UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CAMPOS LOCALMENTE RESOLÚVEIS
E ESPAÇOS DE HARDY

Gustavo Hoepfner

Orientador: Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie

São Carlos - SP
2005

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CAMPOS LOCALMENTE RESOLÚVEIS

E ESPAÇOS DE HARDY

Gustavo Hoepfner

Orientador: Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie

Tese apresentada ao PPG-M da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática

São Carlos - SP
2005

Dedico este trabalho à minha esposa Marcia

Agradecimentos

Agradeço à minha esposa Marcia, a qual este trabalho é dedicado, pelo apoio, pelo amor e dedicação a mim e a nossa filha Laura.

Ao Jorge pelo exemplo profissional, pela sábia escolha do tema do qual se trata minha tese (chamada por alguns de “hard analysis”), pelo pronto e sempre esclarecedor atendimento nos momentos de dúvidas, pela amizade nestes últimos quatro anos e meio de orientação de mestrado e doutorado e por fim, pela confiança em mim depositada.

À toda minha família, que mesmo longe sempre se fizeram presentes e foram fundamentais para esta conquista.

Ao professor Shiferaw Berhanu pela oportunidade de expor este trabalho na “Temple University”.

Aos colegas, professores e funcionários do DM-UFSCar pelo companheirismo.

À FAPESP pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho desenvolvemos uma teoria sobre controle em L^p, $0 < p \leq 1$, do traço de soluções homogêneas de campos planares, não singulares, com coeficientes analíticos reais que satisfazem a condição $(\mathcal{P})$ de Nirenberg-Treves análoga a teoria dos espaços de Hardy, estendendo o trabalho de Berhanu e Hounie (2003).

Abstract

In this work we develop a theory about control in L^p, $0 < p \leq 1$, of traces of homogeneous solutions of non singular planar vector fields with real analytic coefficients, satisfying the condition $(\mathcal{P})$ of Nirenberg-Treves analogous to the theory of the Hardy spaces, generalizing the work of Berhanu and Hounie (2003).

Conteúdo

Introdução

A teoria dos espaços de Hardy H^p teve suas origens nas extraordinárias descobertas realizadas há setenta ou oitenta anos por G. H. Hardy, J. E. Littlewood, I. I. Privalov, F. e M. Riesz por citar só os mais conhecidos. Os capítulos 7 e 14 do tratado de Zygmund sobre Séries Trigonométricas expõem de maneira unificada os H^p no contexto de funções holomorfas de uma variável complexa. No fim da década de cinqüenta, o desenvolvimento dos métodos de variável real realizados em anos anteriores pela escola de Calderón-Zygmund em Chicago —que permitiram provar resultados clássicos sem apelar para a teoria das funções holomorfas tais como a continuidade da transformada de Hilbert— abrem o caminho para o tratamento da teoria real dos H^p em várias variáveis, iniciada por E. Stein e G. Weiss com sua caraterização maximal e complementada pela dualidade entre H^1 e BMO devida a C. Fefferman e E. Stein e pela caraterização atômica formulada e provada por primeira vez por R. Coifman (em uma dimensão) embora presente de maneira implícita e primitiva no resultado de dualidade. Hoje os espaços H^p e suas versões localizáveis h^p constituem importantes espaços funcionais onde é possível desenvolver a análise além da fronteira $p = 1$ que limita inferiormente os espaços L^p de Lebesgue.

Suponha que $h(z)$ é uma função holomorfa de uma variável, definida no retângulo

$$Q = (-a, a) \times (0, b)$$

com valor de bordo bh, no sentido fraco, em $y = 0$. Sabemos que:
(1) se $bh \in L^p(-a, a)$, $1 \leq p \leq \infty$ então, para qualquer $0 < c < a$, a norma dos traços $h(\cdot, y)$ em $L^p[-c, c]$ são uniformemente limitadas quando $y \to 0^+$:

$$\int_{-c}^{c} |h(x + iy)|^p dx \leq C, \qquad y \searrow 0;$$

(2) $h(x + iy)$ converge pontualmente e não tangencialmente para $bh(x)$ para

quase todo $x \in (-a, a)$;
(3) $h(x + iy)$ se anula identicamente quando bf se anula num conjunto de medida positiva;
(4) reciprocamente, se a norma dos traços $h(\cdot, y)$ são uniformemente limitadas em $L^p[-c, c]$ então $bf \in L^p(-c, c)$ para qualquer $0 < c < a$.

Estas são versões locais das propriedades clássicas das funções holomorfas no disco unitário Δ. Fatou [F] demonstrou em 1906 que toda função holomorfa e limitada em Δ tem um valor de bordo não tangencial q.t.p. que não pode se anular em um arco de $\partial\Delta$ a menos que a função holomorfa seja identicamente nula e também que a integral de Poisson de uma medida finita possui um limite não tangencial definido q.t.p. Hardy [Ha] então iniciou a teoria dos espaços $H^p(\Delta)$ em 1915, mostrando que o logaritmo da norma $L^p[-\pi, \pi]$ da função $\theta \to f(re^{i\theta})$ é uma função convexa de $\ln r$, $0 < r < 1$. A compacidade fraca da bola unitária de L^p implica facilmente na validade de (4) quando $p > 1$, mas para $p = 1$ —onde o argumento apenas permite concluir que bh é uma medida— é uma conseqüência do célebre Teorema de F. e M. Riesz apresentado em [RR] em 1916 onde também se mostra que qualquer $f \in H^1(\Delta)$ tem um limite não tangencial q.t.p. que não pode anular-se em um conjunto de medida positiva a menos que f seja identicamente nula. Para uma demonstração destes resultados veja [GR, Ko, HH].

Funções holomorfas são soluções homogêneas de um campo vetorial planar (o operador de Cauchy-Riemann) e muito recentemente generalizações das propriedades acima mencionadas foram estudadas para classes mais gerais de campos vetoriais. Por exemplo, o análogo de (4) para o valor crítico $p = 1$ foi estudado em [BH1, BH3, BH5] para campos localmente integráveis e no trabalho [BH6] para sistemas de campos sobredeterminados localmente integráveis. Enquanto que no trabalho [BH2, BH4] demonstram-se propriedades análogas a (1), (2) e (3) para campos suaves localmente resolúveis.

O controle uniforme da norma L^p em (1) é uma característica dos espaços de Hardy que foi preservada nas diversas generalizações e extensões destes espaços desenvolvidas ao longo do século XX. Presente na formulação original em conexão com os valores de fronteira de funções holomorfas e harmônicas, esta propriedade se manteve intacta nos espaços de Hardy reais $H^p(\mathbb{R}^n)$ definidos por Stein e Weiss por meio de funções maximais, onde o núcleo de Poisson tem um papel de destaque ([St,GR]). No caso de operadores não elípticos, [BH2, BH4], quando não existem fórmulas integrais que exprimam a solução em termos dos valores de fronteiras, as ferramentas combinam elementos modernos —técnicas de análise microlocal como a transformada FBI ([BCT, T]), a fórmula de aproximação de Baouendi-Treves [BT], a teoria L^2 os núcleos de Calderón-Zygmund, especialmente a limitação em L^2 da transformada de Cauchy— e clássicos, como a teoria de espaços de Hardy em domínios com fronteira retificável descrita no capítulo 10 de [Du].

Nos casos clássicos de i) funções harmônicas e ii) funções holomorfas no disco, há uma importante diferença. Enquanto que em i) podemos tomar $1 \leq p \leq \infty$, no caso ii) é possível quebrar a barreira de $p = 1$ e tomar $0 < p \leq \infty$, diferença que usualmente é explicada pelo fato de que $|f|^p$ é subharmônica para todo $p > 0$ se f é holomorfa mas apenas para $p \geq 1$ se f é harmônica. No caso das soluções homogêneas de um campo planar localmente resolúvel, os resultados de [BH2, BH4] só tratam do caso $p \geq 1$. Em relação ao problema de estender as propriedades das funções holormorfas (1), (2), (3) e (4) descritas acima para soluções homogêneas de campos vetoriais, este trabalho trata do caso (1) para $0 < p \leq 1$, para campos com coeficientes de classe C^ω, Teorema 3.3.3. Reciprocamente, demonstra o análogo do caso (4) para $1/2 < p \leq 1$ e campos planares com coeficientes C^ω, Teorema 4.2.1.

Neste caso, as propriedades (1) e (4) podem ser definidas como segue:
(1') se $bh \in h^p(-a, a)$, $0 < p < 1$ então para qualquer $0 < c < a$, as "normas" dos traços $h(\cdot, y)$ em $L^p[-c, c]$ são uniformemente limitadas em y, isto é,

$$\int_{-c}^{c} |h(x + iy)|^p dx \leq C, \qquad y \searrow 0;$$

Reciprocamente,
(4') se a "norma" dos traços $h(\cdot, y)$ em $L^p[-c, c]$ são uniformemente limitadas em y então $bh \in h^p[-c, c]$ para qualquer $c < a$.

Neste trabalho C denota uma constante arbitrária que pode mudar um número finito de vezes.

Capítulo 1

Teoria Básica

Neste primeiro capítulo daremos as definições básicas que necessitaremos, bem como os resultados clássicos e bem conhecidos, de forma a tornar o trabalho o mais completo possível. Começaremos definindo os espaços de Hardy em $\mathbb{R}^n$ e sua versão localizável, enunciaremos os teoremas de decomposição atômica e provaremos dois teoremas envolvendo operadores definidos nestes espaços.

1.1 Os espaços de Hardy em $\mathbb{R}^n$

Considere o espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, isto é, o conjunto das funções ϕ definidas em $\mathbb{R}^n$ infinitamente diferenciáveis, de forma que ela e todas as suas derivadas são rapidamente decrescentes no infinito, no sentido de que permanecem limitadas mesmo multiplicadas por polinômios arbitrários, e munida com a topologia definida pela família enumerável de seminormas

$$\|\varphi\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial_x^\beta \varphi(x)|$$

em que

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}, \quad \partial_x^\beta = \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}}\cdots\frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}},$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$.

Denotamos $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ o dual topológico de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, com a topologia fraca, também conhecido como o espaço das distribuições temperadas.

Se f é uma distribuição temperada e $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, a convolução $f*\Phi$ é uma função bem definida e de classe C^∞ (de crescimento polinomial no infinito).

A conexão dos espaços de Hardy $H^p(\mathbb{R}^n)$ com as funções harmônicas definidas no semi-plano superior $\mathbb{R}^{n+1}_+$ pode ser feita considerando-se o produto convolução $f * P_t$, com $P_t(x) = t^{-n}P(x/t)$, $t > 0$ e P sendo o núcleo de Poisson de $\mathbb{R}^{n+1}_+$.

$$P(x) = \frac{c_n}{(1+|x|^2)^{(n+1)/2}}.$$

O produto de convolução $f * P_t$ não está definido para distribuições arbitrárias, pois P não pertence ao espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Assim, a teoria dos espaços $H^p(\mathbb{R}^n)$ exige uma restrição natural na classe das distribuições. Por isso torna-se necessário trabalhar-se na classe das *distribuições limitadas*, ou seja, distribuições $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tais que $f * \phi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ qualquer que seja $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

De agora em diante distribuição significará distribuição temperada.

Assim se f é uma distribuição limitada e $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então a convolução $f*h$ pode ser definida como uma distribuição. De fato, seja $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ então podemos definir

$$\langle f * h, \phi\rangle = \langle f * \tilde{\phi}, \tilde{h}\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (f * \tilde{\phi})(x)\tilde{h}(x)dx$$

em que $\tilde{\phi}(x) = \phi(-x)$. Além disso, $f*h$ também é uma distribuição limitada e ainda $f * (h_1 * h_2) = (f * h_1) * h_2$ se $h_i \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, 2$.

Assim, como $P \in L^1(\mathbb{R}^n)$, segue que $f * P_t$ está bem definida para toda distribuição limitada f. Além disso, para todo t fixo, $f * P_t$ é uma função em C^∞ e limitada. De fato, podemos escrever $P = \phi * h + \psi$ com $\phi, \psi \in \mathcal{S}$ e $h \in L^1$. Para ver isto, note que $\hat{P}(\xi) = e^{-2\pi|\xi|}$ —a notação $\hat{\phi}$ significa a transformada de Fourier de ϕ— é rapidamente decrescente no infinito e de classe C^∞, à exceção da origem. Tomando $h = P$ e $\phi \in \mathcal{S}$ com $\hat{\phi} \equiv 1$ numa vizinhança da origem, basta definir ψ por $\hat{\psi}(\xi) = (1 - \hat{\phi}(\xi))e^{-2\pi|\xi|}$. Além disso,

$$P_t = \phi_t * h_t + \psi_t \quad \text{e} \quad f * P_t = f * \psi_t + (f * \phi_t) * h_t$$

o que conclui a prova de que $f * P_t \in C^\infty \cap L^\infty$.

Além disso, como $[(\partial_t)^2 + \sum_{j=1}^n (\partial_{x_j})^2]P_t(x) = 0$, vemos que a função $u(x,t) = (f * P_t)(x)$ é de classe C^∞ em (x,t) e harmônica no semiplano superior.

Para cada $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e toda distribuição f, definimos a *função maximal* de f, $M_\Phi f(x)$ por

$$M_\Phi f(x) = \sup_{t>0} |(f * \Phi_t)(x)|. \tag{1.1}$$

A seguir, vamos considerar uma função maximal relacionada não apenas a uma aproximação da identidade Φ_t mas baseada numa família limitada de funções testes, chamada de *grande função maximal.* Com esse objetivo, seja $\mathcal{F} = \{\| \cdot \|_{\alpha_i, \beta_i}\}$ uma coleção finita de seminormas definidas sobre $\mathcal{S}$, e seja

$$S_{\mathcal{F}} = \{\Phi \in S : \|\Phi\|_{\alpha_i, \beta_i} \leq 1 \text{ para toda } \| \cdot \|_{\alpha_i, \beta_i} \in \mathcal{F}\}.$$

Definimos então a *grande função maximal* de f

$$\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f(x) = \sup_{\Phi \in S_{\mathcal{F}}} M_{\Phi} f(x). \tag{1.2}$$

Finalmente, se f é uma distribuição limitada, considere

$$u(x,t) = (f * P_t)(x)$$

a integral de Poisson de f, definida no semiplano superior. Seja

$$u^*(x) = \sup_{|x-y| \leq t} |u(y,t)| \tag{1.3}$$

a *função maximal não-tangencial* de u e

$$u^{\perp}(x) = \sup_{t>0} |u(x,t)| \tag{1.4}$$

a *função maximal radial* de u. Os espaços de Hardy $H^p(\mathbb{R}^n)$ podem ser caracterizados da seguinte maneira, veja [St].

Teorema 1.1.1. *Seja f uma distribuição e seja $0 < p \leq \infty$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(*i*) *Existe uma função $\Phi \in \mathcal{S}$ com $\int \Phi \neq 0$ tal que $M_{\Phi} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.*

(*ii*) *Existe uma coleção $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{M}_{\mathcal{F}} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.*

(*iii*) *A distribuição f é limitada e $u^* \in L^p(\mathbb{R}^n)$.*

(*iv*) *A distribuição f é limitada e $u^{\perp} \in L^p(\mathbb{R}^n)$.*

(*v*) *Para toda função $\Phi \in \mathcal{S}$ com $\int \Phi \neq 0$ temos que $M_{\Phi} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Se alguma dessas propriedades for satisfeita, e portanto todas, diremos que f pertence a $H^p(\mathbb{R}^n)$.

Seja N um inteiro positivo, e considere

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_N = \{\|\cdot\|_{\alpha,\beta} : |\alpha| \leq N, |\beta| \leq N\}.$$

Se N é suficientemente grande (em termos de p e n), então as quantidades

$$\|M_\Phi f\|_{L^p}, \quad \|\mathcal{M}_{\mathcal{F}_N} f\|_{L^p}, \quad \|u^*\|_{L^p} \quad \text{e} \quad \|u^\perp\|_{L^p}$$

são comparáveis, com as constantes independentes de f. Qualquer uma das expressões acima pode ser tomada como norma em $H^p(\mathbb{R}^n)$. Observamos que são normas apenas quando $p \geq 1$. Entretanto é usual se referir a essas quantidades, por exemplo, $\|M_\Phi f\|_{L^p}$ como H^p norma de f, e denotamos por $\|f\|_{H^p}$. Note que a expressão $\|\cdot\|_{H^p}^p$ é subaditiva se $p \leq 1$ fornecendo assim uma métrica em H^p. Esta métrica define a topologia de H^p.

1.1.2 Decomposição atômica para $H^p(\mathbb{R}^n)$

Um objeto importante que surge no estudo dos espaços $H^p(\mathbb{R}^n)$ com $p \leq 1$ são os H^p-átomos. Mais precisamente,

Definição 1.1.3. *Um H^p-átomo a, é uma função mensurável que satisfaz as seguintes propriedades: existe uma bola B tal que*

(*i*) *suporte de a está contido em B;*

(*ii*) $|a(x)| \leq |B|^{-1/p}$ *para quase todo x;*

(*iii*) $\int x^\beta a(x)dx = 0$ *para todo β com $|\beta| \leq n(p^{-1} - 1)$.*

Os H^p átomos são elementos de $H^p(\mathbb{R}^n)$, com norma H^p uniformemente limitada. Ou seja,

$$\|\mathcal{M}_0 a\|_{L^p} \leq C(n,p)$$

para todo H^p-átomo. Aqui $\mathcal{M}_0 f(x) = \sup_{t>0} |f * \Phi_t(x)|$, em que Φ é uma função suave suportada na bola unitária em torno da origem com $\int \Phi \neq 0$.

Além disso, é possível mostrar que se $\{a_k\}$ é uma coleção de H^p-átomos e $\{\lambda_k\}$ é uma sequência de números complexos com $\sum |\lambda_k|^p < \infty$, então a série

$$f = \sum_k \lambda_k a_k \tag{1.5}$$

converge no sentido das distribuições, e sua soma $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$, com

$$\|f\|_{H^p} \le c(\sum |\lambda_k|^p)^{1/p}.$$

Por outro lado, a recíproca deste fato pode ser expressa no seguinte resultado, veja por exemplo [St].

Teorema 1.1.4. *Seja $p \le 1$. Então cada $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$ pode ser escrita como uma soma de H^p átomos, como em (1.9) acima, que converge na norma H^p; além disso,*

$$\sum_k |\lambda_k|^p \le c\|f\|^p_{H^p}.$$

1.2 Os espaços de Hardy localizáveis

Observamos que os espaços de Hardy H^p não são como L^p quando $p \le 1$ pois H^p não contém $\mathcal{S}$ —para ver isto, basta considerar qualquer $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ com $\int \phi \ne 0$ e assim teremos que $\phi \notin H^1(\mathbb{R})$. Entretanto, em 1979, Goldberg [G] introduziu os espaços $h^p(\mathbb{R}^n)$, uma versão local dos espaços de Hardy. No entanto daremos aqui uma caracterização alternativa. Para isto, definamos algumas funções maximais análogas as funções (1.1) e (1.2).

Para $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\int \Phi \ne 0$, definimos: a *pequena função maximal radial*

$$m_\Phi f(x) \quad = \quad \sup_{0<t<1} |f * \Phi_t(x)|; \tag{1.6}$$

a *pequena função maximal não tangencial*

$$m^*_\Phi f(x) = \sup_{|x'-x|\le t} |\Phi_t * f(x')|; \tag{1.7}$$

a *pequena grande função maximal*

$$m_{\mathcal{F}} f(x) \quad = \quad \sup_{\Phi \in \mathcal{F}} m_\Phi f(x), \tag{1.8}$$

com

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_N = \{\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \|\varphi\|_{\alpha,\beta} \le 1; |\alpha|, |\beta| \le N\}.$$

Com isso, temos o seguinte resultado, análogo ao Teorema 1.1.1.

Teorema 1.2.1. *Seja f uma distribuição e seja $0 < p \leq \infty$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) Existe uma função $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\int \Phi \neq 0$, tal que $m_\Phi f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Existe um $N_0 = N_0(p, n)$ de forma que a coleção $\mathcal{F}_N$ tem a propriedade de que $m_{\mathcal{F}} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, se $N \geq N_0$.

(iii) Para toda função $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ com $\int \Phi \neq 0$, temos que $m_\Phi f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Se alguma dessas propriedades for satisfeitas, e portanto todas, diremos que f pertence a $h^p(\mathbb{R}^n)$. Além disso, se N é suficientemente grande (em termos de p e n), então as quantidades

$$\|m_\Phi f\|_{L^p}, \qquad \|m_{\mathcal{F}} f\|_{L^p},$$

são comparáveis, com constantes independentes de f.

1.2.2 Decomposição atômica para $h^p(\mathbb{R}^n)$

Assim como no caso dos espaços $H^p(\mathbb{R}^n)$, temos os $h^p(\mathbb{R}^n)$-átomos.

Definição 1.2.3. *Dizemos que uma função mensurável a é um h^p-átomo se existe uma bola B de forma que*

$$\begin{cases} (i) & S(a) \subset B; \\ (ii) & \|a\|_\infty \leq |B|^{-\frac{1}{p}}; \\ (iii) & se\ |B| < 1,\ \int x^\alpha a(x)dx = 0,\ \forall |\alpha| \leq n(p^{-1} - 1). \end{cases}$$

Na teoria atômica de H^p, a condição de momento nulo deve ocorrer para todos os H^p-átomos assim, é fácil ver que todo H^p-átomo é também um h^p-átomo. A seguir, descrevemos a decomposição atômica para o h^p, veja [G].

Teorema 1.2.4. *Se $f \in h^p(\mathbb{R}^n)$, $p \leq 1$, então existem uma seqüência de h^p-átomos (a_j) e uma seqüência de números complexos $(\lambda_j) \in \ell^p$ de forma que $f = \sum \lambda_i a_i$ com $\sum |\lambda_i|^p \leq C\|f\|_{h^p}^p$ (ou mais precisamente, $f = \lim_k \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i$ na topologia de h^p).*

Reciprocamente, é possível mostrar que se $\{a_k\}$ é uma coleção de h^p-átomos e $\{\lambda_k\}$ é uma sequência de números complexos com $\sum |\lambda_k|^p < \infty$, então a série

$$f = \sum_k \lambda_k a_k \tag{1.9}$$

converge no sentido das distribuições, e sua soma $f \in h^p(\mathbb{R}^n)$, com

$$\|f\|_{h^p} \leq C(\sum |\lambda_k|^p)^{1/p}.$$

1.2.5 Mudança de variável

Considere $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo de classe C^∞ de forma que $D^\alpha F$ e $D^\alpha(F^{-1})$ ambas estejam em L^∞ para todo α. Temos o seguinte teorema.

Teorema 1.2.6. *A aplicação $h^p(\mathbb{R}^n) \ni u \to u \circ F$ é limitada em $h^p(\mathbb{R}^n)$.*

1.3 Operadores de Calderón-Zygmund em espaços de Hardy

Consideraremos um operador linear T, inicialmente definido como uma aplicação do conjunto das funções testes em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ nas distribuições em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, associado ao núcleo $K(x, y)$, definido para $x \neq y$ e satisfazendo as seguintes desigualdades:

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta K(x, y)| \leq A|x - y|^{-n-|\alpha|-|\beta|}; \tag{1.10}$$

tais núcleos são denominados de Calderón-Zygmund.

A relação assumida entre T e K é que, quando $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tem suporte compacto, então a distribuição Tf pode ser identificada com a função

$$(Tf)(x) = \int K(x, y)f(y)dy, \tag{1.11}$$

para x fora do suporte de f.

Se T é um operador associado a um núcleo de Calderón-Zygmund K que é contínuo em L^2 diremos que T é um operador de Calderòn-Zygmund. No restante desta seção estamos supondo $0 < p \leq 1$.

Proposição 1.3.1. *Seja T um operador de Calderón-Zygmund. Então T é um operador contínuo de $H^p(\mathbb{R}^n)$ para $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Seja K um núcleo de Calderón-Zygmund de forma que T é dado via (1.11). Observe que é suficiente mostrarmos que

$$\|Ta\|_{L^p} \leq C < \infty \tag{1.12}$$

para todo H^p-átomo a. De fato, se $f \in H^p$ escreva, em vista do Teorema 1.1.4, $f = \sum_k \lambda_k a_k$ com $(\lambda_k) \in \ell^p$, $\sum_k |\lambda_k|^p \leq C\|f\|_{H^p}^p$ e cada a_k é um H^p-átomo (que pode ser tomado em C_c^∞). Usando (1.12) e a subaditividade de $\|\cdot\|_{L^p}^p$, temos

$$\|Tf\|_{L^p}^p = \Big\|T\Big(\sum_k \lambda_k a_k\Big)\Big\|_{L^p}^p \leq \sum_k |\lambda_k|^p \|T(a_k)\|_{L^p}^p \leq C\sum_k |\lambda_k|^p \leq C'\|f\|_{H^p}^p,$$

mostrando a afirmação.

Fixe um H^p-átomo a, isto é, existe uma bola $B = B(x_0, r)$ de forma que a e B satisfazem (i),(ii) e (iii) da definição 1.1.3. Seja $B^* = B(x_0, 2r)$. Temos

$$\begin{aligned} \|Ta\|_{L^p}^p &= \int |Ta(x)|^p dx \\ &= \int_{B^*} |Ta(x)|^p dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B^*} |Ta(x)|^p dx \\ &= I + II. \end{aligned}$$

Para I, usamos a desigualdade de Holder para os expoentes conjugados $(\frac{2}{p}, \frac{2}{2-p})$ e a continuidade em L^2 de T para obter

$$\begin{aligned} |I| &\leq \left(\int |Ta(x)|^2 dx\right)^{p/2} |B^*|^{\frac{2-p}{2}} \\ &\leq C\left(\int_B |a(x)|^2 dx\right)^{p/2} |B|^{\frac{2-p}{2}} \\ &\leq C\|a\|_{L^\infty}^p |B|^{p/2} |B|^{\frac{2-p}{2}} \\ &\leq C|B|^{-\frac{1}{p}p}|B| = C. \end{aligned}$$

Para II, seja $k = [n(1/p - 1)]$ e escrevamos

$$K(x,y) = \sum_{|\alpha| \leq k} \partial_y^\alpha K(x, x_0)\frac{(y - x_0)^\alpha}{\alpha!} + R(x,y), \tag{1.13}$$

e usamos (1.10) para obtermos que

$$R(x,y) = O(r^{k+1}|x-x_0|^{-(n+k+1)}). \tag{1.14}$$

De (1.13) e (1.14), temos

$$\begin{aligned}
|II| &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B^*} \left| \int K(x,y)a(y)dy \right|^p dx \\
&\leq \int_{|x-x_0|\geq 2r} \left(\int_{|y-x_0|\leq r} |R(x,y)||a(y)|dy \right)^p dx \\
&\leq \|a\|_{L^\infty}^p |B|^p r^{p(k+1)} \int_{|x-x_0|\geq 2r} |x-x_0|^{-p(n+k+1)} dx \\
&\leq Cr^{-n+np+p(k+1)} \int_{2r}^{\infty} \sigma^{-p(n+k+1)} \sigma^{n-1} d\sigma \\
&= Cr^{-n+np+p(k+1)-p(n+k+1)+n} = C,
\end{aligned}$$

observe que a integral em σ é finita pois

$$k = [n(1/p-1)] \Rightarrow k > n(1/p-1) - 1 \Rightarrow -pk - np - p < -n.$$

∎

Provaremos agora uma versão da proposição anterior, no caso em que $H^p(\mathbb{R}^n)$ é substituido por $h^p(\mathbb{R}^n)$. Para isto, considere Ω e Ω' subconjuntos abertos e limitados de $\mathbb{R}^n$.

PROPOSIÇÃO 1.3.2. *Seja T um operador de Calderon-Zygmund. Então T é contínuo de $h^p(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}'(\Omega')$ em $L^p(\Omega)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\Omega' = B(0, \delta/2)$. Observe que é suficiente mostrarmos que

$$\|Ta\|_{L^p(\Omega)} \leq C < \infty$$

para todo h^p-átomo a suportado em $B(0,\delta)$, pois toda $f \in h^p(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}'(\Omega')$ possui decomposição atômica com átomos suportados em $B(0,\delta)$. Se a tem momentos nulos, então a é um H^p-átomo e a prova segue do teorema anterior. Se a não possui momentos nulos, a prova também segue como no teorema anterior, observando que os momentos foram usados apenas para computar a integral II. Com efeito, como $r \leq \delta$,

$$\begin{aligned}
|II| &= \int_{\Omega\setminus B^*} \left| \int K(x,y)a(y)dy \right|^p dx \\
&\leq \int_{2r\leq|x-x_0|\leq 2\delta} \left(\int_{|y-x_0|\leq r} |K(x,y)||a(y)|dy \right)^p dx \\
&\leq \|a\|_{L^\infty}^p |B|^p \int_{2r\leq|x-x_0|\leq 2\delta} |x-x_0|^{-pn} dx \\
&\leq Cr^{-n+np} \int_{2r}^{2\delta} \sigma^{-pn}\sigma^{n-1} d\sigma \\
&= Cr^{-n+np}\big(r^{-pn+n} - \delta^{-pn+n}\big) \\
&= C - \left(\frac{r}{\delta}\right)^{pn-n} \;\leq\; C'
\end{aligned}$$

em que C' é independente de r. ∎

Capítulo 2

Resultados preliminares

Neste capítulo definiremos o que vem a ser um campo localmente resolúvel, definição 2.1.1, veremos mais dois espaços de Hardy e mostraremos (ver Lema 2.2.6) que ambos coincidem quando definidos em certos tipos de domínios — por exemplo, os domínios do tipo sino, definição 2.2.5.

2.1 Soluções homogêneas

Vejamos o que vem a ser um campo localmente resolúvel (ver [NT, T]).

Definição 2.1.1. *Sejam L um campo de vetores suave definido em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $\zeta \in \Omega$. Dizemos que L é localmente resolúvel em ζ se existe uma vizinhança $U = U(\zeta)$ tal que para toda $f \in C^\infty(\Omega)$ existe $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ de modo que a equação $Lu = f$ vale em U. Se L é localmente resolúvel em todo ponto de Ω, dizemos que L é localmente resolúvel em Ω.*

Seja L é um campo de vetores localmente resolúvel em $(-a', a') \times (-b', b')$, dado por

$$L = \frac{\partial}{\partial y} + a(x, y)\frac{\partial}{\partial x} \tag{2.1}$$

Nesta seção, f é uma função contínua e solução fraca de $Lf = 0$ em $Q = (-a, a) \times (-0, b)$ para algum $a < a'$ e $b < b'$. Como estamos trabalhando com propriedades locais e resolubilidade local implica em integrabilidade local, ver [T], podemos assumir, sem perda de generalidade, que existe uma função real suave $\varphi(x,t)$ definida numa vizinhança de Q de forma que $Z(x,t) = x + i\varphi(x,t)$ é uma integral primeira de L, isto é, $LZ = 0$ e $dZ \neq 0$. Assim podemos escrever $a(x,t) = -i\varphi_t(x,t)/(1 + i\varphi_x(x,t))$. Além disso, por razões técnicas, é conveniente assumir que $\varphi(0,0) = \varphi_x(0,0) = 0$ e

$$|\varphi_x(x,t)| < \frac{1}{2} \quad \text{numa vizinhança de } Q. \tag{2.2}$$

Sabemos também que a resolubilidade local de L é equivalente ao fato de que L satisfaz a condição $(\mathcal{P})$ de Nirenberg-Treves [NT, T] e isto se reflete na seguinte propriedade:

Para todo $x \in [-a,a]$ a aplicação $[-b,b] \ni t \mapsto \varphi(x,t)$ é monótona.

Defina

$$m(x) = \min_{0 \leq t \leq b} \varphi(x,t), \qquad M(x) = \max_{0 \leq t \leq b} \varphi(x,t), \quad -a \leq x \leq a.$$

Daí, a função $Z(x,t)$ leva o retângulo $Q = [-a,a] \times [-b,b]$ sobre o conjunto

$$Z(Q) = \{\xi + i\eta : -a \leq \xi \leq a, m(\xi) \leq \eta \leq M(\xi)\}.$$

O interior de $Z(Q)$ é da forma

$$\{\xi + i\eta : -a < \xi < a, m(\xi) < \eta < M(\xi)\},$$

em particular o interior é não vazio se, e somente se, $M(x) > m(x)$ para algum $x \in (-a,a)$. Se $int(Z(Q)) = \emptyset$, temos que $M(x) = m(x)$ para todo $x \in (-a,a)$, logo $\varphi(x,t)$ é constante em t, $\forall x \in (-a,a)$. Donde $\varphi_t \equiv 0$. Portanto $a \equiv 0$ e consequentemente $L = \partial_t$, que neste caso o nosso teorema fica trivial (Teorema 4.2.1). Suponhamos então que φ_t não se anula identicamente para algum $t > 0$, implicando que $Z(Q^+)$ tem interior não vazio. Toda componente conexa U do interior de $Z(Q^+)$ tem a forma

$$U = \{\xi + i\eta : \alpha < \xi < \beta, m(\xi) < \eta < M(\xi)\},$$

aqui (α, β) é uma componente conexa do conjunto aberto $\{x \in (-a,a) : M(\xi) > m(\xi)\}$. Note que, pela definição de U temos que $M(\alpha) = m(\alpha)$ a menos que $\alpha = -a$, e $M(\beta) = m(\beta)$ a menos que $\beta = a$. Daremos atenção ao caso $-a < \alpha < \beta < a$, então $M(\alpha) = m(\alpha)$ e $M(\beta) = m(\beta)$. Como, para todo $x \in (\alpha, \beta)$ a aplicação $t \mapsto \varphi(x,t)$ é monótona e não constante, temos que $\varphi_t(x,t) \geq 0$ para $x \in (\alpha, \beta)$ e $|t| \leq b$ ou $\varphi_t(x,t) \leq 0$ para $x \in (\alpha, \beta)$ e $|t| \leq b$. Assumiremos que $\varphi_t(x,t) \geq 0$ em $[\alpha, \beta] \times [0, b]$. Então

$$M(x) = \varphi(x,b), \quad \text{e} \quad m(x) = \varphi(x,0), \ \alpha \leq x \leq \beta.$$

Daí, U é uma região limitada figurando entre os gráficos de duas funções suaves e seu bordo é suave exceto, possivelmente, nos dois pontos finais $(\alpha, M(\alpha))$ e $(\beta, M(\beta))$. Além disso, U tem bordo retificável de comprimento limitado por

$$\begin{aligned} |\partial U| &\leq \int_\alpha^\beta \sqrt{1+\varphi_x^2(x,b)}dx + \int_\alpha^\beta \sqrt{1+\varphi_x^2(x,0)}dx \\ &\leq 2(\beta-\alpha)\sqrt{1+\sup_Q |\nabla\varphi|^2} = K(\beta-\alpha). \end{aligned}$$

Para $\epsilon > 0$ pequeno e $\tau > 0$ grande, seja

$$E_{\tau,\epsilon}f(x,t) = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',\epsilon)]^2} f(x',\epsilon)h(x')Z_x(x',0)dx'. \qquad (2.3)$$

Aqui $h(x') \in C_c^\infty(-a', a')$ é uma função teste identicamente 1 numa vizinhança de $[-a, a]$. Pela hipótese (2.2), a prova da fórmula de aproximação de Baouendi-Treves [BT] mostra que, para ϵ fixo, $E_{\tau,\epsilon}f(x,t) \to f(x,t)$ quando $\tau \to \infty$, uniformemente no retângulo $R_\epsilon = [-a, a] \times [\epsilon, b]$ se b é suficientemente pequeno. Além disso, a fórmula (2.3) pode ser reescrita como $E_{\tau,\epsilon}f(x,t) = F_{\tau,\epsilon}Z(x,t)$ em que $F_{\tau,\epsilon}$ é uma função inteira. Se $\tau_k \to \infty$, vemos que $F_{\tau_k,\epsilon}$ é uniformemente de Cauchy em $Z(R_\epsilon)$. Em particular, $F_{\tau_k,\epsilon}$ converge uniformemente para uma função F_ϵ que é holomorfa em

$$U_\epsilon = \{\xi + i\eta : \alpha < \xi < \beta, \varphi(\xi,\epsilon) < \eta < M(\xi)\},$$

e contínua em

$$\{\xi + i\eta : \alpha < \xi < \beta, \varphi(\xi,\epsilon) \leq \eta \leq M(\xi)\}.$$

Daí, $F_\epsilon(Z(x,t)) = f(x,t)$ em $\alpha < x < \beta$, $\epsilon \leq t < b$ e F_ϵ é uma extensão de $F_{\epsilon'}$ se $0 < \epsilon < \epsilon'$ são pequenos. Fazendo $\epsilon \searrow 0$, obtemos uma função holomorfa F definida em U tal que $f(x,t) = F(Z(x,t))$.

Conclusão 2.1.2. *A solução f determina uma função holomorfa F em U tal que $f(x,t) = F(Z(x,t))$ em $Z^{-1}(U)$.*

2.2 Resultados em Espaços de Hardy

Os seguintes resultados melhoram os seus análogos do trabalho [BH2], no sentido que o extendem para $0 < p < 1$.

Definição 2.2.1. *Seja D um domínio limitado com bordo retificável. Uma função g, holomorfa em D, é dita estar em $E^p(D)$, $0 < p \leq \infty$, se existe uma seqüência de curvas (de Jordan) retificáveis C_j em D tendendo para bD (no sentido de que dado um subconjunto compacto $K \subset D$ qualquer, existe $j_K \in \mathbb{N}$ de forma que o interior de C_j contém K para todo $j \geq j_K$), tal que*

$$\int_{C_j} |g(z)|^p |dz| \leq M < \infty.$$

A "norma" de $g \in E^p(D)$ é definida por

$$\|g(z)\|^p_{E^p(D)} = \inf \sup_j \int_{C_j} |g(z)|^p |dz|,$$

em que o ínfimo é tomado sobre todas tais seqüências de curvas retificáveis C_j tendendo para bD.

Teorema 2.2.2 (Fatorização Canônica). *Seja U uma região do tipo sino. Seja $f \in E^p(U)$, $0 < p < \infty$, não identicamente nula, então $f = gB$ com $g \in E^p(U)$, $B \in E^\infty(U)$ com $|B| \leq 1$, g sem zeros em U e $\|f\|_{E^p} = \|g\|_{E^p}$.*

Demonstração. A demonstração para o caso em que U é o disco unitário Δ é devida a F. Riesz e o caso em que U é do tipo sino segue deste. Com efeito, se $\omega : \Delta \to U$ é uma aplicação conforme, temos que $\tilde{f}(z) = f(\omega(z))(\omega'(z))^{1/p} \in H^p(\Delta)$ [1] pelo corolário do Teorema 10.1 em [Du]. Seja $\tilde{B}(z)$ o produto de Blaschke associado aos zeros de $\tilde{f}$, contados de acordo com sua multiplicidade. Então $|\tilde{B}(z)| \leq 1$, tem os mesmos zeros que $f_1 = f \circ \omega$ com a mesma multiplicidade e, se $0 < r_j \nearrow 1$, segue que

$$\sup_j \int_0^{2\pi} \frac{|f_1(r_j e^{i\theta})|^p}{|\tilde{B}(r_j e^{i\theta})|^p} |\omega'(r_j e^{i\theta})| d\theta = \sup_j \int_0^{2\pi} |f_1(r_j e^{i\theta})|^p |\omega'(r_j e^{i\theta})| d\theta \leq C. \quad (2.4)$$

[1] Veja definição de $H^p(\Delta)$ em [HH], de outra maneira, segue de [Du, Teorema 10.1] que $H^p(\Delta) = E^p(\Delta)$.

De fato, claramente o supremo a direita é limitado pelo supremo a esquerda, pois $|\tilde{B}| \leq 1$. Por outro lado, considere o produto finito $\tilde{B}_N$ dos primeiros N fatores de $\tilde{B}$. Assim $\tilde{B}_N \to \tilde{B}$ normalmente em Δ quando $N \to \infty$, $|\tilde{B}_N| = 1$ para $|z| = 1$ e $\tilde{B}_N$ é contínuo em $|z| \leq 1$, então

$$\sup_j \int_0^{2\pi} \frac{|f_1(r_j e^{i\theta})|^p}{|\tilde{B}_N(r_j e^{i\theta})|^p} |\omega'(r_j e^{i\theta})| d\theta = \sup_j \int_0^{2\pi} |f_1(r_j e^{i\theta})|^p |\omega'(r_j e^{i\theta})| d\theta.$$

E, pelo Lema de Fatou,

$$\begin{aligned}
\sup_j \int_0^{2\pi} \lim_{N\to\infty} & \frac{|f_1(r_j e^{i\theta})|^p}{|\tilde{B}_N(r_j e^{i\theta})|^p} |\omega'(r_j e^{i\theta})| d\theta \\
&\leq \sup_j \liminf_{N\to\infty} \int_0^{2\pi} \frac{|f_1(r_j e^{i\theta})|^p}{|\tilde{B}_N(r_j e^{i\theta})|^p} |\omega'(r_j e^{i\theta})| d\theta \\
&\leq \liminf_{N\to\infty} \sup_j \int_0^{2\pi} \frac{|f_1(r_j e^{i\theta})|^p}{|\tilde{B}_N(r_j e^{i\theta})|^p} |\omega'(r_j e^{i\theta})| d\theta \\
&= \sup_j \int_0^{2\pi} |f_1(r_j e^{i\theta})|^p |\omega'(r_j e^{i\theta})| d\theta.
\end{aligned}$$

Portanto, se tomarmos $B(\zeta) = \tilde{B}(\omega^{-1}(\zeta))$, vemos que $|B| \leq 1$ em U, $g = f/B$ está bem definida e (2.4) implica que $g \in E^p(U)$ com $\|f\|_{E^p} = \|g\|_{E^p}$. ■

Observação: Se $f \in E^p(U)$, pelo teorema, $f = gB$ com $g \in E^p(U)$ e g não tem zeros, se U for simplesmente conexo (U do tipo sino, é simplesmente conexo), podemos definir qualquer potência de g. Isto é, definindo $h = g^r$, ($r \in \mathbb{R}$ qualquer), temos que $f = h^{1/r}B$, $h \in E^{rp}(U)$ sem zeros e $\|f\|_{E^p} = \|h\|^r_{E^{rp}}$.

Definição 2.2.3. *Considere uma região limitada $\Omega \subset \mathbb{C}$, satisfazendo a condição de que existe $\alpha = \alpha(\Omega) > 0$ com a propriedade que quase todo ponto p no bordo admite uma região de Stolz de aproximação*

$$\Gamma_\alpha(p) = \{z \in \Omega : |z - p| < (1 + \alpha)\, dist(z, \partial\Omega)\}, \tag{2.5}$$

isto é, para quase todo $p \in \partial\Omega$, $\Gamma_\alpha(p)$ é aberto e p está no fecho de $\Gamma_\alpha(p)$ [2]. *Seja u uma função definida em Ω. A função maximal não-tangencial e o*

[2] Esta condição é satisfeita, por exemplo, se Ω é uma região limitada simplesmente conexa com bordo retificável.

limite não-tangencial u^* e u^+ respectivamente, são dados por:

$$\begin{aligned} u^*(p) &= \sup_{\zeta \in \Gamma_\alpha(p)} |u(\zeta)| \quad q.t.p. \quad p \in \partial\Omega, \\ u^+(p) &= \lim_{\Gamma_\alpha(p) \ni \zeta \to p} u(\zeta) \quad q.t.p. \quad p \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

DEFINIÇÃO 2.2.4. *Seja Ω como na definição anterior, para $0 < p < \infty$ definimos os espaços de Hardy $H^p(\Omega)$ como*

$$H^p(\Omega) = \{f \in \mathcal{O}(\Omega) : f^* \in L^p(\partial\Omega)\},$$

em que $\mathcal{O}(\Omega)$ é o conjunto das funções holomorfas em Ω e f^* denota a função maximal não-tangencial usando $\Gamma_\alpha(p)$ como na definição acima.

Quando Ω é o disco unitário, os espaços de Hardy $E^p(\Omega)$ e $H^p(\Omega)$ coincidem, veja [Du]. Pelo Teorema da aplicação de Riemann, estes espaços também coincidem quando Ω for qualquer domínio limitado, simplesmente conexo, com bordo suave. No trabalho [L] é mostrada a igualdade dos espaços quando $1 < p < \infty$ e Ω é limitada, simplesmente conexo, com bordo Lipschitz. O método apresentado em [BH2] prova a igualdade $E^p(U) = H^p(U)$ e para classe especial (mais geral) de domínios Ω. Para isto, definamos:

DEFINIÇÃO 2.2.5. *Chamaremos um domínio U do tipo sino se U é uma região limitada por duas curvas suaves $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ de modo que ∂U é suave exceto, possivelmente, nos dois únicos pontos A e B em que as curvas se interceptam, formando ângulos de $0 \leq \theta(A), \theta(B) < \pi$.*

Considere U do tipo sino, se as curvas suaves $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ que formam ∂U se interceptam em A e B, formam ângulos de $0 < \theta(A), \theta(B) < \pi$, temos que U tem fronteira de Lipschitz e neste caso já é conhecida a igualdade $E^p(U) = H^p(U)$ para $1 < p < \infty$, [L].

O método apresentado em [BH2] prova a igualdade $E^p(U) = H^p(U)$ para $1 \leq p < \infty$ mesmo quando $\theta(A) = 0 = \theta(B)$. E usaremos este fato para estendermos a igualdade para $p < 1$. Nos argumentos que seguem estamos supondo $p < 1$.

LEMA 2.2.6. *$E^p(U) = H^p(U)$, $0 < p < \infty$ para domínios do tipo sino.*

Demonstração. Suponha que $g \in H^p(U)$. Tome uma seqüência de curvas retificáveis C_j tendendo para o bordo de U. Daí,

$$\begin{aligned}
\int_{C_j} |g(\zeta_j)|^p |d\zeta_j| &= \int_{\Lambda_j^{-1}(\partial U_j)} |g(\Lambda_j(\zeta))|^p |\Lambda_j'(\zeta)|\, |d\zeta| \\
&\leq \int_{\Lambda_j^{-1}(\partial U_j)} |g^*(\zeta)|^p |\Lambda_j'(\zeta)|\, |d\zeta| \\
&\leq C \int_{\partial U} |g^*(\zeta)|^p |d\zeta| < \infty,
\end{aligned}$$

em que Λ_j é um difeomorfismo de C_j sobre um subconjunto ∂U_j de ∂U. Ver construção de C_j em [BH2, páginas 475-476]. Por outro lado, se $f \in E^p(U)$, pelo Teorema 2.2.2, podemos escrever $f = gB$ em que $g \in E^p(U)$ não se anula e $\|g\|_{E^p} = \|f\|_{E^p}$. Escolha n de forma que $np > 1$. Pela observação feita após o Teorema 2.2.2, podemos tomar $h = g^{1/n}$ que está em $E^{np}(U) = H^{np}(U)$, a igualdade sendo conseqüência do caso já feito em [BH2]. Daí $h^* \in L^{np}(\partial U)$ e portanto $[g]^* = [h^n]^* = [h^*]^n \in L^p(\partial U)$. Como $|B| \leq 1$ temos que $f^* = (gB)^* \in L^p(\partial U)$. Donde $f \in H^p(U)$. ∎

Para encerrarmos esta seção, enunciaremos mais um lema a ser usado posteriormente.

Lema 2.2.7. *Seja D um domínio do tipo sino e $0 < p < \infty$. Então as funções holomorfas em D e contínuas até o fecho de D são densas em $E^p(D)$.*

Demonstração. Por um argumento de aplicação conforme, basta considerarmos o caso em que D é o disco unitário Δ. Assim, se $f \in E^p(\Delta)$, tome $r_j \uparrow 1$ qualquer e considere as funções $f_j(z) = f(r_j z)$. É fácil ver que $f_j \in E^p(\Delta)$ e que $f_j \to f$ em $E^p(\Delta)$. ∎

Capítulo 3

Controle em L^p, $0 < p \leq 1$ do traço de soluções homogêneas

3.1 Introdução

Considere $h(z)$ é uma função holomorfa de uma variável, definida no retângulo

$$Q = (-a, a) \times (0, b)$$

com valor de bordo bh, no sentido fraco, em $t = 0$. Sabemos que se $bh \in L^p(-a, a)$, $1 \leq p \leq \infty$, então para qualquer $0 < c < a$, a norma dos traços $h(\cdot, t)$ em $L^p[-c, c]$ são uniformemente limitadas quando $t \to 0^+$:

$$\int_{-c}^{c} |h(x + it)|^p dx \leq C, \qquad t \searrow 0.$$

Se faz natural estudarmos campos de vetores L para os quais as soluções da equação homogênea satisfazem a mesma propriedade. Esta questão foi completamente respondida no recente trabalho [BH4] quando $1 \leq p \leq \infty$: Suponha que L é um campo de vetores suave, localmente integrável em "um lado" (ver definição 3.2.1) com integral primeira $Z(x, t) = x + i\varphi(x, t)$ então

Teorema 1 (Teorema 2, [BH4]). *Seja L um campo de vetores como acima. Suponha que f é uma distribuição solução de $Lf = 0$ no retângulo $Q = (-A, A) \times (0, B)$. Suponha que f tem valor de bordo no sentido fraco $bf = f(x, 0)$ em $t = 0$. Então existem $A_0 > 0$ e $T_0 > 0$ tal que, para qualquer $0 < T \leq T_0$ e $0 < a < A_0$, se $f(\cdot, 0)$ e $f(\cdot, T) \in L^p(-A_0, A_0)$ então*

$f(\cdot,t) \in L^p(-a,a)$ para qualquer $0 < t < T$ e para quase todo $0 < a < A_0$ existe $C = C(a,T)$ tal que

(i) se $1 \leq p < \infty$, então

$$\int_{-a}^{a} |f(x,t)|^p \, dx \quad \leq \quad C\Big(\int_{-a}^{a} |f(x,0)|^p dx + \int_{-a}^{a} |f(x,T)|^p dx$$
$$+ \quad \int_0^T |f(a,s)|^p |\varphi_s(a,s)| ds + \int_0^T |f(-a,s)|^p |\varphi_s(-a,s)| ds\Big);$$

(ii) se $p = \infty$, então $f \in L^\infty((-a,a) \times (0,T))$.

Neste capítulo iremos provar o teorema acima, na sua versão para $p < 1$, quando L é um campo analítico real. Para isto, começaremos dando uma descrição geométrica da condição $(\mathcal{P}^+)$.

3.2 A condição $(\mathcal{P}^+)$ de Nirenberg-Treves

Seja

$$L = A(x,t)\frac{\partial}{\partial t} + B(x,t)\frac{\partial}{\partial x}$$

um campo de vetores localmente integrável, C^∞, $|A| + |B| > 0$, definido num subconjunto aberto Ω do plano. Considere uma curva Σ em Ω de forma que $\Omega \backslash \Sigma$ tenha duas componentes conexas, $\Omega \backslash \Sigma = \Omega^+ \cup \Omega^-$. Escreva $L = X + iY$, com X e Y reais. Sabemos que a condição $(\mathcal{P})$ pode ser expressa em termos das órbitas do par de campos de vetores $\{X, Y\}$ no sentido de Sussmann [S]. Para qualquer aberto $U \subset \Omega$, dois pontos pertencem a mesma órbita de $\{X, Y\}$ se eles podem ser unidos por uma curva contínua, diferenciável por partes de maneira que em cada pedaço ela é uma curva integral de $\pm X$ ou $\pm Y$. Como assumimos que X e Y não tem zeros em comum, as órbitas de L em U são subvariedades imersas de dimensão um ou dois; além disso, as órbitas de dimensão dois são subconjuntos abertos de U. Seja $W \subset U$ uma órbita de dimensão dois de L em U e considere $X \wedge Y \in C^\infty(U; \bigwedge^2(T(U)))$. Como $\bigwedge^2(T(U))$ tem uma seção global que nunca se anula, $e_1 \wedge e_2$, $X \wedge Y$ é um múltiplo real de $e_1 \wedge e_2$ e isto dá um significado para que $X \wedge Y$ não mude de sinal em qualquer órbita de dimensão dois em W de $\{X, Y\}$ em U. O campo de vetores L satisfaz a condição $(\mathcal{P})$ em $p \in \Sigma$ se existe um disco $U \subset \Omega$ centrado em p tal que $X \wedge Y$ não muda de sinal em qualquer órbita de dimensão dois de L em U. Analogamente, temos a seguinte definição.

Definição 3.2.1. *Dizemos que L satisfaz a condição $(\mathcal{P}^+)$ em $p \in \Sigma$ se existe um disco $U \subset \Omega$ centrado em p tal que $X \wedge Y$ não muda de sinal em qualquer órbita de dimensão dois de L em $U^+ = U \cap \Omega^+$.*

Definição 3.2.2. *Dizemos que L é localmente integrável em um lado em $p \in \Sigma$ se existe um disco $U \subset \Omega$ centrado em p tal que –depois de trocar Ω^+ por Ω^- se necessário– existe $Z \in C^\infty(U)$ tal que*

(1) *LZ se anula identicamente em U^+;*

(2) *$dZ(p) \neq 0$.*

Existem muitas formulações equivalentes da condição $(\mathcal{P})$ (veja [T]). Para qualquer campo de vetores L como acima, podemos fazer uma mudança local de coordenadas (x, t) próximo de $p \in \Sigma$ de modo que $x(p) = 0$, $t(p) = 0$ e L toma a forma (a menos de um fator suave que não se anula)

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + ib(x,t)\frac{\partial}{\partial x},$$

em $U = (-a, a) \times (T, T)$ e $b(x, t)$ é a valores reais e suave em U.

Assuma que L é localmente integrável num lado em $0 \in \Sigma = \{(x, 0) : |x| < a\}$ e $U^+ = (-a, a) \times (0, T)$. Trocando Z por iZ e diminuindo U se necessário, podemos assumir que

$$Z(x,t) = x + i\varphi(x,t).$$

Desta forma, multiplicando L por um fator suave que não se anula, podemos escrever L na forma

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - i\frac{\varphi_t(x,t)}{1 + i\varphi_x(x,t)}\frac{\partial}{\partial x} = X + iY$$

com

$$X = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\varphi_t\varphi_x}{1+\varphi_x^2}\frac{\partial}{\partial x}, \qquad Y = -\frac{\varphi_t}{1+\varphi_x^2}\frac{\partial}{\partial x},$$

daí,

$$X \wedge Y = \frac{\varphi_t}{1+\varphi_x^2}\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial t}.$$

Lema 3.2.3 (Lema 1.4, [BH4]). *Se Z e L são como acima então L satisfaz a condição $(\mathcal{P}^+)$ na origem se, e somente se, existem $T, a > 0$ tal que $(0, T) \ni t \to \varphi(x, t)$ é monótona para todo $x \in (-a, a)$.*

3.3 Suficiência

Pelo que vimos anteriormente, podemos supor que nosso campo de vetores L é da forma

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + a(x,t)\frac{\partial}{\partial x},$$

em que

$$a(x,t) = -i\frac{\varphi_t(x,t)}{1 + i\varphi_x(x,t)}.$$

Suponha que L é analítico real, definido numa vizinhança do retângulo $Q = (-A, A) \times (-B, B)$ com uma primeira integral $Z(x,t) = x + i\varphi(x,t)$, definida em Q satisfazendo $LZ = 0$ para $t \geq 0$. Nesta seção, assumiremos que L satisfaz a condição $(\mathcal{P}^+)$ na origem em $\Sigma = (-A, A) \times \{0\}$. Podemos assumir também que $\varphi(0,0) = \varphi_x(0,0) = 0$ e

$$|\varphi_x(x,t)| < \frac{1}{2} \;\text{ numa vizinhança de }\; Q.$$

Depois de uma contração de Q em torno da origem, o Lema 3.2.3 mostra que

$$\forall \;\; x \in (-A, A) \;\;\text{ a aplicação }\;\; (0, B) \ni t \to \varphi(x,t) \;\;\text{ é monótona.}$$

Considere as funções $m(x)$ e $M(x)$ como definidas anteriormentes

$$m(x) = \min_{0 \leq t \leq B} \varphi(x,t), \qquad M(x) = \max_{0 \leq t \leq B} \varphi(x,t), \qquad -A \leq x \leq A.$$

Daí, a função $Z(x,y)$ leva o retângulo $Q^+ = (-A, A) \times (0, B)$ sobre o conjunto

$$Z(Q) = \{\xi + i\eta : -a \leq \xi \leq a, m(\xi) \leq \eta \leq M(\xi)\}.$$

O interior de $Z(Q)$ é da forma

$$\{\xi + i\eta : -a < \xi < a, m(\xi) < \eta < M(\xi)\},$$

como estamos assumindo que L é analítico real, diminuindo A se necessário, $M(x) > m(x)$ com exceção de um conjunto finito, isto é, $M(x) = m(x)$ apenas para um conjunto finito de pontos e portanto, um conjunto de medida nula. Então o conjunto $Z((-A, A) \times (0, B))$ tem interior não vazio. Toda componente conexa do interior deste conjunto tem a forma

$$\{\xi + i\eta : \alpha < \xi < \beta, m(\xi) < \eta < M(\xi)\}$$

em que (α, β) é uma componente conexa do conjunto aberto $\{x \in (-A, A) : M(x) > m(x)\}$. Seja

$$\{x \in (-A, A) : M(x) > m(x)\} = \bigcup_{k=1}^{N} (\alpha_k, \beta_k)$$

a decomposição em suas componentes conexas. Seja U_k = o interior de $Z((\alpha_k, \beta_k) \times (0, B))$. Daí

$$U_k = \{x + iy : \alpha_k < x < \beta_k, \varphi(x, 0) < y < \varphi(x, B)\}.$$

Para a seqüência do trabalho, precisaremos lidar com os seguintes subespaços: considere F um conjunto finito contido em $\mathbb{R}$.

Definição 3.3.1. *Definamos $h_F^p(\mathbb{R})$ o subespaço das distribuições f em $h^p(\mathbb{R})$ tais que $f = \sum \lambda_j a_j$, sendo os a_j's h^p-átomos, $\sum |\lambda_j|^p < \infty$ e para todo j*

($\natural$) *$I(a_i) \cap F = \emptyset$, em que $I(a_i)$ é o intervalo que contém o suporte de a_i dado pela definição* 1.2.3.

A quantidade

$$\|g\|_{h_F^p}^p = \inf \sum_j |\lambda_j|^p, \quad g \in h_F^p,$$

em que o ínfimo é tomado sobre todas tais decomposições atômicas especiais, não define uma norma se $0 < p < 1$ mas define uma métrica invariante em h_F^p:

$$d(g, h) = \|g - h\|_{h_F^p}^p.$$

Claramente, temos

$$\|g\|_{h^p}^p \leq \|g\|_{h_F^p}^p$$

para toda $g \in h_F^p$.

Para a aplicação que faremos, considere

$$F = F(L) = \{x \in (-A, A) : M(x) = m(x)\}.$$

Como L é analítico real, diminuindo A se necessário, vemos que F é um conjunto finito.

DEFINIÇÃO 3.3.2. *Definamos $h^p_L(\mathbb{R}) = h^p_F(\mathbb{R})$ com $F = F(L)$ definido acima e $h^p_L(-A, A)$ como o subespaço das distribuições $f \in h^p_L(\mathbb{R})$ tal que Suporte$(f) \subset (-A, A)$.*

Observe que o espaço $h^p_L(-A, A)$ não depende da integral primeira escolhida pois $F(L)$ é o conjunto dos pontos x tais que $\{\Re L, \Im L\}$ é linearmente dependente em (x, t) para todo $t \in (0, B)$ e $x \in F$. Com isso podemos provar.

TEOREMA 3.3.3. *Suponha que L é analítico real. Seja f é uma função contínua, solução de $Lf = 0$ no sentido das distribuições em $Q = (-A, A) \times (0, B)$. Suponha ainda que f tem valor de bordo no sentido fraco $bf(x) = f(x, 0)$ em $t = 0$. Então existem $0 < A_0 \leq A$ e $0 < T_0 \leq B$ tal que para qualquer $0 < T < T_0$ e $0 < a < A_0$, se $bf \in h^p_L(-A_0, A_0)$ então $f(\cdot, t) \in L^p(-a, a)$ para qualquer $0 < t < T$ e para quase todo $0 < a < A_0$, existe $C = C(a, T)$ tal que*

($\diamondsuit$) *se $0 < p < 1$, então*

$$\int_{-a}^{a} |f(x,t)|^p dx \leq C(\|bf\|^p_{h^p_L} + \|f(\cdot, T)\|^p_{L^\infty} + \|f(\pm A_0, \cdot)\|^p_{L^p}).$$

DEMONSTRAÇÃO. Iremos considerar seis casos essenciais, em cada um dos quais iremos mostrar a validade do teorema. A geometria dos casos 1 e 1' é a mesma, assim como a dos casos 2 e 2' e 3 e 3'. Nos casos 1, 2 e 3 estamos assumindo uma regularidade até a fronteira da solução homogênea, enquanto que nos casos 1', 2' e 3' esta hipótese não é mais assumida.

Como o problema é local, podemos tomar B um pouco menor, para que $f(\cdot, B)$ seja uma função contínua. Observe que para quase todo $a \in [-A, A]$ existe o limite

$$\lim_{t \to 0} f(a, t). \tag{3.1}$$

Seja $A_0 \in (0, A]$ tal que existam, ao mesmo tempo, o limite em (3.1) para A_0 e $-A_0$.

Caso 1. Assuma, que $M(0) = m(0)$ e $M(A_0) = m(A_0)$. Assumiremos também que f é suave em $\overline{Q}$. Neste caso, mostraremos que o teorema é válido para o "semi-intervalo" $[0, A_0]$. Como os mesmos argumentos se aplicam ao "semi-intervalo" $[-A_0, 0]$, teremos o desejado.

Temos que existe $x \in (0, A_0)$, de forma que $M(x) > m(x)$. Assim, o interior de $Z(Q)$ é não vazio. Fixe k e considere uma destas componentes U_k descritas anteriormente. Observe que $M(\alpha_k) = m(\alpha_k)$ e $M(\beta_k) = m(\beta_k)$. Como para cada x, a função

$$t \mapsto \varphi(x, t) \quad \text{é monótona,}$$

ou $m(x) = \varphi(x, 0)$ e $M(x) = \varphi(x, B)$, ou $m(x) = \varphi(x, B)$ e $M(x) = \varphi(x, 0)$ em (α_k, β_k). Logo, podemos assumir que $m(x) = \varphi(x, 0)$ e $M(x) = \varphi(x, B)$ para todo x em (α_k, β_k).

A fórmula de aproximação de Baouendi-Treves implica (veja conclusão 2.1.2) que existe $F_k \in C(\overline{U_k})$, holomorfa em U_k tal que

$$f(x, t) = F_k(Z(x, t)) \;\; \forall (x, t) \in [\alpha_k, \beta_k] \times [0, B].$$

Como $F_k \in \mathcal{O}(U_k) \cap C(\overline{U_k})$, vale a representação de Cauchy para F_k em U_k, veja [Du, Teorema 10.4]. Seja $z_0 = Z(x_0, t_0) \in U_k$, temos

$$\begin{aligned}
F_k(z_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U_k} \frac{F_k(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U_{k,0}} \frac{F_k(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U_{k,B}} \frac{F_k(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha_k}^{\beta_k} \frac{F_k(x + i\varphi(x, 0))}{x + i\varphi(x, 0) - x_0 - i\varphi(x_0, t_0)} Z_x(x, 0) dx \\
&- \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha_k}^{\beta_k} \frac{F_k(x + i\varphi(x, B))}{x + i\varphi(x, B) - x_0 - i\varphi(x_0, t_0)} Z_x(x, B) dx,
\end{aligned}$$

em que $\partial U_{k,\sigma}$ é a parte do bordo de U_k dada pela curva $x \to x + i\varphi(x, \sigma)$, $\sigma = 0, B$. Usando as hipóteses sobre bf e escrevendo $\tilde{f}(x, B)$ para a função que é igual a $f(x, B)$ em (α_k, β_k) e igual a zero fora deste intervalo, obtemos

$$\begin{aligned}
|F_k(z_0)| &\leq C\left|\int_{\alpha_k}^{\beta_k} \frac{\sum_{i(k)} \lambda_i a_i(x)}{x + i\varphi(x, 0) - x_0 - i\varphi(x_0, t_0)} Z_x(x, 0) dx\right| \\
&+ C\left|\int_{\alpha_k}^{\beta_k} \frac{f(x, B)}{x + i\varphi(x, B) - x_0 - i\varphi(x_0, t_0)} Z_x(x, B) dx\right| \\
&\leq C\sum_{i(k)} |\lambda_i| \left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a_i(x)}{x + i\varphi(x, 0) - x_0 - i\varphi(x_0, t_0)} Z_x(x, 0) dx\right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}(x,B)}{x+i\varphi(x,B)-x_0-i\varphi(x_0,t_0)} Z_x(x,B)dx \right| \\
&= C\sum_{i(k)} |\lambda_i||Q_0^{t_0}(a_i)(x_0)| + |Q_B^{t_0}(\tilde{f}(\cdot,B))(x_0)|, \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

em que $bf(x) = \sum_i \lambda_i a_i(x)$, é a decomposição atômica dada pela hipótese, com $\sum_i |\lambda_i|^p < 2\|bf\|^p_{h^p_L}$, $i(k)$ é o conjunto dos índices i's com a propriedade de que $Suporte(a_i) \subset (\alpha_k, \beta_k)$. Além disso, $Q_0^{t_0}$ e $Q_B^{t_0}$ são os operadores integrais singulares com núcleo

$$
K_0^{t_0}(x,t) = \frac{Z_x(x,0)}{x+i\varphi(x,0)-t-i\varphi(t,t_0)},
$$

e

$$
K_B^{t_0}(x,t) = \frac{Z_x(x,B)}{x+i\varphi(x,B)-t-i\varphi(t,t_0)},
$$

respectivamente. Observe que $K_0^s(x,t)$ e $K_B^s(x,t)$ satisfazem as desigualdades (1.10) uniformemente em s, $0 < s < B$. Mostraremos que Q_0^s e Q_B^s são operadores de Calderón-Zygmund (cujos núcleos satisfazem as estimativas (1.10) com constantes uniforme em s), uniforme em s, $0 < s < B$, isto é, Q_0^s e Q_B^s se estendem a operadores limitados em L^2 e a norma destes operadores em $\mathcal{L}(L^2)$ não depende de $0 < s < B$. Observe que Q_0^0 e Q_B^B são as transformadas de Cauchy, definidos em curvas suaves, e que já é bem conhecida a limitação em L^p, $1 < p < \infty$ (mesmo quando $x \to \varphi(x,0), \varphi(x,B)$ são Lipschitz), além disso, hoje existem provas elementares deste fato (cf. [CJS, J, D]) e qualquer prova é bem mais simples quando $x \to \varphi(x,0), \varphi(x,B)$ tem derivadas limitadas até a segunda ordem, pois pode ser reduzida à continuidade da transformada de Hilbert. Usaremos este fato para provar a continuidade em L^2, uniforme em s, dos operadores Q_0^s e Q_B^s.

Podemos supor que a integral primeira está definida em $\mathbb{R}^2$, assim as curvas $x \to x + i\varphi(x,\sigma) = \mathcal{C}_\sigma$, $\sigma = 0, B$ estão bem definidas para todo $x \in \mathbb{R}$. Além disso não há perda de generalidade em supor que $\varphi(x,t)$ se anula para $|x|$ suficientemente grande. Deste modo, as curvas $\mathcal{C}_\sigma$ dividem o plano em duas regiões, o lado de cima —que contém os pontos da forma (x,t) para todo t suficientemente grande (dependendo de x)— que iremos denotar por $\mathcal{C}_\sigma^+$ e o lado de baixo que iremos denotar por $\mathcal{C}_\sigma^-$, $\sigma = 0, B$.

Para $p \in \mathcal{C}_0$, definimos a região de aproximação

$$
\Gamma_p^+ = \{z \in \mathcal{C}_0^+ : |z-p| \leq 2\,\mathrm{dist}(z,\mathcal{C}_0)\}
$$

e para $p \in \mathcal{C}_B$,

$$\Gamma_p^- = \{z \in \mathcal{C}_B^- : |z-p| \leq 2\,\mathrm{dist}(z, \mathcal{C}_B)\}$$

Primeiramente, mostraremos que para qualquer $z = Z(x,t) \in \mathcal{C}_0^+$, vale

$$z \in \Gamma^+_{Z(x,0)}. \tag{3.3}$$

De fato, denotemos por $p = Z(x,0)$. Então para qualquer $y \in \mathbb{R}$, usando o fato de que $|\varphi_x| \leq 1/2$, obtemos

$$\begin{aligned} |x + i\varphi(x,t) - y - i\varphi(y,0)| &\geq \frac{1}{2}(|x-y| + |\varphi(x,t) - \varphi(y,0)|) \\ &\geq \frac{1}{2}(|x-y| + |\varphi(x,t) - \varphi(x,0)| - |\varphi(y,0) - \varphi(x,0)|) \\ &\geq \frac{1}{2}|\varphi(x,t) - \varphi(x,0)| \\ &= \frac{1}{2}|z-p| \end{aligned} \tag{3.4}$$

De (3.4), vemos que $z \in \Gamma_p^+$, mostrando (3.3). Analogamente mostra-se que se $z = Z(x,t) \in \mathcal{C}_B^-$ então

$$z \in \Gamma^-_{Z(x,B)}. \tag{3.5}$$

Consideremos o operador maximal associado a transformada de Hilbert H_*^σ, definido na curva $\mathcal{C}_\sigma$, $\sigma = 0, B$, em que

$$H_*^\sigma h(p) = \sup_{\epsilon > 0} \left| \frac{1}{\pi i} \int_{|\zeta - p| > \epsilon} \frac{h(\zeta)}{\zeta - p} d\zeta \right|, \quad p, \zeta \in \mathcal{C}_\sigma, \quad \sigma = 0, B$$

e também o operador maximal de Hardy-Littlewood M^σ associado a curva $\mathcal{C}_\sigma$, $\sigma = 0, B$, dado por

$$M^\sigma h(p) = \sup_I \frac{1}{|I|} \int_I |h(\zeta)||d\zeta|, \quad p \in \mathcal{C}_\sigma, \quad \sigma = 0, B,$$

com o supremo sendo tomado sobre todos os sub-arcos $I \subset \mathcal{C}_\sigma$, $\sigma = 0, B$, que contém p e $|I|$ denota o comprimento de arco de I. É bem conhecido a limitação em L^2 dos operadores acima[1]. Além disso, denotemos por $C_0 h$ a transformada de Cauchy da função h com respeito a curva $\mathcal{C}_0$:

$$C_0 h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_0} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \mathcal{C}_0^+$$

e sua função maximal não tangencial C_0^*, definida por

$$C_0^* h(p) = \sup_{z \in \Gamma_p^+} |C_0 h(z)|.$$

Analogamente define-se C_B e C_B^*, apenas tomando o cuidado de olhar agora para a parte de baixo.

Adaptando a prova do Lema 2.9 de [L], é possível mostrar que

$$C_\sigma^* h(p) \leq H_*^\sigma h(p) + C M^\sigma h(p), \quad \sigma = 0, B, \tag{3.6}$$

para toda $h \in L^q$, $1 < q < \infty$ e a constante C só depende da abertura da região de aproximação.

Agora, podemos provar que os operadores Q_σ^s são uniformemente limitados em L^2. Temos

$$\begin{aligned} Q_0^s h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(x) Z_x(x,0)}{x + i\varphi(x,0) - t - i\varphi(t,s)} dx \\ &= C_0 \tilde{h}(t + i\varphi(t,s)) \\ &\leq C_0^* \tilde{h}(t + i\varphi(t,0)), \end{aligned}$$

em que $\tilde{h}(x + i\varphi(x,0)) = h(x)$. Portanto, em vista da desigualdade (3.6), temos

$$\begin{aligned} \|Q_0^s h\|_{L^2} &\leq \|C_0^* \tilde{h}\|_{L^2} \leq \|H_*^\sigma \tilde{h}\|_{L^2} + C\|M^\sigma \tilde{h}\|_{L^2} \\ &\leq C\|\tilde{h}\|_{L^2} \quad \leq \quad C'\|h\|_{L^2}. \end{aligned}$$

e analogamente para Q_B^s. Mostrando assim a afirmação.

Escrevendo

$$(0, A_0) = \left(\bigcup_{k=1}^{N} (\alpha_k, \beta_k) \right) \cup F,$$

[1] Na verdade, os operadores H_*^σ e M^σ, $\sigma = 0, B$ são limitados em L^p.

e como $F = \{x \in (0, A_0) : \varphi(x, 0) = \varphi(x, B)\}$ tem medida nula, obtemos, pelo Teorema 1.3.2 juntamente com a desigualdade (3.2),

$$\begin{aligned}
\int_0^{A_0} |f(x,t)|^p dx &= \int_{(0,A_0)\setminus F} |f(x,t)|^p dx = \sum_{k=1}^{N} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} |f(x,t)|^p dx \\
&\leq C \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{i(k)} |\lambda_i|^p \|Q_0^t(a_i)\|^p_{L^p(\alpha_k,\beta_k)} + \|Q_B^t(\tilde{f}\,)\|^p_{L^p(\alpha_k,\beta_k)} \right) \\
&\leq C \sum_i |\lambda_i|^p \|a_i\|^p_{h^p} \; + \; C\|\tilde{f}\|^p_{h^p} \\
&\leq C \sum_i |\lambda_i|^p \; + \; C\|\tilde{f}(\cdot, B)\|^p_{L^\infty} \\
&\leq C(\|bf\|^p_{h^p_L} \; + \; \|f(\cdot, B)\|^p_{L^\infty}).
\end{aligned}$$

Caso 2. Assuma que $M(0) = m(0)$ e que $M(x) > m(x)$ para todo $0 < x \leq A_0$, e assuma que a solução f é suave em $\overline{Q}$. Neste caso o bordo de $U = Z((0, A_0) \times (0, B))$ consiste de três curvas. Como antes, temos

$$\begin{aligned}
F_k(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{A_0} \frac{F(x + i\varphi(x,0))Z_x(x,0)}{x + i\varphi(x,0) - x_0 - i\varphi(x_0,t_0)} dx \\
&+ \frac{1}{2\pi i} \int_0^{B} \frac{F(A_0 + i\varphi(A_0,y))Z_t(A_0,y)}{A_0 + i\varphi(A_0,y) - x_0 - i\varphi(x_0,t_0)} dy \\
&- \frac{1}{2\pi i} \int_0^{A_0} \frac{F(x + i\varphi(x,B))Z_x(x,B)}{x + i\varphi(x,B) - x_0 - i\varphi(x_0,t_0)} dx = I + II + III,
\end{aligned}$$

se $z_0 = Z(x_0, t_0)$ com $x_0 \leq a < A_0$ e F é uma função holomorfa satisfazendo $f(x,t) = F(Z(x,t))$ para todo $(x,t) \in (0, A_0) \times (0, B)$. Tudo o que temos para fazer é olhar o segundo termo a direita II, pois para os termos I e III basta aplicarmos o que fizemos no caso 1. Como $f \in C^\infty(\overline{Q})$, temos que $f(A_0, \cdot) \in L^\infty$ e, estendendo $f(A_0, \cdot)$ como zero fora de $(0, B)$, obtemos que $f(A_0, \cdot) \in L^p(0, B)$. Então

$$II \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_0^B \frac{f(A_0,y)Z_t(A_0,y)}{A_0 + i\varphi(A_0,y) - x_0 - i\varphi(x_0,t_0)} dy$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(A_0,y)Z_t(A_0,y)}{A_0+i\varphi(A_0,y)-x_0-i\varphi(x_0,t_0)}dy \\
&= \frac{1}{2\pi i} Q_{A_0}^{t_0}(f(A_0,\cdot))(x_0),
\end{aligned}
$$

em que $Q_{A_0}^{t_0}$ é o operador integral singular com núcleo

$$K_{A_0}^{t_0}(x,y) = \frac{Z_t(A_0,y)}{A_0+i\varphi(A_0,y)-x-i\varphi(x,t_0)}.$$

Observe que $K_{A_0}^{t_0} \in C^\infty \cap L^\infty$ uniformemente em t_0 se $x \leq a < A_0$, e que $K_{A_0}^{t_0}$ satisfaz as estimativas (1.10) pois só nos interessa o que acontece para x próximo de y. Portanto,

$$Q_{A_0}^{t_0} : \mathcal{S}' \longmapsto C^\infty.$$

Assim, $Q_{A_0}^{t_0}$ é contínuo em L^p, uniformemente em t_0. Então, como no caso 1,

$$\int_0^a |f(x,t)|^p dx \;\; \leq \;\; C(\|bf\|_{h_L^p}^p \; + \; \|f(\cdot,B)\|_{L^\infty}^p \; + \; \|f(A_0,\cdot)\|_{L^p}^p).$$

Caso 3. Assuma que $M(0) > m(0)$ e que f é suave em $\overline{Q}$. Podemos assumir que $M(x) > m(x)$ para todo $x \in (-A_0, A_0)$. Agora, o bordo de U tem quatro pedaços. Podemos proceder como no caso anterior para obter a estimativa desejada no intervalo $(-a,a)$, $a < A_0$.

Observe que as estimativas no intervalo $[-A_0, 0]$ são também válidas para os casos 1 e 2. O teorema segue para estes três casos quando f é suave em $\overline{Q}$.

Agora, usaremos um refinamento do Teorema de aproximação de Baouendi-Treves, como em [HM], para remover a suavidade de f.

Caso 1'. Como no caso 1, iremos assumir que $M(0) = m(0)$ e $M(A_0) = m(A_0)$. Iremos olhar mais de perto a fórmula de aproximação de Baouendi-Treves [BT]. Seja $h(x) \in C_0^\infty(-A,A)$, $h(x) \equiv 1$ numa vizinhança da origem. Para $\tau > 0$, definimos

$$E_\tau f(x,t) = (\tau/\pi)^{1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',0)]^2} f(x',0)h(x')Z_x(x',0)\,dx'$$

e

$$G_\tau f(x,t) = (\tau/\pi)^{1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t)]^2} f(x',t)h(x')Z_x(x',t)\,dx'$$

em que $f(x',t)$ é o traço da distribuição f, restrita à (α_k,β_k), em $t\geq 0$. Seja

$$R_\tau f(x,t)=E_\tau f(x,t)-G_\tau f(x,t).$$

A fórmula de aproximação de Baouendi-Treves assegura que depois de diminuir A e B, $E_\tau f(x,t)$ converge para $f(x,t)$ no sentido das distribuições no conjunto aberto $(-A,A)\times(0,B)$. Todavia, precisaremos de um resultado refinado em [HM] (Corolário 2.2) que garante convergência até o bordo $t=0$ em espaços de funções apropriados. Mais precisamente, de acordo com um resultado em [HM], existem $a',b'>0$ de forma que

$$R_\tau f(x,t)\to 0 \ \text{ em } C^\infty([-a',a']\times[0,b']).$$

Como consequência (Teorema 6.1 [HM]) temos que

$$E_\tau f(x,t)\to f(x,t) \ \text{ em } \ h^p([-a',a']), \ \text{ se } \ f(\cdot,t)\in h^p(-a',a').$$

Observe que, poderíamos ter escolhido desde o princípio $A_0<a'\leq A$ e que $B<b'$. Seja $F_\tau(z)$ a função inteira satisfazendo $F_\tau(Z(x,t))=E_\tau f(x,t)$. Seja $U=$ o interior de $Z((0,A_0)\times(0,B))$. Podemos aplicar os argumentos do caso 1 para as funções suaves $E_\tau f$:

$$\begin{aligned}
F_\tau(z_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U_k}\frac{F_\tau(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U_{k,0}}\frac{F_\tau(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U_{k,1}}\frac{F_\tau(\zeta)}{\zeta-z_0}d\zeta\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha_k}^{\beta_k}\frac{F_\tau(x+i\varphi(x,0))}{x+i\varphi(x,0)-x_0-i\varphi(x_0,t_0)}Z_x(x,0)dx\\
&- \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha_k}^{\beta_k}\frac{F_\tau(x+i\varphi(x,B))}{x+i\varphi(x,B)-x_0-i\varphi(x_0,t_0)}Z_x(x,B)dx,
\end{aligned}$$

$z_0=Z(x_0,t_0)$. Tome ϕ_ε uma função em $C_c^\infty(\mathbb{R})$ com $0\leq\phi_\varepsilon\leq 1$, $\phi_\varepsilon\equiv 1$ em (α_k,β_k) e $\phi_\varepsilon\equiv 0$ no complemento de $(\alpha_k-\varepsilon,\beta_k+\varepsilon)$. Temos

$$\begin{aligned}
|F_\tau(z_0)| &\leq C\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha_k}^{\beta_k}\frac{E_\tau f(x,0)}{x+i\varphi(x,0)-x_0-i\varphi(x_0,t_0)}Z_x(x,0)dx\right|\\
&+ C\left|\int_{\alpha_k}^{\beta_k}\frac{E_\tau f(x,B)}{x+i\varphi(x,B)-x_0-i\varphi(x_0,t_0)}Z_x(x,B)dx\right|\\
&= C\Big(|Q_0^{t_0}(E_\tau f\chi_{(\alpha_k,\beta_k)}(\cdot,0))(x_0)|+|Q_B^{t_0}(E_\tau f\chi_{(\alpha_k,\beta_k)}(\cdot,B))(x_0)|\Big)\\
&= C\Big(\lim_{\varepsilon\to 0}|Q_0^{t_0}(\phi_\varepsilon E_\tau f(\cdot,0))(x_0)|+\lim_{\varepsilon\to 0}|Q_1^{t_0}(\phi_\varepsilon E_\tau f(\cdot,B))(x_0)|\Big),
\end{aligned}$$

a última igualdade acima é válida porque

$$\phi_\varepsilon(\cdot)E_\tau f(\cdot,0) \to E_\tau f(\cdot,0)\chi_{(\alpha_k,\beta_k)}(\cdot)$$

e

$$\phi_\varepsilon(\cdot)E_\tau f(\cdot,B) \to E_\tau f(\cdot,B)\chi_{(\alpha_k,\beta_k)}(\cdot)$$

em L^2 quando $\varepsilon \to 0$. Então, como fizemos no caso 1, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha_k}^{\beta_k}|E_\tau f(x,t)|^p dx &\leq C\lim_{\varepsilon\to 0}\|Q_0^t(E_\tau f(\cdot,0)\phi_\varepsilon(\cdot))\|^p_{L^p(\alpha_k,\beta_k)} \quad + \\
&\quad + C\lim_{\varepsilon\to 0}\|Q_1^t(E_\tau f(\cdot,B)\phi_\varepsilon(\cdot))\|^p_{L^p(\alpha_k,\beta_k)} \\
&\leq C\Big(\lim_{\varepsilon\to 0}\|E_\tau f(\cdot,0)\phi_\varepsilon(\cdot)\|^p_{h^p} + \lim_{\varepsilon\to 0}\|E_\tau f(\cdot,B)\phi_\varepsilon(\cdot)\|^p_{h^p}\Big) \\
&\leq C\Big(\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{\tau\to\infty}\|E_\tau f(\cdot,0)\phi_\varepsilon(\cdot)\|^p_{h^p} \quad + \\
&\quad + \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{\tau\to\infty}\|E_\tau f(\cdot,B)\phi_\varepsilon(\cdot)\|^p_{h^p}\Big) \\
&= C\Big(\lim_{\varepsilon\to 0}\|f(\cdot,0)\phi_\varepsilon(\cdot)\|^p_{h^p} + \lim_{\varepsilon\to 0}\|f(\cdot,B)\phi_\varepsilon(\cdot)\|^p_{h^p}\Big) \\
&= C\Big(\|bf\|^p_{h^p} + \|\tilde{f}(\cdot,B)\|^p_{h^p}\Big)
\end{aligned}$$

a última igualdade é válida, pois $\phi_\varepsilon \equiv 1$ no suporte de $f(\cdot,0)$ e de $f(\cdot,B)$, (lembre-se que estamos restringindo f ao retângulo $(\alpha_k,\beta_k)\times(0,B)$). Daí,

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha_k}^{\beta_k}|E_\tau f(x,t)|^p\,dx &\leq C\Bigg(\Big\|\sum_{i(k)}\lambda_i a_i\Big\|^p_{h^p} \; + \; \|\tilde{f}(\cdot,B)\|^p_{h^p}\Bigg) \\
&\leq C(\sum_{i(k)}|\lambda_i|^p \; + \; \|\tilde{f}(\cdot,B)\|^p_{h^p}).
\end{aligned}$$

Quando $\tau \to \infty$, a desigualdade acima implica que

$$\int_{\alpha_k}^{\beta_k}|f(x,t)|^p dx \;\leq\; C(\sum_{i(k)}|\lambda_i|^p \; + \; \|\tilde{f}(\cdot,B)\|^p_{L^\infty}).$$

Somando em k, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^{A_0}|f(x,t)|^p dx &\leq C(\sum_i|\lambda_i|^p \; + \; \|f(\cdot,B)\|^p_{L^\infty}) \\
&\leq C(\|bf\|^p_{h^p_L} \; + \; \|f(\cdot,B)\|^p_{L^\infty}).
\end{aligned}$$

Caso 2'. Como no caso 2, iremos assumir que $M(0) = m(0)$ e $M(x) > m(x)$ para todo $x > 0$. Iremos olhar mais de perto a fórmula de aproximação de Baouendi-Treves [BT]. Com as mesmas notações do caso 1', temos

$$E_\tau f(x,t) = (\tau/\pi)^{1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',0)]^2} f(x',0)h(x')Z_x(x',0)\,dx'$$

e

$$G_\tau f(x,t) = (\tau/\pi)^{1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t)]^2} f(x',t)h(x')Z_x(x',t)\,dx'$$

em que $f(x',t)$ é o traço da distribuição de f em $t \geq 0$ restrita a $(0, A_0)$. Seja $F_\tau(z)$ a função inteira satisfazendo $F_\tau(Z(x,t)) = E_\tau f(x,t)$.

Pela fórmula integral de Cauchy, aplicada a F_τ, se $z_0 = Z(x_0,t_0)$ com $0 < x_0 \leq a < A_0$, obtemos

$$\begin{aligned}
F_\tau(z_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} \frac{F_\tau(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{U_0} \frac{F_\tau(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{U_s} \frac{F_\tau(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{U_1} \frac{F_\tau(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{A_0} \frac{F_\tau(x + i\varphi(x,0))}{x + i\varphi(x,0) - x_0 - i\varphi(x_0,t_0)} Z_x(x,0)dx \\
&+ \frac{1}{2\pi i}\int_0^{B} \frac{F_\tau(A_0 + i\varphi(A_0,s))}{A_0 + i\varphi(A_0,s) - x_0 - i\varphi(x_0,t_0)} Z_t(A_0,s)ds \\
&- \frac{1}{2\pi i}\int_0^{A_0} \frac{F_\tau(x + i\varphi(x,B))}{x + i\varphi(x,B) - x_0 - i\varphi(x_0,t_0)} Z_x(x,B)dx.
\end{aligned}$$

Como antes, considere $\phi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0 \leq \phi_\varepsilon \leq 1$, $\phi_\varepsilon \equiv 1$ numa vizinhança de $(0, A_0)$ e $\phi_\varepsilon \equiv 0$ no complemento de $(0 - \varepsilon, A_0 + \varepsilon)$. Temos

$$\begin{aligned}
|F_\tau(z_0)| &\leq C\left|\int_0^{A_0} \frac{E_\tau f(x,0)}{x + i\varphi(x,0) - x_0 - i\varphi(x_0,t_0)} Z_x(x,0)dx\right| \\
&+ C\left|\int_0^{B} \frac{E_\tau f(A_0,s)}{A_0 + i\varphi(A_0,s) - x_0 - i\varphi(x_0,t_0)} Z_t(A_0,s)ds\right| \\
&+ C\left|\int_0^{A_0} \frac{E_\tau f(x,B)}{x + i\varphi(x,B) - x_0 - i\varphi(x_0,t_0)} Z_x(x,B)dx\right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= C\Big(|Q_0^{t_0}(E_\tau f(\cdot,0)\chi_{(0,A_0)})(x_0)| + |Q_{A_0}^{t_0}(E_\tau f(A_0,\cdot)\chi_{(0,B)})(x_0)| \\
&\quad + |Q_B^{t_0}(E_\tau f(\cdot,B)\chi_{(0,A_0)}(\cdot))(x_0)|\Big) \\
&= C\Big(\lim_{\varepsilon\to 0}|Q_0^{t_0}(E_\tau f(\cdot,0)\phi_\varepsilon)(x_0)| + |Q_{A_0}^{t_0}(E_\tau f(A_0,\cdot)\chi_{(0,B)})(x_0)| \\
&\quad + \lim_{\varepsilon\to 0}|Q_B^{t_0}(E_\tau f(\cdot,B)\phi_\varepsilon)(x_0)|\Big)
\end{aligned}
$$

a última igualdade acima é válida porque as convergências se dão em L^2, como no caso 1'. Observe que para $0 < x_0 \leq a$, analogamente como fizemos no caso 2, os operadores $Q_0^{t_0}$ e $Q_B^{t_0}$ são contínuos de $h^p(\mathbb{R})$ para $L^p(0,a)$ enquanto que o operador $Q_{A_0}^{t_0}$ é contínuo em L^p, todos uniformes em t_0. Portanto,

$$
\begin{aligned}
\int_0^a |E_\tau f(x,t)|^p dx &\leq C\Big(\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\|Q_0^{t_0}(E_\tau bf\phi_\varepsilon)\|_{L^p(0,a)}^p \;+ \\
&\quad + \|Q_B^{t_0}(E_\tau f(\cdot,B)\phi_\varepsilon)\|_{L^p(0,a)}^p\Big) \;+ \\
&\quad + \|Q_{A_0}^{t_0}(E_\tau f(A_0,\cdot)\chi_{(0,B)})\|_{L^p}^p\Big) \\
&\leq C\Big(\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\|E_\tau bf\phi_\varepsilon\|_{h^p}^p \;+\; \|E_\tau f(\cdot,B)\phi_\varepsilon\|_{h^p}^p\Big) \;+ \\
&\quad + \|E_\tau f(A_0,\cdot)\chi_{(0,B)})\|_{L^p}^p\Big) \\
&\leq C\Big(\lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{\tau\to\infty}\Big(\|E_\tau bf\phi_\varepsilon\|_{h^p}^p \;+\; \|E_\tau f(\cdot,B)\phi_\varepsilon\|_{h^p}^p\Big) \;+ \\
&\quad + \limsup_{\tau\to\infty}\|E_\tau f(A_0,\cdot)\chi_{(0,B)}\|_{L^p}^p\Big) \\
&\leq C\Big(\lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\|bf\phi_\varepsilon\|_{h^p}^p \;+\; \|f(\cdot,B)\phi_\varepsilon\|_{h^p}^p\Big) + \|f(A_0,\cdot)\|_{L^p}^p\Big) \\
&\leq C\Big(\sum_i |\lambda_i|^p\|a_i\|_{h^p}^p \;+\; \|f(\cdot,B)\|_{h^p}^p \;+\; \|f(A_0,\cdot)\|_{L^p}^p\Big) \\
&\leq C\Big(\|bf\|_{h_L^p}^p \;+\; \|f(\cdot,B)\|_{L^\infty}^p \;+\; \|f(A_0,\cdot)\|_{L^p}^p\Big),
\end{aligned}
$$

com C independente de τ e os índices i's que aparecem no somatório acima são somente para os átomos a_i's suportados em $[0,A_0]$. Quando $\tau\to\infty$, a desigualdade acima implica que

$$
\int_0^a |f(x,t)|^p dx \;\leq\; C\Big(\|bf\|_{h_L^p}^p \;+\; \|f(A_0,\cdot)\|_{L^p}^p \;+\; \|f(\cdot,B)\|_{L^\infty}^p\Big).
$$

Caso 3'. Neste caso, $M(x) > m(x)$ para todo $-A_0 \leq x \leq A_0$. Basta agirmos como nos casos 2' e 3 para obter a estimativa desejada. $\blacksquare$

Capítulo 4

A propriedade H^p

4.1 Introdução

Suponha que $h(z)$ é uma função holomorfa de uma variável, definida no retângulo

$$Q = (-a, a) \times (0, b)$$

com valor de bordo bh, no sentido fraco, em $t = 0$. Portanto, sabemos que se $1 \leq p \leq \infty$,

(H^p) $\forall\ \ 0 < c < a$, a norma dos traços $h(\cdot, t)$ são uniformemente limitadas em $L^p[-c, c]$

então $bf \in L^p(-c, c)$ para qualquer $0 < c < a$.

Estas são versões locais das propriedades clássicas das funções holomorfas no disco unitário, ver [Du, GR, HH]. Funções holomorfas são soluções homogêneas de um campo de vetores complexo, e é nesse sentido que é natural estudarmos soluções homogêneas de campos de vetores L localmente integráveis que satisfazem a propriedade (H^p), isto é, diremos que um campo de vetores satisfaz a propriedade (H^p) se toda solução homogênea do campo satisfazer a propriedade (H^p). A seguir, veremos que campos de vetores, analíticos reais, localmente integráveis satisfazem (H^p) para $1/2 < p \leq 1$. Para $0 < p < 1$, a propriedade (H^p) pode ser definida como: se

(H^p) $\forall\ \ 0 < c < a$, a "norma" dos traços $h(\cdot, t)$ são uniformemente limitadas em $L^p[-c, c]$

então $bh \in h^p(-a,a)$.

4.2 A propriedade H^p, $\frac{1}{2} < p \leq 1$: Necessidade

Considere um campo de vetores analítico real, dado por

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + a(x,t)\frac{\partial}{\partial x}.$$

definido numa vizinhança $Q = (-A,A) \times (-B,B)$ da origem. Suponha que L satisfaz a condição $(\mathcal{P}^+)$ em $(0,0) \in \Sigma = \{(x,0) : x \in (-A,A)\}$, com uma primeira integral $Z(x,t) = x + i\varphi(x,t)$, definida em Q satisfazendo $LZ = 0$ e $dZ \neq 0$ em $Q^+ = (-A,A) \times (0,B)$. Podemos assumir que $\varphi(0,0) = \varphi_x(0,0) = 0$ e

$$|\varphi_x(x,t)| < \frac{1}{2} \text{ numa vizinhança de } Q.$$

Podemos supor, sem perda de generalidade que

$$a(x,t) = \frac{-i\varphi_t(x,t)}{1 + i\varphi_x(x,t)}.$$

Depois de uma contração de Q em torno da origem, o Lema 3.2.3 mostra que

$$\forall \ x \in (-A,A) \ \text{ a aplicação } \ (0,B) \ni t \to \varphi(x,t) \text{ é monótona.}$$

O próximo teorema estende, num certo sentido, o Teorema 3.1 de [BH2].

Teorema 4.2.1. *Suponha que L é analítico real, f é contínua em $(-a,a) \times (0,b)$, $a > A$ e $b > B$ e solução fraca de $Lf = 0$ no retângulo $(-A,A) \times (0,B)$. Assuma que existe um inteiro positivo N de forma que para todo compacto $K \subset (-A,A)$, tenhamos*

$$\int_0^b \int_K |f(x,t)||\varphi(x,t) - \varphi(x,0)|^N dxdt \leq C, \tag{4.1}$$

para algum $C = C(K)$. Se os traços de f são uniformemente limitados em L^p, $1/2 < p < 1$, isto é,

$$\forall a' < A \quad \int_{-a'}^{a'} |f(x,t)|^p dx \leq C, \quad t \to 0^+, \tag{4.2}$$

então $bf \in h^p_L(-A,A)$.

Como é conhecido, ver [BH4], (4.1) é uma condição necessária e suficiente para a existência do valor de bordo para soluções homogêneas do campo analítico real L na porção não característica do bordo e equivalente a limitação

$$\sup_{x\in K} |f(x,t)||\varphi(x,t)-\varphi(x,0)|^N \leq C, \tag{4.3}$$

para algum $C = C(K)$ e $N \in \mathbb{N}$.

Considere as funções $m(x)$ e $M(x)$ como definidas anteriormentes

$$m(x) = \min_{0\leq t\leq B} \varphi(x,t), \qquad M(x) = \max_{0\leq t\leq B} \varphi(x,t), \quad -A \leq x \leq A.$$

Daí, a função $Z(x,t)$ leva o retângulo $Q = [-A, A] \times [0, B]$ sobre o conjunto

$$Z(Q) = \{\xi + i\eta : -A \leq \xi \leq A, m(\xi) \leq \eta \leq M(\xi)\}.$$

O interior de $Z(Q)$ é da forma

$$\{\xi + i\eta : -A < \xi < A, m(\xi) < \eta < M(\xi)\},$$

Como antes, podemos supor que o conjunto $Z((-A,A)\times(0,B))$ tem interior não vazio assim, toda componente conexa do interior deste conjunto tem a forma

$$\{\xi + i\eta : \alpha < \xi < \eta, m(\xi) < \eta < M(\xi)\}$$

em que (α, β) é uma componente conexa do conjunto aberto $\{x \in (-A, A) : M(x) > m(x)\}$. Seja

$$\{x \in (-A, A) : M(x) > m(x)\} = \bigcup_{k=1}^{N} (\alpha_k, \beta_k)$$

a decomposição em suas componentes conexas. Considere U_k o interior de $Z((\alpha_k, \beta_k) \times (0, B))$. Daí

$$U_k = \{x + iy : \alpha_k < x < \beta_k, \varphi(x,0) < t < \varphi(x,B)\}.$$

Usaremos a idéia de aproximação introduzida por Necas [N] para aproximar ∂U_k uniformemente e não tangencialmente por uma seqüência de curvas suaves (exceto em dois ou três pontos) com um bom controle nos vetores tangentes que resulta numa fórmula de mudança de variáveis bastante útil (veja fórmula (2.3) em [L]). Esta aproximação é bem conhecida (ver [L]) quando ∂U_k é uma curva de Lipschitz. No nosso caso, apesar do bordo de U_k não ser Lipschitz, ele ainda admite uma aproximação similar. Para ver isso, construiremos para $j \in \mathbb{N}$ suficientemente grande uma curva C_j como segue. Para fixar a notação, suponha que U_k é limitado pelas curvas $\mathcal{C}_0$ e $\mathcal{C}_1$ que são os gráficos das funções $t = \varphi(x, 0)$ e $t = \varphi(x, B)$, $x \in (\alpha_k, \beta_k)$, respectivamente. Suponha ainda que $\varphi(\alpha_k, 0) = \varphi(\alpha_k, B)$ e $\varphi(\beta_k, 0) = \varphi(\beta_k, B)$. A todo ponto z de $\mathcal{C}_1 \cap \partial U_k$ associaremos o ponto $\gamma_j(z) = z + j^{-1}\mathbf{n}(z)$ em que $\mathbf{n}(z)$ é o vetor unitário normal a $\mathcal{C}_1$ em z que aponta para dentro. Para j suficientemente grande, $\mathcal{C}_1 \ni z \mapsto \gamma_j(z)$ é um difeomorfismo e

$$\operatorname{dist}(\gamma_j(z), \mathcal{C}_1) = |\gamma_j(z) - z| = \frac{1}{j}.$$

Defina a curva $C_{j,1}$ como sendo a imagem da aplicação γ_j. Por outro lado, para j suficientemente grande, considere $t_j \searrow 0$ tal que

$$\forall x \in (\alpha_k, \beta_k), \quad d(\varphi(x, t_j), \varphi(x, 0)) \leq \frac{1}{j}.$$

Desta forma, considere a curva $C_{j,0} = \{x + i\varphi(x, t_j) : x \in (\alpha_k, \beta_k)\}$. Observamos que a projeção $\pi : x + i\varphi(x, t_j) \to x + i\varphi(x, 0)$ é um difeomorfismo sobre sua imagem. As curvas $C_{j,0}$ e $C_{j,1}$ se interceptam em dois ou mais pontos. Sejam $a_{j,k}, b_{j,k} \in (\alpha_k, \beta_k)$ tais que

$$\{x + i\varphi(x, t_j) : x \in [a_{j,k}, b_{j,k}]\} \cap C_{j,1} = \{A_{j,k}, B_{j,k}\},$$

em que $A_{j,k} = a_{j,k} + i\varphi(a_{j,k}, t_j)$ e $B_{j,k} = b_{j,k} + i\varphi(b_{j,k}, t_j)$. Podemos então definir a curva C_j como $C_{j,0}|_{[a_{j,k}, b_{j,k}]} \cup C_{j,1}|_{[\gamma_j^{-1}(A_{j,k}), \gamma_j^{-1}(B_{j,k})]}$. Notemos que: (1) $C_j \setminus \{A_{j,k}, B_{j,k}\}$ é difeomorfo a um subconjunto de ∂U_k; (2) para $\alpha > 0$ $C_j \subset \cup_{z \in \partial U_k} \Gamma_\alpha(z)$; (3) para $q \in \Gamma_\alpha(z)$, $|g(q)| \leq g^*(z)$ para toda função g definida em U_k.

O caso em que $\varphi(\alpha_k, 0) \neq \varphi(\alpha_k, B)$ e/ou $\varphi(\beta_k, 0) \neq \varphi(\beta_k, B)$ possui aproxi-mação similar.

Com a construção acima, podemos provar

Lema 4.2.2. *Seja f como no Teorema 4.2.1, $f = F_k \circ Z$ em $Z^{-1}(U_k)$. Se os traços de f são uniformemente limitados em L^p então $F_k \in E^p(U_k)$.*

Demonstração. Seja C_j a seqüência de curvas retificáveis tendendo para ∂U_k como descrevemos. Desta forma, obtemos

$$\begin{aligned}
\sup_j \int_{C_j} |F_k(w)|^p |dw| &\leq \sup_j \int_{a_{j,k}}^{b_{j,k}} |F_k(Z(x,t_j))|^p |Z_x(x,t_j)| dx \\
&\quad + \sup_j \int_{C_{j,1}} |F_k(w)|^p |dw| \\
&\leq \|Z_x\|_{L^\infty(Q)} \sup_j \int_{a_{j,k}}^{b_{j,k}} |F_k(Z(x,t_j))|^p dx + C \\
&\leq \|Z_x\|_{L^\infty(Q)} \sup_j \int_{\alpha_k}^{\beta_k} |f(x,t_j)|^p dx + C \\
&\leq C < \infty,
\end{aligned}$$

por hipótese. O caso em que ∂U_k é formado por três ou quatro curvas, que corresponde ao caso em que $\varphi(\alpha_k, 0) \neq \varphi(\alpha_k, B)$ e/ou $\varphi(\beta_k, 0) \neq \varphi(\beta_k, B)$, a demonstração é análoga. ∎

O lema acima afirma que $F_k \in E^p(U_k) = H^p(U_k)$, isto é $F_k^* \in L^p(\partial U_k)$. Usaremos este fato para construir uma decomposição atômica para bf, quando $1/2 < p < 1$. Para isto fixe k. Daqui em diante chamaremos apenas de F a função F_k e de U o domínio U_k. Sabemos que $f = F \circ Z$ em $Z^{-1}(U)$. Podemos supor que $Z(x,0) = x$. Denotemos ainda por bf o traço da função $f(x,t)$, $t = 0$, restrita ao intervalo (α, β) e naturalmente, $bF = bF(x,0)$, $x \in (\alpha, \beta)$ a distribuição que é o valor de bordo de F no segmento (α, β) que faz parte do bordo de U. Denotaremos por F^* a função definida em ∂U restrita a (α, β) e estenderemos F^* e bF para $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{C}$ como zero fora desta curva. Pelo Lema 2.2.7, podemos supor que $F \in C(\overline{U})$ assim, $bf(\cdot) \in C(\alpha, \beta)$.

Sejam $\tilde{\lambda} = \inf_{x \in \partial U} F^*(x) > 0$ e $\mathcal{O}_\lambda = \{x \in \mathbb{R} : F^*(x) > \lambda\}$. Observe que $\mathcal{O}_\lambda$ é um subconjunto aberto, próprio de (α, β) somente quando $\lambda > \tilde{\lambda}$.

Proposição 4.2.3. *Com as notações acima, seja $\lambda > \tilde{\lambda}$. Então*

$$bF(x) = G_\lambda(x) + B_\lambda(x),$$

com $|G_\lambda(x)| \leq C\lambda$, B_λ está suportado em $\mathcal{O}_\lambda$ e $\int_{\mathbb{R}} B_\lambda(x) dx = 0$.

Para a demonstração da proposição, necessitaremos do seguinte lema.

Lema 4.2.4. *Seja I uma componente de $\mathcal{O}_\lambda$, $\lambda \geq \tilde{\lambda}$, então*

$$\left| \int_I bF(x)dx \right| = O(\lambda|I|). \tag{4.4}$$

Demonstração. Seja $I = (a, b)$, $\alpha \leq a < b \leq \beta$ e considere a "barraca" formada pelo triângulo isósceles T com base I e cujos ângulos da base são dados pela região de Stolz (2.5), interseção com ∂U. Temos dois casos a considerar: (i) a "barraca" intercepta ∂U; (ii) a "barraca" não intercepta ∂U. Em qualquer um dos casos temos, pelo Teorema de Cauchy,

$$\int_T F(z)dz = 0,$$

ou seja,

$$\int_I bF(x)dx = -\int_L F(z)dz, \tag{4.5}$$

em que L é o teto da "barraca". Estimaremos a integral a direita. No caso (ii), como $a, b \notin \mathcal{O}_\lambda$, temos $|F^*(a)| \leq \lambda$ e $|F^*(b)| \leq \lambda$. Daí, $|F(z)| \leq \lambda$ para todo $z \in L$. Como $|L| \sim |I|$, obtemos (4.4). Para o caso (i), temos:

$$\int_L F(z)dz = \int_{L\cap\partial U} F(z)dz + \int_{L\setminus\partial U} F(z)dz.$$

A segunda parcela a direita da igualdade é estimada como em (ii) acima. Para a primeira integral a direita da igualdade, podemos usar a estimativa $\|F|_{\partial U}\|_{L^\infty} \leq \|f(\cdot, B)\|_{L^\infty}$ para obtermos

$$\left| \int_L F(z)dz \right| \leq \|F|_{\partial U}\|_{L^\infty}|L \cap \partial U| + \lambda|L| \leq C\lambda|I|,$$

visto que $|L \cap \partial U| \sim |I|$ e $|L| \sim |I|$, dando (4.4). ∎

Demonstração (*da Proposição* 4.2.3)**.** Escreva $\mathcal{O}_\lambda = \cup_k I_k$, em que I_k são as componentes conexas de $\mathcal{O}_\lambda$. Pelo lema, $|\int_{I_k} bF(x)dx| \leq C\lambda|I_k|$. Uma olhada na demonstração do lema mostra que a constante C é independente de k. Escreva

$$c_k = \frac{\int_{I_k} bF(x)dx}{|I_k|},$$

assim $|c_k| \leq C\lambda$ e

$$\int_{I_k} (bF(x) - c_k)dx = 0.$$

Defina

$$G_\lambda(x) = \begin{cases} bF(x), & x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{O}_\lambda; \\ c_k, & x \in I_k, \end{cases}$$

e

$$B_\lambda(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{O}_\lambda; \\ bF(x) - c_k, & x \in I_k. \end{cases}$$

Daí, $bF = G_\lambda + B_\lambda$, $|G_\lambda| \leq \lambda$ em $\mathbb{R} \setminus \mathcal{O}_\lambda$, $|G_\lambda| \leq C\lambda$ em $\mathcal{O}_\lambda$ e $\int_{I_k} B_\lambda(x)dx = 0$, para todo k. ■

Teorema 4.2.5. *Usando as notações anteriores, se $1/2 < p \leq 1$ temos que existem*

(a) Uma seqüência (a_j) de h^p-átomos e

(b) Uma seqüência (λ_j) de números complexos satisfazendo

$$\sum_j |\lambda_j|^p \leq C \int |F^*(x)|^p dx,$$

tal que $bF(x) = \sum_j \lambda_j a_j(x)$ para quase todo x e a série também converge para bF em h^p.

Demonstração. Escolha $n_0 \in \mathbb{Z}$ de forma que $2^{n_0} \leq \tilde{\lambda} < 2^{n_0+1}$. Para todo $n > n_0$, seja

$$bF(x) = g_n(x) + b_n(x)$$

a decomposição obtida da Proposição 4.2.3 com $g_n = G_{2^n}$ e $b_n = B_{2^n}$. Defina $g_n = b_n \equiv 0$ se $n < n_0$. Colocaremos todas estas decomposições juntas. Para $n = n_0$, definamos

$$g_{n_0}(x) = \frac{\chi_{(\alpha,\beta)}(x)}{(\beta - \alpha)} \int bF(t)\, dt, \quad b_{n_0}(x) = bF(x) - g_{n_0}.$$

Assim, g_{n_0} e b_{n_0} ainda satisfazem as propriedades da Proposição 4.2.3. Observe que $g_n(x) \to bF(x)$ q.t.p. quando $n \to \infty$, pois a função $bF(x) - g_n(x)$ está suportada no conjunto $\{x : F^*(x) > 2^n\}$ (se $n > n_0$) que decresce para um conjunto de medida nula quando $n \to \infty$. Além disso, da construção de g_n, é fácil ver que $|g_n(x)| \leq CF^*(x)$. Estes fatos nos permitem escrever bF como uma soma de uma série telescópica convergindo q.t.p., a saber

$$\begin{aligned} bF(x) &= g_{n_0}(x) + \sum_{n=n_0}^{\infty} (g_{n+1}(x) - g_n(x)) \\ &= (\beta - \alpha)^{-1} \int bF(t)\, dt \cdot \chi_{(\alpha,\beta)}(x) + \sum_{n=n_0}^{\infty} (b_n(x) - b_{n+1}(x)). \end{aligned}$$

Vamos expandir $b_n(x) - b_{n+1}(x)$, $n \geq n_0$, como uma série de h^p-átomos com coeficientes em ℓ^p. Para cada n escreva

$$\mathcal{O}_{2^n} = \bigcup_k I_n(k).$$

Fixado n, todos os $I_{n+1}(j)$ estão contidos na união disjunta de $I_n(k)$. Para cada par (n, k), seja

$$\psi_{n,k}(x) = \begin{cases} b_n(x) - b_{n+1}(x), & x \in I_n(k); \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus I_n(k). \end{cases}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \int_{I_n(k)} \psi_{n,k}(x)dx &= \int_{I_n(k)} b_n(x)dx - \int_{I_n(k)} b_{n+1}(x)dx \\ &= \int_{I_n(k)} b_n(x)dx - \sum_{j \in S(n,k)} \int_{I_{n+1}(j)} b_{n+1}(x)dx = 0, \end{aligned}$$

em que $S(n, k)$ é o conjunto dos índices j's tais que $I_{n+1}(j) \subset I_n(k)$. Também

$$\begin{aligned} |b_n(x) - b_{n+1}(x)| &= |g_{n+1}(x) - g_n(x)| \leq |g_{n+1}(x)| + |g_n(x)| \\ &\leq C2^{n+1} + C2^n = 3C2^n. \end{aligned}$$

Defina

$$\phi_{n,k}(x) = \frac{2^{-n}}{3C} |I_n(k)|^{-1/p} \psi_{n,k}(x).$$

Com esta definição, todo $\phi_{n,k}$ é um H^p-átomo e

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}(b_n(x)-b_{n+1}(x))=\sum_{n=n_0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}3C2^n|I_n(k)|^{1/p}\phi_{n,k}(x).$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\sum_{n=n_0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(3C2^n|I_n(k)|^{1/p})^p &= 3^pC^p\sum_{n=n_0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}2^{np}|I_n(k)|\\ &= C\sum_{n=n_0}^{\infty}2^{np}|\{x: F^*(x)>2^n\}|\\ &\leq C\int_0^{\infty}\lambda^{p-1}|\{x: F^*(x)>\lambda\}|d\lambda\\ &= C\int_{-\infty}^{\infty}[F^*(x)]^p dx<\infty.\end{aligned}$$

Assim a série $\sum_{n=n_0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}3C2^n|I_i(n)|^{1/p}\phi_{n,k}(x)$ converge q.t.p. e em H^p para uma função em H^p, pois $\|\phi_{n,k}\|_{H^p}\leq C$. Como

$$(\beta-\alpha)^{-1}\int bF(t)\,dt\cdot\chi_{(\alpha,\beta)}(x)$$

é um múltiplo de um h^p-átomo suportado em (α,β), reordenando os termos da série, podemos escrever

$$bF(x)=\sum_j\gamma_j a_j(x),$$

em que os a_j são h^p-átomos, concluindo a demonstração do teorema. ■

Por densidade, Lema 2.2.7, o teorema é válido para uma F em geral, isto é, podemos retirar a hipótese de que $F\in C(\overline{U_k})$.

4.3 Prova do Teorema 4.2.1

Sem perda de generalidade, suponhamos que o conjunto aberto $\{x\in(-A,A): M(x)>m(x)\}$ tenha apenas duas componentes conexas, ou seja estamos no caso em que $F(L) = \{0\}$ [1]. O caso em que $0 \notin F$ segue do caso em que o conjunto aberto $\{x \in (-A, A) : M(x) > m(x)\}$ tenha apenas uma componente conexa, cuja prova é mais simples. Seja

$$\{x \in (-A, A) : M(x) > m(x)\} = (-a, 0) \cup (0, a),$$

sua decomposição. Denotemos as componentes conexas do interior de $Z(Q)$ por

$$U_1 = \{\xi + i\eta : -A < \xi < 0,\ m(\xi) < \eta < M(\xi)\}$$

e

$$U_2 = \{\xi + i\eta : 0 < \xi < A,\ m(\xi) < \eta < M(\xi)\}.$$

Afirmamos que $f(0, \cdot)$ é constante. Com efeito, pela fórmula de aproximação de Baouendi-Treves, dado $(0, t_0) \in Q$, existe uma vizinhança U_0 de $(0, t_0)$ e uma seqüência de polinômios $\{P_l\}$ de forma que

$$f(0, t) = \lim_{l \to \infty} P_l(Z(0, t)), \quad \forall (0, t) \in U_0.$$

Mas $Z(0, t) = i\varphi(0, t) = i\varphi(0, B)$, para todo $t \in (0, B)$. Daí,

$$f(0, t) = \lim_{l \to \infty} P_l(Z(0, t)) = \lim_{l \to \infty} P_l(i\varphi(0, B)), \quad \forall (0, t) \in U_0,$$

donde $f(0, \cdot)$ restrita a U_0 é constante. Como t_0 é arbitrário, temos provado a afirmação.

Como as hipóteses não se alteram se somarmos uma constante à função f, podemos supor que $f(0, t) = 0$ para $t \in (0, B)$. Sabemos que

$$f(x, t) = F_1(Z(x, t)) \quad \text{em} \quad Z^{-1}(U_1)$$

e

$$f(x, t) = F_2(Z(x, t)), \quad \text{em} \quad Z^{-1}(U_2).$$

Definimos as seguintes funções contínuas em Q

$$f^{(1)}(x, t) = \begin{cases} F_1 \circ Z(x, t), & x \leq 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases} \quad e \quad f^{(2)}(x, t) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ F_2 \circ Z(x, t), & x \geq 0, \end{cases}$$

que são soluções homogêneas, no sentido das distribuições, do campo L em $(-A, A) \times (0, B)$. De fato, seja $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ com $\chi \equiv 1$ em $(A/2, \infty)$ e $\chi \equiv 0$

[1] Observe que $F(L) = \{x \in (-A, A) : \varphi_t(x, \cdot) \equiv 0\}$.

em $(-\infty, A/4)$ e definamos $\chi_j(x) = \chi(jx)$. Desta forma, vemos que $\chi \to H$ q.t.p., em que H é a função Heavside. Considere $\eta \in C_c^\infty(-A, A) \times (0, B)$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle Lf, \chi_j \eta\rangle = \langle f, {}^tL(\chi_j\eta)\rangle = \langle f, \chi_j\, {}^tL(\eta) - \partial_x(\chi_j)a\eta\rangle \\ &= \langle f, \chi_j\, {}^tL(\eta)\rangle - \int_0^B \int_{-A}^A f(x,t) j\chi'(jx)a(x,t)\eta(x,t)dxdt, \end{aligned}$$

a primeira expressão a direita converge para $\langle L(Hf), \eta\rangle = \langle L(f^{(2)}), \eta\rangle$ quando $j \to \infty$, enquanto que a integral a direita converge para zero quando $j \to \infty$, pois a condição $a(0,t) \equiv 0$ implica que $a(x,t) = x\alpha(x,t)$.

Analogamente para $f^{(1)}$. Portanto, a função contínua $g = f - (f^{(1)} + f^{(2)})$ é uma solução homogênea, no sentido das distribuições, do campo L em $(-A, A) \times (0, B)$. Logo, o suporte de g está contido numa união de órbitas, veja [T]. As órbitas neste caso são: se $M(-A) > m(-A)$ e $M(A) > m(A)$,

(i) $\{0\} \times (0, B)$;

(ii) $(-A, 0) \times (0, B)$ e

(iii) $(0, A) \times (0, B)$,

se $M(-A) = m(-A)$ e $M(A) = m(A)$

(i) $\{0\} \times (0, B)$;

(ii) $(-A, 0) \times (0, B)$;

(iii) $(0, A) \times (0, B)$;

(iv) $\{-A\} \times (0, B)$ e

(v) $\{A\} \times (0, B)$,

analogamente quando $M(-A) > m(-A)$ e $M(A) = m(A)$ ou $M(-A) = m(-A)$ e $M(A) > m(A)$.

Mas $g \equiv 0$ nas órbitas diferentes de $\{0\} \times (0, B)$. Então o suporte de g está contido em $\{0\} \times (0, B)$. Como g é uma função contínua, vemos que $g \equiv 0$. Donde $f = f^{(1)} + f^{(2)}$. Logo,

$$bf(x, 0) = bF_1(x, 0) + bF_2(x, 0).$$

Assim, invocando o Teorema 4.2.5, temos que existem seqüências de números complexos $(\lambda_j^1), (\lambda_j^2) \in \ell^p$ e seqüências de p-átomos $(a_j^1), (a_j^2)$ suportados $(-A, 0)$ e $(0, A)$ respectivamente de forma que

$$\begin{aligned} bf(x,0) &= bF_1(x,0) + bF_2(x,0) \\ &= \sum_j \lambda_j^1 a_j^1(x,0) + \sum_j \lambda_j^2 a_j^2(x,0) \end{aligned}$$

mostrando que $bf \in h_L^p(-A, A)$. Concluindo a demonstração do teorema. ■

Observação: A demonstração do Teorema 4.2.1 depende fortemente do Teorema 4.2.5. A dificuldade em provar o Teorema 4.2.5 para $0 < p \leq 1/2$ consiste no fato de que os h^p-átomos, $\frac{1}{1+k} < p \leq \frac{1}{k}$, $k \geq 2$, podem possuir momentos nulos até a ordem $k - 1 \geq 1$, isto é, para que uma função mensurável a suportada em um intervalo I, com $|I| < 1$, satisfazendo $\|a\|_{L^\infty} \leq |I|^{-1/p}$ seja um h^p-átomo é necessário que

$$\int x^j a(x)dx = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, k-1,$$

ver definição 1.2.3.

Bibliografia

[BT] M.S. Baouendi, F. Treves, *A property of the functions and distributions annihilated by a locally integrable system of complex vector fields*, Ann. Math. 113 (1981), 387-421.

[BH1] S. Berhanu, J. Hounie, *An F. and M. Riesz theorem for planar vector fields*, Math. Ann. 320 (2001), 463-485.

[BH2] S. Berhanu, J. Hounie, *On boundary properties of solutions of complex vector fields*, J. Funct. Anal., 192, (2002), 446-490.

[BH3] S. Berhanu, J. Hounie, *Traces and the F. and M. Riesz theorem for planar vector fields*, Ann. Inst. Fourier, 53, (2003), 1425-1460.

[BH4] S. Berhanu, J. Hounie, *On boundary regularity for one-sided locally solvable vector fields*, Indiana Un. Math. J., 52, (2003), 1447–1477.

[BH5] S. Berhanu, J. Hounie, *The F. and M. Riesz property for vector fields*, Contemporary Math., 368, (2005), 25-39.

[BH6] S. Berhanu, J. Hounie, *An F. and M. Riesz theorem for a system of vector fields*, Inventiones Math., no prelo.

[CJS] R. R. Coifman, P. Jones, S Semmes, *Two elementary proofs of the L^2 boundedness of Cauchy integrals on Lipschitz curves*, J. Amer. Math. Soc. 2 (1989), 553-564.

[CM] R. R. Coifman, Y. Meyer, *Au delà des opérateurs pseudo-différentiels*, Astérisque 57 (1978).

[CMcM] R. R. Coifman, A. McIntosh, Y. Meyer, *L'intégrals de Cauchy définit un opérateur borné sur L^2 poiur les courbes lipschitziennes*, Ann. of Math. 116 (1982), 361-387.

[D] G. David, *Operateurs integraux singuliers sur certain courbes du plan complexe*, Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup. 17 (1984), 157-189.

[Du] P. Duren, *Theory of H^p spaces*. Dover, 2000.

[Fa] P. Fatou, *Séries trigonométriques e séries de Taylor*, Acta Math. 30 (1906), 335-400.

[G] D. Goldberg, *A local version of real Hardy spaces*, Duke Math. J. 46 (1979), 27-42.

[GR] J.Garcia-Cuerva and J.L. Rubio de Francia, *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*. Mathematics Studies 116, North-Holland, 1985.

[Ha] G. H. Hardy, *The mean value of the modulus of an analytic function*, Proc. London Math. Soc. 14 (1915), 269-277.

[HH] G. Hoepfner, J. Hounie, *Espaços de Hardy no Disco Unitário*. 25^o Colóquio Brasileiro de Matemática, Impa, 2005.

[HM] J. Hounie, P. Malagutti, *On the convergence of the Baouendi-Treves approximation formula*, Comm. in PDE 23 (1998), 1305-1347.

[Ko] P. Koosis, *Introduction to H^p spaces*. 2nd ed., Cambridge University Press, 1998.

[L] L. Lanzani, *Cauchy transform and Hardy spaces for rough planar domains*, Contem. Amer. Math. Soc. 251 (2000), 409-428.

[N] J. Necas, *Sur les domaines du type $\mathcal{N}$*, Czechoslovak. Math. J. 12 (1962), 274-287.

[NT] L. Nirenberg, F. Treves, *Solvability of a first order linear partial differential equation*. Comm. Pure Appl. Math. 16 (1963), 331-351.

[RR] F. Riesz and M. Riesz, *Über die Randwerte einer analytischen Funktion*, Quatième Congrès de Math. Scand. Stockholm (1916), 27-44.

[S] H.J. Sussmann, *Orbits of families of vector fields and integrability of distributions*, Trans. Amer. Math. Soc. 180 (1973), 171-188.

[St] E. Stein, *Harmonic Analysis, Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals*. Princeton University Press, 1993.

[SW] E. Stein and G. Weiss, *Introduction on Fourier analysis on Euclidean spaces*. Princeton University Press, 1971.

[SW1] E. Stein and G. Weiss, *On the theory of harmonic functions of several variables I, The theory of H^p spaces*, Acta Math. 103 (1960), 25-62.

[T] F. Treves, *Hypo-Analytic Structures, Local Theory*. Princeton University Press, 1992.

[V] G. Verchota, *Layer potentials and regularity for the Dirichlet problem for Laplace equation in Lipschitz domains*, J. Funct. Anal. 59 (1984), 572-611.

[Z] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, 2nd ed. Cambridge Univ. Press, 1959.