omega_n = a_i) = p_i$, $0 < p_i < 1$ e $\sum_{i=1}^k p_i = 1$. Valem as mesmas conclusões da Aplicação 3.2.4.

3.2.6 Rotações em $\mathbf{S^1}$ com Condição Analítica sobre F

Considere o operador $H^W_{(\theta,\alpha),S}$ definido por (5), em que S é a transformação sobre $\Omega_a := \mathbf{S^1} \times [-a, a]$ ($\mathbf{S^1} = \{e^{i\theta} : 0 \le \theta \le 2\pi\}$ e $a > 0$ fixado) dada por $S(\theta, \alpha) = (\theta + \pi\alpha, \alpha)$ e $F = g \circ \pi_1$ com $g : \mathbf{S^1} \to \mathbb{R}$ analítica não-constante de período 1 e $\pi_1 : \Omega_a \to \mathbf{S^1}$ a projeção dada por $\pi_1(\theta, \alpha) = \theta$. Para quaisquer $(\theta, \alpha), (\omega, \beta) \in \Omega_a$, segue do Teorema do Valor Médio que

$$\begin{aligned} |F(\theta,\alpha) - F(\omega,\beta)| &= |g(\theta) - g(\omega)| \\ &\le \left(\sup_{z \in \mathbf{S^1}} |g'(z)| \right) |\theta - \omega| \\ &\le L\, d((\theta,\alpha),(\omega,\beta)), \end{aligned}$$

com $L = \sup_{z \in \mathbf{S^1}} |g'(z)|$ e $d((\theta,\alpha),(\omega,\beta)) = \sqrt{(\theta-\omega)^2 + (\alpha-\beta)^2}$; em outras palavras, F satisfaz a condição de Lipschitz. O conjunto

$$\mathcal{A} = \{(\theta, \alpha_0) : \theta \in \mathbf{S^1}, \alpha_0 \in \mathbb{Q} \cap [-a, a]\}$$

é denso em Ω_a e para cada $(\theta, \alpha_0) \in \mathcal{A}$, $S^n(\theta, \alpha_0)$ descreve uma órbita periódica na "altura" α_0. Portanto, o potencial $\lambda F(S^n(\theta, \alpha_0))$ é periódico e, devido a [36, 23], $\mathcal{A}$ satisfaz a hipótese (3.1) do Teorema 3.1. Agora, note que para quaisquer $(\theta,\alpha),(\omega,\beta)\in\Omega_a$ e para todo $n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ ($n=0$ é trivial) tem-se

$$\begin{aligned} d(S^n(\theta,\alpha),S^n(\omega,\beta)) &\le d(S^n(\theta,\alpha),S^n(\theta,\beta))+d(S^n(\theta,\beta),S^n(\omega,\beta)) \\ &= \sqrt{n^2\pi^2(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\beta)^2}+\sqrt{(\theta-\omega)^2} \\ &\le \left(\sqrt{\pi^2+1}\;|\alpha-\beta|+|\theta-\omega|\right)|n| \\ &\le \left(\sqrt{\pi^2+1}+1\right)\; d((\theta,\alpha),(\omega,\beta))\;|n|. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 3.1, existe um conjunto G_δ denso $\tilde{\Omega}_a\subset\Omega_a$ de modo que para qualquer $(\theta,\alpha)\in\tilde{\Omega}_a$ e para todo $q>0$, $\beta^+_{(\theta,\alpha),S,W}(q)=1$, com W satisfazendo (7) ($\tilde{\Omega}_a$ é não-trivial, pois $\mathcal{A}$ é enumerável em Ω_a). Observe que $F(S^n(\theta,\alpha))=g(\theta+n\pi\alpha)$.

Segue de Sorets e Spencer [46] que existe um número $\lambda_0(F)>0$ de forma que para $\lambda>\lambda_0$, $\Gamma^0_S(E)>0$ para todo E, todo irracional α e θ $\ell-qtp$ (ℓ sobre $\mathbf{S^1}$ é ergódica com respeito a $\pi_1\circ S$). Como o conjunto genérico $\tilde{\Omega}_a$ pode ter medida nula, não estamos seguros para aplicar o Teorema 3.3 a elementos de $\tilde{\Omega}_a$ e obter transporte quase-balístico com espectro pontual puro. No entanto, o contexto original em [23, 30] (i.e., considerar para cada α uma aplicação diferente) para a função co-seno, implica uniformidade em θ também em nosso caso, e com isso obtemos novos exemplos de operadores de Schrödinger com espectro pontual puro e transporte quase-balístico. Vamos reconsiderar aquela construção, pois ela será usada também na Aplicação 3.2.10.

Primeiramente, substitua (reescreva, de fato) $H^W_{(\theta,\alpha),S}$ por H^W_{θ,S_α}, com $S_\alpha(\theta)=\theta+\pi\alpha$, $\theta\in\mathbf{S^1}$, e $F=g$ (tome π_1 igual a identidade). Para cada $\alpha_0\in\mathbb{Q}$ e $\theta\in\mathbf{S^1}$, o potencial $\lambda F(S^n_{\alpha_0}(\theta))$ é periódico e existe um intervalo $J^\theta_{\alpha_0}\subset\sigma(H^0_{\theta,S_{\alpha_0}})$ com $\ell(J^\theta_{\alpha_0})>0$ de modo que, uniformemente em θ, tem-se

$$\|\Phi^0_{\theta,S_{\alpha_0}}(E,n,0)\|\le C_{\alpha_0},\quad \forall\ E\in J^\theta_{\alpha_0}, n\in\mathbb{Z}.$$

Além disso, para todo θ e n,

$$d(S^n_\alpha(\theta),S^n_{\alpha_0}(\omega))=d(\theta+n\pi\alpha,\theta+n\pi\alpha_0)=\pi|\alpha-\alpha_0|\,|n|.$$

Repetindo os argumentos do Lema 3.2 e do Teorema 3.1, mas agora com

$$\tilde{B}_n=\left\{\alpha\in[-a,a]\Big|\ \exists\ \epsilon<\frac{1}{n}:\forall\ \theta\in\mathbf{S^1},\ K_{\mu^W_{\theta,S_\alpha}}(r,\epsilon)\ge\ C_r\ \frac{\epsilon^{-1+r}}{\log(\epsilon^{-1})}\right\}$$

em vez de B_n, conclui-se que existe um conjunto G_δ denso de números irracionais $\mathcal{G} \subset [-a,a]$, de modo que para cada $\alpha \in \mathcal{G}$ fixado e para todo $\theta \in \mathbf{S^1}$, o operador $H^W_{(\theta,\alpha),S} = H^W_{\theta,S_\alpha}$ apresenta transporte quase-balístico.

Portanto, pelo Teorema 3.3, para $\alpha \in \mathcal{G}$ e θ $\ell - qtp$, o operador $H^W_{(\theta,\alpha),S}$ sobre $\ell^2(\mathbb{N})$ com F analítica não-constante de período 1, $W = \kappa\langle\delta_1, \cdot\rangle\delta_1$, $\lambda > \lambda_0$ e α irracional, tem espectro pontual puro para κ $\ell - qtp$, e também apresenta transporte quase-balístico.

Agora descreveremos três casos particulares interessantes de potenciais gerados por esses sistemas dinâmicos.

3.2.7 Almost Mathieu

Este é exatamente uma reconsideração do "exemplo patológico" de [23]. $H^W_{(\theta,\alpha),S}$ é definido por (5), em que S é a transformação sobre Ω_a dada por $S(\theta,\alpha) = (\theta + \pi\alpha, \alpha)$, $F = \cos\circ\pi_1 : \Omega_a \to \mathbb{R}$, $W = \kappa\langle\delta_1, \cdot\rangle\delta_1$, α é irracional e $\lambda > \lambda_0 = 2$. Sob tais condições, ambos os Teoremas 3.1 e 3.3 valem para conjuntos apropriados, como discutidos na Aplicação 3.2.6.

3.2.8 Bilhar Circular [13]

O potencial agora é gerado pelas órbitas de uma partícula, obtidas através de reflexões especulares sobre um bilhar circular. $H^W_{(r,\phi),S}$ é definido por (5), em que S é a transformação sobre $\Omega_{\frac{\pi}{2}}$ dada por $S(r,\phi) = (r + \pi - 2\phi, \phi)$ e $F = g\circ\pi_1$ com $g : \mathbf{S^1} \to \mathbb{R}$ analítica não-constante de período 1. Novamente valem as conclusões da Aplicação 3.2.6.

3.2.9 Aplicação Twist [34]

$H^W_{(\theta,r),S}$ é definido por (5), em que S é a transformação sobre $\Omega = \overline{D(0,1)}$ (disco fechado de centro 0 e raio 1 em $\mathbb{R}^2$) dada por $S(\theta,r) = (\theta + \rho(r), r)$, com $\rho : [0,1] \to [0,2\pi]$ contínua, $\rho(0) = 0$, $\rho'(r) > 0$, e $F = g \circ \pi_1$ com g uma função analítica real não-constante de período 1. Assim, o potencial é definido através das órbitas de uma aplicação twist integrável, e os Teoremas 3.1 e 3.3 valem para conjuntos apropriados, como na Aplicação 3.2.6.

3.2.10 Rotações nos Toros com Condição Analítica sobre F

Considere o operador $H^{W}_{(\theta,\alpha),S}$ definido por (5), em que S é a transformação sobre $\Omega^k_a := \mathbf{T}^k \times [-a,a]^k$ ($\mathbf{T}^k$ é o k-toro, i.e., $\mathbf{T}^k = \mathbf{S}^1 \times \cdots \times \mathbf{S}^1$ (k vezes) e $a > 0$ fixado) dada por $S(\theta,\alpha) = (\theta + \pi\alpha, \alpha)$, com $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, e $F = g \circ \pi_k$ com $g : \mathbf{T}^k \to \mathbb{R}$ analítica não-constante de período 1 em cada componente e $\pi_k : \Omega^k_a \to \mathbf{T}^k$ a projeção dada por $\pi_k(\theta,\alpha) = \theta$. Observe que para $k = 1$, estamos no caso da Aplicação 3.2.6 acima. Similarmente à 3.2.6, obtêm-se um conjunto G_δ denso $\tilde{\Omega}^k_a \subset \Omega^k_a$ de forma que para qualquer $(\theta,\alpha) \in \tilde{\Omega}^k_a$ e para todo $q > 0$, $\beta^+_{(\theta,\alpha),S,W}(q) = 1$. Note que $F(S^n(\theta_1, \ldots, \theta_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_k)) = g(\theta_1 + n\pi\alpha_1, \ldots, \theta_k + n\pi\alpha_k)$.

A construção de $\mathcal{G}$ na Aplicação 3.2.6 tem uma contrapartida aqui, com $\beta^+_{(\theta,\alpha),S,W}(q) = 1$ para α em um conjunto G_δ denso $\mathcal{G}^k \subset [-a,a]^k$ e para todo θ. O resultado de Sorets e Spencer mencionado acima continua válido neste caso [8]: existe $\lambda_0 > 0$ de modo que se $\lambda > \lambda_0$, então $\Gamma^0_S(E) > 0$ para todo E, todo vetor α incomensurável (i.e., $\alpha \cdot j \neq 0$ para todo $j \in \mathbb{Z}^k \setminus \{0\}$) e $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$ $\ell-qtp$ (ℓ sobre $\mathbf{T}^k$ é ergódica com respeito a $\pi_k \circ S$). Portanto, pelo Teorema 3.3, para tais α's o operador $H^{W}_{(\theta,\alpha),S}$ sobre $\ell^2(\mathbb{N})$, com $W = \kappa\langle\delta_1,\cdot\rangle\delta_1$ e λ suficientemente grande, tem espectro pontual puro para θ e κ $\ell-qtp$. Como necessariamente um conjunto G_δ em $[-a,a]^k$ contém vetores α incomensuráveis (em particular para $\mathcal{G}^k$), novamente obtemos novos exemplos de operadores de Schrödinger com espectro pontual puro e transporte quase-balístico.

Referências Bibliográficas

[1] Anderson, P. W.: Absence of Diffusion in Certain Random Lattices, *Phys. Rev.* **109**, 1492–1505 (1958).

[2] Barbaroux, J. M., Germinet, F. e Tcheremchantsev, S.: Fractal Dimensions and the Phenomenon of Intermittency in Quantum Dynamics, *Duke Math. J.* **110**, 161–193 (2001).

[3] Barbaroux, J. M., Germinet, F. e Tcheremchantsev, S.: Generalized Fractal Dimensions: Equivalence and Basic Properties, *J. Math. Pure et Appl.* **80**, 977–1012 (2001).

[4] Bellissard, J., Iochum, B., Scoppola, E. e Testard, D.: Spectral Properties of One-Dimensional Quasicrystals, *Commun. Math. Phys.* **125**, 527–543 (1989).

[5] Berezanskii, Y.: Expansions in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators, Transl. Math. Monogr. **17** (Providence, RI: Am. Math. Soc., 1968).

[6] Bjorken, S. D. e Drell, J. D.: Relativistic Quantum Mechanics (New York: McGraw-Hill, 1965).

[7] Bougerol, P. e Lacroix, J.: Products of Random Matrices with Applications to Schrödinger Operators (Boston: Birkhäuser, 1985).

[8] Bourgain, J.: Exposants de Lyapounov pour Opérateurs de Schrödinger Discrètes Quasi-Périodiques, *C. R. Acad. Sci. Paris* Ser. I **335**, 529–531 (2002).

[9] Bourgain, J. e Jitomirskaya, S.: Absolutely Continuous Spectrum for 1D Quasiperiodic Operators, *Invent. Math.* **148**, 453–463 (2002).

[10] Bourgain, J. e Schlag, W.: Anderson Localization for Schrödinger Operators on $\mathbb{Z}$ with Strongly Mixing Potentials, *Commun. Math. Phys.* **215**, 143–157 (2000).

[11] Carmona, R., Klein, A. e Martinelli, F.: Anderson Localization for Bernoulli and Other Singular Potencials, *Commun. Math. Phys.* **108**, 41–66 (1987).

[12] Carvalho, T. O. e de Oliveira, C. R.: Critical Energies in Random Palindrome Models, *J. Math. Phys.* **44**, 945–961 (2003).

[13] Chernov, N. e Markarian, R.: Introduction to the Ergodic Theory of Chaotic Billiards (Rio de Janeiro: IMPA, 2003).

[14] Damanik, D. e Lenz, D.: Uniform Spectral Properties of One-Dimensional Quasicrystals. IV. Quasi-Sturmian Potentials, *J. Anal. Math.* **90**, 115–139 (2003).

[15] Damanik, D. Lenz, D. e Stolz, G.: Lower Transport Bounds for One-Dimensional Continuum Schrödinger Operators, math-ph/0410062.

[16] Damanik, D., Sütő, A. e Tcheremchantsev, S.: Power-Law Bounds on Transfer Matrices and Quantum Dynamics in One Dimension II, *J. Funct. Anal.* **216**, 362–387 (2004).

[17] Damanik, D. e Tcheremchantsev, S.: Scaling Estimates for Solutions and Dynamical Lower Bounds on Wavepacket Spreading, mp_arc 04-211.

[18] Damanik. D. e Tcheremchantsev, S.: Upper Bounds in Quantum Dynamics, mp_arc 05-76.

[19] De Bièvre, S. e Germinet, F.: Dynamical Localization for Random Dimer Schrödinger Operator, *J. Stat. Phys.* **98**, 1135–1148 (2000).

[20] de Oliveira, C. R. e Prado, R. A.: Dynamical Delocalization for the 1D Bernoulli Discrete Dirac Operator, *J. Phys. A: Math. Gen.* **38**, L115–L119 (2005).

[21] de Oliveira, C. R. e Prado, R. A.: Spectral and Localization Properties for the One-Dimensional Bernoulli Discrete Dirac Operator, *J. Math. Phys.* **46**, 072105 1–17 (2005).

[22] de Oliveira, C. R. e Prado, R. A.: Quantum Hamiltonians with Quasi-Ballistic Dynamics and Point Spectrum. Submetido a publicação.

[23] del Rio, R., Jitomirskaya, S., Last, Y. e Simon, B.: Operators with Singular Continuous Spectrum, IV. Hausdorff Dimensions, Rank-One Perturbations and Localization, *J. d'Analyse Math.* **69**, 153–200 (1996).

[24] Delyon, F. e Petritis, D.: Absence of Localization in a Class of Schrödinger Operators with Quasiperiodic Potential, *Commun. Math. Phys.* **103**, 441–444 (1986).

[25] Devaney, R. L.: An Introduction to Chaotic Dynamical Systems (California: Bejamin/Cummings, 1986).

[26] Dunlap, D. H., Wu, H.-L. e Phillips, P. W.: Absence of Localization in a Random Dimer Model, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 88–91 (1990).

[27] Fröhlich, J., Martinelli, F., Scoppola, E. e Spencer, T.: Constructive Proof of Localization in the Anderson Tight Binding Model, *Commun. Math. Phys.* **101**, 21–46 (1985).

[28] Fröhlich, J. e Spencer, T.: Absence of Diffusion with Anderson Tight Binding Model for Large Disorder or Low Energy, *Commun. Math. Phys.* **88**, 151–184 (1983).

[29] Germinet, F. e De Bièvre, S.: Dynamical Localization for Discrete and Continuous Random Schrödinger Operators, *Commun. Math. Phys.* **194**, 323–341 (1998).

[30] Germinet, F., Kiselev, A. e Tcheremchantsev, S.: Transfer Matrices and Transport for 1D Schrödinger Operators, *Ann. Inst. Fourier* **54**, 787–830 (2004).

[31] Guarneri, I. e Schulz-Baldes, H.: Intermittent Lower Bounds on Quantum Diffusion, *Lett. Math. Phys.* **49**, 317–324 (1999).

[32] Jitomirskaya, S.: Metal Insulador Transition for the Almost Mathieu Operator, *Annals of Math.* **150**, 1159–1175 (1999).

[33] Jitomirskaya, S., Schulz-Baldes, H. e Stolz, G.: Delocalization in Random Polymer Models, *Commun. Math. Phys.* **233**, 27–48 (2003).

[34] Katok, A. e Hasselblatt, B.: Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 54 (Cambridge: Cambridge University Press, 1995).

[35] Killip, R., Kiselev, A. e Last, Y.: Dynamical Upper Bounds on Wavepacket Spreading, *Amer. J. Math.* **125**, 1165–1198 (2003).

[36] Last, Y.: A Relation between A. C. Spectrum of Ergodic Jacobi Matrices and the Spectra of Periodic Approximants, *Commun. Math. Phys.* **151**, 183–192 (1993).

[37] Lenz, D.: Singular Spectrum of Lebesgue Measure Zero for One-Dimensional Quasicrystals, *Commun. Math. Phys.* **227**, 119–130 (2002).

[38] Lima, M. V. e de Oliveira, C. R.: Uniform Cantor Singular Continuous Spectrum for Nonprimitive Schrödinger Operators, *J. Stat. Phys.* **112**, 357–374 (2003).

[39] Puig, J.: Cantor Spectrum for the Almost Mathieu Operator, *Commun. Math. Phys.* **244**, 297–309 (2004).

[40] Ruelle, D.: Ergodic Theory of Differentiable Dynamical Systems, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **50**, 275–306 (1979).

[41] Shubin, C., Vakilian, R. e Wolff, T.: Some Harmonic Analysis Questions Suggested by Anderson-Bernoulli Models, *Geom. Funct. Anal.* **8**, 932–964 (1998).

[42] Simon, B.: Absence of Ballistic Motion, *Commun. Math. Phys.* **134**, 209–212 (1990).

[43] Simon, B.: Schrödinger Semigroups, *Bull. Amer. Math. Soc.* **7**, 447–526 (1982).

[44] Simon, B.: Spectral Analysis of Rank One Perturbations and Applications, CRM Lecture Notes (Feldman, J., Froese, R., Rosen, L., eds.), *Amer. Math. Soc.* **8**, 109–149 (1995).

[45] Simon, B. e Wolff, T.: Singular Continuous Spectrum under Rank One Perturbations and Localization for Random Hamiltonians, *Commun. Pure Appl. Math.* **39**, 75–90 (1986).

[46] Sorets, E. e Spencer, T.: Positive Lyapunov Exponents for Schrödinger Operators with Quasi-periodic Potentials, *Commun. Math. Phys.* **142**, 543–566 (1991).

[47] Tcheremchantsev, S.: Dynamical Analysis of Schrödinger Operators with Growing Sparse Potentials, *Commun. Math. Phys.* **253**, 221–252 (2005).

[48] Tcheremchantsev, S.: Mixed Lower Bounds for Quantum Transport, *J. Funct. Anal.* **197**, 247–282 (2003).

[49] Thaller, B.: The Dirac Equation (Berlin: Springer-Verlag, 1991).

[50] von Dreifus, H. e Klein, A.: A New Proof of Localization in the Anderson Tight Binding Model, *Commun. Math. Phys.* **124**, 285–299 (1989).