UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

UM TEOREMA DE F. E M. RIESZ PARA UM SISTEMA DE CAMPOS VETORIAIS DE CO-POSTO UM

Elisandra Bär de Figueiredo

São Carlos - SP
2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

UM TEOREMA DE F. E M. RIESZ PARA UM SISTEMA DE CAMPOS VETORIAIS DE CO-POSTO UM

Elisandra Bär de Figueiredo

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para obtenção do Título de Doutor em Matemática. Área de concentração: Análise Matemática.

São Carlos - SP
Março de 2008

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária/UFSCar

F475tf

Figueiredo, Elisandra Bär de.
Um teorema de F. E M. Riesz para um sistema de campos vetoriais de co-posto um / Elisandra Bär de Figueiredo. -- São Carlos : UFSCar, 2008.
76 f.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2008.

1. Teorema de F. e M. Riesz. 2. Campos vetoriais. I. Título.

CDD: 510 (20^a)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie
DM - UFSCar

Prof. Dr. Gerson Petronilho
DM - UFSCar

Prof. Dr. José Ruidival Soares dos Santos Filho
DM - UFSCar

Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro
IME – USP

Prof. Dr. Sergio Luiz Zani
ICMC - USP

Dedico este trabalho ao meu esposo Diogo com todo meu amor e carinho.

Agradecimentos

A Deus pela constante companhia e por estar sempre iluminando meu caminho.

Ao meu esposo Diogo pelo amor, amizade, respeito, incentivo em todos os momentos e pela sua presença diária na minha vida. Amo você!

Aos meus pais Helga e Egon e minha irmã Marcia por todo amor, carinho, apoio, incentivo e compreensão. Aos meus tios e avós que apesar da distância sempre estiveram presentes.

Aos meus sogros, Rogério e Cristina, a Nanda, ao Du e ao Eric que me acolheram em sua família com muito carinho.

Ao meu orientador professor Dr. Jorge Guillermo Hounie pela orientação dedicada e paciente, pela amizade, pela confiança e pelos ensinamentos matemáticos.

Ao meu orientador do mestrado professor Dr. José Ruidival Soares dos Santos Filho pelos ensinamentos e pela confiança em me encaminhar ao Professor Jorge. Ao professor Gerson pela leitura e sugestões da tese.

Aos Professores do Departamento de Matemática da UFSCar pelos ensinamentos matemáticos e pela amizade.

Aos Professores do Departamento de Matemática da UEPG, de maneira especial ao Marcio que se revelou um grande amigo, ao professor Moisés pelo apoio e incentivo e ao Giuliano que me ensinou a gostar de matemática pura.

Aos meus amigos que sempre estiveram ao meu lado, em especial a Lu, o Ale, a Jô, o Itacir, a Claudinha, o Leo, o Wladimir, a Clarice, o Luiz, a Luana e a Leticia. Aos colegas e amigos do PPG-M pelo companheirismo e excelente ambiente de trabalho.

A Irma por estar sempre disposta a nos ajudar muitas vezes em trabalhos além dos de secretéria.

A CAPES pelo auxílio financeiro.

Conteúdo

Resumo

O clássico teorema de F. e M. Riesz provado em 1916 por Frederic e Marcel Riesz estabelece que se uma função holomorfa $f(z)$ definida no disco unitário Δ tem um valor de fronteira fraco bf que é uma medida, então esta medida é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue. Se usarmos o fato que a continuidade absoluta de uma dada medida com respeito à medida de Lebesgue é uma propriedade local e recuperarmos funções holomorfas como soluções homogêneas da equação $\overline{\partial} f = 0$, é natural perguntar-se para quais tipos de sistemas suas soluções homogêneas comportam-se similarmente, isto é, seus valores de fronteira, quando existem e são medidas, são medidas absolutamente contínuas com relação à medida de Lebesgue. Neste trabalho provamos que tal fenômeno ocorre para uma classe de soluções homogêneas contínuas de um sistema de campos vetoriais complexos, suaves e localmente integráveis super-determinado de co-posto um.

Abstract

The classic F. and M. Riesz theorem proved in 1916 by Frederic and Marcel Riesz states that if a holomorphic function $f(z)$ defined on the unit disc Δ has a weak boundary value bf that is a measure, then this measure is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure. If we use the fact that absolute continuity of a given measure with respect to Lebesgue measure is a local property and we regard holomorphic functions as solutions of the homogeneous equation $\overline{\partial} f = 0$, it is natural to question for which kind of overdetermined systems their homogeneous solutions behave similarly, that is, their boundary values, when existing and being measures, are measures absolutely continuous with respect to Lebesgue measure. In this work we prove that this phenomenon holds for a class of continuous homogeneous solutions of a overdetermined system of smooth, locally integrable complex vector fields of co-rank one.

Introdução

Considere uma medida complexa μ definida na fronteira $\mathbb{T}$ do disco unitário Δ. Em 1916 Frederic e Marcel Riesz provaram o clássico Teorema de F. e M. Riesz que estabelece que se os coeficientes de Fourier de μ se anulam para todos valores inteiros negativos, isto é,

$$\hat{\mu}(k) = \int_0^{2\pi} \exp(-2\pi i k\theta) d\mu(\theta) = 0, \qquad k = -1, -2, \ldots, \tag{1}$$

então μ é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue $d\theta$. A condição (1) é equivalente a existência de uma função holomorfa $f(z)$ definida em Δ cujo valor fraco de fronteira é μ. Em outras palavras o teorema afirma que se uma função holomorfa f em Δ tem um valor fraco de fronteira bf que é uma medida, então $bf \in L^1(\mathbb{T})$.

O Teorema de F. e M. Riesz tem inspirado uma extensiva generalização principalmente em duas direções diferentes: (i) Álgebras de funções analíticas generalizadas, que tem como ponto de partida o fato que (1) significa que μ é ortogonal à álgebra das funções contínuas f em $\mathbb{T}$ que se estendem holomorficamente a F em Δ com $F(0) = 0$; (ii) grupos ordenados, esta linha enfatiza o papel da estrutura de grupo de $\mathbb{T}$ no resultado clássico. Para a generalização ao longo das álgebras de funções mencionamos o livro **[BK]** de Klaus Barbey e Heinz Konig. Uma descrição da segunda direção de generalizações pode ser encontrada em **[K1]** e **[K2]**. Assim, apesar da continuidade absoluta de uma dada medida em relação à medida de Lebesgue ser uma propriedade local (i.e., se cada ponto possui uma vizinhança onde o resultado é verdadeiro, então vale por toda parte) estas duas direções são focadas em objetos globais. Uma notável exceção é o artigo de Brummelhuis **[Br]** de 1989, no qual o autor usa análise microlocal para provar algumas generalizações do Teorema de F. e M. Riesz. Entre outras coisas ele provou que uma medida numa hiper-superfície S do plano complexo $\mathbb{C}^n$ a qual é o valor de fronteira fraco de uma função holomorfa definida em um lado de S, é absolutamente contínua com relação à medida de Lebesgue.

Pelo Teorema da Aplicação de Riemann e pelo caracter local da conclusão, outra maneira de estabelecer o Teorema de F. e M. Riesz é dizendo que se uma função holomorfa $f(z)$ definida num domínio suave limitado D do plano complexo tem crescimento temperado na fronteira e seu valor fraco de fronteira é uma medida então essa medida é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue. Considerando-se funções holomorfas como soluções da equação homogênea $\overline{\partial} f = 0$, é natural perguntar para quais campos vetoriais complexos L é possível obter a mesma conclusão para as soluções da equação $Lf = 0$, ou mais geralmente, para quais tipos de sistemas super-determinados de campos vetoriais suas soluções homogêneas comportam-se similarmente, isto é, seus valores de fronteira, quando existem e são medidas, são medidas absolutamente contínuas com relação à medida de Lebesgue. Nesta linha de raciocínio Shiferaw Berhanu e Jorge Hounie provaram várias generalizações do Teorema de F. e M. Riesz. Citaremos algumas.

No artigo **[BH1]**, publicado em 2001, eles provaram que isso vale para as soluções $f \in C^1$ com crescimento temperado perto da fronteira da equação $Lf = 0$ sendo L qualquer campo vetorial complexo, suave e localmente integrável no plano para domínios suaves na parte não-característica da fronteira. Para funções holomorfas o crescimento temperado perto da fronteira é equivalente a existência de um valor fraco de fronteira.

No artigo **[BH2]**, de 2002, eles relaxaram a condição de crescimento temperado da solução perto da fronteira e assumiram, ao invés disto, que as integrais de $|f(\cdot, t)|$ sobre subconjuntos compactos tem crescimento temperado e mostraram que isto implica a existência de um valor fraco de fronteira para qualquer campo vetorial L (não necessariamente localmente integrável). Além de terem enfraquecido a condição de crescimento eles consideram $f \in C^0$, com isso eles obtiveram um resultado que aprimora o de **[BH1]**.

Em **[BH3]**, de 2003, ainda na situação de apenas uma equação, eles estabelecem a existência de um valor fraco de fronteira com uma hipótese ainda mais fraca. Esta condição é expressa em termos de uma integral primeira de L. Mais precisamente eles provam o seguinte teorema:

Teorema 1. *Dado um campo vetorial suave localmente integrável L definido num subconjunto aberto do plano. Em coordenadas (x, t) apropriadas podemos supor que L possui uma integral primeira $Z(x, t) = x + i\varphi(x, t)$ definida numa vizinhança do fecho do retângulo $Q = (-A, A) \times (-B, B)$. Assim, após uma multiplicação por um fator não nulo L pode ser escrito como*

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{i\varphi_t(x,t)}{1 + i\varphi_x(x,t)} \frac{\partial}{\partial x}$$

e $\varphi(x, t)$ está definida e é suave para $|x| \leq A$, $|t| \leq B$. Seja f uma função contínua em $Q^+ = (-A, A) \times (0, B)$. Suponha que

(i) $Lf \in L^1(Q^+)$;
(ii) existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_0^B \int_{-A}^A |\varphi(x,t) - \varphi(x,0)|^N |f(x,t)| dx dt < \infty.$$

Então $\lim_{t \to 0^+} f(x, t) = bf$ existe em $\mathcal{D}'(-A, A)$ e é uma distribuição de ordem $N + 1$.

Em **[BH4]**, publicado em 2005, é provado que se L e f são como no Teorema 1 com $Lf = 0$ e $bf = \mu$ uma medida, então μ é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue.

No trabalho **[BH5]**, de 2005, Berhanu e Hounie resolveram a questão para o caso de soluções homogêneas de uma classe de sistemas super-determinados de equações diferenciais parciais de primeira ordem que provém de estruturas formalmente integráis analíticas-reais. O resultado lá provado é o seguinte:

TEOREMA 2. *Seja $(\mathcal{M}, \mathcal{V})$ uma estrutura involutiva analítica-real. Assuma que $\mathcal{N}$ é uma subvariedade fortemente não-característica analítica-real de $\mathcal{M}$ e $\mathcal{W}$ é uma cunha com aresta $\mathcal{N}$. Seja $u \in C(\mathcal{W})$ uma solução de $\mathcal{V}$ tal que $|u(p)| = O(dist(p, \mathcal{N})^{-N})$, $p \in \mathcal{W}$, para algum inteiro positivo N e denote por $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{N})$ o valor de fronteira de u. Se f é uma medida, então ela é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue.*

Neste trabalho provaremos que este fenômeno ocorre para algumas soluções homogêneas de um sistema super-determinado de campos vetoriais complexos, suaves, localmente integráveis de co-posto um. Tal resultado é estabelecido pelo Teorema 2.3.1. Conseguimos abranger sistemas que não são necessariamente provenientes de estruturas formalmente integráveis analíticas-reais, porém precisamos da hipótese de co-posto um.

Este trabalho está organizado como segue: no Capítulo 1 apresentamos a teoria básica para o nosso estudo e no Capítulo 2 os resultados que obtivemos.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo introduziremos os conceitos principais que estudaremos ao longo deste trabalho. Recordaremos algumas noções bem conhecidas com o propósito principal de estabelecer a base para a apresentação e fixar as notações. Não nos ateremos a demonstração dos resultados, uma boa referência para encontrá-los é o livro **[BCH]**.

1.1 Estruturas localmente integráveis

Os resultados desta seção podem ser encontrados no Capítulo I de **[BCH]**.

Campos vetoriais complexos

Seja Ω um espaço topológico de Hausdorff, com uma base enumerável de conjuntos abertos. Uma *estrutura diferencial sobre Ω de dimensão N* é uma coleção de pares ordenados $\mathcal{F} = \{(U, \mathtt{x})\}$ onde $U \subset \Omega$ é um conjunto aberto não vazio, $\mathtt{x} : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ é um homeomorfismo sobre um conjunto aberto $\mathtt{x}(U)$ de $\mathbb{R}^N$ e as seguintes propriedades são verificadas:

(i) $\displaystyle\bigcup_{(U,\mathtt{x})\in\mathcal{F}} U = \Omega;$

(ii) $\mathtt{x}(U \cap U') \xrightarrow{\mathtt{x}'\circ\mathtt{x}^{-1}} \mathtt{x}'(U \cap U')$ é C^∞ para cada par $(U, \mathtt{x})$, $(U', \mathtt{x}') \in \mathcal{F}$ com $U \cap U' \neq \emptyset$;

(iii) $\mathcal{F}$ é maximal com respeito a (i) e (ii), isto é, se $\emptyset \neq V \subset \Omega$ é um aberto e $\mathtt{y} : V \longrightarrow \mathtt{y}(V)$ é um homeomorfismo sobre um conjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ tais que, para qualquer $(U, \mathtt{x}) \in \mathcal{F}$ com $U \cap V \neq \emptyset$ a composição $\mathtt{x}(U \cap V) \xrightarrow{\mathtt{y}\circ\mathtt{x}^{-1}} \mathtt{y}(U \cap V)$ é C^∞, então $(V, \mathtt{y}) \in \mathcal{F}$.

É fácil ver que dada qualquer família $\mathcal{F}^* = \{(U, \mathtt{x})\}$ como acima satisfazendo (i) e (ii) existe uma única estrutura diferencial $\mathcal{F}$ sobre Ω, de dimensão N, tal que $\mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}$.

DEFINIÇÃO 1.1.1 *Uma* variedade diferenciável *(ou* suave*) de dimensão N é um espaço topológico de Hausdorff Ω, com base enumerável, sobre o qual é dada uma estrutura diferenciável de dimensão N.*

Se na definição acima substituirmos C^∞ por C^ω obtemos o conceito de uma *variedade analítica-real de dimensão N.*
NOTAÇÃO: Um elemento $(U, \mathtt{x}) \in \mathcal{F}$ será chamado de *carta local* ou *sistema local de coordenadas.* Se escrevermos $\mathtt{x} = (x_1, \ldots, x_N)$ então, $p \in U$ é escrito nas coordenadas locais como $(x_1(p), \ldots, x_N(p))$.

De agora em diante, a menos que se diga o contrário, fixaremos Ω como uma variedade diferencial de dimensão N. Uma função $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ é *suave* se, para cada $(U, \mathtt{x}) \in \mathcal{F}$, a composição $f \circ \mathtt{x}^{-1}$ é C^∞ em $\mathtt{x}(U)$. Denotaremos por $C^\infty(\Omega)$ o conjunto de todas as funções suaves sobre Ω. Observamos que C^∞ é uma álgebra sobre $\mathbb{C}$, a qual contém como uma $\mathbb{R}$-subálgebra o conjunto $C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ de todas funções suaves sobre Ω a valores reais.

DEFINIÇÃO 1.1.2 *Um* campo vetorial complexo (suave)*, sobre Ω, é uma aplicação $\mathbb{C}$-linear*

$$L : C^\infty(\Omega) \longrightarrow C^\infty(\Omega)$$

que satisfaz a regra de Leibniz

$$L(fg) = fL(g) + gL(f), \qquad f, g \in C^\infty(\Omega).$$

Denotaremos por $\mathfrak{X}(\Omega)$ o conjunto de todos os campos vetoriais complexos sobre Ω.

PROPOSIÇÃO 1.1.3 *(Proposição 1.3 do Capítulo I de* **[BCH]***) Se $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ e se f é constante, então $Lf = 0$. Além disso, temos que*

$$\operatorname{supp} Lf \subset \operatorname{supp} f, \quad \forall\ f \in C^\infty(\Omega).$$

Uma conseqüência do resultado acima é a possibilidade de definir a *restrição* de um elemento $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ a um subconjunto aberto W de Ω. Mais precisamente existe uma aplicação $\mathbb{C}$-linear

$$\mathfrak{X}(\Omega) \ni L \longrightarrow L_W \in \mathfrak{X}(W)$$

a qual torna o diagrama

$$\begin{tikzcd} C^\infty(\Omega) \arrow[r, "L"] \arrow[d] & C^\infty(\Omega) \arrow[d] \\ C^\infty(W) \arrow[r, "L_W"] & C^\infty(W) \end{tikzcd}$$

comutativo (as setas verticais denotam a aplicação restrição). Usualmente escreveremos L ao invés de L_W, desde que o significado esteja claro no contexto.

A estrutura algébrica de $\mathfrak{X}(\Omega)$

Dados $g \in C^\infty(\Omega)$ e $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ define-se $gL \in \mathfrak{X}$ por

$$(gL)(f) = g \cdot L(f), \qquad f \in C^\infty(\Omega).$$

esta multiplicação exterior dá a $\mathfrak{X}(\Omega)$ uma estrutura de $C^\infty(\Omega)$-*módulo*.

Uma operação (interna) muito importante em $\mathfrak{X}(\Omega)$ é o *colchete* (ou *comutador*) *de Lie* entre dois campos vetoriais. Dados $L, M \in \mathfrak{X}(\Omega)$ define-se

$$[M, L](f) = L(M(f)) - M(L(f)), \qquad f \in C^\infty(\Omega). \tag{1.1.1}$$

É fácil ver que $[L, M] \in \mathfrak{X}(\Omega)$. Esta operação colchete torna $\mathfrak{X}(\Omega)$ uma *álgebra de Lie sobre* $\mathbb{C}$.

Sejam $(U, \mathtt{x})$ um sistema local de coordenadas em Ω e $L \in \mathfrak{X}(U)$. Fixe $p \in U$ e escreva como antes

$$\mathtt{x}(q) = (x_1(q), \ldots, x_N(q)), \quad q \in U.$$

Em seguida tome $V \subset U$ um subconjunto aberto tal que $\mathtt{x}(V)$ é uma bola aberta centrada em $\mathtt{x}(p) = a = (a_1, \ldots, a_N)$. Dada $f \in C^\infty(U)$ escreva $f^* = f \circ \mathtt{x}^{-1}$. Se $(x_1, \ldots, x_N) \in \mathtt{x}(V)$ segue da fórmula de Taylor que

$$f^*(x_1, \ldots, x_N) = f^*(a_1, \ldots, a_N) + \sum_{j=1}^{N} h_j(x_1, \ldots, x_N)(x_j - a_j),$$

onde $h_j \in C^\infty(\mathtt{x}(V))$ e $h_j(a) = (\partial f^*/\partial x_j)(a)$. Se, além disso, escolhermos $g_j = h_j \circ \mathtt{x} \in C^\infty(V)$ obtemos

$$f(q) = f(p) + \sum_{j=1}^{N} g_j(q)(x_j(q) - x_j(p)), \quad q \in V, \tag{1.1.2}$$

e conseqüentemente pela regra de Leibniz

$$L(f)(p) = \sum_{j=1}^{N} g_j(p)(Lx_j)(p). \tag{1.1.3}$$

Definição 1.1.4 *Aplicação $\mathbb{C}$-linear $C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ dada por*

$$f \mapsto \frac{\partial f^*}{\partial x_j} \circ \mathtt{x}$$

define um elemento em $\mathfrak{X}(U)$, o qual será denotado por $\frac{\partial}{\partial x_j}$.

Retornando ao argumento e notação acima podemos escrever

$$g_j(p) = h_j(\mathtt{x}(p)) = \frac{\partial f^*}{\partial x_j}(\mathtt{x}(p)) = \frac{\partial}{\partial x_j}(f)(p).$$

Inserindo isto em (1.1.3) obtemos

$$L(f)(p) = \sum_{j=0}^{N} (Lx_j)(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) (f)(p).$$

Como p foi escolhido arbitrariamente em U obtemos a *representação de L nas coordenadas locais* $(x_1, \ldots, x_N)$:

$$L = \sum_{j=1}^{N} (Lx_j) \frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{1.1.4}$$

Em particular esta representação mostra que o $C^\infty(U)$-módulo $\mathfrak{X}(U)$ é livre, com base $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_N}\}$.

Observe que se $M \in \mathfrak{X}(U)$ então a representação de $[L, M]$ nas coordenadas locais, $(x_1, \ldots, x_N)$, é dada por

$$[L, M] = \sum_{j=1}^{N} \{L(Mx_j) - M(Lx_j)\} \frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{1.1.5}$$

Estruturas formalmente integráveis

Denote por $\mathcal{B}_p$ o conjunto de todos pares ordenados (V, f), onde V é uma vizinhança aberta de p e $f \in C^\infty(V)$. Em $\mathcal{B}_p$ introduza a seguinte relação de equivalência: $(V_1, f_1) \sim (V_2, f_2)$ se existe uma vizinhança aberta V de p, $V \subset V_1 \cap V_2$, tal que f_1 e f_2 coincidem em V.

Um *germe de uma função C^∞* em p é um elemento no espaço quociente $C^\infty(p) \doteq \mathcal{B}_p / \sim$. Observe que $C^\infty(p)$ também é uma $\mathbb{C}$-álgebra. Dada $f \in C^\infty$ definida numa vizinhança aberta de p, o germe em p definido por f será denotado por $\underline{f}$. Observe a existência de um homomorfismo natural de $\mathbb{C}$- álgebra $C^\infty(p) \to \mathbb{C}$ definido por $\underline{f} \mapsto f(p)$.

Definição 1.1.5 *Um* vetor tangente complexo (à Ω) *em p é uma aplicação $\mathbb{C}$-linear*

$$\mathrm{v} : C^\infty(p) \longrightarrow \mathbb{C}$$

satisfazendo

$$\mathrm{v}(\underline{f}\ \underline{g}) = f(p)\mathrm{v}(\underline{g}) + g(p)\mathrm{v}(\underline{f}), \quad \underline{f}, \underline{g} \in C^\infty(p). \tag{1.1.6}$$

O conjunto de todos vetores tangentes complexos em p, denotado por $\mathbb{C}T_p\Omega$, tem uma estrutura de um espaço $\mathbb{C}$-vetorial e é chamado *espaço tangente complexo* à Ω em p.

Se $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ então $L_p : C^\infty(p) \longrightarrow \mathbb{C}$ definido por

$$L_p(\underline{f}) = L(f)(p), \quad \underline{f} \in C^\infty(p),$$

pertence a $\mathbb{C}T_p(\Omega)$. Reciprocamente, suponha que para cada $p \in \Omega$ seja dado um elemento $\mathrm{v}_p \in \mathbb{C}T_p\Omega$ tal que

$$p \mapsto \mathrm{v}_p(\underline{f}) \in C^\infty(\Omega), \quad \forall f \in C^\infty(\Omega).$$

Então existe $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ tal que $L_p = \mathrm{v}_p$ para todo $p \in \Omega$.

Suponha agora que $p \in U$ e que (U, x) é um sistema local de coordenadas. Se $\mathrm{v} \in \mathbb{C}T_p\Omega$ então, de acordo com (1.1.3),

$$\mathrm{v}(\underline{f}) = \sum_{j=1}^{N} g_j(p)\mathrm{v}(\underline{x_j}) = \sum_{j=1}^{N} \mathrm{v}(\underline{x_j}) \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p (\underline{f}), \quad \underline{f} \in C^\infty(p).$$

Em particular, concluímos que $\{(\frac{\partial}{\partial x_j})_p : j = 1, \ldots, N\}$ é uma base de $\mathbb{C}T_p\Omega$.

O *fibrado tangente complexo de* Ω é definido como a união disjunta

$$\mathbb{C}T\Omega = \bigcup_{p \in \Omega} \mathbb{C}T_p\Omega.$$

Também precisaremos da noção de um *subfibrado vetorial complexo de* $\mathbb{C}T\Omega$ *de posto* n. Para isto nos referimos a uma união disjunta

$$\mathcal{V} = \bigcup_{p \in \Omega} \mathcal{V}_p \subset \mathbb{C}T\Omega$$

satisfazendo as seguintes condições:

(a) para cada $p \in \Omega$, $\mathcal{V}_p$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{C}T_p\Omega$ de dimensão n.

(b) dado $p_0 \in \Omega$ existem um conjunto aberto U_0 contendo p_0 e campos vetoriais $L_1, \ldots, L_n \in \mathfrak{X}(\Omega)$ tais que $L_{1p}, \ldots, L_{np}$ geram $\mathcal{V}_p$ para todo $p \in U_0$.

O espaço vetorial $\mathcal{V}_p$ é chamado a *fibra* de $\mathcal{V}$ em p.

Dado um subfibrado vetorial complexo $\mathcal{V}$ de $\mathbb{C}T\Omega$ e um subconjunto aberto W de Ω, uma *seção de* $\mathcal{V}$ *sobre* W é um elemento $L \in \mathfrak{X}(W)$ tal que $L_p \in \mathcal{V}_p$ para todo $p \in W$. Agora estamos em condições de introduzir o foco desta subseção:

DEFINIÇÃO 1.1.6 *Uma* estrutura formalmente integrável *(ou* involutiva*) sobre* Ω *é um subfibrado* $\mathcal{V}$ *de* $\mathbb{C}T\Omega$ *satisfazendo a condição involutiva (ou de Frobenius):*

- *Se* $W \subset \Omega$ *é aberto e* $L, M \in \mathfrak{X}(W)$ *são seções de* $\mathcal{V}$ *sobre* W *então* $[L, M]$ *também é uma seção de* $\mathcal{V}$ *sobre* W.

Seja $\mathcal{V}$ uma estrutura formalmente integrável sobre Ω e fixe $p \in \Omega$. Existem um sistema local de coordenadas (U, x) com $p \in U$ e campos vetoriais $L_1, \ldots, L_n \in \mathfrak{X}(U)$ tais que $\{L_{1q}, \ldots, L_{nq}\}$ é uma base de $\mathcal{V}_q$ para todo $q \in U$. Se escrevermos $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_N)$ e

$$L_j = \sum_{k=1}^{N} a_{jk}(x) \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad j = 1, \ldots, n$$

então a matriz (a_{jk}) tem posto igual a n em todo ponto. Além disso, existem $c^{\nu}_{jk} \in C^{\infty}(U)$, $j, k, \nu = 1, \dots, n$, tais que

$$[L_j, L_k] = \sum_{\nu=1}^{n} c^{\nu}_{jk} L_{\nu}, \quad j, k = 1, \dots, n.$$

Formas diferenciais

Denotaremos por $\mathfrak{N}(\Omega)$ o dual do $C^{\infty}(\Omega)$-módulo $\mathfrak{X}(\Omega)$ e nos referiremos aos seus elementos como *formas diferenciais sobre* Ω *de grau* 1 (ou *1-formas*). Em outras palavras, uma 1-forma sobre Ω é uma aplicação $C^{\infty}(\Omega)$-linear

$$\omega : \mathfrak{X}(\Omega) \longrightarrow C^{\infty}(\Omega).$$

Sejam $\omega \in \mathfrak{N}(\Omega)$ e $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ e suponha que L se anula em um subconjunto aberto $V \subset \Omega$. Então $\omega(L)$ também se anula em V. Na verdade, temos um resultado mais preciso:

Lema 1.1.7 *(Lema 4.1 do Capítulo I de* **[BCH]***) Sejam* $\omega \in \mathfrak{N}(\Omega)$ *e* $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$*. Suponha que* $L_p = 0$ *para algum* $p \in \Omega$*. Então* $\omega(L)(p) = 0$*.*

Se definirmos

$$\mathbb{C}T^*_p(\Omega) \doteq \text{dual de } \mathbb{C}T_p\Omega$$

então, para cada $\omega \in \mathfrak{N}(\Omega)$ podemos associar um elemento $\omega_p \in \mathbb{C}T^*_p\Omega$ pela fórmula

$$\omega_p(\mathrm{v}) = \omega(L)(p),$$

sendo $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ de modo que $L_p = \mathrm{v}$.

Como no caso para campos vetoriais temos a recíproca: se para todo $p \in \Omega$ é dado um elemento $\omega_p \in \mathbb{C}T^*_p\Omega$ tal que

$$p \mapsto \eta_p(L_p) \in C^{\infty}(\Omega), \quad \forall L \in \mathfrak{X}(\Omega),$$

então existe $\omega \in \mathfrak{N}(\Omega)$ de modo que $\omega_p = \eta_p$, para todo $p \in \Omega$.

Proposição 1.1.8 *(Proposição 4.2 do Capítulo I de* **[BCH]***)* $\mathbb{C}T^*_p\Omega = \{\omega_p : \omega \in \mathfrak{N}(\Omega)\}$.

Definição 1.1.9 *Dada* $f \in C^{\infty}(\Omega)$ *definimos* $df \in \mathfrak{N}(\Omega)$ *pela fórmula:*

$$df(L) = L(f), \qquad L \in \mathfrak{X}(\Omega). \tag{1.1.7}$$

Seja (U, x) um sistema local de coordenadas com $p \in U$. A fórmula (1.1.4) nos permite definir $dx_j \in \mathfrak{N}(U)$, $j = 1, \dots, N$ pela fórmula

$$dx_j \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right) = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, N.$$

Portanto, para $\omega \in \mathfrak{N}(U)$ temos

$$\omega = \sum_{j=1}^{N} \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right),$$

onde $\omega(\partial/\partial x_j) \in C^\infty(U)$. Assim, obtemos a representação usual nas coordenadas locais

$$df = \sum_{j=1}^{N} df\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) dx_j = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j.$$

Introduzimos agora o *fibrado cotangente complexo de* Ω com sendo a união disjunta

$$\mathbb{C}T^*\Omega = \bigcup_{p\in\Omega} \mathbb{C}T_p^*\Omega.$$

Como anteriormente também podemos introduzir a noção de *subfibrado vetorial complexo de* $\mathbb{C}T^*\Omega$ *de posto* m como sendo a união disjunta

$$\mathcal{W} = \bigcup_{p\in\Omega} \mathcal{W}_p,$$

onde cada $\mathcal{W}_p$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{C}T_p^*\Omega$ de dimensão m, satisfazendo a seguinte propriedade:

- dado $p_0 \in \Omega$ existem um conjunto aberto U_0 contendo p_0 e 1-formas $\omega_1, \ldots, \omega_m \in \mathfrak{N}(U_0)$ tais que $\omega_{1p}, \ldots, \omega_{mp}$ geram $\mathcal{W}_p$ para todo $p \in U_0$.

Como antes nos referiremos ao espaço $\mathcal{W}_p$ como a *fibra* de $\mathcal{W}$ no ponto p.

Proposição 1.1.10 *(Proposição 4.4 do Capítulo I de* **[BCH]***) Seja $\mathcal{V} = \cup_{p\in\Omega}\mathcal{V}_p$ um subfibrado vetorial complexo de $\mathbb{C}T\Omega$ e escolha, para cada $p \in \Omega$,*

$$\mathcal{V}_p^\perp \doteq \{\lambda \in \mathbb{C}T_p^*\Omega : \lambda = 0 \text{ em } \mathcal{V}_p\}.$$

Então $\mathcal{V}^\perp \doteq \cup_{p\in\Omega}\mathcal{V}_p^\perp$ é um subfibrado vetorial complexo de $\mathbb{C}T^*\Omega$.

Observação: É claro que o argumento acima pode ser invertido. Se $\mathcal{V}^\perp$ é um subfibrado vetorial de $\mathbb{C}T^*\Omega$ então, segue que $\mathcal{V}$ é um subfibrado vetorial de $\mathbb{C}T\Omega$.

Quando $\mathcal{V}$ é uma estrutura formalmente integrável sobre Ω de dimensão N denotaremos o subfibrado $\mathcal{V}^\perp$ por T'. Também denotaremos por n o posto de $\mathcal{V}$ e por m o posto de T'. Em particular, $n + m = N$.

Também usaremos a notação padrão:

$$T_p\Omega \doteq \{\mathrm{v} \in \mathbb{C}T_p\Omega : \ \mathrm{v} \text{ é real}\};$$
$$T_p^*\Omega \doteq \{\xi \in \mathbb{C}T_p^*\Omega : \ \xi \text{ é real}\};$$
$$T\Omega \doteq \bigcup_{p\in\Omega} T_p\Omega;$$
$$T^*\Omega \doteq \bigcup_{p\in\Omega} T_p^*\Omega.$$

Dado $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ seu *conjugado(-complexo)* é o campo vetorial $\overline{L} \in \mathfrak{X}(\Omega)$ definido por:

$$\overline{L}(f) = \overline{(\overline{f})}, \qquad f \in C^\infty(\Omega).$$

Em particular, dizemos que L é um *campo vetorial real* se $L = \overline{L}$. Do mesmo modo podemos definir o conjugado(-complexo) de um elemento de $\mathbb{C}T_p\Omega$. Dado um subespaço $\mathcal{V}_p \subset \mathbb{C}T_p\Omega$ definimos

$$\overline{\mathcal{V}}_p \doteq \{\overline{\mathrm{v}} : \mathrm{v} \in \mathbb{C}T_p\Omega\}.$$

É claro da definição que, se $\mathcal{V}$ é um subfibrado vetorial complexo de $\mathbb{C}T\Omega$ então o mesmo é verdade para $\overline{\mathcal{V}} \doteq \cup_{p\in\Omega}\overline{\mathcal{V}}_p$. Nos iremos referir a $\overline{\mathcal{V}}$ como o *conjugado(-complexo) do subfibrado* $\mathcal{V}$. Definições e resultados análogos podem ser introduzidos e obtidos para $\mathbb{C}T^*\Omega$ e suas fibras $\mathbb{C}T^*_p\Omega$. Também é importante mencionar a igualdade

$$\overline{\mathcal{V}}^\perp = \overline{\mathcal{V}^\perp},$$

a qual é válida para todo subfibrado vetorial complexo $\mathcal{V}$ de $\mathbb{C}T\Omega$.

Estruturas analíticas

Seja Ω uma variedade analítica-real. Dado $U \subset \Omega$ um conjunto aberto, denotaremos por $\mathcal{A}(U)$ o espaço das funções analíticas reais em U. Um elemento $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ é dito ser um *campo vetorial analítico-real em* Ω se, e somente se,

$$L\mathcal{A}(U) \subset \mathcal{A}(U), \quad \forall U \subset \Omega \quad \text{aberto}.$$

Se L é dado em coordenadas locais como em (1.1.4) então L é analítico-real se, e somente se, seus coeficientes Lx_j, $j = 1, \dots, N$, são funções analíticas-reais.

Analogamente diremos que $\omega \in \mathfrak{N}(\Omega)$ é uma *1-forma analítica-real em* Ω se, $\omega(L) \in \mathcal{A}(U)$ para todo $U \subset \Omega$ aberto e para todo campo vetorial analítico-real L.

A partir destas definições podemos introduzir as noções de subfibrado vetorial *analítico* complexo de $\mathbb{C}T\Omega$ e de $\mathbb{C}T^*\Omega$. Em particular, podemos nos referir a noção de uma estrutura formalmente integrável *analítica* sobre Ω.

O conjunto característico

Seja $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}T\Omega$ uma estrutura formalmente integrável sobre Ω. O *conjunto característico de* $\mathcal{V}$ é o subconjunto de $T^*\Omega$ definido por

$$T^0 \doteq T' \cap T^*\Omega. \tag{1.1.8}$$

Também escreveremos $T^0_p = T'_p \cap T^*_p\Omega$. Lembrando que o *símbolo* de um campo vetorial $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ é a função

$$\sigma(L) : T^*\Omega \to \mathbb{C}, \quad \sigma(L)\xi = \xi(L_p) \ \text{ se } \xi \in T^*_p\Omega$$

então, vemos que $\xi \in T^0_p$ se, e somente se, $\sigma(L)(\xi) = 0$ para toda seção L de $\mathcal{V}$.

Seja $(U, \mathtt{x})$, $\mathtt{x} = (x_1, \ldots, x_N)$ um sistema local de coordenadas em Ω. Tome $p \in U$ e $\xi \in T_p^*\Omega$. Escrevendo $\xi = \sum_{j=1}^N \xi_j dx_{jp}$ $(\xi_j \in \mathbb{R})$ e $L = \sum_{j=1}^N a_j(\partial/\partial x_j)$ então

$$\sigma(L)(\xi) = \sum_{j=1}^N a_j \xi_j.$$

Assim, se $L_j = \sum_{k=1}^N a_{jk}(\partial/\partial x_k)$ são n seções linearmente independentes de $\mathcal{V}$ sobre U podemos descrever $T^0 \cap T^*U$ pelo sistema de equações

$$\sum_{k=1}^N a_{jk}(p)\xi_k = 0, \quad p \in U,\ \xi_k \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Algumas estruturas especiais

Seja $\mathcal{V}$ uma estrutura formalmente integrável sobre Ω. Diremos que $\mathcal{V}$ define

- uma *estrutura elíptica* se $T_p^0 = \{0\}, \quad \forall p \in \Omega$;
- uma *estrutura complexa* se $\mathcal{V}_p \oplus \overline{\mathcal{V}}_p = \mathbb{C}T_p\Omega, \quad \forall p \in \Omega$;
- uma *estrutura Cauchy-Riemann (CR)* if $\mathcal{V}_p \cap \overline{\mathcal{V}}_p = 0, \quad \forall p \in \Omega$;
- uma *estrutura essencialmente real* se $\mathcal{V}_p = \overline{\mathcal{V}}_p, \quad \forall p \in \Omega$.

Estruturas localmente integráveis

Um subfibrado vetorial complexo $\mathcal{V}$ de $\mathbb{C}T\Omega$, de posto n, define uma *estrutura localmente integrável* se, dado um ponto arbitrário $p_0 \in \Omega$, existem uma vizinhança aberta U_0 de p_0 e funções $Z_1, \ldots, Z_m \in C^\infty(U_0)$, com $m = N - n$, tais que

$$[\mathrm{d}Z_{1p}, \ldots, \mathrm{d}Z_{mp}] = \mathcal{V}_p^\perp, \quad \forall p \in U_0. \tag{1.1.9}$$

Se observarmos que a diferencial de uma função suave g é uma seção de $\mathcal{V}^\perp$ se, e somente se, $Lg = 0$ para toda seção L de $\mathcal{V}$, vemos facilmente que toda estrutura localmente integrável satisfaz a condição de Frobenius. Portanto, *toda estrutura localmente integrável define uma estrutura formalmente integrável.*

Temos:

- *A estrutura formalmente integrável $\mathcal{V}$ é localmente integrável se, e somente se, dados $p_0 \in \Omega$ e campos vetoriais $L_1, \ldots, L_n$ os quais geram $\mathcal{V}$ numa vizinhança aberta U_0 de p_0, existem uma vizinhança aberta $V_0 \subset U_0$ de p_0 e funções suaves $Z_1, \ldots, Z_m \in C^\infty(V_0)$ tais que:*

$$\begin{gathered} \mathrm{d}Z_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}Z_m \neq 0 \quad \text{em} \quad V_0; \\ L_j Z_k = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, m. \end{gathered}$$

Assim, verificar a integrabilidade local é equivalente a procurar por um número máximo de soluções não-triviais para o sistema homogêneo (em geral super-determinado) definido por conjunto fixo de seções independentes de $\mathcal{V}$.

Teorema 1.1.11 *(Teorema 9.1 do Capítulo I de* **[BCH]***) Toda estrutura essencialmente real é localmente integrável.*

Teorema 1.1.12 *(Teorema 9.2 do Capítulo I de* **[BCH]***) Toda estrutura formalmente integrável analítica é localmente integrável.*

Geradores locais

Os resultados deste parágrafo garantem a existência de coordenadas locais e geradores locais muito úteis do subfibrado T' quando a estrutura $\mathcal{V}$ é localmente integrável.

Teorema 1.1.13 *(Teorema 10.1 do Capítulo I de* **[BCH]***) Seja $\mathcal{V}$ uma estrutura localmente integrável definida em uma variedade Ω. Sejam $p \in \Omega$ e d a dimensão real de T_p^0. Então, existem um sistema de coordenadas que se anulam em p*

$$\{x_1, \ldots, x_\nu, y_1, \ldots, y_\nu, s_1, \ldots, s_d, t_1, \ldots, t_{n'}\}$$

sendo $\nu = m - d$ e $n' = n - \nu$, e funções suaves a valores reais $\phi_1, \ldots, \phi_d$ definidas numa vizinhança da origem e satisfazendo

$$\phi_k(0) = 0, \quad d\phi_k(0) = 0, \quad k = 1, \ldots, d,$$

tais que as diferenciais das funções

$$Z_j(x, y) = z_j \doteq x_j + iy_j, \quad j = 1, \ldots, \nu; \tag{1.1.10}$$

$$W_k(x, y, s, t) = s_k + i\phi_k(z, s, t), \quad k = 1, \ldots, d \tag{1.1.11}$$

geram T' numa vizinhança da origem. Em particular, temos

$$T_p^0 = [ds_1|_0, \ldots, ds_d|_0].$$

Corolário 1.1.14 *(Corolário 10.2 do Capítulo I de* **[BCH]***) Sob as mesmas hipóteses do Teorema 1.1.13, com $d = m$, existem um sistema de coordenadas que se anulam em p*

$$\{x_1, \ldots, x_m, t_1, \ldots, t_n\}$$

e funções suaves a valores reais $\phi_1, \ldots, \phi_m$ definidas numa vizinhança da origem e satisfazendo

$$\phi_k(0, 0) = 0, \quad d_x\phi_k(0, 0) = 0, \quad k = 1, \ldots, m,$$

tais que as diferenciais das funções

$$Z_k(x, t) = x_k + i\phi_k(x, t), \quad k = 1, \ldots, m$$

geram T' numa vizinhança da origem.

Se escrevermos $Z(x,t) = (Z_1(x,t),\dots,Z_m(x,t))$ então $Z_x(0,0)$ é igual a matriz identidade $m \times m$. Portanto podemos introduzir numa vizinhança da origem em $\mathbb{R}^N$ os campos vetoriais

$$M_k = \sum_{l=1}^{m} \mu_{kl}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_l}, \quad k = 1,\dots,m \tag{1.1.12}$$

caracterizados pelas relações

$$M_k Z_l = \delta_{kl}.$$

Conseqüentemente os campos vetoriais

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} - i\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \phi_k}{\partial t_j}(x,t)M_k, \quad j = 1,\dots,n \tag{1.1.13}$$

são linearmente independentes e satisfazem $L_j Z_k = 0$ para $j = 1,\dots,n$, $k = 1,\dots,m$. Assim

- $L_1,\dots,L_n$ geram $\mathcal{V}$ numa vizinhança da origem;
- $L_1,\dots,L_n,M_1,\dots,M_m$ satisfazem $[L_j,M_k] = 0$, $[L_j,L_l] = 0$, $[M_k,M_s] = 0$, para $j,l = 1,\dots,n$, $k,s = 1,\dots,m$, e geram $\mathbb{C}T\mathbb{R}^N$ numa vizinhança da origem em $\mathbb{R}^N$.

(Para maiores detalhes deste fato veja a Seção 10 do Capítulo I de **[BCH]**.)

Proposição 1.1.15 *Uma vez encontradas as funções $Z_1,\dots,Z_m$ do corolário 1.1.14 é possível construir $\tilde{Z}_1,\dots,\tilde{Z}_m$ de modo que as suas diferenciais ainda geram T' numa vizinhança da origem e $\tilde{Z}_k(x,t) = x_k + i\tilde{\phi}_k(x,t)$, $1 \le k \le m$, sendo $\tilde{\phi}_1,\dots,\tilde{\phi}_m$ suaves a valores reais tais que*

$$\tilde{\phi}_k(0,0) = 0, \quad D_x\tilde{\phi}_k(0,0) = 0, \quad D_x^2\tilde{\phi}_k(0,0) = 0,\dots, \ D_x^l\phi_k(0,0) = 0$$

para algum $l \in \mathbb{N}$, $k = 1,\dots,m$.

Demonstração: A idéia da demonstração desta proposição pode ser encontrada na demonstração da Proposição IX.2.2 em **[T1]**. Apresentaremos a prova de uma situação mais simples (que de fato é o caso que utilizaremos posteriormente). Suponha $m = 1$, isto é, temos apenas uma integral primeira $Z(x,t) = x + i\phi(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^n$, tal que $\phi(0,0) = \phi_x(0,0) = 0$. Considere

$$\tilde{Z}(x,t) = Z(x,t) - i\lambda Z(x,t)^2, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Então, $L_j\tilde{Z} = 0$, para todo $j = 1,\dots,n$ e $d\tilde{(Z)}(0,0) = 1 - i\lambda \neq 0$. Escolhendo $\lambda = \frac{\phi_{xx}(0,0)}{2}$, obtemos que $\tilde{Z}(0,0) = 0$, $\tilde{Z}_x(0,0) = 1$ e $\tilde{Z}_{xx}(0,0) = 0$. Após uma escolha adequada de coordenadas $(\tilde{x},\tilde{t})$ é possível escrever

$$\tilde{Z}(\tilde{x},\tilde{t}) = \tilde{x} + i\tilde{\phi}(\tilde{x},\tilde{t}),$$

com $\tilde{\phi}$ real, suave e satisfazendo:

$$\tilde{\phi}(0,0) = 0, \ d_x\tilde{\phi}(0,0) = 0 \text{ e } d_{xx}\tilde{\phi}(0,0) = 0.$$

■

1.2 A Fórmula de Aproximação de Baouendi-Treves

Nesta seção apresentaremos o que provavelmente é o resultado mais importante na teoria de estruturas localmente integráveis. Ele estabelece que numa vizinhança pequena de um dado ponto do domínio de uma estrutura localmente integrável $\mathcal{L}$, qualquer solução da equação $\mathcal{L}u = 0$ pode ser aproximada por polinômios num conjunto de um número finito de soluções homogêneas, tão logo estas soluções nesse conjunto sejam escolhidas com diferenciais linearmente independentes e o número delas seja igual ao co-posto de $\mathcal{L}$. Tal conjunto é chamado um conjunto completo de *integrais primeiras da estrutura localmente integrável* $\mathcal{L}$.

O Teorema de aproximação

Como a fórmula de aproximação é de uma natureza local será suficiente restringir nossa atenção a uma estrutura localmente integrável $\mathcal{L}$ definida em um subconjunto aberto Ω de $\mathbb{R}^N$ sobre o qual $\mathcal{L}^\perp$ é gerado pelas diferenciais $dZ_1, \ldots, dZ_m$ de m funções suaves $Z_j \in C^\infty(\Omega)$, $j = 1, \ldots, m$, em todo ponto de Ω. Assim, se n é o posto de $\mathcal{L}$, relembramos que $N = n + m$.

Dada uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ dizemos que u é uma *solução homogênea de* $\mathcal{L}$ e escrevemos $\mathcal{L}u = 0$ se,

$$Lu = 0 \quad \text{em} \ \ U$$

para toda seção local L de $\mathcal{L}$ definida em um subconjunto aberto $U \subset \Omega$. Exemplos simples de soluções homogêneas de $\mathcal{L}$ são as funções constantes e também as funções $Z_1, \ldots, Z_m$, já que $LZ_j = \langle dZ_j, L\rangle = 0$, pois $dZ_j \in \mathcal{L}^\perp$, $j = 1, \ldots, m$. Pela regra de Leibniz, qualquer produto de soluções homogêneas suaves ainda é uma solução homogênea. Assim, um polinômio com coeficientes constantes nas m funções Z_j, isto é, uma função da forma

$$P(Z) = \sum_{|\alpha| \le d} c_\alpha Z^\alpha, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}^m, \quad c_\alpha \in \mathbb{C}, \tag{1.2.1}$$

também é uma solução homogênea.

O teorema de aproximação estabelece que qualquer solução em distribuições u de $\mathcal{L}u = 0$ é o limite fraco de soluções polinomiais com em (1.2.1).

Teorema 1.2.1 *(Teorema 1.1 do Capítulo II de* **[BCH]***) Seja $\mathcal{L}$ uma estrutura localmente integrável em Ω e assuma que $dZ_1, \ldots, dZ_m$ geram $\mathcal{L}^\perp$ em todo ponto de Ω. Então, para qualquer $p \in \Omega$, existem dois conjuntos abertos U e W, com $p \in U \subset \overline{U} \subset W \subset \Omega$, tais que*

(i) toda $u \in \mathcal{D}'(W)$ que satisfaz $\mathcal{L}u = 0$ em W é o limite em $\mathcal{D}'(U)$ de uma seqüência de soluções polinomiais $P_j(Z_1, \ldots, Z_m)$:

$$u = \lim_{j\to\infty} P_j \circ Z \quad \text{em } \mathcal{D}'(U);$$

(ii) se $u \in C^k(W)$ a convergência vale na topologia de $C^k(U)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, \infty$.

1.3 Unicidade de soluções da equação $\mathcal{L}u = 0$, sendo $\mathcal{L}$ uma estrutura localmente integrável

Dadas uma estrutura localmente integrável $\mathcal{L}$ numa variedade Ω e uma solução u de $\mathcal{L}u = 0$ uma questão natural que surge é: que condições adicionais a solução u deve satisfazer para se possa concluir que u é identicamente nula? Este problema trata da unicidade da solução de $\mathcal{L}u = 0$.

Nesta seção serão apresentados alguns resultados que abordam esta questão. Para maiores detalhes veja a Subseção 4.2 do Capítulo 2 de **[BCH]**.

Definição 1.3.1 *Seja $\Sigma \subset \Omega$ uma subvariedade mergulhada. Diz-se que Σ é* maximamente real com respeito a $\mathcal{L}$ *se*

(i) *a dimensão de Σ é igual a m;*

(ii) *para todo $p \in \Sigma$, qualquer seção não nula L de $\mathcal{L}$ definida numa vizinhança de p é transversal a Σ em p.*

Para um campo vetorial complexo $L = X + iY$ com parte real X e parte imaginária Y, L transversal a Σ significa que ao menos um dos dois vetores X e Y é transversal a Σ.

Teorema 1.3.2 *(Teorema 4.6 do Capítulo 2 de* **[BCH]***) Seja $\mathcal{L}$ uma estrutura localmente integrável na variedade Ω e seja $\Sigma \subset \Omega$ uma subvariedade mergulhada maximamente real com respeito a $\mathcal{L}$. Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ satisfaz*

(i) $\mathcal{L}u = 0$ em Ω;

(ii) $u|_\Sigma = 0$;

então u é identicamente nula numa vizinhança V de Σ.

Corolário 1.3.3 *(Corolário 4.7 do Capítulo 2 de* **[BCH]***) Seja $\mathcal{L}$ uma estrutura localmente integrável numa variedade Ω e seja $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ satisfazendo $\mathcal{L}u = 0$ em Ω. Seja L uma seção local de $\mathcal{L}$ e considere $X = ReL$. Assuma que γ é uma curva integral de X unindo os pontos p e $q \in \Omega$. Então, $p \in supp(u) \implies q \in supp(u)$.*

Seja Ω uma variedade e considere a coleção $D = \{X\}$ de campos vetoriais X reais, suaves e localmente definidos. Na próxima seção, (Seção 1.4), a noção de órbita de D é definida.

Suponha agora que $\mathcal{L}$ é uma estrutura localmente integrável e considere a coleção $D_{\mathcal{L}} = \{\mathrm{Re}L\}$ de todos campos vetoriais que são partes reais de seções locais de $\mathcal{L}$. Neste caso as órbitas de $D_{\mathcal{L}}$ são simplesmente chamadas de órbitas de $\mathcal{L}$. Na linguagem de órbitas o Corolário 1.3.3 diz que se uma órbita de $\mathcal{L}$ intercepta o suporte K de uma solução u da equação $\mathcal{L}u = 0$ então ela deve estar inteiramente contida em K. Isto é equivalente a dizer que K é uma união de órbitas de $\mathcal{L}$.

Definição 1.3.4 *Seja $\mathcal{V}$ uma estrutura localmente integrável na variedade Ω. Dizemos que $\mathcal{V}$ tem a propriedade da Unicidade no Problema de Cauchy para hipersuperfícies não-características se, vale o seguinte: para toda hipersuperfície Σ, para todo ponto*

$p \in \Sigma$ tal que Σ é não-característica em p e para toda solução u de $\mathcal{V}u = 0$ definida numa vizinhança U de p,

$$u|_{U\cap\Sigma} = 0 \Longrightarrow u \text{ se anula numa vizinhança de } p.$$

COROLÁRIO 1.3.5 *(Corolário 4.9 do Capítulo 2 de* **[BCH]***) A propriedade da Unicidade no Problema de Cauchy para hipersuperfícies não-características vale para toda estrutura localmente integrável.*

1.4 Órbitas de Sussmann

Seja $\mathcal{M}$ uma variedade paracompacta suave. Seja D um conjunto de campos vetoriais reais e suaves, localmente definidos. Isto é, cada X em D está definido em algum subconjunto aberto de $\mathcal{M}$ e é suave neste conjunto. Assuma que a união dos domínios dos elementos de D é igual a $\mathcal{M}$. Definimos uma relação de equivalência em $\mathcal{M}$ como segue: dois pontos p e q estão relacionados se, existe uma curva $\gamma : [0, T] \to \mathcal{M}$ tal que

(1) $\gamma(0) = p, \quad \gamma(T) = q$;

(2) existem $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ e campos vetoriais $X_i \in D(i = 1, \ldots, n)$ tais que para cada i a restrição $\gamma : [t_{i-1}, t_i] \to \mathcal{M}$é uma curva integral de X_i ou X_{-i}.

As classes de equivalência desta relação serão chamadas de *órbitas* de D. Em **[Su]** Sussmann mostrou que estas órbitas podem ser equipadas com uma topologia e uma estrutura diferencial natural as quais as tornam subvariedades imersas de $\mathcal{M}$. Não descreveremos aqui nem a topologia nem a estrutura diferencial citadas acima. Como referência citamos o Capítulo 3 de **[BCH]**, **[Su]** e **[BER]**.

1.5 A transformada de Fourier-Bros-Iagolnitzer (FBI)

Certas subvariedades de estruturas hipo-analíticas

Neste parágrafo apresentaremos algumas subvariedades de estruturas hipo-analíticas que aparecerão quando falarmos de distribuições microlocalmente hipo-analítica. Primeiro recordaremos o conceito de uma estrutura linear complexa num espaço vetorial real e o aplicaremos ao fibrado tangente real de subvariedades reais em $\mathbb{C}^N$.

Seja Ω uma variedade suave de dimensão N. Um subconjunto $\mathcal{M}$ de Ω é chamado uma *subvariedade mergulhada* (ou apenas *subvariedade* para simplificar) *de* Ω se existir $r \in \{0, 1, \ldots, N\}$ para o qual vale

- Dado $p_0 \in \mathcal{M}$ arbitrário existe uma carta local $(U_0, \mathtt{x})$, com $p_0 \in U_0$ e $\mathtt{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, tal que

$$U_0 \cap \mathcal{M} = \{q \in U_0 : x_{r+1}(q) = x_{r+1}(p_0), \ldots, x_N(q) = x_N(p_0)\}.$$

Quando p_0 varia sobre $\mathcal{M}$ os pares (U_0, x_0), onde

$$\mathrm{x}_0 = (x_1|_{U_0 \cap \mathcal{M}}, \ldots, x_r|_{U_0 \cap \mathcal{M}}),$$

formam uma família $\mathcal{F}^*$ que satisfaz as propriedades de ser estrutura diferencial. Portanto, $\mathcal{M}$ é uma variedade suave de dimensão r. Iremos nos referir ao número $N - r$ como a *codimensão de* $\mathcal{M}$ *(em* Ω*)*.

DEFINIÇÃO 1.5.1 *Seja* $\mathcal{M}$ *uma subvariedade de* $\mathbb{C}^\nu$ *de codimensão* d*. Diremos que* $\mathcal{M}$ *é* genérica *se dado* $p_0 \in \mathcal{M}$ *existem uma vizinhança aberta* U_0 *de* p_0 *em* $\mathbb{C}^\nu$ *e funções a valores reais* $\rho_1, \ldots, \rho_d \in C^\infty(U_0)$ *(*$\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_d)$ *é uma função definição local) tais que*

$$\mathcal{M} \cap U_0 = \{z \in U_0 : \rho_k(z) = 0, k = 1, \ldots, d\},$$

e $\overline{\partial}\rho_1, \ldots, \overline{\partial}\rho_d$ *são linearmente independentes em cada ponto de* $\mathcal{M} \cap U_0$*.*

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e suponha que $J : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ é uma aplicação linear tal que $J^2 = -\mathrm{Id}$ (onde Id é a identidade). J é um isomorfismo e $\dim\mathbb{V}$ é par, pois $(\det J)^2 = \det(-\mathrm{Id}) = (-1)^{\dim\mathbb{V}}$. A aplicação J é chamada uma *estrutura complexa* em $\mathbb{V}$.

Escreva as coordenadas complexas de $\mathbb{C}^N$ como $z_1, \ldots, z_N$ onde $z_j = x_j + iy_j$. Identificaremos $\mathbb{C}^N$ com $\mathbb{R}^{2N}$ pela aplicação

$$(z_1, \ldots, z_N) \mapsto (x_1, y_1, \ldots, x_N, y_N).$$

Multiplicando por i em $\mathbb{C}^N$ induzimos uma aplicação $J : \mathbb{R}^{2N} \to \mathbb{R}^{2N}$ dada por

$$J(x_1, y_1, \ldots, x_N, y_N) = (-y_1, x_1, \ldots, -y_N, x_N).$$

Note que $J^2 = -\mathrm{Id}$ e assim J é uma estrutura complexa em $\mathbb{R}^{2N}$, chamada a estrutura complexa padrão em $\mathbb{R}^{2N}$.

Com esta notação, para $p \in \mathbb{C}^N$, uma base do espaço tangente real $T_p\mathbb{C}^N$ é dada por

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_N}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial y_N}\Big|_p.$$

Esta base pode ser utilizada para identificar $T_p\mathbb{C}^N$ com $\mathbb{R}^{2N}$ pela escolha da base usual

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_{2N} = (0, \ldots, 0, 1) \quad \text{de } \mathbb{R}^{2N}.$$

Isto leva a uma estrutura complexa $J : T_p\mathbb{C}^N \to T_p\mathbb{C}^N$ dada por

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p\right) = \frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_p \text{ e } J\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\Big|_p\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p.$$

Esta última estrutura complexa é independente da escolha das coordenadas holomorfas $(z_1, \ldots, z_N)$. Para detalhes deste fato veja a Seção 1 do Capítulo V de **[BCH]**.

Note que J se estende a uma aplicação $\mathbb{C}$-linear de $\mathbb{C}T_p\mathbb{C}^N$ sobre si mesmo e a extensão ainda satisfaz $J^2 = -\mathrm{Id}$. Denotaremos esta extensão também por J. O fato que $J^2 = -\mathrm{Id}$ implica que $J : \mathbb{C}T_p\mathbb{C}^N \to \mathbb{C}T_p\mathbb{C}^N$ tem apenas dois autovalores: i e $-i$. Defina $T_p^{1,0}$ = o autoespaço associado com i, e $T_p^{0,1}$ = o autoespaço associado com $-i$. Obtemos fibrados vetoriais correspondentes $T^{1,0}$ e $T^{0,1}$. Observe que $T^{1,0}$ é gerado por $\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_N}$ e $T^{0,1}$ é gerado por $\frac{\partial}{\partial \overline{z}_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_N}$.

Definição 1.5.2 *Seja $\mathcal{M}$ uma subvariedade de $\mathbb{C}^N$, para $p \in \mathcal{M}$, defina*

$$\mathcal{V}_p(\mathcal{M}) = \mathbb{C}T_p\mathcal{M} \cap T_p^{0,1}\mathbb{C}^N.$$

Definição 1.5.3 *Seja $\mathcal{M}$ uma subvariedade de $\mathbb{C}^N$ e $p \in \mathcal{M}$. O* espaço tangente complexo *de $\mathcal{M}$ em p, denotado por $T_p^c\mathcal{M}$, é definido por*

$$T_p^c\mathcal{M} = T_p\mathcal{M} \cap J(T_p\mathcal{M}).$$

Logo, $T_p^c\mathcal{M} = \{v \in T_p\mathcal{M} : J(v) \in T_p\mathcal{M}\}$. Observe que $J : T_p^c\mathcal{M} \to T_p^c\mathcal{M}$ e assim T_p^c está equipado com uma estrutura de espaço vetorial complexa. Também é evidente que $J : \mathbb{C}T_p^c\mathcal{M} \to \mathbb{C}T_p^c\mathcal{M}$.

Os espaços $T_p^c\mathcal{M}$ e $\mathcal{V}_p(\mathcal{M})$ estão relacionados. Para ver isto, temos o seguinte resultado, onde $Re\mathcal{V}_p(\mathcal{M})$ denota a parte real das seções de $\mathcal{V}_p(\mathcal{M})$:

Proposição 1.5.4 *(Proposição 1.6 do Capítulo V de* **[BCH]***) Para $p \in \mathcal{M}$,*
(a) $Re\mathcal{V}_p(\mathcal{M}) = T_p^c\mathcal{M}$;
(b) $\mathbb{C}T_p^c\mathcal{M} = \mathcal{V}_p(\mathcal{M}) \oplus \overline{\mathcal{V}_p(\mathcal{M})}$;
(c) $\mathcal{V}_p(\mathcal{M}) = \{x + iJ(x) : x \in T_p^c\mathcal{M}\}$.

Outra referência para este resultado é a Proposição 1.2.8 de **[BER]**.
Segue de (a) e (b) que

$$\dim T_p^c\mathcal{M} = 2\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{V}_p(\mathcal{M}). \tag{1.5.1}$$

Definição 1.5.5 *Uma subvariedade $\mathcal{M}$ de $\mathbb{C}^N$ é chamada* CR *(Cauchy-Riemann) se $dim_{\mathbb{C}}\mathcal{V}_p(\mathcal{M})$ é constante para $p \in \mathcal{M}$. Para uma subvariedade CR, $dim_{\mathbb{C}}\mathcal{V}_p(\mathcal{M})$ será chamada a* dimensão CR *de $\mathcal{M}$.*

Definição 1.5.6 *Uma subvariedade CR de $\mathbb{C}^N$ é chamada* totalmente real *se sua dimensão CR for zero.*

Lema 1.5.7 *(Lema 1.11 do Capítulo V de* **[BCH]***) Suponha que $\mathcal{M}$ é uma subvariedade de $\mathbb{C}^N$ de codimensão real d. Então,*

$$2N - 2d \leq dim T_p^c\mathcal{M} \leq 2N - d.$$

Se $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{C}^N$ tem codimensão d, como $2\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{V}_p(\mathcal{M}) = \dim T_p^c\mathcal{M}$, o Lema 1.5.7 dá que o valor mínimo possível de $\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{V}_p(\mathcal{M})$ é $N - d$. Este valor mínimo é precisamente atingido quando as formas $\{\overline{\partial}\rho_1(p), \ldots, \overline{\partial}\rho_d(p)\}$ são linearmente independentes. As subvariedades CR para as quais $\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{V}_p(\mathcal{M})$ tem tal valor mínimo são as tais genéricas definidas no início desta seção. É conveniente apresentar aqui uma definição equivalente.

Definição 1.5.8 *Uma subvariedade CR, $\mathcal{M}$, de $\mathbb{C}^N$ de codimensão d é chamada* genérica *se, para $p \in \mathcal{M}$, $dim_{\mathbb{C}}\mathcal{V}_p(\mathcal{M}) = N - d$.*

Proposição 1.5.9 *(Proposição 1.3.6 em* **[BER]***) Seja $\mathcal{M}$ uma subvariedade genérica de codimensão d em $\mathbb{C}^N$ perto de p_0, e seja $n = N - d =$ dimensão CR de $\mathcal{M}$. Então existem coordenadas holomorfas (z, w) perto de p_0, que se anulam em p_0, com $z \in \mathbb{C}^n$, $w - s + it \in \mathbb{C}^d$, e uma função suave a valores reais $\phi(z, \overline{z}, s)$ definida perto de 0 em $\mathbb{R}^{2n+d}$ com valores em $\mathbb{R}^d$, $\phi(0) = 0$, $d\phi(0) = 0$, tais que perto de p_0, $\mathcal{M}$ é dada por*

$$Im\ w = \phi(z, \overline{z}, Re\ w). \tag{1.5.2}$$

Descreveremos agora certas subvariedade em estruturas hipo-analíticas que desenvolvem um papel importante na análise de soluções.

Definição 1.5.10 *Seja Ω uma variedade suave de dimensão N. Uma* estrutura hipo-analítica *em Ω é uma coleção de pares $\mathcal{A}(U_l, Z_l)$, sendo U_l um subconjunto aberto de Ω e $Z_l = (Z_l^1, \ldots, Z_l^m) : U_l \to \mathbb{C}^m$ uma aplicação suave onde $1 \leq m \leq N$ é independente de l, tais que as seguintes condições são satisfeitas:*

(H)$_1$ *$\{U_l\}$ é uma cobertura aberta de Ω;*

(H)$_2$ *$dZ_l^1, \ldots, dZ_l^m$ são $\mathbb{C}$-linearmente independentes em cada ponto de U_l;*

(H)$_3$ *se $l \neq l'$ e se $p \in U_l \cap U_{l'}$ existe um biholomorfismo $F_{l',p}^l$ de uma vizinhança aberta de $Z_l(p)$ em $\mathbb{C}^m$ sobre uma de $Z_{l'}(p)$ tal que $Z_{l'} = F_{l',p}^l \circ Z_l$ numa vizinhança de p em $U_l \cap U_{l'}$.*

Assim, se Ω está equipado com uma estrutura hipo-analítica como a definida acima, nos referiremos à Ω como uma *variedade hipo-analítica.*

Um exemplo de variedade hipo-analítica é uma subvariedade CR genérica $\mathcal{M}$ de $\mathbb{C}^m$.

Definição 1.5.11 *Sejam Ω uma variedade hipo-analítica, p_0 um ponto arbitrário de Ω e f uma função complexa definida alguma vizinhança de p_0. Dizemos que f é* hipo-analítica *no ponto p_0 se para algum (ou, equivalentemente, para todo) índice l tal que $p_0 \in U_l$, existe uma função holomorfa $\tilde{f}_l$ definida numa vizinhança aberta de $Z_l(p_0)$ em $\mathbb{C}^m$ tal que $f = \tilde{f}_l \circ Z_l$ numa vizinhança de p_0.*

No caso de uma subvariedade CR genérica $\mathcal{M}$ de $\mathbb{C}^m$, as funções hipo-analíticas são as restrições à $\mathcal{M}$ das funções holomorfas definidas numa vizinhança de $\mathcal{M}$. Para maiores detalhes sobre estruturas hipo-analíticas e exemplos veja **[BCT]** e **[T1]**.

Seja $(\mathcal{M}, \mathcal{V})$ uma estrutura hipo-analítica, isto é, $\mathcal{M}$ é uma variedade suave de dimensão N e $\mathcal{V}$ é uma estrutura hipo-analítica em $\mathcal{M}$ com dimensão de fibra n cujo fibrado ortogonal T' em $\mathbb{C}T^*\mathcal{M}$ é localmente gerado pelas diferenciais de $m = N - n$ funções suaves (m é o mesmo da Definição 1.5.10). Lembre que $T^0 = \cup_{p \in \mathcal{M}} T_p^0$ denota o conjunto característico da estrutura $(\mathcal{M}, \mathcal{V})$.

Definição 1.5.12 *Uma subvariedade $\mathcal{Y}$ de $\mathcal{M}$ é chamada* não-característica *se*

$$T_p\mathcal{M} = T_p\mathcal{Y} + Re(\mathcal{V}_p) \quad \forall p \in \mathcal{Y}.$$

DEFINIÇÃO 1.5.13 *Uma subvariedade* $\mathcal{N}$ *de* $\mathcal{M}$ *é chamada* fortemente não-característica *se*

$$\mathbb{C}T_p\mathcal{M} = \mathbb{C}T_p\mathcal{N} + \mathcal{V}_p \quad \forall p \in \mathcal{N}.$$

DEFINIÇÃO 1.5.14 *Uma subvariedade* $\mathcal{X}$ *de* $\mathcal{M}$ *é chamada* maximamente real *se*

$$\mathbb{C}T_p\mathcal{M} = \mathbb{C}T_p\mathcal{X} \oplus \mathcal{V}_p \quad \forall p \in \mathcal{X}.$$

Note que, uma subvariedade maximamente real é fortemente não-característica. Se $\mathcal{N}$ é fortemente não-característica, então $\dim\mathcal{N} \geq m$, enquanto se $\mathcal{X}$ é maximamente real, $\dim\mathcal{X} = m$. Uma subvariedade fortemente não-característica é uma subvariedade não-característica.

As proposições que seguem aparecem em muitos textos como as definições das subvariedade que definimos acima.

PROPOSIÇÃO 1.5.15 *Uma subvariedade* $\mathcal{Y}$ *de* $\mathcal{M}$ *é não-característica em* p *se, e somente se, a aplicação natural* $T^*\mathcal{M}|_{\mathcal{Y}} \longrightarrow T^*\mathcal{Y}$ *aplica* T^0_p *injetivamente em* $T^*_p\mathcal{Y}$.

PROPOSIÇÃO 1.5.16 *Uma subvariedade* $\mathcal{N}$ *de* $\mathcal{M}$ *é fortemente não-característica se, e somente se, a aplicação natural* $\mathbb{C}T^*\mathcal{M}|_{\mathcal{N}} \longrightarrow \mathbb{C}T^*\mathcal{N}$ *aplica* $T'|_{\mathcal{N}}$ *injetivamente em* $\mathbb{C}T^*\mathcal{N}$.

PROPOSIÇÃO 1.5.17 *Uma subvariedade* $\mathcal{X}$ *de* $\mathcal{M}$ *é maximamente real se, e somente se, a aplicação natural* $\mathbb{C}T^*\mathcal{M}|_{\mathcal{X}} \longrightarrow \mathbb{C}T^*\mathcal{X}$ *induz uma bijeção de* $T'|_{\mathcal{X}}$ *sobre* $\mathbb{C}T^*\mathcal{X}$.

Suavidade microlocal

Introduziremos agora o conceito do conjunto frente de onda C^∞ o qual é um modo refinado de descrever as singularidades de distribuições. Sabe-se que uma distribuição u de suporte compacto é C^∞ se, e somente se, sua transformada de Fourier $\hat{u}(\xi)$ decai rapidamente como $|\xi| \to \infty$. Mais precisamente

TEOREMA 1.5.18 *(Paley-Wiener) Uma distribuição* u *com suporte compacto na bola* $\{x \in \mathbb{R}^m : |x| \leq R\}$ *é* C^∞ *se, e somente se,* $\hat{u}(\xi)$ *é inteira em* $\mathbb{C}^m$ *e para cada inteiro positivo* k *existe uma constante* C_k *tal que*

$$|\hat{u}(\zeta)| \leq C_k \frac{e^{R|Im\zeta|}}{(1+|\zeta|)^k} \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}^m.$$

DEFINIÇÃO 1.5.19 *Sejam* $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ *aberto,* $x_0 \in \Omega$ *e* $\xi^0 \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. *Dizemos que* u *é* microlocalmente suave *em* (x_0, ξ^0) *se, existem* $\phi \in C^\infty_c(\Omega)$, $\phi \equiv 1$ *perto de* x_0 *e uma vizinhança cônica* $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ *contendo* ξ^0 *tais que para todo* $k = 1, 2, \ldots,$

$$|\widehat{\phi u}(\xi)| \leq \frac{C_k}{(1+|\xi|)^k}, \quad \xi \in \Gamma.$$

DEFINIÇÃO 1.5.20 *O* conjunto frente de onda C^∞ *de uma distribuição* u, *denotado por* $WF(u)$, *é definido por*

$$WF(u) = \{(x,\xi) : \ u \text{ não é microlocalmente suave em } (x,\xi)\}.$$

Note que uma distribuição u é C^∞ se, e somente se, $WF(u) = \emptyset$.

Analiticidade microlocal e a transformada de FBI

O Teorema de Paley-Wiener caracteriza a suavidade de uma distribuição u em termos do decaimento rápido de sua transformada de Fourier $\hat{u}(\xi)$. Esta caracterização é muito útil no estudo da regularidade local e microlocal de soluções de equações diferenciais parciais com coeficientes constantes. Também existe uma caracterização de analiticidade em termos da transformada de Fourier [H3]. Entretanto, esta última é baseada em estimativas usando uma seqüência de funções corte tornando seu uso mais difícil em aplicações. A transformada de FBI é uma transformada de Fourier não-linear a qual caracteriza analiticidade (veja Teorema 1.5.24).

Definição 1.5.21 *Seja $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$. A* transformada de FBI *de u é definida por*

$$F_u(x,\xi) = \int e^{i(x-y)\cdot\xi - |\xi||x-y|^2} u(y)dy \tag{1.5.3}$$

para $(x,\xi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, onde

$$(x-y)\cdot\xi = \sum_{j=1}^{m} (x_j - y_j)\xi_j.$$

A integral acima deve ser vista no sentido da dualidade.

Teorema 1.5.22 (Fórmula de inversão com a transformada de FBI) *(Teorema 2.2 do Capítulo V de* **[BCH]***) Seja $u \in C_c(\mathbb{R}^m)$. então*

$$u(x) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{(4\pi^3)^{\frac{m}{2}}} \int\int F_u(t,\xi) e^{i(x-t)\cdot\xi - \epsilon|\xi|^2} |\xi|^{\frac{m}{2}} dt d\xi$$

sendo a convergência uniforme.

Observação 1.5.23 *Se $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$ o teorema também vale sendo a convergência no sentido das distribuições.*

A seguinte caracterização de analiticidade por meio do decaimento exponencial da transformada de FBI pode ser visto como análogo ao Teorema de Paley-Wiener.

Teorema 1.5.24 *(Teorema 2.4 do Capítulo V de* **[BCH]***) Seja $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$. São equivalentes:*

(i) u é analítica real em $x_0 \in \mathbb{R}^m$.

(ii) Existem uma vizinhança V de x_0 em $\mathbb{R}^m$ e constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que $|F_u(x,\xi)| \leq c_1 e^{-c_2|\xi|}$ para $(x,\xi) \in V \times \mathbb{R}^m$.

Sejam $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ um cone convexo aberto com vértice na origem e $V \subseteq \mathbb{R}^m$ um conjunto aberto. Para $\delta > 0$, seja Γ_δ o cone truncado

$$\Gamma_\delta = \Gamma \cap \{v \in \mathbb{R}^m : |v| < \delta\}.$$

Se Γ' é um outro cone, escrevemos

$$\Gamma' \subset\subset \Gamma \text{ se } \overline{\Gamma'} \cap S^{m-1} \subset \Gamma \cap S^{m-1}$$

onde S^{m-1} denota a esfera unitária em $\mathbb{R}^m$. O conjunto $V \times \Gamma_\delta \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ é usualmente chamado uma *cunha com aresta* V, e identificada com $V + i\Gamma_\delta$. Consideraremos agora os valores de fronteira de funções holomorfas definidas em cunhas com arestas contidas em $\mathbb{R}^m$. Seja $\mathcal{O}(V + i\Gamma_\delta)$ o conjunto das funções holomorfas definidas na cunha $V + i\Gamma_\delta$ com aresta V.

Definição 1.5.25 *Uma função holomorfa $f \in \mathcal{O}(V + i\Gamma_\delta)$ é dita ser de* crescimento temperado *se existem um inteiro k e uma constante c tais que*

$$|f(x + iy)| \leq \frac{c}{|y|^k}.$$

Para $f \in \mathcal{O}(V + i\Gamma_\delta)$, $\varphi \in C_c^\infty(V)$, e $v \in \Gamma$ seja

$$\langle f_v, \varphi \rangle = \int f(x + iv)\varphi(x)dx.$$

Teorema 1.5.26 *(Teorema 2.6 do Capítulo V de* **[BCH]***) Suponha que $f \in \mathcal{O}(V + i\Gamma_\delta)$ seja de crescimento temperado, $\Gamma' \subset\subset \Gamma$ e que k seja como na definição acima. Então*

$$bf = \lim_{v \to 0, v \in \Gamma'} f_v$$

existe em $\mathcal{D}'(V)$ e é de ordem $k + 1$.

Teorema 1.5.27 *(Teorema 2.9 do Capítulo V de* **[BCH]***) Qualquer $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^m)$ pode ser expressa como uma soma finita $\sum bf_j$ onde cada $f_j \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^m + i{\Gamma'}_j)$ para alguns cones $\Gamma'_j \subseteq \mathbb{R}^m$, e as f_j são de crescimento temperado.*

Definição 1.5.28 *Sejam $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$, $x_o \in \mathbb{R}^m$, $\xi^0 \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Dizemos que u é* microlocalmente analítica *em (x_0, ξ_0) se existem uma vizinhança V de x_0, cones $\Gamma^1, \ldots, \Gamma^N$ em $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ e funções holomorfas $f_j \in \mathcal{O}(V + i\Gamma^j_\delta)$ (para algum $\delta > 0$) de crescimento temperado tais que $u = \sum_{j=1}^N bf_j$ perto de x_0 e $\xi^0 \cdot \Gamma^j < 0$ para todo j.*

Observação 1.5.29 *Quando $m = 1$, se tomarmos $x_0 = 0$ e $\xi^0 = -1$, então u será microlocalmente analítica em $(0, -1)$ se existir uma função holomorfa temperada f em algum retângulo $(-a, a) \times (0, b)$ tal que $u = bf$ em $(-a, a)$.*

Definição 1.5.30 *O* conjunto frente de onda analítico *de uma distribuição u, denotado por $WF_a(u)$, é definido por*

$$WF_a(u) = \{(x, \xi) : u \text{ não é microlocalmente analítica em } (x, \xi)\}.$$

Note que o conjunto frente de onda analítico é invariante sob difeomorfismos analíticos e portanto analiticidade microlocal pode ser definida em qualquer variedade analítica-real. O próximo teorema dá um critério muito útil para análise da analiticidade microlocal em termos da transformada de FBI.

Teorema 1.5.31 *Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$, $x_0 \in \mathbb{R}^m$, $\xi^0 \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Então $(x_0, \xi^0) \notin WF_a(u)$ se, e somente se, existem uma vizinhança V de x_0 em $\mathbb{R}^m$, um cone aberto $\Gamma \subset \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, $\xi^0 \in \Gamma$ e constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que*

$$|F_u(x,\xi)| \leq c_1 e^{-c_2|\xi|} \quad \forall (x,\xi) \in V \times \Gamma.$$

Referência para demonstração desde teorema é [Sj].

Corolário 1.5.32 *Uma distribuição u é analítica real perto de x_0 se, e somente se, para todo $\xi^0 \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, $(x_0, \xi^0) \notin WF_a(u)$.*

O Corolário abaixo relaciona o conjunto frente de onda analítico e o conjunto frente de onda C^∞ de uma distribuição. Este corolário é uma conseqüência do Teorema 1.5.31, porém sua prova não é direta, ela exige a análise da fórmula de inversão para a transformada de FBI e o uso da Definição 1.5.20.

Corolário 1.5.33 *Seja $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$. Se $(x_0, \xi^0) \in WF(u)$, então $(x_0, \xi^0) \in WF_a(u)$.*

O teorema a seguir caracteriza suavidade microlocal em termos do comportamento de transformada de FBI. Apresentaremos a demonstração deste resultado por termos um comportamento bem específico da transformada de FBI que se encaixa no resultado que aparecerá no Capítulo 2 deste texto, mais precisamente na Demonstração do Teorema 2.2.1.

Teorema 1.5.34 *Sejam $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ e $\xi^0 \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Se existirem uma vizinhança cônica $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$ contendo ξ^0 e $\phi \in C_c^\infty(B(0,R))$ para algum $R > 0$, onde $B(0,R) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x| < R\}$, com $\phi(x) = 1$ se $|x| < R/2$ tais que, para todo $k = 1, 2, \ldots$*

$$|F_{\phi u}(s,\xi)| \leq \frac{C_k}{|\xi|^k}, \quad \xi \in \Gamma, \ s \in B(0,\delta) \text{ para algum } 0 < \delta < \frac{R}{2} \tag{1.5.4}$$

onde $C_k > 0$ é uma constante, então $(0, \xi^0) \notin WF(u)$.

Demonstração: A demonstração será baseada na exploração da fórmula de inversão para a transformada de FBI, isto é,

$$\phi(x)u(x) = \lim_{\epsilon \to 0} c_m \int\int e^{i(x-s)\cdot\xi - \epsilon|\xi|^2} F_{\phi u}(s,\xi)|\xi|^{\frac{m}{2}} ds d\xi, \tag{1.5.5}$$

onde c_m é uma constante dimensional. Estudaremos a integral (1.5.5) escrevendo-a como uma soma de quatro partes: $I_1^\epsilon(x)$, $I_2^\epsilon(x)$, $I_3^\epsilon(x)$ e $I_4^\epsilon(x)$. A primeira parte consiste numa integral sobre a região $\{(s,\xi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m : |s| \geq 4R\}$. Na segunda parte integraremos sobre $\{(s,\xi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m : \delta \leq |s| < 4R, |\xi| < M\}$, para algum $M > 0$, na terceira parte sobre $\{(s,\xi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m : \delta \leq |s| < 4R, |\xi| \geq M\}$. E por fim na quarta parte integraremos sobre a região $\{(s,\xi) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m : |s| \leq \delta\}$.

Parte 1. Estudaremos a integral

$$I_1^\epsilon(x) = c_m \int_{\mathbb{R}^m} \int_{|s|\geq 4R} e^{i(x-s)\cdot\xi - \epsilon|\xi|^2} F_{\phi u}(s,\xi)|\xi|^{\frac{m}{2}} ds d\xi$$

Como $|s| \geq 4R$ e $|y| \leq R$ temos que

$$\begin{aligned} |F_{\phi u}(s,\xi)| &\leq ce^{-|\xi|(|s|-R)^2} \\ &\leq ce^{-|\xi|(\frac{|s|^2}{2}+R^2)}. \end{aligned}$$

Usando isto vemos que, após integrar em s, o integrando de I_1^ϵ é uniformemente limitado por uma constante múltipla de $e^{-R^2|\xi|}$. Se complexificarmos x para $z = x' + iy'$ no integrando de I_1^ϵ, vemos que o integrando é limitado por uma constante múltipla de $e^{(-R^2+|y'|)|\xi|}$, que possui um majorante integrável para $|y'| \leq \frac{R^2}{2}$. Portanto quando $\epsilon \to 0$, a função inteira $I_1^\epsilon(z)$ converge uniformemente numa vizinhança de 0 para uma função holomorfa.

Parte 2. A função $I_2^\epsilon(x)$ se estende como uma função inteira de z e converge uniformemente em subconjuntos compactos para uma função inteira como $\epsilon \to 0$.

Parte 3. Escreveremos a terceira parte como

$$I_3^\epsilon(x) = c_m \int_{|\xi|\geq M} \int_{\delta\leq|s|<4R} \int_{|y|\leq R} e^{i(x-y)\cdot\xi - |\xi||s-y|^2 - \epsilon|\xi|^2} \phi(y)u(y)|\xi|^{\frac{m}{2}} dy ds d\xi.$$

Usaremos a função holomorfa $\langle\zeta\rangle = (\zeta_1^2 + \cdots + \zeta_m^2)^{\frac{1}{2}}$ onde tomamos o ramo principal da raiz quadrada na região $|Im\zeta| < |Re\zeta|$. Observe que esta função é uma extensão analítica de $|\xi|$ fora da origem. Mudaremos o contorno na integração em ξ de $\mathbb{R}^m$ para a sua imagem pela aplicação $\zeta(\xi) = \xi + i\beta(x-y)|\xi|$ para β pequeno, $\beta > 0$. O número β é escolhido suficientemente pequeno para garantir que para $\xi \neq 0$, $|Im\zeta(\xi)| < |Re\zeta(\xi)|$. Então temos, módulo funções inteiras que convergem uniformemente para uma função inteira,

$$I_3^\epsilon(x) = \int\int\int e^{P(x,y,s,\xi,\epsilon)} \langle\zeta(\xi)\rangle^{\frac{m}{2}} \phi(y)u(y) du ds d\zeta$$

onde

$$P(x,y,s,\xi,\epsilon) = i(x-y)\cdot\xi - \beta|x-y|^2|\xi| - \langle\zeta(\xi)\rangle|s-y|^2 - \epsilon\langle\zeta(\xi)\rangle^2.$$

Note que para β pequeno, $Re(\langle\zeta(\xi)\rangle^2) \geq \frac{|\xi|^2}{2}$ e $Re\langle\zeta(\xi)\rangle \geq \frac{|\xi|}{2}$. Portanto o termo exponencial pode ser limitado como segue:

$$|e^{P(x,y,s,\xi,\epsilon)}| \leq e^{-\beta|x-y|^2|\xi| - \frac{|s-y|^2}{2}|\xi| - \frac{\epsilon}{2}|\xi|^2}.$$

Se $|x| \leq \frac{\delta}{4}$, como $\delta \leq |s| < 4R$, existe uma constante $c > 0$ de modo que

$$|e^{P(x,y,s,\xi,\epsilon)}| \leq e^{-c|\xi|} \quad \text{para todo } \xi.$$

Isto nos permite complexificar x para z e variar z perto de 0 para concluir que $I_3^\epsilon(z)$ converge uniformemente para uma função holomorfa perto de 0.

Parte 4. Finalmente para quarta parte escreva

$$I_4^\epsilon(x) = c_m \int_{\mathbb{R}^m} \int_{|s| \leq \delta} e^{i(x-s)\cdot\xi - \epsilon|\xi|^2} F_\phi u(s,\xi)|\xi|^{\frac{m}{2}} ds d\xi.$$

Sejam $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ cones convexos tais que com $\Gamma_0 = \Gamma$

$$\mathbb{R}^m = \bigcup_{j=0}^{k} \Gamma_j,$$

e para cada $j = 1, \ldots, k$ existe um vetor v_j satisfazendo $v_j \cdot \overline{\Gamma_j} > 0$ e $v_j \cdot \xi^0 < 0$. Escreva

$$I_4^\epsilon(x) = \sum_{j=0}^{k} K_j^\epsilon(x),$$

onde K_j^ϵ é igual a integral sobre Γ_j. O decaimento da transformada de FBI suposto em (1.5.4) nos mostra que K_0^ϵ é uma função suave mesmo após escolher $\epsilon = 0$. Cada uma das funções restantes K_j^ϵ após escolher $\epsilon = 0$ é o valor de fronteira de uma função holomorfa temperada numa cunha cujo produto interno com ξ^0 é negativo. De fato,

$$\begin{aligned}
K_j^\epsilon(x) &= c_m \int_{\Gamma_j} \int_{\mathbb{R}^m} e^{i(x-y)\cdot\xi - \epsilon|\xi|^2} \phi(y)u(y) \left(\int_{|s|\leq\delta} e^{-|\xi||s-y|^2} |\xi|^{\frac{m}{2}} ds \right) dy d\xi \\
&= c_m \int_{\Gamma_j} e^{ix\cdot\xi - \epsilon|\xi|^2} \left(\int_{\mathbb{R}^m} e^{-iy\cdot\xi} b(y,\xi)\phi(y)u(y)dy \right) d\xi \\
&= c_m \int_{\Gamma_j} e^{ix\cdot\xi} U(\xi) e^{-\epsilon|\xi|^2} d\xi,
\end{aligned}$$

com $b(y,\xi) \in L^\infty$ e $U(\xi) \in L^\infty$. Note que

$$f_j(x' + iy') = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\Gamma_j} e^{i(x'+iy')\cdot\xi} U(\xi) d\xi$$

é holomorfa em $\mathbb{R}^m + i\Gamma_j$, tem crescimento temperado em $\mathbb{R}^m + i\Gamma_j'$, onde $\Gamma_j' \subset\subset \Gamma_j$ tal que existe $c > 0$ de modo que $y \cdot \xi \geq c|y||\xi|$ $\forall y \in \Gamma_j'$, $\forall \xi \in \Gamma_j$, e $bf_j = K_j^0$.

Portanto, pela Definição 1.5.30, $(0,\xi^0) \notin WF_a(K_j^0)$. O que implica que $(0,\xi^0) \notin WF(K_j^0)$. Assim provamos que $(0,\xi^0) \notin WF(u)$. ∎

Hipo-analiticidade microlocal e a transformada de FBI

Neste parágrafo discutiremos brevemente a noção de conjunto frente de onda hipo-analítico. Esta noção é uma generalização do conceito de analiticidade microlocal discutida no parágrafo anterior. Para obter mais detalhes veja **[BCT]** e/ou a Seção 4 do Capítulo V de **[BCH]**.

Começamos introduzindo o conceito de uma cunha em $\mathbb{C}^N$ cuja aresta é uma variedade CR genérica.

Seja $\mathcal{M}$ uma variedade CR genérica em $\mathbb{C}^N$ de codimensão d. Então dim$\mathcal{M} = 2n+d$, $m = n+d = N$ e o fibrado $T' = T'\mathcal{M}$ é gerado pelas diferenciais das restrições à $\mathcal{M}$ das N coordenadas complexas em $\mathbb{C}^N$. Fixe $p \in \mathcal{M}$ e seja $h = (h_1, \ldots, h_d)$ a função definição de $\mathcal{M}$ numa vizinhança U de p em $\mathbb{C}^N$.

Definição 1.5.35 *Para um cone Γ convexo e aberto com vértice em $0 \in \mathbb{R}^d$ o conjunto*

$$\mathcal{W}(U, h, \Gamma) = \{z \in U : h(z) \in \Gamma\}$$

é chamado uma cunha com aresta $\mathcal{M}$. *A cunha é dita estar centrada em p e apontar na direção de Γ.*

Observe que $\mathcal{W}(U, h, \Gamma)$ é um conjunto aberto em $\mathbb{C}^N$ cuja fronteira contém $\mathcal{M} \cap U$. Quando $\mathcal{M}$ é uma hipersuperfície $\Gamma = (0, \infty)$ ou $\Gamma(-\infty, 0)$ e, neste caso, a cunha com aresta $\mathcal{M}$ é simplesmente um lado de $\mathcal{M}$. Apesar da definição de cunha envolver a função definição de $\mathcal{M}$ a Proposição 7.1.2 de **[BER]** mostra que a definição é, num certo sentido, independente da escolha da função definição.

Proposição 1.5.36 *(Proposição 7.1.2 em* **[BER]***) Assuma que $h = (h_1, \ldots, h_d)$ e $g = (g_1, \ldots, g_d)$ são duas funções definição para $\mathcal{M}$ perto de p. Então existe uma matriz B invertível real $d \times d$ tal que para todo U e Γ como acima o seguinte vale: Para qualquer cone convexo aberto $\Gamma_1 \subseteq \mathbb{R}^d$ com $B\Gamma_1 \cap S^{d-1}$ relativamente compacto em $\Gamma \cap S^{d-1}$ (S^{d-1} denota a esfera unitária em $\mathbb{R}^d$), existe uma vizinhança U_1 de p em $\mathbb{C}^N$ tal que*

$$\mathcal{W}(U_1, g, \Gamma_1) \subseteq \mathcal{W}(U, h, \Gamma).$$

Definição 1.5.37 *Uma função holomorfa f definida em uma cunha $\mathcal{W} = \mathcal{W}(U, h, \Gamma)$ é dita ser de* crescimento temperado *se existem uma constante $c > 0$ e um inteiro k tais que*

$$|f(z)| \leq \frac{c}{|h(z)|^k} \quad \forall z \in \mathcal{W}. \tag{1.5.6}$$

Se dist$(z, \mathcal{M})$ denota a distância de um ponto z à variedade $\mathcal{M}$ então (1.5.6) é equivalente a

$$|f(z)| \leq \frac{c'}{\text{dist}(z, \mathcal{M})^k}, \quad \forall z \in \mathcal{W},$$

onde $c' > 0$ é uma constante. Queremos mostrar que uma função holomorfa de crescimento temperado em $\mathcal{W}$ tem uma distribuição valor de fronteira na aresta $\mathcal{M}$.

Pela Proposição 1.5.9 temos que para a variedade genérica $\mathcal{M}$ podemos encontrar coordenadas complexas $(z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_d)$ que se anulam em $p \in \mathcal{M}$, $z = x + iy \in \mathbb{C}^n$, $w = s + it \in \mathbb{C}^d$, e funções suaves a valores reais $\phi_1, \dots, \phi_d$ definidas perto de $(0,0)$ no espaço (z, w) com $\phi_k(0) = 0$, $d\phi_k(0) = 0$, $1 \leq k \leq d$ tais que perto de 0, $\mathcal{M}$ é dada por

$$\rho_k(z, w) = \phi_k(z, s) - t_k = 0, \quad 1 \leq k \leq d.$$

Isto é, perto de 0, $\mathcal{M} = \{(z, s + i\phi(z, s))\}$. Pela Proposição 1.5.36, existem $\epsilon > 0$ e um cone convexo aberto $\Gamma' \subseteq \mathbb{R}^d$ tais que se

$$\mathcal{W}' = \{(z, s + i\phi(z, s) + iv) : |z| \leq \epsilon, |s| \leq \epsilon, v \in \Gamma'\}$$

então $\mathcal{W}' \subseteq \mathcal{W}(U, h, \Gamma)$. Observe também que uma função holomorfa $f(z, w)$ em $\mathcal{W}'$ é temperada se, e somente se, ela satisfaz uma estimativa da forma

$$|f(z, s + i\phi(z, s) + iv)| \leq \frac{c}{|v|^k}$$

para $v \in \Gamma'$ pequeno e $(z, s) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^d$ perto de $(0, 0)$. Funções holomorfas de crescimento temperado numa cunha tem um valor de fronteira distribucional na aresta desta cunha. Como estabelece o seguinte resultado:

Teorema 1.5.38 *(Teorema 4.4 do Capítulo V de* **[BCH]***) Seja $f(z, w)$ uma função holomorfa de crescimento temperado numa cunha $\mathcal{W}'$ como acima. Então existe uma distribuição CR, $u = bf$ definida numa vizinhança de 0 em $\mathcal{M}$ por*

$$\langle u, \psi \rangle = \lim_{\Gamma \ni v \to 0} \int_{\mathbb{R}^{2n+d}} f(z, s + i\phi(z, s) + iv)\psi(x, y, s)dxdyds$$

para qualquer função suave ψ com suporte compacto suficientemente pequeno perto da origem em $\mathbb{R}^{2n+d}$.

Observação: u é CR no sentido que é o limite distribucional das funções CR: $\mathcal{M} \ni (z, s) \longmapsto f(z, s + i\phi(z, s) + iv)$, como se vê na demonstração deste teorema que pode ser encontrada na referência acima ou também em **[BER]** Teorema 7.2.6.

Suponha agora que X é uma estrutura hipo-analítica de codimensão zero (ou seja, dimensão de fibra zero). Por exemplo, se tomarmos X como uma subvariedade maximamente real em uma estrutura hipo-analítica. O fibrado da estrutura de X é todo o fibrado cotangente complexo $\mathbb{C}T^*X$ e como $\mathcal{V}$ é vazio qualquer distribuição é uma solução. Fixe $p \in X$ e seja $Z = (Z_1, \dots, Z_m)$ uma carta hipo-analítica perto de p. Numa vizinhança V de p em X, a aplicação $Z : V \longrightarrow \mathbb{C}^m$ é um difeomorfismo sobre $Z(V)$. $Z(V)$ é uma subvariedade genérica de $\mathbb{C}^m$ a qual é totalmente real de dimensão maximal. No que segue identificaremos V com $Z(V)$.

Definição 1.5.39 *Uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(X)$ é* microlocalmente hipo-analítica *em $\sigma \in T^*_pX \setminus \{0\}$ se existem cones convexos abertos $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_k$ em T_pX satisfazendo $\sigma(v) < 0$ para todo $v \in \mathcal{C}_j$, $(1 \leq j \leq k)$ e cunhas $\mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_k$ em $\mathbb{C}^m$ com aresta*

$Z(V)$ centradas em p e apontando nas direções de $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ respectivamente, tais que $J\mathcal{C}_j \subseteq \Gamma_j$ e para cada j, existe uma função holomorfa de crescimento temperado u_j em $\mathcal{W}_j$ tal que $u = \sum_{j=1}^{k} bu_j$ em V.

Definição 1.5.40 *O* conjunto frente de onda hipo-analítico *de u, denotado por $WF_{ha}(u)$ é definido por*

$$WF_{ha}(u) = \{\sigma \in T^*X \setminus \{0\} : u \text{ não é microlocalmente hipo-analítica em } \sigma\}.$$

O conjunto frente de onda para soluções em estruturas de codimensão positiva é definida pela restrição a uma subvariedade maximamente real. Para a definição precisa veja **[BCT]** e/ou a Seção 4 do Capítulo V de **[BCH]**.

Vejamos agora a transformada de FBI (com parâmetro κ) de **[BCT]** a qual dá um critério de transformada de Fourier muito útil para hipo-analiticidade microlocal. Seja X uma estrutura hipo-analítica de codimensão zero como acima. Se $p \in X$, pelos resultados da Seção 1.1 (veja por exemplo Corolário 1.1.14), podemos escolher coordenadas locais $x_1, \ldots, x_m$ para X que se anulam em p de maneira que localmente, X se torna uma vizinhança U de 0 em $\mathbb{R}^m$ e podemos assumir que uma carta hipo-analítica tem a forma

$$Z_j = x_j + i\phi_j(x), \quad 1 \leq j \leq m,$$

$\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m)$ a valores reais. Para $\kappa > 0$ e $u \in \mathcal{E}'(U)$, defina

$$F^\kappa(u, z, \zeta) = \int_U e^{i\zeta\cdot(z-Z(y)) - \kappa\langle\zeta\rangle[z-Z(y)]^2} u(y)dZ(y)$$

onde $z \in \mathbb{C}^m$, $[w]^2 = w_1^2 + \cdots + w_m^2$, e para qualquer $\zeta \in \mathbb{C}^m$ com $|Im\zeta| < |Re\zeta|$, $\langle\zeta\rangle = (\zeta_1^2 + \cdots + \zeta_m^2)^{\frac{1}{2}}$ (o ramo principal da raiz quadrada).

Definição 1.5.41 *$F^\kappa(u, z, \zeta)$ é chamada a* transformada de FBI de u (com parâmetro κ).

Em **[BCT]** os autores caracterizam hipo-analiticidade microlocal em termos de um decaimento exponencial da transformada de FBI (com parâmetro κ). Em particular, quando $\phi(0) = 0$ e $d\phi(0) = 0$, eles provaram que:

Teorema 1.5.42 *Existe uma constante universal $M > 0$ tal que se*

$$\kappa > M \sup_{x \in U, |\alpha| = 2} |\partial^\alpha \phi(x)|,$$

o seguinte vale: para $\xi^0 \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, $u \in \mathcal{E}'(U)$, V uma vizinhança de 0 em $\mathbb{C}^m$, $\Gamma \subseteq \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$ um cone complexo contendo ξ^0, se

$$|F^\kappa(u, z, \zeta)| \leq c_1 e^{-c_2|\zeta|}, \quad \forall z \in V, \quad \forall \zeta \in \Gamma$$

e para algumas constantes $c_1, c_2 > 0$, então $(0, \xi^0) \notin WF_{ha}(u)$.

1.6 Nota sobre a função maximal não-tangencial

Teorema da aplicação de Riemann

O teorema abaixo é conhecido com Teorema da aplicação de Riemann.

Teorema 1.6.1 *(Teorema 14.8 de* **[R2]***) Dados uma região simplesmente conexa Ω no plano, a qual não é o plano todo, existe uma aplicação conforme bijetiva de Ω sobre o disco unitário aberto Δ.*

Temos uma versão deste teorema que dá informações sobre os pontos de fronteira. Para enunciar este resultado precisamos da seguinte definição:

Definição 1.6.2 *Um ponto de fronteira β de uma região simplesmente conexa Ω do plano será chamado um ponto simples de fronteira de Ω se β tiver a seguinte propriedade: para toda seqüência $\{\alpha_n\}$ em Ω tal que $\alpha_n \to \beta$ quando $n \to \infty$ correspondem uma curva contínua γ, com intervalo parâmetro $[0,1]$, e uma seqüência $\{t_n\}$, $0 < t_1 < t_2 < \cdots$, $t_n \to 1$, tal que $\gamma(t_n) = \alpha_n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) e $\gamma(t) \in \Omega$ para $0 \leq t < 1$.*

Teorema 1.6.3 *(Teorema 14.19 de* **[R2]***) Se Ω é uma região simplesmente conexa limitada do plano e se todo ponto de fronteira de Ω é simples, então toda aplicação conforme bijetiva de Ω sobre Δ se estende a um homeomorfismo de $\overline{\Omega}$ sobre $\overline{\Delta}$.*

Para mais detalhes deste teorema e sobre aplicações conformes veja a seção denominada Aplicações Conformes do Capítulo 14 de **[R2]**.

Teorema 1.6.4 *Seja Ω uma região simplesmente conexa do plano limitada por uma curva de Jordan de classe C^∞. Então toda aplicação conforme bijetiva de Ω sobre Δ se estende a um difeomorfismo de $\overline{\Omega}$ sobre $\overline{\Delta}$.*

Demonstração: Todo ponto da fronteira de Ω é simples e o teorema anterior mostra que uma aplicação conforme bijetiva f se estende a um homeomorfismo. Usando a regularidade de $\partial\Omega$, as derivadas de f de qualquer ordem, $f^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, se estendem continuamente até a fronteira (**[P]**, Teorema 3.6). O argumento que permite a extensão das derivadas pode ser aplicado à inversa de f para concluir que f é um difeomorfismo. ∎

Um resultado sobre comportamento na fronteira

Seja Σ uma curva suave no plano complexo $\mathbb{C}$, que separa o disco aberto $\Delta(p,r)$, de centro $p \in \Sigma$ e raio $r > 0$, em duas regiões conexas $\Delta^+(p,r)$ e $\Delta^-(p,r)$. Seja $F(z)$ uma função holomorfa definida em $\Delta^+(p,r)$ sobre a qual faremos a seguinte hipótese:

- $F(z)$ tem um valor de fronteira (no sentido fraco) definido em $\Gamma = \Sigma \cap \Delta(p,r)$, que denotaremos por bF, e este valor de fronteira (ou valor de bordo) é uma função integrável, ou seja, $bF \in L^1(\Gamma)$.

Consideremos em cada ponto $q \in \Gamma$ um cone C_q com vértice em q e abertura $0 < \alpha < \pi/2$ em torno do eixo que é normal a Γ a aponta na direção de $\Delta^+(p,r)$. Isto determina regiões de aproximação não-tangencial $\tilde{C}_q = C_q \cap \Delta^+(p,r)$ para pontos $q \in \Gamma$, o que permite considerar a função maximal não-tangencial

$$F^*(q) = \sup_{z \in \tilde{C}_q} |F(z)|, \qquad q \in \Gamma.$$

Proposição 1.6.5 *Nas condições anteriores, existe um sub-arco $\gamma \subset \Gamma$, $p \in \gamma$, tal que as seguintes propriedades são verdadeiras:*

(a) $F^* \in L^1(\gamma)$;

(b) *se verifica o limite não-tangencial*
$$\lim_{\tilde{C}_q \ni z \to q} F(z) = bF(q), \qquad \textit{para quase todo } q \in \gamma;$$

(c) *Se G é holomorfa em $\Delta^+(p,r)$ e $G' = F$, então G admite uma extensão contínua a $\Delta^+(p,r) \cup \gamma$.*

Demonstração: Graças a uma aplicação preliminar do Teorema da aplicação de Riemann podemos supor que Σ é um segmento do eixo real, que $p = 0$ e que o domínio de F contém o retângulo $Q^+ = [-A, A] \times (0, T]$, de maneira que $F(x + iy)$ tem um valor de bordo $bF(x)$ que é uma função integrável, ou seja, satisfaz $\int_{-A}^{A} |bF(x)| dx < \infty$. Seja $0 < \epsilon < \min(T/2, A/2)$ pequeno e consideremos um intervalo $[-A', A'] \subset (-A+\epsilon, A-\epsilon)$ e a função maximal não-tangencial truncada

$$F^*(x) = \sup_{2|x-x'|<y<\epsilon} |F(x' + iy)|, \quad -A' < x < A',$$

e a função maximal truncada de Hardy-Littlewood

$$M_\epsilon(bF)(x) = \sup_{0<r<\epsilon} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} |bF(x')| dx', \quad -A' < x < A'.$$

Lema 1.6.6 *Existe $C > 0$ tal que*

$$(1) \quad F^*(x) \leq 2M_\epsilon(bF)(x) + C, \qquad -A' < x < A';$$
$$(2) \quad \int_{-A'}^{A'} |F(x + iy)| dx \leq C, \quad 0 < y < T.$$

Prova do Lema 1.6.6. Seja

$$P_t(x) = \frac{1}{\pi} \frac{t}{t^2 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \ t > 0,$$

o núcleo de Poisson do semiplano superior e consideremos a convolução $\tilde{F}(x, y) = P_y * (\chi bF)(x)$, onde $\chi(x)$ é a função característica do intervalo $(-A, A)$. Então $\tilde{F}(x, y)$

é harmônica no semiplano $y > 0$ e tem valor de fronteira $b\tilde{F}(x) = \tilde{F}(x, +0) = (\chi bF)(x)$. Escrevamos

$$|b\tilde{F}|^{\perp}(x) = \sup_{t>0} P_t * |b\tilde{F}|(x), \quad \tilde{F}^*(x) = \sup_{2|x-x'|<y} |\tilde{F}(x', y)|.$$

Da estimativa elementar

$$\frac{t}{t^2 + (x - x')^2} \leq \frac{2t}{t^2 + (x_0 - x')^2}, \quad 2|x_0 - x| < t < \infty, \ x_0 \in \mathbb{R},$$

vem

$$\tilde{F}^*(x_0) \leq 2|b\tilde{F}|^{\perp}(x_0), \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

Além disso, devido a propriedades bem conhecidas do núcleo de Poisson,

$$(1') \quad |b\tilde{F}|^{\perp}(x) \leq \sup_{0<r<\infty} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} \chi(x')|bF(x')|dx', \quad x \in \mathbb{R},$$

$$(2') \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{F}(x, y)|dx \leq C, \quad 0 < y < \infty.$$

Para $-A' < x < A'$, (1') implica

$$\tilde{F}^*(x) \leq 2 \sup_{0<r<\epsilon} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} |bF(x')|dx' + \frac{\|\chi bF\|_{L^1}}{2\epsilon}, \quad -A' < x < A',$$

e portanto

$$(3) \quad \sup_{2|x-x'|<y<\epsilon} |\tilde{F}(x', y)| \leq 2M_\epsilon(bF)(x) + C, \quad -A' < x < A'.$$

Por outro lado, $F_2(x, y) = \tilde{F}(x, y) - F(x, y)$ é harmônica em $(-A, A) \times (0, T)$ com valor de bordo nulo (em particular, contínuo) no lado inferior do retângulo, o que permite estender continuamente $F_2(x, y)$ até essa parte da fronteira. Concluímos que $|F_2(x, y)|$ é limitada no retângulo $[-A', A'] \times [0, T]$, o que, junto com as estimativas (2') e (3) demonstra (1) e (2) para $C > 0$ conveniente. $\square$

Sabemos que $M_\epsilon(bF)(x) < \infty$ q.t.p. em $(-A', A')$, já que $bF \in L^1$, trocando A' por um valor menor arbitrariamente próximo, podemos então supor, invocando (1), que $F^*(-A') < \infty$ e $F^*(A') < \infty$. Assim, retirando de $[-A, A] \times [0, T]$ as duas pequenas quinas inferiores

$$\begin{aligned} R_- &= \{(x, y) : -A \leq x < -A', \ 0 < y < 2|x + A'|\} \\ R_+ &= \{(x, y) : A' < x \leq A, \ 0 < y < 2|x - A'|\} \end{aligned}$$

obtemos um domínio poligonal D com fronteira Lipschitz (em particular retificável). Temos que F é limitada em $D \cap ((-A, -A') \times (0, T) \cup (A', A) \times (0, T))$ e então, valendo-nos de (2), é fácil construir uma seqüência de curvas C_j fechadas poligonais que aproximam ∂D e satisfazem

$$\sup_j \int_{C_j} |F(z)||dz| < \infty.$$

Isto significa (**[Du]**, Seção 10.1, pg.168) que $F \in E^1(D)$. Seja ϕ uma aplicação conforme do disco unitário Δ sobre D. Pelo Teorema 1.6.4 temos que ϕ se estende a um homeomorfismo (que continuamos denotando por ϕ) de $\overline{\Delta}$ sobre $\overline{D}$ que aplica homeomorficamente $\partial\Delta$ sobre ∂D preservando conjuntos de medida zero. Eliminando um conjunto finito de pontos - aqueles $z \in \partial\Delta$ cuja imagem $\phi(z)$ são vértices de poligonal ∂D - ϕ é conforme nos pontos da fronteira, em particular, uma região de aproximação não-tangencial com vértice em z é levada por ϕ numa região de aproximação não-tangencial com vértice em $\phi(z)$. Por outro lado, segue que (Corolário do Teorema 10.1 de **[Du]**) $\hat{F} = (F \circ \phi)\phi' \in H^1(\Delta)$. Pela teoria clássica de espaços de Hardy no disco, $\hat{F}^* \in L^1(\partial\Delta)$, o limite não-tangencial de $\hat{F}$ para $b\hat{F}$ ocorre q.t.p. (Teorema 17.11 **[R2]**) e qualquer primitiva $\hat{G}$ de $\hat{F}$ em Δ admite extensão contínua a $\Delta \cup \partial\Delta$ (Teorema 3.11 **[Du]**). Como o segmento $I = (-A', A') \times \{0\}$ é uma porção suave de D, temos que para qualquer intervalo fechado $J \subset\subset I$, a aplicação ϕ^{-1} é um difeomorfismo conforme de $D \cup J$ sobre $\Delta \cup \phi^{-1}(J)$. Basta agora transferir para F, por meio de ϕ, as propriedades de bordo de $\hat{F}$ em $\phi^{-1}(J)$ para obter (a), (b) e (c) com $\gamma = J$. ■

1.7 Lema de Friedrich

A versão do Lema de Friedrich que segue não é a mais geral, porém é a versão que precisaremos no Capítulo 2.

Lema 1.7.1 *(Lema 5.2.2 de* **[H4]***) Sejam $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\int \varphi(x)dx = 1$, $v \in L^2(\mathbb{R}^N)$ com suporte compacto e $a(x)$ uma função C^1 numa vizinhança do suporte de v. Seja*

$$(J_\epsilon v)(x) = \int v(x - \epsilon y)\varphi(y)dy.$$

Então $aD_kJ_\epsilon v - J_\epsilon(aD_kv) \to 0$ em L^2 quando $\epsilon \to 0$. Aqui aD_k é definido no sentido da teoria das distribuições, sendo $D_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$.

Capítulo 2

Um Teorema de F. e M. Riesz para um sistema de campos vetoriais de co-posto um

Este capítulo está organizado como segue. A seção 2.1 trata da existência do traço de uma solução contínua de um sistema de campos vetoriais complexos, suaves e localmente integráveis de co-posto um. A seção 2.2 descreve a localização do conjunto frente de onda do traço de uma solução utilizando um método baseado na análise da transformada de FBI. Na seção 2.3 é estabelecido o resultado principal (Teorema 2.3.1). E para finalizar apresentamos na seção 2.4 algumas considerações finais.

2.1 Existência do traço

Definição 2.1.1 *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade suave de dimensão N. Seja E uma subvariedade de $\mathcal{M}$, $dim\mathcal{M} = r + s$, $dimE = r$. Dizemos que um conjunto $\mathcal{W}$ é uma cunha em $\mathcal{M}$ no ponto $p \in E$ com aresta E se vale:*

Existe um difeomorfismo φ de uma vizinhança V de 0 em $\mathbb{R}^{r+s}$ numa vizinhança U de p em $\mathcal{M}$ com $\varphi(0) = p$ e um conjunto $B \times \Gamma \subset V$ com B sendo uma bola centrada na origem de $\mathbb{R}^r$ e Γ um cone convexo, aberto e truncado em $\mathbb{R}^s$ com vértice na origem, tal que $\varphi(B \times \Gamma) = \mathcal{W}$ e $\varphi(B \times \{0\}) = E \cap U$.

Considere $\mathcal{W}$ uma cunha em $\mathbb{R}^{n+1}$ com aresta de dimensão 1. Nas coordenadas apropriadas podemos escrever

$$\mathcal{W} = (-A, A) \times \Gamma_T,$$

onde $(-A, A)$ é um intervalo da reta e Γ_T é um cone truncado de $\mathbb{R}^n$, isto é, $\Gamma_T = \Gamma \cap \{t \in \mathbb{R}^n : |t| \leq T\}$, sendo Γ um cone de $\mathbb{R}^n$ e $T > 0$ um número real. Além disso, o cone truncado Γ_T pode ser identificado com o conjunto $(0, T)\Gamma^0 = \{\tau t' : \tau \in (0, T), t' \in \Gamma^0\}$, sendo $\Gamma^0 = \Gamma \cap S^{n-1}$ (S^{n-1} é a esfera unitária de $\mathbb{R}^n$).

Seja $\mathcal{V}$ uma estrutura localmente integrável de posto n definida numa vizinhança aberta U do fecho de $(-A, A) \times \Gamma_T$ sobre a qual $\mathcal{V}^\perp$ é gerado pela diferencial dZ da função suave $Z \in C^\infty(U)$, com $Z(0,0)=0$. Sem perda de generalidade podemos supor que $d(ReZ) \neq 0$, caso não seja basta trocarmos Z por iZ. Considere o novo sistema de coordenadas definido por $\tilde{x} = ReZ(x, t_1, \ldots, t_n)$ e $\tilde{t_j} = t_j$, para $j = 1, \ldots, n$. Nestas coordenadas note que o eixo-x se transforma no eixo $\tilde{x} = (ReZ(x, 0, \ldots, 0), 0, \ldots, 0)$ e $Z(\tilde{x}, \tilde{t}) = \tilde{x} + i\varphi(\tilde{x}, \tilde{t})$, sendo φ uma função suave a valores reais definida numa vizinhança da origem satisfazendo $\varphi(0,0) = 0$ e $d_{\tilde{x}}\varphi(0,0) = 0$. Manteremos a notação das coordenadas como sendo (x,t). Desta forma os campos vetoriais

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} - \frac{i\varphi_{t_j}(x,t)}{1 + i\varphi_x(x,t)}\frac{\partial}{\partial x} \qquad j = 1, \ldots, n$$

geram $\mathcal{V}$ numa vizinhança da origem. Diminuindo T, nas novas coordenadas a nova cunha conterá uma cunha que pode ser escrita como $(-A, A) \times \Gamma_T$.

O próximo teorema dá, em particular, uma condição suficiente para a existência do traço de uma função contínua f, quando f é uma solução homogênea de uma estrutura localmente integrável. Este teorema generaliza o Teorema 1.1 do artigo **[BH3]**, que enunciamos na introdução deste texto (veja Teorema 1 da Introdução).

Teorema 2.1.2 *Seja $\mathcal{V}$ uma estrutura localmente integrável como acima, gerada pelos campos vetoriais $L_1, \ldots, L_n$, e seja $f \in C((-A,A) \times \Gamma_T)$. Suponha que*
(i) $L_j f \in L^\infty((-A,A) \times \Gamma_T)$, $\quad j = 1, \ldots, n$;
(ii) existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{t' \in \Gamma^0} \int_0^T \int_{-A}^{A} |f(x, \tau t')||\varphi(x, \tau t') - \varphi(x, 0)|^N dx d\tau < \infty, \tag{2.1.1}$$

(como acima $\Gamma_T \simeq (0,T)\Gamma^0$). Então $\lim_{t \to 0} f(x,t) = bf$ existe em $\mathcal{D}'(-A,A)$ e é uma distribuição de ordem $N+1$.

Demonstração: A demonstração deste teorema será dividida em três passos. No primeiro passo f será considerada de classe C^1 e a existência do limite será provada numa direção $\dot{t} \in \Gamma_T$ fixa. O segundo passo tem por finalidade passar para o caso em que f é apenas contínua. E finalmente no terceiro passo prova-se que o limite existe e portanto independe da direção escolhida para calculá-lo.

Passo 1: Seja $\dot{t} \in \Gamma^0$ fixo. Para $\tau \in (0,T)$ temos que $\tau\dot{t} \in \Gamma_T$. Iremos nos restringir ao conjunto de pontos $Y_{(\dot{t})} = \{(x, \tau\dot{t}) : x \in (-A,A),\ \tau \in (0,T)\}$. Escrevendo $t = \tau\dot{t}$, temos

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial t_1}{\partial \tau}\frac{\partial}{\partial t_1} + \cdots + \frac{\partial t_n}{\partial \tau}\frac{\partial}{\partial t_n} = \dot{t_1}\frac{\partial}{\partial t_1} + \cdots + \dot{t_n}\frac{\partial}{\partial t_n} = \dot{t} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial t_n}\right).$$

Sejam $f_{(\dot{t})}(x,\tau) = f(x, \tau\dot{t}) = f|_{Y_{(\dot{t})}}$ e $L_{(\dot{t})} = \dot{t} \cdot (L_1, \cdots, L_n)\,|_{Y_{(\dot{t})}} = \frac{\partial}{\partial \tau} + b^{(\dot{t})}(x,\tau)\frac{\partial}{\partial x}$, onde $b^{(\dot{t})}(x,\tau) = \dot{t} \cdot \left(b_1(x,\tau\dot{t}), \cdots, b_n(x,\tau\dot{t})\right)$, como $b_j(x,t) = -\frac{i\varphi_{t_j}(x,t)}{1 + i\varphi_x(x,t)}$ então

$$b^{(\dot{t})}(x,\tau) = -\frac{i\partial_\tau(\varphi_{(\dot{t})})(x,\tau)}{1 + i\partial_x(\varphi_{(\dot{t})})(x,\tau)},$$

onde $\varphi_{(\dot{t})}(x,\tau) = \varphi(x,\tau\dot{t})$, $\partial_\tau(\varphi_{(\dot{t})}) = \frac{\partial\varphi_{(\dot{t})}}{\partial\tau}(x,\tau)$ e $\partial_x(\varphi_{(\dot{t})}) = \frac{\partial\varphi_{(\dot{t})}}{\partial x}(x,\tau)$. Com esta notação $\varphi_{(\dot{t})}(x,0) = \varphi(x,0.\dot{t}) = \varphi(x,0)$.

Seja $\Psi \in C_c^\infty(-A,A)$. Fixe $0 < T' < T$. Para cada inteiro $m \geq 0$ e para cada $\dot{t} \in \Gamma^0$ será mostrado que existe $\Psi_m(x,\tau) \in C^\infty\left((-A,A)\times[0,T']\right)$ tal que

(i) $\Psi_m(x,0) = \Psi(x)$ e

(ii) $|L_{(\dot{t})}\Psi_m(x,\tau)| \leq C\left|\varphi_{(\dot{t})}(x,\tau) - \varphi_{(\dot{t})}(x,0)\right|^m$,

onde C depende apenas do tamanho de $D^j\Psi(x)$ para $j \leq m+1$.

Observação: Apesar de $\Psi_m(x,\tau)$ depender de $\dot{t}$ esta dependência será omitida para não sobrecarregar a notação. Como $\dot{t}$ é um ponto fixo isto não causará ambigüidade. Já o inteiro m será escolhido de forma conveniente.

Para obter $\Psi_m(x,\tau)$ com estas propriedades seja $\Sigma = \{x + i\varphi(x,0)\} = \{x + i\varphi_{(\dot{t})}(x,0)\}$ e escolha uma função suave $u_m = u_m(x,y)$ definida perto de $(0,0)\in\Sigma$ e satisfazendo:

(a) $u_m(x,\varphi_{(\dot{t})}(x,0)) = \Psi(x)$, e

(b) $\left|\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)u_m(x,y)\right| \leq dist((x,y),\Sigma)^m$.

Escolhendo

$$V = \frac{i}{Z_x(x,0)}\frac{\partial}{\partial x},$$

(note que $Z_x(x,0) = \frac{\partial Z_{(\dot{t})}}{\partial x}(x,0)$) uma função u_m como acima pode ser tomada como sendo

$$u_m(x,y) = \sum_{k=0}^{m}\frac{V^k\Psi(x)}{k!}\left(y - \varphi_{(\dot{t})}(x,0)\right)^k.$$

Logo (a) vale. Para verificar a validade de (b) note que

$$\left(\frac{\partial u_m}{\partial x} + i\frac{\partial u_m}{\partial y}\right)(x,y) = \frac{1}{m!}\left(\frac{\partial}{\partial x}V^m\Psi(x)\right)\left(y - \varphi_{(\dot{t})}(x,0)\right)^m. \tag{2.1.2}$$

De fato, por definição

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u_m}{\partial x} + i\frac{\partial u_m}{\partial y}\right)(x,y) \quad = \quad & \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x}V^k\Psi(x)\right)(y - \varphi_{(\dot{t})}(x,0))^k \\ & + \sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{k!}\left(V^{k+1}\Psi(x)\right)(y - \varphi_{(\dot{t})}(x,0))^k[i - \partial_x(\varphi_{(\dot{t})})(x,0)].\end{aligned}$$

A fim de verificar a validade da equação (2.1.2) é preciso provar que

$$\sum_{k=0}^{m-1}\left\{\frac{1}{k!}(y - \varphi_{(\dot{t})}(x,0))^k\left[\frac{\partial}{\partial x}V^k\Psi(x) + (V^{k+1}\Psi(x))\left(i - \partial_x(\varphi_{(\dot{t})})(x,0)\right)\right]\right\} = 0$$

e para tal é suficiente provar que, para todo $k = 0,\ldots,m-1$ vale:

$$\frac{\partial}{\partial x}V^k\Psi(x) = V^{k+1}\Psi(x)[\partial_x(\varphi_{(\dot{t})})(x,0) - i], \tag{2.1.3}$$

qualquer que seja a função $\Psi \in C_c^\infty(-A, A)$. Esta prova será feita por indução em k. É fácil ver que para $k = 0$ (2.1.3) é verdadeira. Suponhamos que seja válida para $k-1$ e provemos para k :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} V^k\Psi(x) = \frac{\partial}{\partial x} V^{k-1}(V\Psi(x)) &= V^k(V\Psi(x))\left(\partial_x(\varphi_{(\dot{t})})(x,0) - i\right)\\ &= V^{k+1}\Psi(x)\left(\partial_x(\varphi_{(\dot{t})})(x,0) - i\right),\end{aligned}$$

na segunda igualdade acima foi usada a hipótese de indução. Assim segue que a expressão (2.1.3) é verdadeira e portanto (2.1.2) também. Para concluir a prova da validade do item (b) basta usar o seguinte resultado:
"Existem constantes positivas C_1 e C_2, tais que

$$C_1 dist((x,y),\Sigma) \le |y - \varphi_{(\dot{t})}(x,0)| \le C_2 dist((x,y),\Sigma)."$$

(isto vale pelo fato de Σ ser gráfico de uma função). Portanto, $u_m(x,y)$, definida acima, satisfaz (a) e (b). Agora escolha

$$\Psi_m(x,\tau) = u_m(x, \varphi_{(\dot{t})}(x,\tau)) = u_m(x, \varphi(x, \tau\dot{t}))$$

(observe aqui a dependência de Ψ_m em $\dot{t} \in \Gamma_0$). Então, $\Psi_m(x,0) = \Psi(x)$ e vale:

$$L_{(\dot{t})}\Psi_m(x,\tau) = \frac{-i\partial_\tau(\varphi_{(\dot{t})})(x,\tau)}{1 + i\partial_x(\varphi_{(\dot{t})})(x,\tau)}\left(\frac{\partial u_m}{\partial x} + i\frac{\partial u_m}{\partial y}\right)(x, \varphi_{(\dot{t})}(x,\tau)). \tag{2.1.4}$$

Para provar a expressão acima novamente será usada a indução, agora em m. É fácil ver que a expressão vale quando $m = 0$. Suponhamos que valha para $m = k$ e provemos para $m = k+1$.

$$\begin{aligned}L_{(\dot{t})}\left(\Psi_{k+1}(x,\tau)\right) &= L_{(\dot{t})}\left(\Psi_k(x,\tau) + \frac{V^{k+1}\Psi(x)}{(k+1)!}\left(\varphi_{(\dot{t})}(x,\tau) - \varphi_{(\dot{t})}(x,0)\right)^{k+1}\right)\\
&= -\frac{i\partial_\tau(\varphi_{(\dot{t})})(x,\tau)}{1 + i\partial_x(\varphi_{(\dot{t})})(x,\tau)}\frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x}V^k\Psi(x)\right)\left(\varphi_{(\dot{t})}(x,\tau) - \varphi_{(\dot{t})}(x,0)\right)^k\\
&\quad + \frac{V^{k+1}\Psi(x)}{(k+1)!}(k+1)(\varphi_{(\dot{t})}(x,\tau) - \varphi_{(\dot{t})}(x,0))^k\partial_\tau(\varphi_{(\dot{t})})(x,\tau)\\
&\quad - \frac{i\partial_\tau(\varphi_{(\dot{t})})(x,\tau)}{1 + i\partial_x(\varphi_{(\dot{t})})(x,\tau)}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}V^{k+1}\Psi(x)\right)\frac{(\varphi_{(\dot{t})}(x,\tau) - \varphi_{(\dot{t})}(x,0))^{k+1}}{(k+1)!}\right.\\
&\quad \left. + \frac{V^{k+1}\Psi(x)}{k!}(\varphi_{(\dot{t})}(x,\tau) - \varphi_{(\dot{t})}(x,0))^k[\partial_x(\varphi_{(\dot{t})})(x,\tau) - \partial_x(\varphi_{(\dot{t})})(x,0)]\right\}.\end{aligned}$$

Da última igualdade obtemos que (2.1.4) será verdadeira se

$$\begin{aligned}0 \;=\; & -\frac{i}{1 + i\partial_x(\varphi_{(\dot{t})})(x,\tau)}\frac{\partial}{\partial x}V^k\Psi(x) + V^{k+1}\Psi(x)\\ & -\frac{i}{1 + i\partial_x(\varphi_{(\dot{t})})(x,\tau)}[\partial_x(\varphi_{(\dot{t})})(x,\tau) - \partial_x(\varphi_{(\dot{t})})(x,0)]V^{k+1}\Psi(x).\end{aligned}$$

De (2.1.3) segue a igualdade acima. Logo,

$$|L_{(\dot{t})}\Psi_m(x,\tau)| \le C|\varphi_{(\dot{t})}(x,\tau) - \varphi_{(\dot{t})}(x,0)|^m,$$

onde C depende apenas do tamanho de $|D^j\Psi(x)|$ para $j \le m+1$ e não depende da direção $\dot{t}$. Portanto, Ψ_m satisfaz (i) e (ii).

Seja

$$M_{(\dot{t})} = \frac{1}{(Z_{(\dot{t})})_x(x,\tau)}\frac{\partial}{\partial x},$$

onde $Z_{(\dot{t})}(x,\tau) = Z(x,\tau\dot{t})$, então $M_{(\dot{t})}Z_{(\dot{t})} = 1$ e $[M_{(\dot{t})}, L_{(\dot{t})}] = 0$.

Dada uma função $g_{(\dot{t})}(x,\tau) \in C^1$, observe que a diferencial

$$dg_{(\dot{t})} = M_{(\dot{t})}g_{(\dot{t})}dZ_{(\dot{t})} + L_{(\dot{t})}g_{(\dot{t})}d\tau,$$

onde $dZ_{(\dot{t})} = (dZ)|_{Y_{(\dot{t})}}$ (ou seja, $dZ_{(\dot{t})}$ é o pullback de $dZ(x,t)$ à $Y_{(\dot{t})}$). Isto pode ser verificado avaliando cada lado da igualdade na base de campos vetoriais $\{L_{(\dot{t})}, M_{(\dot{t})}\}$. Assim, a diferencial da 1-forma $g_{(\dot{t})}(x,t)dZ_{(\dot{t})}$, é dada por

$$d(g_{(\dot{t})}dZ_{(\dot{t})}) = L_{(\dot{t})}g_{(\dot{t})}d\tau \wedge dZ_{(\dot{t})}.$$

Escolhendo $g_{(\dot{t})} = f_{(\dot{t})}\Psi_N$, onde N é o da hipótese do Teorema 2.1.2, esta observação e o Teorema de Stokes nos levam a:

$$\begin{aligned}\int_{-A}^{A} f_{(\dot{t})}(x,\epsilon)\Psi_N(x,\epsilon)d_xZ_{(\dot{t})}(x,\epsilon) = \ & c\int_{-A}^{A} f_{(\dot{t})}(x,T')\Psi_N(x,T')d_xZ_{(\dot{t})}(x,T') \\ & + \int_{-A}^{A}\int_{\epsilon}^{T'} f_{(\dot{t})}(x,\tau)L_{(\dot{t})}\Psi_N(x,\tau)d\tau \wedge dZ_{(\dot{t})} \\ & + \int_{-A}^{A}\int_{\epsilon}^{T'} L_{(\dot{t})}f_{(\dot{t})}(x,\tau)\Psi_N(x,\tau)d\tau \wedge dZ_{(\dot{t})}. \quad (2.1.5)\end{aligned}$$

Note que o x-suporte de $\Psi_N(x,\epsilon)$ está contido no suporte de $\Psi(x)$. Pela propriedade (ii) de $\Psi_N(x,\tau)$,

$$|f_{(\dot{t})}(x,\tau)L_{(\dot{t})}\Psi_N(x,\tau)| \le C_1|f_{(\dot{t})}(x,\tau)||\varphi_{(\dot{t})}(x,\tau) - \varphi_{(\dot{t})}(x,0)|^N$$

e pelas hipóteses sobre a $f(x,t)$ usando o Teorema da Convergência Dominada a segunda integral do lado direito em (2.1.5) tem um limite quando $\epsilon \to 0$ e é limitada por uma constante que independe da direção $\dot{t}$. Novamente pelo Teorema da Convergência Dominada a terceira integral do lado direito também possui um limite quando $\epsilon \to 0$ e é limitada por uma constante independente da direção $\dot{t}$. Portanto,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-A}^{A} f_{(\dot{t})}(x,\epsilon)\Psi_N(x,\epsilon)d_xZ_{(\dot{t})}(x,\epsilon) \qquad \text{existe.} \tag{2.1.6}$$

E além disso,

$$\left|\int_{-A}^{A} f_{(\dot{t})}(x,\epsilon)\Psi_N(x,\epsilon)d_xZ_{(\dot{t})}(x,\epsilon)\right| \le C \quad \text{independente da direção } \dot{t}. \tag{2.1.7}$$

Observamos que (2.1.6) e (2.1.7) valem para $m \geq N$.

Note que (2.1.6) não é o limite que queremos. Prosseguimos agora em busca do limite desejado.

Seja $P_{(\dot{t})}(x,\tau) = \varphi_{(\dot{t})}(x,\tau) - \varphi_{(\dot{t})}(x,0)$. Para $g(x,\tau) \in C^\infty((-A,A) \times (-T,T))$ cujo x-suporte está contido num compacto fixo independente de τ e m um inteiro não negativo, defina

$$T_m g(x,\tau) = g_m(x,\tau) = \sum_{k=0}^{m} \frac{V^k(g)(x,\tau)}{k!} P_{(\dot{t})}(x,\tau)^k, \quad g_0(x,\tau) = g(x,\tau),$$

assim, nesta notação, $\Psi_m(x,\tau) = T_m \Psi(x)$.

Observação: A função g pode depender de $\dot{t}$, mas tal dependência será omitida na notação.

É fácil ver que (2.1.6) também se aplica a qualquer $g(x,\tau)$ de modo que

$$\lim_{\tau \to 0} \int_{-A}^{A} f_{(\dot{t})}(x,\tau) T_N g(x,\tau) d_x Z_{(\dot{t})}(x,\tau) \qquad \text{existe.} \tag{2.1.8}$$

Da mesma forma para (2.1.7). De fato, considere

$$\tilde{g}_m(x,s,\tau) = \sum_{k=0}^{m} \frac{V^k g(x,s)}{k!} P_{(\dot{t})}(x,\tau)^k$$

onde s é um parâmetro. Da mesma forma como foi feito no caso $\Psi_m(x,\tau)$ obtém-se que

$$\lim_{\tau \to 0} \int_{-A}^{A} f_{(\dot{t})}(x,\tau) \tilde{g}_N(x,s,\tau) d_x Z_{(\dot{t})}(x,\tau)$$

existe. Como $g(x,s) \in C^\infty((-A,A) \times (-T,T))$ então $\lim_{s\to 0} g(x,s)$ e $\lim_{s \to 0} V^k g(x,s)$ existem. Portanto, tomando $s = \tau$ o limite (2.1.8) existe.

Para $\psi(x,\tau) \in C^\infty((-A,A) \times (-T,T))$ cujo x-suporte está contido num conjunto compacto fixo independente de τ, considere $g(x,\tau) = \psi(x,\tau) P_{(\dot{t})}(x,\tau)^N$ em (2.1.8). Observe que

$$T_N g(x,\tau) = P_{(\dot{t})}(x,\tau)^N \left(1 + e^N(x,\tau)\right) \psi(x,\tau) + P_{(\dot{t})}(x,\tau)^{N+1} h^N(x,\tau), \tag{2.1.9}$$

onde e^N e h^N são suaves, o x-suporte de $h^N(x,\tau)$ está contido num conjunto compacto fixo que não depende de τ e

$$\lim_{\tau \to 0} D_x^j e^N(x,\tau) = 0 \qquad \text{para todo} \quad j = 0,1,2,\ldots$$

(novamente a dependência de $\dot{t}$ das funções e^N e h^N será omitida). De fato, por definição

$$\begin{aligned} T_N g(x,\tau) &= \sum_{k=0}^{N} \frac{V^k\left(\psi(x,\tau) P_{(\dot{t})}(x,\tau)^N\right)}{k!} P_{(\dot{t})}(x,\tau)^k \\ &= \psi(x,\tau) P_{(\dot{t})}(x,\tau)^N + \sum_{k=1}^{N} \frac{V^k\left(\psi(x,\tau) P_{(\dot{t})}(x,\tau)^N\right)}{k!} P_{(\dot{t})}(x,\tau)^k \end{aligned}$$

logo, pela regra de Leibniz:

$$V^k(\psi P_{(t)}^N) = \sum_{l=0}^{k} C_{l,k} V^{k-l}(\psi) V^l(P_{(t)}^N) = (V^k\psi) P_{(t)}^N + \sum_{l=1}^{k} C_{k,l}(V^{k-l}\psi) V^l(P_{(t)}^N).$$

Afirmação: Para $l = 1, \ldots, N$,

$$V^l(P_{(t)}(x,\tau)^N) = P_{(t)}(x,\tau)^{N-l} e^{N,l}(x,\tau),$$

onde $D_x^j e^{N,l}(x,\tau) \to 0$ quando $\tau \to 0$, para todo $j = 0, 1, 2, \ldots$
Prova por indução em l : se $l = 1$

$$V P_{(t)}(x,\tau)^N = \frac{i}{Z_x(x,0)} \frac{\partial}{\partial x} P_{(t)}(x,\tau)^N = \frac{i}{Z_x(x,0)} N P_{(t)}(x,\tau)^{N-1} \frac{\partial P_{(t)}}{\partial x}(x,\tau)$$

escolha

$$e^{N,1}(x,\tau) = \frac{iN}{Z_x(x,0)} \frac{\partial P_{(t)}}{\partial x}(x,\tau),$$

então $D_x^j e^{N,1}(x,\tau) \to 0$ quando $\tau \to 0$. Suponhamos que seja válido para $l = 1, \ldots, N-1$ e provemos para $l+1$:

$$\begin{aligned} V^{l+1}\big(P_{(t)}(x,\tau)^N\big) &= V\left(V^l\left(P_{(t)}(x,\tau)^N\right)\right) \\ &= V\left(P_{(t)}(x,\tau)^{N-l} e^{N,l}(x,\tau)\right) \\ &= e^{N,l}(x,\tau) V\left(P_{(t)}(x,\tau)^{N-l}\right) + P_{(t)}(x,\tau)^{N-l} V\left(e^{N,l}(x,\tau)\right) \\ &= P_{(t)}(x,\tau)^{N-(l+1)} \Bigg[\frac{i(N-l)e^{N,l}(x,\tau)}{Z_x(x,0)} \frac{\partial P_{(t)}}{\partial x}(x,\tau) \\ &\qquad + P_{(t)}(x,\tau) V\left(e^{N,l}(x,\tau)\right) \Bigg] \end{aligned}$$

escolha

$$e^{N,l+1}(x,\tau) = \frac{i(N-l)e^{N,l}(x,\tau)}{Z_x(x,0)} \frac{\partial P_{(t)}}{\partial x}(x,\tau) + P_{(t)}(x,\tau) V^l\left(e^{N,l}(x,\tau)\right)$$

então, para todo $j = 0, 1, 2, \ldots$ $D_x^j e^{N,l+1}(x,\tau) \to 0$ quando $\tau \to 0$.

Pela afirmação acima, segue que

$$
\begin{aligned}
T_N g(x,\tau) = & \psi(x,\tau)P_{(\dot{t})}(x,\tau)^N + \sum_{k=1}^{N}\left[\frac{V^k(\psi(x,\tau))P_{(\dot{t})}(x,\tau)^{N+k}}{k!}\right.\\
& \left. + \sum_{l=1}^{k}\frac{C_{k,l}V^{k-l}(\psi(x,\tau))P_{(\dot{t})}(x,\tau)^{N+k-l}e^{N,l}(x,\tau)}{k!}\right]\\
= & \psi(x,\tau)P_{(\dot{t})}(x,\tau)^N\left[1+\sum_{k=1}^{N}\frac{e^{N,k}(x,\tau)}{k!}\right]\\
& + P_{(\dot{t})}(x,\tau)^{N+1}\left[\sum_{k=1}^{N}\frac{C_{N,1}V^k\psi(x,\tau)}{k!}P_{(\dot{t})}(x,\tau)^{k-1}\right.\\
& \left. + \sum_{k=2}^{N}\sum_{l=1}^{k}\frac{C_{k,l}V^{k-l}(\psi(x,\tau))P_{(\dot{t})}(x,\tau)^{k-l-1}e^{N,l}(x,\tau)}{k!}\right]
\end{aligned}
$$

escolha:

$$e^N(x,\tau) = \textstyle\sum_{k=1}^{N}\frac{e^{N,k}(x,\tau)}{k!}$$

e

$$h^N(x,\tau) = \textstyle\sum_{k=1}^{N}\frac{V^k\psi(x,\tau)}{k!}P_{(\dot{t})}(x,\tau)^{k-1} + \sum_{k=2}^{N}\sum_{l=1}^{k}\frac{C_{k,l}V^{k-l}(\psi(x,\tau))P_{(\dot{t})}(x,\tau)^{k-l-1}e^{N,l}(x,\tau)}{k!}.$$

Note que e^N e h^N são suaves, o x-suporte de h^N contido num compacto fixo independente de τ e

$$\lim_{\tau\to 0} D_x^j e^N(x,\tau) = 0, \quad j = 0,1,2,\dots$$

Portanto, a expressão (2.1.9) é verdadeira. De (2.1.8) sabemos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{\tau\to 0}\int_{-A}^{A} & f_{(\dot{t})}(x,\tau)\left[P_{(\dot{t})}(x,\tau)^N(1+e^N(x,\tau))\psi(x,\tau)\right.\\
& \left. + P_{(\dot{t})}(x,\tau)^{N+1}h^N(x,\tau)\right]d_xZ_{(\dot{t})}(x,\tau) \qquad \text{existe} \qquad (2.1.10)
\end{aligned}
$$

E além disso, a integral acima é limitada com limite independendo da direção $\dot{t}$ escolhida. Observe agora que

$$\lim_{\tau\to 0}\int_{-A}^{A} f_{(\dot{t})}(x,\tau)P_{(\dot{t})}(x,\tau)^{N+1}h^N(x,\tau)d_xZ_{(\dot{t})}(x,\tau) \quad \text{também existe} \qquad (2.1.11)$$

bem como a limitação uniforme da integral. De fato, isso segue aplicando Stokes a 1-forma

$$f_{(\dot{t})}(x,\tau)P_{(\dot{t})}(x,\tau)^{N+1}h^N(x,\tau)d_xZ_{(\dot{t})}(x,\tau),$$

como em (2.1.5), e usando as hipóteses sobre a f.

De (2.1.10) e (2.1.11) concluímos que

$$\lim_{\tau\to 0}\int_{-A}^{A} f_{(t)}(x,\tau)P_{(t)}(x,\tau)^N\left(1+e^N(x,\tau)\right)\psi(x,\tau)d_xZ_{(t)}(x,\tau) \qquad \text{existe} \tag{2.1.12}$$

bem como a limitação uniforme da integral. Como a função $e^N(x,\tau)$ e suas derivadas em relação a variável x tendem para zero quando $\tau\to 0$, segue que $(1+e^N(x,\tau))^{-1}\psi(x,\tau)\to\psi(x,0)$ em $C_c^\infty(-A,A)$ o que implica que

$$\lim_{\tau\to 0}\int_{-A}^{A} f_{(t)}(x,\tau)P_{(t)}(x,\tau)^N\psi(x,\tau)d_xZ_{(t)}(x,\tau) \qquad \text{existe} \tag{2.1.13}$$

para toda $\psi(x,\tau)\in C^\infty((-A,A)\times(-T,T))$ cujo x-suporte está contido num compacto fixo independente de τ. Além disso, (2.1.13) é uniformemente limitada. Retornando agora ao caso geral, $g(x,\tau)\in C^\infty((-A,A)\times(-T,T))$ com x-suporte contido num conjunto compacto que não depende de τ, e aplicando (2.1.8) e (2.1.13), com $\psi=\frac{V^Ng}{N!}$, à identidade

$$f_{(t)}(x,\tau)T_{N-1}g(x,\tau)=f_{(t)}(x,\tau)T_Ng(x,\tau)-f_{(t)}(x,\tau)\frac{V^Ng(x,\tau)}{N!}P_{(t)}(x,\tau)^N,$$

concluímos que

$$\lim_{\tau\to 0}\int_{-A}^{A} f_{(t)}(x,\tau)T_{N-1}g(x,\tau)d_xZ_{(t)}(x,\tau) \qquad \text{existe} \tag{2.1.14}$$

para qualquer $g(x,\tau)\in C^\infty((-A,A)\times(-T,T))$ com x-suporte contido num conjunto compacto fixo independente de τ. E ainda temos a limitação uniforme da integral. Queremos provar, por indução decrescente, que para qualquer $g(x,\tau)$ e $0\le k\le N$

$$\lim_{\tau\to 0}\int_{-A}^{A} f_{(t)}(x,\tau)T_kg(x,\tau)d_xZ_{(t)}(x,\tau) \qquad \text{existe,}$$

e é uniformemente limitada. Quando $k=0$ e $g(x,\tau)=\Psi(x)\in C_c^\infty(-A,A)$ temos o limite desejado. Para proceder por indução, suponha $1\le k\le N$ e assuma que os limites

$$\begin{aligned}&\lim_{\tau\to 0}\int_{-A}^{A} f_{(t)}(x,\tau)P_{(t)}(x,\tau)^kg(x,\tau)d_xZ_{(t)}(x,\tau),\\ &\lim_{\tau\to 0}\int_{-A}^{A} f_{(t)}(x,\tau)T_{k-1}g(x,\tau)d_xZ_{(t)}(x,\tau)\end{aligned} \tag{2.1.15}$$

existem para qualquer $g(x,\tau)\in C^\infty((-A,A)\times(-T,T))$ com x-suporte contido num conjunto compacto fixo que não depende de τ. Segue de (2.1.13) e (2.1.14) que (2.1.15) é verdade para $k=N$. Escolha $g(x,\tau)=\psi(x,\tau)P_{(t)}(x,\tau)^{k-1}$ no segundo limite de (2.1.15) e observe que

$$T_{k-1}g(x,\tau)=P_{(t)}(x,\tau)^{k-1}\left(1+e^{k-1}(x,\tau)\right)\psi(x,\tau)+P_{(t)}(x,\tau)^kh^{k-1}(x,\tau), \tag{2.1.16}$$

onde e^{k-1} e h^{k-1} são suaves, o x-suporte de $h^{k-1}(x,\tau)$ está contido num conjunto compacto fixo que independe de τ e

$$\lim_{\tau\to 0} D_x^j e^{k-1}(x,\tau) = 0 \qquad \text{para todo} \;\; j = 0,1,2,\dots$$

Do segundo limite em (2.1.15) segue que

$$\lim_{\tau\to 0}\int_{-A}^{A} f_{(t)}(x,\tau)\big[P_{(t)}(x,\tau!)^{k-1}\left(1+e^{k-1}(x,\tau)\right)\psi(x,\tau) \\ +P_{(t)}(x,\tau)^k h^{k-1}(x,\tau)\big] d_x Z_{(t)}(x,\tau) \qquad \text{existe.} \tag{2.1.17}$$

O primeiro limite em (2.1.15) mostra que

$$\lim_{\tau\to 0}\int_{-A}^{A} f_{(t)}(x,\tau)P_{(t)}(x,\tau)^k h^{k-1}(x,\tau) d_x Z_{(t)}(x,\tau) \qquad \text{existe.} \tag{2.1.18}$$

De (2.1.17), (2.1.18) e do fato que $\lim_{\tau\to 0} D_x^j e^{k-1}(x,\tau) = 0$, segue que

$$\lim_{\tau\to 0}\int_{-A}^{A} f_{(t)}(x,\tau)P_{(t)}(x,\tau)^{k-1}\psi(x,\tau) d_x Z_{(t)}(x,\tau) \qquad \text{existe} \tag{2.1.19}$$

para toda $\psi(x,\tau) \in C^\infty((-A,A)\times(-T,T))$ com x-suporte contido num conjunto compacto fixo independente de τ. Considere agora uma função $g(x,\tau)$ geral, escolha $\psi(x,\tau) = -\frac{V^{k-1}g(x,\tau)}{(k-1)!}$ e escreva

$$f_{(t)}T_{k-2}g = f_{(t)}T_{k-1}g + f_{(t)}\psi P_{(t)}^{k-1}.$$

Portanto, pela hipótese de indução (2.1.15) e (2.1.19) obtemos que

$$\lim_{\tau\to 0}\int_{-A}^{A} f_{(t)}(x,\tau)T_{k-2}g(x,\tau) d_x Z_{(t)}(x,\tau) \qquad \text{existe.} \tag{2.1.20}$$

Agora (2.1.19) e (2.1.20) completam o passo da indução. Portanto,

$$\lim_{\tau\to 0}\int_{-A}^{A} f_{(t)}(x,\tau)g(x,\tau) d_x Z_{(t)}(x,\tau) \qquad \text{existe.} \tag{2.1.21}$$

Escolhendo $g(x,\tau) = \Psi(x)\left[\partial_x(Z_{(t)})(x,\tau)\right]^{-1}$, com $\Psi \in C_c^\infty(-A,A)$ temos que

$$\lim_{\tau\to 0}\int_{-A}^{A} f_{(t)}(x,\tau)\Psi(x)dx \qquad \text{existe} \tag{2.1.22}$$

e assim $bf_{(t)} = \lim_{\tau\to 0} f_{(t)}(.,\tau)$ existe. E além do limite existir, vê-se facilmente que todas as integrais tratadas são uniformemente limitadas. Como as funções

$$x \longmapsto \Psi_N(x,\tau) - \Psi(x) \quad \text{e} \quad x \longmapsto Z_{(t)}(x,\tau) - Z_{(t)}(x,0)$$

e todas as suas x-derivadas convergem para zero, quando $\tau \to 0$, (2.1.5), (2.1.6), (2.1.22) e o Teorema da Convergência Dominada implicam a seguinte fórmula para $bf_{(\dot{t})}$:

$$\begin{aligned}
\left\langle Z_x(x,0)bf_{(\dot{t})}, \Psi\right\rangle &= \lim_{\tau\to 0}\int_{-A}^{A} f_{(\dot{t})}(x,\tau)\Psi(x)(Z_{(\dot{t})})_x(x,0)dx \\
&= \lim_{\tau\to 0}\int_{-A}^{A} f_{(\dot{t})}(x,\tau)[\Psi(x)-\Psi_N(x,\tau)](Z_{(\dot{t})})_x(x,0)dx \\
&\quad + \lim_{\tau\to 0}\int_{-A}^{A} f_{(\dot{t})}(x,\tau)\Psi_N(x,\tau)(Z_{(\dot{t})})_x(x,0)dx \\
&= \lim_{\tau\to 0}\int_{-A}^{A} f_{(\dot{t})}(x,\tau)\Psi_N(x,\tau)(Z_{(\dot{t})})_x(x,\tau)dx \\
&\quad + \lim_{\tau\to 0}\int_{-A}^{A} f_{(\dot{t})}(x,\tau)\Psi_N(x,\tau)[(Z_{(\dot{t})})_x(x,0)-(Z_{(\dot{t})})_x(x,\tau)]dx \\
&= \lim_{\tau\to 0}\int_{-A}^{A} f_{(\dot{t})}(x,\tau)\Psi_N(x,\tau)(Z_{(\dot{t})})_x(x,\tau)dx \\
&= \int_{-A}^{A} f_{(\dot{t})}(x,T')\Psi_N(x,T')d_xZ_{(\dot{t})}(x,T') \\
&\quad + \int_{-A}^{A}\int_{0}^{T'} f_{(\dot{t})}(x,\tau)L_{(\dot{t})}\Psi_N(x,\tau)d\tau\wedge dZ_{(\dot{t})} \\
&\quad + \int_{-A}^{A}\int_{0}^{T'} L_{(\dot{t})}f_{(\dot{t})}(x,\tau)\Psi_N(x,\tau)d\tau\wedge dZ_{(\dot{t})}. \qquad (2.1.23)
\end{aligned}$$

Esta fórmula mostra que $bf_{(\dot{t})}$ é uma distribuição de ordem $N+1$. Com isto o Passo 1 está completo. Nele foi provado a existência do limite numa direção fixa $\dot{t}$ e também a limitação uniforme das integrais que expressam este limite no caso em que f é uma função de classe C^1. Esta limitação será fundamental para a prova da existência do limite bf. Ressaltamos que se substituirmos N por $m \in \mathbb{N}$ com $m \geq N$ a fórmula permanece válida, isto segue pelo fato que (2.1.6) e (2.1.7) serem verdadeiras.

Passo 2: Considere as mesmas notações do Passo 1. Suponha $f \in C((-A,A)\times\Gamma_T)$. Seja $\phi \in C_c^\infty(B(0,1))$, onde $B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ é a bola unitária centrada na origem. Assuma que $\iint \phi\, dx d\tau = 1$ e para $\delta > 0$ escolha $\phi_\delta(x,\tau) = \frac{1}{\delta^2}\phi\left(\frac{x}{\delta},\frac{\tau}{\delta}\right)$. Para $\epsilon > 0$ seja $f^{\epsilon}_{(\dot{t})}(x,\tau) = f_{(\dot{t})}(x,\tau+\epsilon)$. Observe que se $\delta < \epsilon$, então a convolução $f^{\epsilon}_{(\dot{t})} * \phi_\delta(x,\tau)$ é C^∞ na região $\tau > 0$ (Teorema 1.2.1 **[H1]**). Considere $g^{\epsilon,\delta}_{(\dot{t})}(x,\tau) = f^{\epsilon}_{(\dot{t})} * \phi_\delta(x,\tau)\Psi_N(x,\tau+\epsilon)$, $Z^{\epsilon}_{(\dot{t})}(x,\tau) = Z_{(\dot{t})}(x,\tau+\epsilon)$ e $L^{\epsilon}_{(\dot{t})} = \frac{\partial}{\partial\tau} + b^{(\dot{t})}(x,\tau+\epsilon)\frac{\partial}{\partial x}$. Como vimos no Passo 1,

$$d(g^{\epsilon,\delta}_{(\dot{t})}dZ^{\epsilon}_{(\dot{t})}) = L^{\epsilon}_{(\dot{t})}g^{\epsilon,\delta}_{(\dot{t})}d\tau\wedge dZ^{\epsilon}_{(\dot{t})}.$$

Logo, segue do Teorema de Stokes que

$$\begin{aligned}\int_{-A}^{A} f^{\epsilon}_{(t)} * \phi_\delta(x,0)\Psi_N(x,\epsilon)d_xZ_{(t)}(x,\epsilon) = &\int_{-A}^{A} f^{\epsilon}_{(t)} * \phi_\delta(x,T')\Psi_N(x,T'+\epsilon)d_xZ_{(t)}(x,T'+\epsilon)\\ &+\int_{-A}^{A}\int_0^{T'} f^{\epsilon}_{(t)} * \phi_\delta(x,\tau)L^{\epsilon}_{(t)}\Psi_N(x,\tau+\epsilon)d\tau\wedge dZ^{\epsilon}_{(t)}\\ &+\int_{-A}^{A}\int_0^{T'} L^{\epsilon}_{(t)}(f^{\epsilon}_{(t)} * \phi_\delta)(x,\tau)\Psi_N(x,\tau+\epsilon)d\tau\wedge dZ^{\epsilon}_{(t)}.\end{aligned}$$

Fixe $\epsilon > 0$. Seja $\delta \to 0^+$. Como $f^{\epsilon}_{(t)}$ é contínua, tem-se que $f^{\epsilon}_{(t)} * \phi_\delta(x,\tau)$ converge uniformemente para $f^{\epsilon}_{(t)}(x,\tau)$ numa vizinhança W de $\operatorname{supp}(\Psi)\times[0,T']$. Portanto em $\mathcal{D}'(W)$,

$$L^{\epsilon}_{(t)}(f^{\epsilon}_{(t)} * \phi_\delta) \to L^{\epsilon}_{(t)}f^{\epsilon}_{(t)}$$

quando $\delta \to 0^+$. Além disso, $L^{\epsilon}_{(t)}f^{\epsilon}_{(t)}(x,\tau) = (L_{(t)}f_{(t)})(x,\tau+\epsilon) \in L^\infty$. Assim, pelo Lema de Friedrich (Lema 1.7.1),

$$L^{\epsilon}_{(t)}(f^{\epsilon}_{(t)} * \phi_\delta) \to L^{\epsilon}_{(t)}f^{\epsilon}_{(t)}$$

em $L^2(W)$ quando $\delta \to 0^+$. Portando obtemos que

$$\begin{aligned}\int_{-A}^{A} f_{(t)}(x,\epsilon)\Psi_N(x,\epsilon)d_xZ_{(t)}(x,\epsilon) = &\int_{-A}^{A} f_{(t)}(x,T'+\epsilon)\Psi_N(x,T'+\epsilon)d_xZ_{(t)}(x,T'+\epsilon)\\ &+\int_{-A}^{A}\int_0^{T'} f_{(t)}(x,\tau+\epsilon)L^{\epsilon}_{(t)}\Psi_N(x,\tau+\epsilon)d\tau\wedge dZ^{\epsilon}_{(t)}\\ &+\int_{-A}^{A}\int_0^{T'} L^{\epsilon}_{(t)}f^{\epsilon}_{(t)}(x,\tau)\Psi_N(x,\tau+\epsilon)d\tau\wedge dZ^{\epsilon}_{(t)}.\end{aligned}$$

Agora observe que o estudo da equação acima quando $\epsilon \to 0$ é idêntico ao da equação (2.1.5). Portanto, o limite quando $\epsilon \to 0$ da integral do lado esquerdo da expressão acima existe, bem como a limitação uniforme. Procedendo como no Passo 1 obtemos a fórmula (2.1.23) para $bf_{(t)}$ com f sendo contínua. Concluindo assim o Passo 2.

PASSO 3: Nesta etapa será provado que o limite bf existe e portanto independe da direção escolhida para calculá-lo. Para $\Psi \in C^\infty_c(-A,A)$ defina,

$$T(t) = \int_{-A}^{A} f(x,t)\Psi(x)dx \tag{2.1.24}$$

Afirmação: ∇T é limitado.
De fato, seja $\phi \in C_c^\infty(\Gamma_{T'})$. Então, para $j = 1, \cdots, n$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial T}{\partial t_j}, \phi \right\rangle &= -\left\langle T, \frac{\partial \phi}{\partial t_j} \right\rangle \\
&= -\int_{\Gamma_{T'}} \left(\int_{-A}^{A} f(x,t)\Psi(x)dx \right) \frac{\partial \phi}{\partial t_j}(t)dt \\
&= -\int_{-A}^{A} \int_{\Gamma_{T'}} f(x,t) \frac{\partial}{\partial t_j}[\Psi(x)\phi(t)]dtdx \\
&= \int_{-A}^{A} \int_{\Gamma_{T'}} \frac{\partial f}{\partial t_j}(x,t)\Psi(x)\phi(t)dtdx \\
&= \int_{\Gamma_{T'}} \int_{-A}^{A} \left(L_j f(x,t) - b_j(x,t)\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right) \Psi(x)\phi(t)dxdt \\
&= \int_{\Gamma_{T'}} \int_{-A}^{A} L_j f(x,t)\Psi(x)\phi(t)dxdt \\
&\quad + \int_{\Gamma_{T'}} \int_{-A}^{A} f(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\left(b_j(x,t)\Psi(x)\phi(t)\right)dxdt \\
&= \int_{\Gamma_{T'}} \left[\int_{-A}^{A} \left(L_j f(x,t)\Psi(x) + f(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\left(b_j(x,t)\Psi(x)\right) \right) dx \right] \phi(t)dt \\
&= \left\langle \int_{-A}^{A} \left(L_j f(x,t)\Psi(x) + f(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\left(b_j(x,t)\Psi(x)\right) \right) dx, \phi \right\rangle
\end{aligned}$$

Nas igualdades onde foi utilizada a integração por partes as integrais são interpretadas por dualidade, isto é, no sentido de distribuições. Portanto,

$$\frac{\partial T}{\partial t_j}(t) = \int_{-A}^{A} L_j f(x,t)\Psi(x)dx + \int_{-A}^{A} f(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\left(b_j(x,t)\Psi(x)\right)dx. \tag{2.1.25}$$

A primeira integral do lado direito da expressão acima é limitada pelo fato de $L_j f$ ser limitada. Para a segunda integral utilize o limite uniforme que foi obtido na primeira parte da demonstração deste teorema, considerando

$$g(x,\tau) = \frac{\partial}{\partial x}\left(b_j(x,\tau\dot{t})\Psi(x)\right)$$

então, $g(x,\tau) \in C^\infty((-A,A)\times(-T,T))$ e seu x-suporte está contido num conjunto compacto fixo que independe de τ, por (2.1.21) a segunda integral do lado direito de (2.1.25) é limitada. Portando, o gradiente de T é limitado para $t \in \Gamma_{T'}$. Donde, segue que (usando uma regularização para f)

$$\lim_{t\to 0} T(t) \qquad \text{existe.}$$

Concluindo a demonstração do teorema. ∎

Observação 2.1.3 *A condição (ii) do Teorema 2.1.2 independe da integral primeira.*

De fato, primeiramente, observe que, $\Sigma = \{x + i\varphi(x,0)\} = Z(\gamma)$, onde γ é o intervalo inicial $(-A,A) \times \{0\}$. Seja U uma vizinhança de $(-A,A) \times \Gamma_T$. Se $p = x + iy$ com $-A < x < A$, é um ponto do plano complexo situado em $Z(U)$, temos que

$$C_1 \mathrm{dist}(p,\Sigma) \leq |y - \varphi(x,0)| \leq C_2 \mathrm{dist}(p,\Sigma)$$

para algumas constantes $C_1, C_2 > 0$. Assim, definindo

$$w_Z(x,t) = \mathrm{dist}(Z(x,t), Z(\gamma)), \quad (x,t) \in U$$

a condição (ii) pode ser escrita como

$$\sup_{t' \in \Gamma^0} \int_0^T \int_{-A}^{A} |f(x,\tau t')| w_Z(x,\tau t')^N dx d\tau < \infty.$$

Considere agora outra integral primeira, W, de $\mathcal{V}$ definida numa vizinhança de $\overline{U}$, i.e., uma função suave satisfazendo $LW = 0$ e $dW \neq 0$ no seu domínio de definição. Uma conseqüência usual do Teorema de Aproximação de Baouendi-Treves (Teorema 1.2.1) garante que existem um conjunto aberto $V \subset U$, e funções $F \in C^\infty(Z(\overline{V}))$ e $G \in C^\infty(W(\overline{V}))$ tais que $W = F \circ Z$ e $Z = G \circ W$ em $\overline{V}$. Isto mostra que $F \colon Z(\overline{V}) \to W(\overline{V})$ é um difeomorfismo com inversa $F^{-1} = G$. Em particular,

$$w_Z(x,t) = \mathrm{dist}(Z(x,t), Z(\gamma)) \sim \mathrm{dist}(W(x,t), W(\gamma)) = w_W(x,t), \quad (x,t) \in V,$$

que implica que

$$\sup_{t' \in \Gamma^0} \int_0^T \int_{-A}^{A} |f(x,\tau t')| w_Z(x,\tau t')^N dx d\tau < \infty \iff \sup_{t' \in \Gamma^0} \int_0^T \int_{-A}^{A} |f(x,\tau t')| w_W(x,\tau t')^N dx d\tau < \infty.$$

Provando que a condição integral é localmente independente da escolha da integral primeira.

2.2 Lema Fundamental

Nesta seção apresentaremos uma ferramenta básica para a prova do resultado principal, o Teorema 2.3.1, a qual será chamada como Lema Fundamental. Este lema generaliza o Teorema 3.1 de **[BH1]**. O Teorema 3.1 de **[BH1]** descreve o conjunto frente de onda do traço de uma solução de um campo vetorial localmente integrável de co-posto m, enquanto o Lema 2.2.3, que chamamos de Lema Fundamental, apresentado nesta seção, descreve o conjunto frente de onda de uma solução de um sistema de campos vetoriais localmente integráveis de co-posto um.

Primeiramente provaremos Lema 2.2.1 que será um dos casos do Lema Fundamental. Neste resultado a estrutura $\mathcal{V}$ não será assumida como sendo localmente integrável.

Lema 2.2.1 *Seja $\mathcal{W}$ uma cunha em $\mathbb{R}^{n+1}$ com aresta de dimensão 1, a qual pode ser escrita localmente, nas coordenadas convenientes, como $(-A, A) \times \Gamma_T$, sendo A um número real positivo e Γ_T um cone truncado de $\mathbb{R}^n$, e seja $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma vizinhança aberta de $(-A, A) \times \{0\}$. Considere a estrutura diferencial $\mathcal{V}$ gerada pelos campos vetoriais $L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} + b_j(x,t)\frac{\partial}{\partial x}$, com $b_j \in C^\infty(U \cup \mathcal{W})$, $j = 1, \cdots, n$. Seja f uma função contínua em $\mathcal{W}$. Suponha que*

$$|L_j f(x,t)| = O(|t|^k), \quad k = 1, 2, \ldots$$

uniformemente em subconjuntos compactos de $(-A, A)$, e que o traço $bf(x)$ existe quando $t \to 0$. Se $(L_1, \ldots, L_n)$ é elíptico em $(x_0, 0)$ para algum $x_0 \in (-A, A)$ então, ou $(x_0, -1) \notin WF(bf)$ ou $(x_0, 1) \notin WF(bf)$.

Observação 2.2.2 *Por hipótese $(L_1, \ldots, L_n)$ é elíptico no ponto $(0,0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Esta afirmação é equivalente a: $Imb_j(0,0) \neq 0$ para algum $j = 1, \ldots, n$. Como $\Gamma_T \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, existe um cone $\tilde{\Gamma}_T \subset \Gamma_T$, de modo que*

$$t \in \tilde{\Gamma}_T \Longrightarrow t \cdot Imb(0,0) \neq 0,$$

onde $Imb(x,t) = (Imb_1(x,t), \ldots, Imb_n(x,t))$.

De fato, considere $t \in \Gamma_t$ tal que $t \cdot Imb(0,0) = 0$, como $Imb(0,0) \neq 0$, temos que tais t estão contidos num hiperplano. Como um hiperplano não contém um conjunto aberto, segue que existe $t' \in \Gamma_T$ de modo que $t' \cdot Imb(0,0) \neq 0$. Pela continuidade segue o resultado.

Demonstração do lema 2.2.1: Na demonstração deste lema a função f será considerada de classe C^1, o caso f contínua segue de modo análogo ao Passo 2 da demonstração do Teorema 2.1.2. Sem perda de generalidade, podemos assumir $x_0 = 0$. Seja Z uma aproximação suave de uma integral primeira de $L_1, \cdots, L_n$ perto da origem em U. Isto é,

$$L_j Z(x,t) = O(|t|^k), \quad k = 1, 2, \ldots \quad \text{e} \quad Z(x,0) = x, \quad j = 1, \cdots, n.$$

Tal Z é obtida escrevendo-se a série formal de Z e depois construindo uma função C^∞ cuja expansão de Taylor na origem é a série formal, como permite fazer o Lema de Borel. Veja a Seção IV.1 de **[T1]** para detalhes sobre a existência de tais funções.

Como foi visto no início da seção anterior $\tilde{\Gamma}_T = \tilde{\Gamma} \cap \{t \in \mathbb{R}^n : |t| \leq T\}$ pode ser identificado com o conjunto $(0,T)\Gamma^0 = \{\tau t' : \tau \in (0,T),\ t' \in \Gamma^0\}$, sendo $\Gamma^0 = \tilde{\Gamma} \cap S^{n-1}$. Seja $\dot{t} \in \Gamma^0$ um ponto fixo. Iremos nos restringir ao conjunto de pontos $Y_{(\dot{t})} = \{(x, \tau\dot{t}) : x \in (-A, A),\ \tau \in (0,T)\}$. Escrevendo $t = \tau\dot{t}$, temos que

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial t_1}{\partial \tau}\frac{\partial}{\partial t_1} + \cdots + \frac{\partial t_n}{\partial \tau}\frac{\partial}{\partial t_n} = \dot{t_1}\frac{\partial}{\partial t_1} + \cdots + \dot{t_n}\frac{\partial}{\partial t_n} = \dot{t} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial t_n}\right).$$

Seja

$$L_{(\dot{t})} = \frac{\partial}{\partial \tau} + b^{(\dot{t})}(x,\tau)\frac{\partial}{\partial x},$$

onde $b^{(\dot{t})}(x,\tau) = \dot{t}\cdot\big(b_1(x,\tau\dot{t}),\cdots,b_n(x,\tau\dot{t})\big)$. Considere o campo vetorial

$$M = \frac{1}{Z_x(x,t)}\frac{\partial}{\partial x},$$

que satisfaz $MZ = 1$. Note que para $j = 1,\cdots,n$

$$[M, L_j] = cM \tag{2.2.1}$$

onde $c = O(|t|^k),\quad k = 1,2,\dots$ De fato, isto pode ser visto escrevendo $[M, L_j]$ em termos da base $\{L_1,\cdots,L_n,M\}$ e aplicando ambos os lados às funções $\{t_1,\cdots,t_n,Z\}$. Considerando o campo $M_{(\dot{t})} = \frac{1}{(Z_{(\dot{t})})_x(x,\tau)}\frac{\partial}{\partial x}$ segue que $M_{(\dot{t})}Z_{(\dot{t})} = 1$, sendo $Z_{(\dot{t})} = Z|_{Y_{(\dot{t})}}$, e $[M_{(\dot{t})}, L_{(\dot{t})}] = cM_{(\dot{t})}$, com $c = O(\tau^k)$, $k = 1,2,\dots$ Dada uma função $g_{(\dot{t})}(x,\tau)\in C^1$, observe que a diferencial

$$dg_{(\dot{t})} = M_{(\dot{t})}g_{(\dot{t})}dZ_{(\dot{t})} + \big(L_{(\dot{t})}g_{(\dot{t})} - M_{(\dot{t})}g_{(\dot{t})}L_{(\dot{t})}Z_{(\dot{t})}\big)\,d\tau,$$

onde $dZ_{(\dot{t})} = (dZ)|_{Y_{(\dot{t})}}$. Isto pode ser verificado avaliando cada um dos lados na base de campos vetoriais $\{L_{(\dot{t})}, M_{(\dot{t})}\}$. Da expressão acima, segue que a diferencial da 1-forma $g_{(\dot{t})}(x,\tau)dZ_{(\dot{t})}$, é dada por

$$d(g_{(\dot{t})}dZ_{(\dot{t})}) = \big(L_{(\dot{t})}g_{(\dot{t})} - M_{(\dot{t})}g_{(\dot{t})}L_{(\dot{t})}Z_{(\dot{t})}\big)\,d\tau\wedge dZ_{(\dot{t})}. \tag{2.2.2}$$

Para $\xi\in\mathbb{R},\quad s\in\mathbb{R}$, defina

$$E(s,\xi,x,t) = i\xi\cdot(s - Z(x,t)) - |\xi|(s - Z(x,t))^2$$

e considere

$$E_{(\dot{t})}(s,\xi,x,\tau) = E(s,\xi,x,\tau\dot{t}) = i\xi\cdot(s - Z(x,\tau\dot{t})) - |\xi|(s - Z(x,\tau\dot{t}))^2.$$

Seja $\phi\in C_c^\infty(-r,r)$, para algum $r>0$, tal que $\phi(x) = 1$ se $|x| < r/2$. Aplicando (2.2.2) à função

$$g_{(\dot{t})}(s,\xi,x,\tau) = \phi(x)f_{(\dot{t})}(x,\tau)e^{E_{(\dot{t})}(s,\xi,x,\tau)}$$

onde (s,ξ) são parâmetros e $f_{(\dot{t})}(x,\tau) = f(x,\tau\dot{t}) = f|_{Y_{(\dot{t})}}$, obtemos

$$\begin{aligned} d(g_{(\dot{t})}dZ_{(\dot{t})}) = \big\{\ & L_{(\dot{t})}(\phi f_{(\dot{t})}) + \phi f_{(\dot{t})}(L_{(\dot{t})}E_{(\dot{t})}) \\ & - \big[M_{(\dot{t})}(\phi f_{(\dot{t})}) + \phi f_{(\dot{t})}(M_{(\dot{t})}E_{(\dot{t})})\big]\,L_{(\dot{t})}Z_{(\dot{t})}\big\}e^{E_{(\dot{t})}}d\tau\wedge dZ_{(\dot{t})}. \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Destas observações e do Teorema de Stokes, para $\tau_0>0$ pequeno, segue que:

$$\int_{-r}^{r} g_{(\dot{t})}(s,\xi,x,0)dx = \int_{-r}^{r} g_{(\dot{t})}(s,\xi,x,\tau_0)d_xZ_{(\dot{t})}(x,\tau_0) + \int_0^{\tau_0}\int_{-r}^{r} d(g_{(\dot{t})}dZ_{(\dot{t})}). \tag{2.2.4}$$

O objetivo é estimar as integrais do lado direito de (2.2.4).

Escreva

$$Z(x,t) = x + t\cdot\Psi(x,t),$$

sendo $\Psi=(\Psi_1,\ldots,\Psi_n)$ suave e complexa. Como Z é solução aproximada de $(L_1,\ldots,L_n)$, para cada $j=1,\ldots,n,$ temos que, para todo $k=1,2,\ldots,$

$$L_jZ(x,t)=\Psi_j(x,t)+\sum_{l=1}^{n}t_l\frac{\partial\Psi_l}{\partial t_j}(x,t)+b_j(x,t)\left(1+\sum_{l=1}^{n}t_l\frac{\partial\Psi_l}{\partial x}(x,t)\right)=O(|t|^k),\quad(2.2.5)$$

e assim,

$$\Psi_j(0,0)=-b_j(0,0),\quad\text{para todo}\quad j=1,\ldots,n.$$

Da Observação 2.2.2 segue que $t\cdot Im\Psi(0,0)\neq 0$ para todo $t\in\tilde{\Gamma}_T$. Escolha $\xi_0\in\{-1,1\}$ tal que $\xi_0\dot{t}\cdot\Psi(0,0)<0$. Portanto, pela continuidade de Ψ

$$\xi_0\dot{t}\cdot Im\Psi(x,0)<0 \qquad (2.2.6)$$

para x numa vizinhança V de $\overline{(-r,r)}$ (após diminuir r, se necessário). Por continuidade e homogeneidade em ξ existe $c_0>0$ tal que

$$\xi\tau\dot{t}\cdot Im\Psi(x,\tau\dot{t})<-\tau|\xi|c_0 \qquad (2.2.7)$$

para $x\in V$, $0\le\tau\le\tau_0$ e ξ numa vizinhança cônica de ξ_0. Observe que

$$\begin{aligned} ReE_{(\dot{t})}(s,\xi,x,\tau) &= \xi\tau\dot{t}\cdot Im\Psi(x,\tau\dot{t})+|\xi|\tau^2\left[\dot{t}\cdot Im\Psi(x,\tau\dot{t})\right]^2\\ &\quad -|\xi|\left[s-x-\tau\dot{t}\cdot Re\Psi(x,\tau\dot{t})\right]^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$ReE_{(\dot{t})}(s,\xi,x,\tau)\le\xi\tau\dot{t}\cdot Im\Psi(x,\tau\dot{t})+|\xi|\tau^2\left[\dot{t}\cdot Im\Psi(x,\tau\dot{t})\right]^2.$$

Por (2.2.7), após diminuir τ_0, podemos encontrar $c_1>0$, tal que

$$\begin{aligned} &ReE_{(\dot{t})}(s,\xi,x,\tau)\le -c_1|\xi|\tau,\quad\text{para}\quad x\in V,\ 0\le\tau\le\tau_0\\ &\qquad s\in\mathbb{R}\quad\text{e}\quad\xi\quad\text{numa vizinhança cônica}\quad\Gamma'\quad\text{de}\quad\xi_0. \end{aligned}\qquad(2.2.8)$$

Voltando para as integrais em (2.2.4), temos

$$\left|\int_{-r}^{r}g_{(\dot{t})}(s,\xi,x,\tau_0)d_xZ_{(\dot{t})}(x,\tau_0)\right|=\left|\int_{-r}^{r}\phi(x)f(x,\tau_0\dot{t})e^{E_{(\dot{t})}(s,\xi,x,\tau_0)}d_xZ_{(\dot{t})}(x,\tau_0)\right|\le Ce^{-c_2|\xi|}$$

para algum $c_2>0$, $s\in\mathbb{R}$ e $\xi\in\Gamma'$. Para estimar $\int_0^{\tau_0}\int_{-r}^{r}d(g_{(\dot{t})}dZ_{(\dot{t})})$ será usada a expressão (2.2.3) de $d(g_{(\dot{t})}dZ_{(\dot{t})})$ e analisado cada termo que aparece nesta equação. Considere primeiramente o termo $\phi(L_{(\dot{t})}f_{(\dot{t})})e^{E_{(\dot{t})}}$. Para qualquer k, temos que

$$\left|\phi(L_{(\dot{t})}f_{(\dot{t})})e^{E_{(\dot{t})}}\right|\le\|\phi\|_\infty C\tau^k e^{-c_1\tau|\xi|}=C'\frac{(\tau|\xi|)^k e^{-c_1\tau|\xi|}}{|\xi|^k}\le\frac{M_k}{|\xi|^k}$$

para $x\in V$, $0\le\tau\le\tau_0$, $s\in\mathbb{R}$ e $\xi\in\Gamma'$. Assim,

$$\left|\int_0^{\tau_0}\int_{-r}^{r}\phi(L_{(\dot{t})}f_{(\dot{t})})e^{E_{(\dot{t})}}dZ_{(\dot{t})}\wedge d\tau\right|\le\frac{M'_k}{|\xi|^k},\quad k=1,2,\ldots$$

para $s \in \mathbb{R}$ e $\xi \in \Gamma'$.

A integral

$$\int_{-r}^{r} (L_{(\dot{t})}\phi) f_{(\dot{t})} e^{E_{(\dot{t})}} dZ_{(\dot{t})} = \langle f_{(\dot{t})}(\cdot,\tau), (L_{(\dot{t})}\phi) e^{E_{(\dot{t})}} \rangle$$

pode ser estimada usando o fato que bf existe no sentido das distribuições, mais precisamente temos o seguinte: Seja

$$\Theta : \; \Gamma_T \cup \{0\} \longrightarrow \; \mathcal{D}'(-A, A)$$

definida por

$$\Theta(t) = \begin{cases} f(\cdot,t), & \text{se} \quad t \in \Gamma_T \\ bf(\cdot), & \text{se} \quad t = 0 \end{cases}$$

Como $f(\cdot,t)$ é contínua em Γ_T e bf existe no sentido das distribuições, segue que $\Theta \in C\left(\Gamma_T \cup \{0\}, \mathcal{D}'(-A,A)\right)$. Logo, $\{f(\cdot,t) : \; t \in \Gamma_T \cup \{0\}\} \subset\subset \mathcal{D}'(-A,A)$. Então, dado $K \subset\subset (-A,A)$ existem uma constante C_K e um inteiro positivo N_K, tais que, para toda $\psi \in C_c^\infty(K)$

$$\sup_{t\in\Gamma_T} |\langle f(\cdot,t), \psi\rangle| \le C_K \sum_{m=0}^{N_K} \|D_x^m \psi\|_{L^\infty}.$$

Logo,

$$\left|\left\langle f_{(\dot{t})}(\cdot,\tau), (L_{(\dot{t})}\phi) e^{E_{(\dot{t})}} \right\rangle\right| \le C \sum_{m=0}^{N} \left\| D_x^m \left((L_{(\dot{t})}\phi) e^{E_{(\dot{t})}} \right) \right\|_{L^\infty}$$

onde N é a ordem da distribuição bf. Pela forma como ϕ foi escolhida segue que $L_{(\dot{t})}\phi(x) \equiv 0$, para $|x| \le r/2$. Então, $|x| \ge r/2$ na estimativa acima. Assim, (diminuindo τ_0, se necessário) podemos encontrar $R/2 > \delta > 0$, tal que $|s| < \delta$ implica

$$(s - x - \tau\dot{t} \cdot Re\Psi(x, \tau\dot{t}))^2 > c, \tag{2.2.9}$$

para algum $c > 0$. Logo, por (2.2.7) e (2.2.9) segue que

$$\begin{aligned} ReE_{(\dot{t})}(s,\xi,x,\tau) &= \tau\xi\dot{t} \cdot Im\Psi(x,\tau\dot{t}) + |\xi|\tau^2(\dot{t} \cdot Im\Psi(x,\tau\dot{t}))^2 - |\xi|(s - x - \tau\dot{t} \cdot Re\Psi(x,\tau\dot{t}))^2 \\ &\le -c_1\tau|\xi| - c|\xi| \le -c|\xi| \end{aligned}$$

para $|x| \ge r/2$, $\xi \in \Gamma'$, $|s| < \delta$ e $0 \le \tau \le \tau_0$. Portanto

$$\left|\left\langle f_{(\dot{t})}(\cdot,\tau), (L_{(\dot{t})}\phi) e^{E_{(\dot{t})}} \right\rangle\right| \le C e^{-c|\xi|},$$

para algumas constantes $C, c > 0$. Disto segue que a integral $\int_{-r}^{r}\int_0^{\tau_0} f_{(\dot{t})}(L_{(\dot{t})}\phi) e^{E_{(\dot{t})}} d\overline{\tau} \wedge dZ_{(\dot{t})}$ decai rapidamente em ξ. O termo $\phi f_{(\dot{t})}(L_{(\dot{t})}E_{(\dot{t})}) e^{E_{(\dot{t})}}$ será estimado usando novamente o fato que bf existe no sentido das distribuições e, além disso, o fato que para qualquer

$k = 1, 2, \ldots$, $|L_{(t)}E_{(t)}| \leq C_k|\xi|\tau^k$, para alguma constante C_k, isto vale, pois $L_{(t)}Z_{(t)} = O(\tau^k)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-r}^{r} \phi f_{(t)}(L_{(t)}E_{(t)})e^{E_{(t)}}dZ_{(t)}\right| &= \left|\left\langle f_{(t)}(\cdot,\tau), \phi(L_{(t)}E_{(t)})e^{E_{(t)}}\right\rangle\right| \\
&\leq C\sum_{m=0}^{N}\left\|D_x^m(\phi(L_{(t)}E_{(t)})e^{E_{(t)}})\right\|_{L^\infty} \\
&\leq C_k|\xi|\tau^k e^{-c_1\tau|\xi|} \leq \frac{M_{k'}}{|\xi|^{k'}}
\end{aligned}$$

escolhendo $k = k' + 1$, $k' = 1, 2, \ldots$ Portanto a integral $\int_{-r}^{r}\int_0^{\tau_0} \phi f_{(t)}(L_{(t)}E_{(t)})e^{E_{(t)}}d\tau \wedge dZ_{(t)}$ decai rapidamente em ξ. A integral $\int_{-r}^{r}\int_0^{\tau_0} \phi f_{(t)}(M_{(t)}E_{(t)})(L_{(t)}Z_{(t)})e^{E_{(t)}}d\tau \wedge dZ_{(t)}$ é estimada da mesma forma como a anterior. Finalmente, para o termo $M_{(t)}(\phi f_{(t)})(L_{(t)}Z_{(t)})e^{E_{(t)}}$, temos o seguinte

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{-r}^{r} M_{(t)}(\phi f_{(t)})(L_{(t)}Z_{(t)})e^{E_{(t)}}dZ_{(t)}\right| \\
= &\left|\left\langle M_{(t)}(\phi(\cdot)f_{(t)}(\cdot,\tau)), (L_{(t)}Z_{(t)})e^{E_{(t)}}\right\rangle\right| \\
= &\left|\left\langle \frac{1}{\partial_x(Z_{(t)})(x,\tau)}\frac{\partial}{\partial x}(\phi(x)f_{(t)}(x,\tau)), (L_{(t)}Z_{(t)})e^{E_{(t)}}\right\rangle\right| \\
= &\left|\left\langle f_{(t)}(x,\tau), \phi(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\partial_x(Z_{(t)})(x,\tau)}(L_{(t)}Z_{(t)})e^{E_{(t)}}\right)\right\rangle\right| \\
\leq &\; C\sum_{m=0}^{N}\left\|\partial_x^m\left[\phi\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\partial_x(Z_{(t)})(x,\tau)}(L_{(t)}Z_{(t)})e^{E_{(t)}}\right)\right]\right\|_{L^\infty} \\
\leq &\; C\tau^k e^{-c_1\tau|\xi|} \leq \frac{M_k}{|\xi|^k},
\end{aligned}$$

$k = 1, 2, \ldots$, donde segue que, esta última integral tem um decrescimento rápido em ξ. Portanto,

$$\int_{-r}^{r}\int_0^{\tau_0} d(g_{(t)}dZ_{(t)})$$

tem um decaimento rápido em ξ, e voltando para a expressão (2.2.4), mostramos que

$$F(s,\xi) = \int_{-r}^{r} e^{i\xi(s-x)-|\xi||s-x|^2}\phi(x)f(x,0)dx \tag{2.2.10}$$

decai rapidamente para $|s| \leq \delta$ em $\mathbb{R}$ e ξ numa vizinhança cônica Γ' de ξ_0. A função $F(s,\xi)$ é a transformada de FBI da distribuição $\phi(x)f(x,0)$. Pelo fato da transformada de FBI ter este comportamento, segue do Teorema 1.5.34 que $(0,\xi_0) \notin WF(bf)$. (Lembre que ξ_0 foi escolhido em $\{-1,1\}$). ∎

O próximo resultado é o que chamamos de Lema Fundamental e ele descreve o conjunto frente de onda do traço de uma solução homogênea de um sistema de campos vetoriais localmente integráveis. No lema abaixo $\mathcal{W}$ e $\mathcal{V}$ são como no Teorema 2.1.2, apenas com a diferença que escolhemos a integral primeira $Z(x,t) = x + i\varphi(x,t)$ definida numa vizinhança do fecho de $(-A, A) \times \Gamma_T$, com φ uma função real e suave tal que $\varphi(0,0) = 0$, $\varphi_x(0,0) = 0$ e $\varphi_{xx}(0,0) = 0$ (veja a Proposição 1.1.15).

Lema 2.2.3 (Lema fundamental) *Seja $f \in C(\mathcal{W})$. Suponha que $L_j f = 0$, para todo $j = 1, \ldots, n$, e que o traço $bf(x)$ existe quando $t \to 0$. Se, para algum $-A < x_0 < A$ e para todo $\epsilon > 0$ a órbita do conjunto de campos $\{ReL_j, ImL_j : \ j = 1, \ldots, n\}$ em $\{x_0\} \times (\Gamma_\epsilon \cup \{0\})$ que passa pelo ponto $(x_0, 0)$ tem dimensão $n+1$ então, existe*

$$\xi_0 \in \{-1, 1\} \quad \textit{tal que} \quad (x_0, \xi_0) \notin WF(bf).$$

Ou seja, o conjunto frente de onda de bf em x_0 está contido numa semi-reta fechada.

Antes de apresentar a demonstração do Lema Fundamental veremos uma proposição que irá comparar a dimensão da órbita de um conjunto de campos num determinado conjunto que passa por um ponto específico com a não-elipticidade desses campos perto deste ponto.

Proposição 2.2.4 *Considere $L_1, \ldots, L_n$ como acima. Então, são equivalentes:*

(i) *Existe $\epsilon > 0$ tal que a órbita do conjunto de campos $\{ReL_j, ImL_j : j = 1, \ldots, n\}$ em $\{x_0\} \times (\Gamma_\epsilon \cup \{0\})$ que passa pelo ponto $(x_0, 0)$ tem dimensão n.*

(ii) *Existe $\epsilon > 0$ tal que $(L_1, \ldots, L_n)$ não é elíptico em (x_0, t) para todo $t \in \Gamma_\epsilon \cup \{0\}$.*

(iii) *Existe $\epsilon > 0$ tal que $L_j = \frac{\partial}{\partial t_j}$, para todo $j = 1, \ldots, n$ em $\{x_0\} \times (\Gamma_\epsilon \cup \{0\})$.*

(iv) *Existe $\epsilon > 0$ tal que $\varphi(x_0, t) \equiv \varphi(x_0, 0)$ para todo $t \in \Gamma_\epsilon \cup \{0\}$.*

Demonstração: A demonstração se baseia nas seguintes equivalências:
$\exists \epsilon > 0$ tal que $(L_1, \ldots, L_n)$ não é elíptico em (x_0, t), $\forall t \in \Gamma_\epsilon \cup \{0\}$
$\Longleftrightarrow Imb_j(x_0, t) = 0, \ \forall\ j = 1, \ldots, n, \ \forall\ t \in \Gamma_\epsilon \cup \{0\}$
$\Longleftrightarrow \varphi_{t_j}(x_0, t) = 0, \ \forall\ j = 1, \ldots, n, \ \forall\ t \in \Gamma_\epsilon \cup \{0\}$
$\Longleftrightarrow L_j = \frac{\partial}{\partial t_j}$ em $\{x_0\} \times (\Gamma_\epsilon \cup \{0\})$ $\forall\ j = 1, \ldots, n$
$\Longleftrightarrow$ A órbita de $\{ReL_j, ImL_j : j = 1, \ldots, n\}$ em $\{x_0\} \times (\Gamma_\epsilon \cup \{0\})$ que passa pelo ponto $(x_0, 0)$ tem dimensão n.
Assim (ii)$\Leftrightarrow$(iii)$\Leftrightarrow$(i). E a prova de (ii)$\Leftrightarrow$(iv) segue de:
$\exists \epsilon > 0$ tal que $\varphi(x_0, t) = \varphi(x_0, 0)$, $\forall\ t \in \Gamma_\epsilon \cup \{0\} \Longleftrightarrow \varphi_{t_j}(x_0, t) = 0$, $\forall\ j = 1, \ldots, n$, $\forall\ t \in \Gamma_\epsilon \cup \{0\}$. $\square$

Demonstração do lema fundamental: Como na demonstração do Lema 2.2.1, a função f será considerada de classe C^1 ao longo desta demonstração. O caso f contínua segue análogo ao Passo 2 do Teorema 2.1.2. Assumiremos, sem perda de generalidade, que $x_0 = 0$. Seja $\dot{t} \in \Gamma^0$ um ponto fixo. A escolha precisa de $\dot{t}$ será feita posteriormente.

Considere o conjunto de pontos $Y_{(\dot{t})} = \{(x, \tau\dot{t}) :\ x \in (-A, A),\ \tau \in (0, T)\}$. Escrevendo $t = \tau\dot{t}$, temos que

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \dot{t} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_n} \right).$$

Considere

$$L_{(\dot{t})} = \frac{\partial}{\partial \tau} + b^{(\dot{t})}(x, \tau) \frac{\partial}{\partial x},$$

onde $b^{(\dot{t})}(x, \tau) = \dot{t} \cdot (b_1(x, \tau\dot{t}), \ldots, b_n(x, \tau\dot{t}))$. Dada uma função $g_{(\dot{t})}(x, \tau) \in C^1$ a diferencial da 1-forma $g_{(\dot{t})}(x, \tau) dZ_{(\dot{t})}$, onde $dZ_{(\dot{t})} = (dZ)|_{Y_{(\dot{t})}}$, é dada por

$$d(g_{(\dot{t})} dZ_{(\dot{t})}) = L_{(\dot{t})} g_{(\dot{t})} d\tau \wedge dZ_{(\dot{t})}. \tag{2.2.11}$$

Para $\zeta \in \{z \in \mathbb{C}; Rez > 0 \text{ e } |Imz| < \epsilon Rez, \quad \text{para algum } \ \epsilon > 0\}$ e $z \in \mathbb{C}$, defina

$$E(z, \zeta, x, t) = i\zeta\, (z - Z(x, t)) - \kappa \xi_0 \langle \zeta \rangle (z - Z(x, t))^2,$$

onde κ é um parâmetro e ξ_0 é o mesmo do enunciado do teorema, este ξ_0 ainda será formalmente escolhido.

Seja $\phi \in C_c^\infty(-r, r)$, tal que $\phi(x) = 1$ para $|x| \leq r/2$. Os valores precisos de r e κ serão determinados mais tarde. Aplicando (2.2.11) a função

$$g_{(\dot{t})}(z, \zeta, x, \tau) = \phi(x) f_{(\dot{t})}(x, \tau) e^{E_{(\dot{t})}(z, \zeta, x, \tau)},$$

onde (z, ζ) são parâmetros, $f_{(\dot{t})}(x, \tau) = f(x, \tau\dot{t})$ e $E_{(\dot{t})}(z, \zeta, x, \tau) = E(z, \zeta, x, \tau\dot{t})$, obtemos

$$d(g_{(\dot{t})} dZ_{(\dot{t})}) = f_{(\dot{t})} (L_{(\dot{t})} \phi) e^{E_{(\dot{t})}} d\tau \wedge dZ_{(\dot{t})}. \tag{2.2.12}$$

Pelo Teorema de Stokes, para $\tau_0 > 0$ pequeno, temos

$$\begin{aligned} \int_{-r}^{r} g_{(\dot{t})}(z, \zeta, x, 0) d_x Z_{(\dot{t})}(x, 0) \ &= \ \int_{-r}^{r} g_{(\dot{t})}(z, \zeta, x, \tau_0) d_x Z_{(\dot{t})}(x, \tau_0) \\ &\quad + \int_{0}^{\tau_0} \int_{-r}^{r} d(g_{(\dot{t})} dZ_{(\dot{t})}). \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

Queremos estimar as duas integrais do lado direito de (2.2.13) e o objetivo é mostrar que para x e z perto da origem do plano real e complexo respectivamente, ambas decaem exponencialmente como $\zeta \to \infty$ numa vizinhança cônica de ξ_0. Observe que,

$$ReE(0, \xi_0, x, t) = \varphi(x, t)\xi_0 - \kappa \left(x^2 - \varphi(x, t)^2 \right).$$

A principal tarefa será escolher o ponto $\dot{t} \in \Gamma_0$ adequado (i.e., a direção na qual se aplicará o Teorema de Stokes) e determinar valores convenientes de τ_0, κ e r de modo que para algum $\gamma > 0$

(1) $ReE_{(\dot{t})}(0, \xi_0, x, \tau_0) = ReE(0, \xi_0, x, \tau_0\dot{t}) \leq -\gamma$ para $|x| \leq r$;

(2) $ReE_{(\dot{t})}(0,\xi_0,x,\tau) = ReE(0,\xi_0,x,\tau\dot{t}) \leq -\gamma$ para $0 \leq \tau \leq \tau_0$ e $r/2 \leq |x| \leq r$.

A forma como φ foi escolhida permite escrever

$$\varphi(x,t) = \varphi(0,t) + e(x,t), \quad |e(x,t)| \leq A'|xt| + B'x^2 \tag{2.2.14}$$

para algumas constantes positivas A' e B'. Podemos assumir que $\varphi_{t_j}(0,0) = 0$, para todo $j = 1,\ldots,n$, caso contrário o resultado que se quer provar segue do Lema 2.2.1. Portanto, podemos assumir que o quociente

$$\frac{|\varphi(0,t)|}{|t|^2} \leq C \quad \text{para} \quad t \in \Gamma_T.$$

A escolha conveniente de ξ_0 segue do seguinte lema:

Lema 2.2.5 *Existe uma seqüência $s_k \to 0$ em Γ_T tal que*

(1) $\varphi(0,s_k) \neq 0$;

(2) $|\varphi(0,t)| \leq |\varphi(0,s_k)|$ *para* $t \in B(0,|s_k|) \cap \Gamma_T$ *onde* $B(0,|s_k|) = \{t \in \mathbb{R}^n : |t| \leq |s_k|\}$;

(3) $\displaystyle\lim_{s_k \to 0} \frac{\varphi(0,s_k)}{|\varphi(0,s_k)|} = -\xi_0.$

Prova do Lema 2.2.5: Por hipótese a órbita do conjunto de campos $\{ReL_j, ImL_j : j = 1,\ldots,n\}$ em $\{0\} \times (\Gamma_\epsilon \cup \{0\})$ que passa pela origem tem dimensão $n+1$. Pela Proposição 2.2.4 existe uma seqüência $l_k \to 0$ em Γ_T tal que $\varphi(0,l_k) \neq 0$ para todo k. Escolha

$$s_k \in B(0,|l_k|) \cap \Gamma_T \quad \text{tal que} \quad |\varphi(0,s_k)| = \sup_{s \in B(0,|l_k|) \cap \Gamma_T} |\varphi(0,s)|.$$

Como $\varphi(0,l_k) \neq 0$ e $\varphi(0,0) = 0$ o supremo acima é assumido num ponto $s_k \neq 0$. Logo, a seqüência (s_k) satisfaz (1) e (2) do lema. E esta, por sua vez, possuiu uma subseqüência que satisfaz (1), (2) e (3). □

Observe que os pontos da seqüência s_k podem ser escritos como $\tau_k t'_k$, com $t'_k \in \Gamma^0$ e $\tau_k = |s_k|$. Esta representação será útil no decorrer da demonstração.

Continuemos a demonstração do teorema usando ξ_0 obtido no item (3) do Lema 2.2.5. Note que,

$$\varphi(0,s_k) + |\varphi(0,s_k)|\xi_0 = o(|\varphi(0,s_k)|).$$

Como $(\xi_0)^2 = 1 > 0$, segue que

$$\begin{aligned} \varphi(0,s_k)\xi_0 &= -|\varphi(0,s_k)|(\xi_0)^2 + o(|\varphi(0,s_k)|) \\ &< -\frac{|\varphi(0,s_k)|}{2} = -c|\varphi(0,s_k)|, \end{aligned}$$

para $|s_k|$ pequeno e $c = 1/2$. Escolha, agora

$$r = \alpha \frac{|\varphi(0,s_k)|}{|s_k|},$$

com α e $|s_k|$ pequenos a serem escolhidos. Assim, para $|x|\leq r$ e $t\in B(0,|s_k|)\cap\Gamma_T$,

$$\begin{aligned}
|e(x,t)| &\leq A'|xt| + B'|x|^2 \leq A'r|t| + B'r^2 \\
&= A'\alpha\frac{|\varphi(0,s_k)|}{|s_k|}|t| + B'\alpha^2\frac{|\varphi(0,s_k)|}{|s_k|^2}|\varphi(0,s_k)| \\
&\leq A'\alpha|\varphi(0,s_k)| + B'C\alpha^2|\varphi(0,s_k)|.
\end{aligned}$$

Agora escolha α suficientemente pequeno tal que

$$|e(x,t)| \leq c\frac{|\varphi(0,s_k)|}{2}, \tag{2.2.15}$$

este c é o mesmo obtido agora a pouco ao estimarmos $\varphi(0,s_k)\xi_0$. Note que α depende de A', B' e C, mas não depende de s_k. Isto implica que no suporte de $\phi(x)$ temos

$$-(1+c)|\varphi(0,s_k)| \leq \varphi(x,s_k)\xi_0 \leq -\frac{c}{2}|\varphi(0,s_k)|. \tag{2.2.16}$$

Seja $\kappa=\epsilon/|\varphi(0,s_k)|$. De (2.2.14), (2.2.15) e do fato $|\varphi(0,t)|\leq|\varphi(0,s_k)|$, para $t\in B(0,|s_k|)\cap\Gamma_T$, segue que

$$\begin{aligned}
|\varphi(x,t)| &\leq (1+c)|\varphi(0,s_k)| \\
|\varphi(x,t)|^2 &\leq (1+c)^2|\varphi(0,s_k)|^2 \\
\kappa|\varphi(x,t)|^2 &\leq \epsilon(1+c)^2|\varphi(0,s_k)|
\end{aligned} \tag{2.2.17}$$

para x no suporte de $\phi(x)$. Escolhendo $\epsilon=c/4(1+c)^2$ (assim, independente de s_k) obtemos, de (2.2.16) e (2.2.17), no suporte de $\phi(x)$, que

$$\varphi(x,s_k)\xi_0+\kappa|\varphi(x,s_k)|^2 \leq -\frac{c}{2}|\varphi(0,s_k)| + \epsilon(1+c)^2|\varphi(0,s_k)| \leq -\frac{c}{4}|\varphi(0,s_k)|.$$

Desta última desigualdade, segue que:

$$\begin{aligned}
ReE(0,\xi_0,x,s_k) &= \varphi(x,s_k)\xi_0 - \kappa\left(x^2-|\varphi(x,s_k)|^2\right) \\
&\leq \varphi(x,s_k)\xi_0+\kappa|\varphi(x,s_k)|^2 \\
&\leq -\frac{c}{4}|\varphi(0,s_k)| \leq -\gamma_1, \quad \gamma_1>0.
\end{aligned} \tag{2.2.18}$$

Como $ReE(z,\zeta,x,t)$ é uma função contínua em relação as variáveis z e ζ e homogênea de grau 1 em relação a ζ temos que $ReE(z,\zeta,x,s_k)\leq-\gamma_1|\zeta|$, com z numa vizinhança complexa da origem e ζ numa vizinhança cônica complexa de ξ_0.

Ainda de (2.2.17) obtemos, para x no suporte de $\phi(x)$ e $t\in B(0,|s_k|)\cap\Gamma_T$,

$$|\varphi(x,t)|+\kappa|\varphi(x,t)|^2 \leq (1+c)|\varphi(0,s_k)| + \frac{c}{4}|\varphi(0,s_k)| \leq (1+2c)|\varphi(0,s_k)|,$$

enquanto no suporte de $L_j\phi$, $|x|\geq\frac{r}{2}=\alpha\frac{|\varphi(0,s_k)|}{2|s_k|}$, para todo $j=1,\ldots,n$, donde

$$\kappa x^2 \geq \kappa\alpha^2\frac{|\varphi(0,s_k)|^2}{4|s_k|^2} = \epsilon\alpha^2\frac{|\varphi(0,s_k)|}{4|s_k|^2}.$$

Assim, para x no suporte de $\phi(x)$ e $t \in B(0,|s_k|) \cap \Gamma_T$,

$$\varphi(x,t)\xi_o - \kappa(x^2 - |\varphi(x,t)|^2) \leq \left(1+2c-\frac{\epsilon\alpha^2}{4|s_k|^2}\right)|\varphi(0,s_k)| \leq -\gamma_2, \quad \gamma_2 > 0, \quad (2.2.19)$$

desde que $|s_k|$ seja suficientemente pequeno. Portanto, escrevendo $s_k = \tau_k t'_k$, temos para $0 \leq \tau \leq \tau_k$,

$$ReE(0,\xi_0,x,\tau t'_k) = \varphi(x,\tau t'_k)\xi_0 - \kappa(x^2 - \varphi(x,\tau t'_k)^2) \leq -\gamma_2. \qquad (2.2.20)$$

Novamente da continuidade e homogeneidade de ReE segue que $ReE(z,\zeta,x,\tau t_{k'}) \leq -\gamma_2|\zeta|$ com z numa vizinhança complexa da origem, ζ numa vizinhança cônica complexa de ξ_0 e $0 \leq \tau \leq \tau_k$.

Escolha $\dot{t} = t'_k$ e $\tau_0 = \tau_k$ tais que (2.2.19) seja satisfeita (note que esta escolha também garante que (2.2.18) seja válida), κ e r como foram escolhidos acima. Seja $\gamma = max\{\gamma_1,\gamma_2\}$. Voltando para as integrais do lado direito da equação (2.2.13), obtemos de (2.2.18)

$$\left|\int_{-r}^{r} g_{(t)}(z,\zeta,x,\tau_0)d_x Z_{(t)}(x,\tau_0)\right| = \left|\int_{-r}^{r} \phi(x) f_{(t)}(x,\tau_0)e^{E_{(t)}(z,\zeta,x,\tau_0)}d_x Z_{(t)}(x,\tau_0)\right| \leq Ce^{-\gamma|\zeta|},$$

ou seja, a primeira integral do lado direito de (2.2.13) tem um decaimento exponencial. Para estimar a segunda integral do lado direito temos, pelo fato de bf existir no sentido das distribuições, que

$$\left|\int_{-r}^{r} f_{(t)}(L_{(t)}\phi)e^{E_{(t)}}dZ_{(t)}\right| = \left|\langle f_{(t)}(\cdot,\tau),(L_{(t)}\phi)e^{E_{(t)}}\rangle\right| \leq C\sum_{m=0}^{N+1}\|D_x^m((L_{(t)}\phi)e^{E_{(t)}})\|_{L^\infty(-r,r)}$$

($N+1$ é a ordem da distribuição bf, veja Teorema 2.1.2). Logo, por (2.2.20) obtemos que $|\langle f_{(t)}(\cdot,\tau),(L_{(t)}\phi)e^{E_{(t)}}\rangle| \leq Ce^{-\gamma|\zeta|}$. Disto segue que a integral $\int_0^{\tau_0}\int_{-r}^{r} d(g_{(t)}dZ_{(t)}) = \int_{-r}^{r}\int_0^{\tau_0} f_{(t)}(L_{(t)}\phi)e^{E_{(t)}}d\tau \wedge dZ_{(t)}$ decai exponencialmente em $|\zeta|$. Assim, mostramos que a função

$$F(z,\zeta) = \int_{-r}^{r} e^{E(z,\zeta,x,0)}\phi(x)f(x,0)d_x Z(x,0)$$

satisfaz um decaimento exponencial da forma

$$|F(z,\zeta)| \leq Ce^{-R|\zeta|}$$

para z perto de 0 em $\mathbb{C}$ e ζ numa vizinhança cônica complexa de ξ_0 em $\mathbb{C}$. Em particular, como $Z(0,0)=0$ e $d_x Z(0,0)=1$, a função

$$G(x,\xi) = F(Z(x),(Z_x(x))^{-1}\xi),$$

onde $Z(x) = Z(x,0)$, tem um decaimento exponencial para (x,ξ) numa vizinhança cônica real de $(0,\xi_0)$. Pelo Teorema 1.5.42 (ou Teorema 2.2 em **[BCT]**) segue que $(0,\xi_0) \notin WF_{ha}(bf)$, onde WF_{ha} denota o conjunto frente de onda hipo-analítico de bf. E isto implica que $(0,\xi_0) \notin WF(bf)$. ■

2.3 A propriedade de F. e M. Riesz

Nesta seção apresentaremos e demonstraremos o resultado principal do nosso trabalho. Este resultado generaliza o Teorema de F. e M. Riesz provado em **[BH4]**.

Teorema 2.3.1 *Sejam $\mathcal{W}$ e $\mathcal{V}$ como no Lema Fundamental (Lema 2.2.3). Seja $f \in C(\mathcal{W})$, e suponha que $L_j f = 0$, para todo $j = 1, \ldots, n$ em $\mathcal{W}$. Suponha que para algum inteiro N,*

$$\sup_{t' \in \Gamma^0} \int_0^T \int_{-A}^{A} |f(x, \tau t')||\varphi(x, \tau t') - \varphi(x, 0)|^N dx d\tau < \infty. \tag{2.3.1}$$

Em particular, pelo Teorema 2.1.2, o valor de fronteira $bf(x) = f(x, 0)$ existe. Assuma que $bf = \mu$ é uma medida. Então μ é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue.

Na demonstração do Lema Fundamental (Proposição 2.2.4 e demonstração do Lema 2.2.5) provamos que a hipótese da órbita do conjunto de campos $\{ReL_j, ImL_j : j = 1, \ldots, n\}$ em $\{x_0\} \times (\Gamma_\epsilon \cup \{0\})$ que passa pelo ponto $(x_0, 0)$ ter dimensão $n+1$ para todo $\epsilon > 0$, equivale a existência de uma seqüência $s_k \to 0$, em Γ_T, tal que $\varphi(x_0, s_k) \neq \varphi(x_0, 0)$ para todo k. Isto significa que o sistema de campos $(L_1, \ldots, L_n)$ é elíptico nos pontos (x_0, l_k) para alguma seqüência $l_k \to 0$ em Γ_T. Além disto, passando para uma subseqüência $(s_{k'})$ de (s_k) temos que $\varphi(x_0, s_{k'}) < \varphi(x_0, 0)$ ou $\varphi(x_0, s_{k'}) > \varphi(x_0, 0)$. Se o sistema é elíptico no ponto $(x_0, 0)$ segue, do Lema 2.2.1, que $(x_0, -1) \notin WF(bf)$ ou $(x_0, 1) \notin WF(bf)$. Portanto, de **[Br]** segue que, se bf for uma medida, ela é absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue. Assim, o que o Lema Fundamental faz é estender esta mesma conclusão para o caso em que $(x_0, 0)$ não é um ponto elíptico, mas é aproximado, de um certo modo, por pontos elípticos. De fato, se $(x_0, 0)$ não é um ponto elíptico, mas é aproximado, de um certo modo, por pontos elípticos a prova do Lema Fundamental mostra que $(x_0, -1) \notin WF_{ha}(bf)$ ou $(x_0, 1) \notin WF_{ha}(bf)$, isto significa que a restrição de bf a uma vizinhança de x_0 é (após uma mudança de variáveis) o valor de fronteira de uma função holomorfa definida acima ou abaixo (dependendo se $\varphi(x_0, s_{k'}) > \varphi(x_0, 0)$ ou $\varphi(x_0, s_{k'}) < \varphi(x_0, 0)$, respectivamente) da curva $\Sigma = \{x + i\varphi(x, 0)\}$. Pela versão local do clássico Teorema de F. e M. Riesz, se bf é uma medida, bf deve ser absolutamente contínua em relação a medida de Lebesgue, (i.e., representada por uma função integrável) numa vizinhança de $(x_0, 0)$. Raciocinando desta forma, chega-se a conclusão que bf é integrável numa certa vizinhança dos pontos de $(-A, A)$ que podem ser aproximados por pontos elípticos. Assim, pelo Teorema de Radon-Nicodyn, podemos escrever $bf = g + \mu_0$, onde $g \in L^1(-A, A)$ e μ_0 é uma medida singular com respeito à medida de Lebesgue suportada no conjunto $F = \text{supp}\mu_0$ que no nosso caso goza da seguinte propriedade: para qualquer $x \in F$, existe $\epsilon > 0$ tal que $\varphi(x, t) \equiv \varphi(x, 0)$ para $t \in B(0, \epsilon) \cap \Gamma_T$. Então, $F = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$ onde

$$F_n = \{x \in F : \ \varphi(x, t) = \varphi(x, 0), \ \forall t \in \overline{B(0, 1/n) \cap \Gamma_T}\}.$$

Seja

$$F^a = \{x \in F : \ x \ \text{ é um ponto de acumulação de } \ F\}.$$

Portanto, o Teorema 2.3.1 estará provado se demonstrarmos as seguintes proposições:

Proposição 2.3.2 *Se F não tem pontos isolados, isto é, $F = F^a$. Então, $F = \emptyset$.*

Proposição 2.3.3 *F não tem pontos isolados.*

Demonstração do teorema 2.3.1: Pela Proposição 2.3.2 para provar o Teorema 2.3.1 é suficiente mostrar que o suporte de μ_0 não tem pontos isolados (Proposição 2.3.3). De fato, neste caso seu suporte F será vazio e, conseqüentemente μ_0 será identicamente zero, mostrando que $bf = g \in L^1$. ■

Demonstraremos agora as proposições acima.

Demonstração da proposição 2.3.2: Queremos provar que

$$F = F^a \Rightarrow \quad F = \emptyset \tag{2.3.2}$$

sendo $bf = \mu = g + \mu_0$, com $g \in L^1(-A, A)$ e μ_0 ortogonal a medida de Lebesgue, e F^a é o conjunto dos pontos de acumulação de $\operatorname{supp}\mu_0 = F$. Portanto, assuma que $F = F^a$. Seja

$$F_n = \{x \in F : \ \varphi(x,t) = \varphi(x,0) \ \ \forall t \in \overline{B(0,1/n) \cap \Gamma_T}\},$$

assim $F = \bigcup_n F_n$. Suponha que $F \neq \emptyset$. Pelo Teorema de Baire, existe um intervalo $J \subset (-A, A)$ tal que $\emptyset \neq J \cap F \subset F_n$ para algum n. Chegaremos a uma contradição se provarmos que J não contém pontos do suporte de μ_0. Assuma, sem perda de generalidade, que $J = (-B, B)$, para algum $B > 0$. Como n é mantido fixo em toda a demonstração podemos escrever $T_0 = 1/n$ e, assim, evitar qualquer referência a n.

Para qualquer $y \in F \cap (-B, B)$ e $t \in \overline{B(0,T_0) \cap \Gamma_T}$, temos $\varphi(y,t) = \varphi(y,0)$ e como isto vale para qualquer outro $y' \neq y$, $y' \in F \cap (-B, B)$ arbitrariamente próximo de y, segue que $\varphi_x(y,t) = \varphi_x(y,0)$, $y \in F \cap (-B,B)$, $t \in \overline{B(0,T_0) \cap \Gamma_T}$. De fato,

$$\varphi_x(y,t) = \lim_{y' \to y} \frac{\varphi(y',t) - \varphi(y,t)}{y' - y} = \lim_{y' \to y} \frac{\varphi(y',0) - \varphi(y,0)}{y' - y} = \varphi_x(y,0).$$

Assim,

$$\begin{aligned} |\varphi(x,t) - \varphi(x,0)| &\leq |\varphi(x,t) - \varphi(y,t) - (x-y)\varphi_x(y,t)| \\ &\quad + |-\varphi(x,0) + \varphi(y,0) + (x-y)\varphi_x(y,0)| \\ &\leq C|x-y|^2, \quad |x| \leq B, \quad y \in F \cap (-B,B). \end{aligned}$$

Escolhendo $y \in F$ de modo que $|x - y| \leq 2d(x,F)$, obtemos

$$|\varphi(x,t) - \varphi(x,0)| \leq C d(x,F)^2, \qquad |x| \leq B \tag{2.3.3}$$

onde $d(x,S)$ denota a distância de x até o conjunto $S \cap (-B,B)$. Da fórmula (2.1.23), para a distribuição bf, segue que para qualquer $\psi \in C_c^\infty(-B,B)$, qualquer inteiro $m \geq N$ e qualquer $\dot{t} \in \Gamma^0$ fixo

$$\begin{aligned} \langle Z_x(x,0) bf, \psi \rangle &= \int_{-B}^{B} f_{(\dot{t})}(x,T_0)\psi_m(x,T_0) d_x Z_{(\dot{t})}(x,T_0) \\ &\quad + \int_{-B}^{B} \int_0^{T_0} f_{(\dot{t})}(x,\tau) L_{(\dot{t})} \psi_m(x,\tau) d\tau \wedge dZ_{(\dot{t})} \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

onde $Z_{(\dot{t})}(x,\tau) = Z(x,\tau\dot{t})$, $f_{(\dot{t})}(x,\tau) = f(x,\tau\dot{t})$, $L_{(\dot{t})} = \frac{\partial}{\partial\tau} + b^{(\dot{t})}(x,\tau)\frac{\partial}{\partial x}$, com $b^{(\dot{t})}(x,\tau) = \dot{t}\cdot(b_1(x,\tau\dot{t}),\ldots,b_n(x,\tau\dot{t}))$, $\psi_m(x,\tau) = \sum_{k=0}^{m}(\varphi_{(\dot{t})}(x,\tau) - \varphi_{(\dot{t})}(x,0))^k\frac{V^k\psi(x)}{k!}$ e $V = \frac{i}{Z_x(x,0)}\frac{\partial}{\partial x}$.
Portanto,

$$\left|\int_{-B}^{B} f_{(\dot{t})}(x,T_0)\psi_m(x,T_0)d_xZ_{(\dot{t})}(x,T_0)\right| \leq C\sum_{k=0}^{m}\int_{-B}^{B} d(x,F)^{2k}|D_x^k\psi(x)|dx. \quad (2.3.5)$$

Sabemos de (2.1.2) e (2.1.4) que

$$L_{(\dot{t})}\psi_m(x,\tau) = -\frac{i\partial_\tau(\varphi_{(\dot{t})})(x,\tau)}{1+i\partial_x(\varphi_{(\dot{t})})(x,\tau)}\frac{1}{m!}\frac{\partial}{\partial x}V^m\psi(x)(\varphi_{(\dot{t})}(x,\tau)-\varphi_{(\dot{t})}(x,0))^m,$$

que implica que

$$\left|\int_{-B}^{B}\int_{0}^{T_0} f_{(\dot{t})}(x,\tau)L_{(\dot{t})}\psi_m(x,\tau)d\tau\wedge dZ_{(\dot{t})}\right| \leq$$
$$C\int_{-B}^{B}\int_{0}^{T_0}\left|f_{(\dot{t})}(x,\tau)\partial_\tau(\varphi_{(\dot{t})})(x,\tau)\frac{\partial}{\partial x}V^m\psi(x)(\varphi_{(\dot{t})}(x,\tau)-\varphi_{(\dot{t})}(x,0))^m\right|d\tau dx. \quad (2.3.6)$$

Fixe um conjunto compacto $K \subset F$ com medida de Lebesgue $|K| = 0$ e escolha uma seqüência de funções $0 \leq \phi_\epsilon(x) \leq 1$, $\phi_\epsilon \in C_c^\infty(-B,B)$, $\epsilon \to 0$, tal que

(i) $\phi_\epsilon(x) = 1$ para todo $x \in K$;

(ii) $\phi_\epsilon(x) = 0$ se $d(x,K) > \epsilon$;

(iii) $|D_x^j\phi_\epsilon(x)| \leq C_j\epsilon^{-j}$.

Note que $\phi_\epsilon(x)$ converge pontualmente para a função característica de K quando $\epsilon \to 0$ enquanto $D^j\phi_\epsilon(x) \to 0$ pontualmente se $j > 0$.

Seja $\eta \in C_c^\infty(-B,B)$ e aplique (2.3.4), (2.3.5) e (2.3.6) a $\psi = \phi_\epsilon\eta$, tendo em mente a estimativa trivial $d(x,F) \leq d(x,K)$. Pelo Teorema da Convergência Dominada, $\langle\mu,\phi_\epsilon\eta\rangle \to \int_K \eta d\mu$ (lembre que $bf = \mu$) enquanto $\|d(x,K)^{2j}D_x^j(\phi_\epsilon(x)\eta(x))\|_{L^1} \to 0$ quando $\epsilon \to 0$ (quando $j = 0$, use o fato que $|K| = 0$). Assim por (2.3.5) concluímos que a primeira integral do lado direito de (2.3.4) vai para zero quando $\epsilon \to 0$. Isto é,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-B}^{B} f_{(\dot{t})}(x,T_0)(\phi_\epsilon\eta)_m(x,T_0)d_xZ_{(\dot{t})}(x,T_0) = 0.$$

Considere agora o segundo termo do lado direito de (2.3.4) com $\psi = \phi_\epsilon\eta$. Observe que

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}V^m(\phi_\epsilon\eta)(x)\right| \leq \frac{C}{d(x,K)^{m+1}}$$

assim, usando (2.3.3) e escolhendo $m = 2N+2$, temos que

$$\left|\partial_\tau(\varphi_{(\dot{t})})(x,\tau)\frac{\partial}{\partial x}V^m(\phi_\epsilon\eta)(x)f(x,\tau\dot{t})(\varphi_{(\dot{t})}(x,\tau)-\varphi_{(\dot{t})}(x,0))^m\right| \leq$$
$$C|f(x,\tau\dot{t})||\varphi(x,\tau\dot{t})-\varphi(x,0)|^N d(x,K)\chi_\epsilon(x)$$

onde $\chi_\epsilon(x)$ é a função característica do conjunto $\{x:\ d(x,K)<\epsilon\}$. Como

$$\sup_{t'\in\Gamma^0}\int_{-A}^{A}\int_0^{T_0}|f(x,\tau t')||\varphi(x,\tau t')-\varphi(x,0)|^N d\tau dx < \infty$$

então

$$|f(x,\tau\dot{t})||\varphi(x,\tau\dot{t})-\varphi(x,0)|^N \in L^1((-B,B)\times(0,T_0))$$

donde

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-B}^{B}\int_0^{T_0} f_{(\dot{t})}(x,\tau)L_{(\dot{t})}(\phi_\epsilon\eta)_{2N+2}(x,\tau)d\tau\wedge dZ_{(\dot{t})} = 0.$$

Logo,mostramos que

$$\int_K \eta d\mu = 0, \quad \eta\in C_c^\infty(-B,B),$$

o que implica que a mesma conclusão vale para qualquer função contínua η em K (primeiro estenda η a uma função contínua com suporte compacto contido em $(-B,B)$ e então aproxime a extensão por funções teste). Assim, a variação total $|\mu|(K)$ de μ em K é zero e pela regularidade de μ segue que $|\mu|(F')=0$ para todo conjunto de Borel $F'\subset F$ com $|F'|=0$. Como μ_0 é a parte singular de μ e assim está concentrada num conjunto de medida de Lebesgue nula, segue que $\mu_0\equiv 0$ em $(-B,B)$. Portanto, $\mathrm{supp}\mu_0\cap(-B,B)=\emptyset$, uma contradição. Provando (2.3.2). ∎

Demonstração da proposição 2.3.3: Suponha, por contradição, que F contém um ponto isolado p, trabalhando numa pequena vizinhança de p podemos supor que ele é o único ponto isolado de F. Assim a prova será reduzida ao caso em que $bf = g + c\delta_p$, para alguma $g\in L^1$, $c\in\mathbb{C}$, $c\neq 0$, $p\in(-A,A)$ e $\varphi(p,t)\equiv\varphi(p,0)$, $t\in\overline{\Gamma_\epsilon}$, para algum $\epsilon>0$. Esta é a situação que será estudada.
Podemos assumir que

$$\varphi(0,0)=\varphi_x(0,0)=\varphi_{xx}(0,0)=0. \tag{2.3.7}$$

Pelas reduções discutidas acima é suficiente considerar o caso

$$bf = g + c\delta_0 \tag{2.3.8}$$

onde g é integrável, c é um número complexo, δ_0 é a distribuição delta de Dirac na origem e

$$\varphi(0,t)\equiv 0, \quad t\in\overline{\Gamma_T} \tag{2.3.9}$$

Então a função $t \longmapsto f(0,t)$ é constante em Γ_T e sem perda de generalidade, podemos assumir que

$$f(0,t) \equiv 0, \quad t \in \Gamma_T. \tag{2.3.10}$$

De fato, como $\varphi(0,t) \equiv 0$ para $t \in \Gamma_T \cup \{0\}$, então $\varphi_{t_j}(0,t) = 0$ para $t \in \Gamma_T \cup \{0\}$ e para todo $j = 1, \ldots, n$, logo

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} \quad \text{em} \quad \{0\} \times \Gamma_T, \quad \text{para todo} \quad j = 1, \ldots, n.$$

Como $L_j f = 0$, para todo $j = 1, \ldots, c$ então, $f_{t_j}(0,t) = 0$ para todo $t \in \Gamma_T$ e para todo $j = 1, \ldots, n$. Donde, $f(0,t) = c$ para $t \in \Gamma_T$, sendo c uma constante. Considere a função $F(x,t) = f(x,t) - c$, então $F(0,t) = 0$ para todo $t \in \Gamma_T$ e $bF = bf - c$, se bf é absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue então bF também será. Portanto, pode-se considerar $f(0,t) = 0$ para $t \in \Gamma_T$.

Escreva $f(x,t) = f_1(x,t) + f_2(x,t)$, onde $f_1(x,t) = f(x,t)$ se $x \geq 0$, e $f_1(x,t) = 0$ quando $x < 0$. Observe que, por (2.3.9), $L_j = \frac{\partial}{\partial t_j}$ em $\{0\} \times \Gamma_T$ e portanto $L_j f_k = 0$ em $(-A, A) \times \Gamma_T$ ($j = 1 \ldots, n$ e $k = 1, 2$). De fato, dada $\eta \in C_c^\infty((-A, A) \times \Gamma_T)$, precisamos mostrar que $\langle L_j f_1(x,t), \eta(x,t) \rangle = 0$, para todo $j = 1, \ldots, n$. Seja $\chi(x) \in C_c^\infty(-1, 1)$ tal que $\chi(x) = 1$ para $|x| \leq 1/2$, e considere $\chi_\epsilon(x) = \chi(\frac{x}{\epsilon})$, logo

$$\begin{aligned} \langle L_j f_1(x,t), \eta(x,t) \rangle &= \langle L_j f_1(x,t), \chi_\epsilon(x)\eta(x,t) \rangle + \langle L_j f_1(x,t), (1 - \chi_\epsilon(x))\eta(x,t) \rangle \\ &= (1) + (2) \end{aligned}$$

$(2) = 0$, pois para $x < 0$ $f_1(x,t) = 0$ e para $x > 0$ $f_1 = f$ e $L_j f = 0$, e

$$\begin{aligned} (1) &= -\left\langle f_1(x,t), \chi_\epsilon(x) \left(\frac{\partial}{\partial t_j}(\eta(x,t)) + \frac{\partial}{\partial x}(b_j(x,t)\eta(x,t)) \right) \right\rangle \\ &\quad - \left\langle f_1(x,t), b_j(x,t)\eta(x,t) \frac{\partial}{\partial x} \chi_\epsilon(x) \right\rangle \\ &= (1') + (2') \end{aligned}$$

pelo Teorema da Convergência Dominada $(1') \to 0$ quando $\epsilon \to 0$. Usando o fato que $b_j(x,t) = xR(x,t)$, pois $b_j(0,t) = 0$ para todo $j = 1, \ldots, n$, $(2') \to 0$ quando $\epsilon \to 0$. Portanto, $L_j f_1 = 0$. Similarmente prova-se que $L_j f_2 = 0$. Das hipóteses sobre a f, segue que

$$\sup_{t' \in \Gamma^0} \int_0^T \int_{-A}^{A} |f_1(x, \tau t')| |\varphi(x, \tau t') - \varphi(x, 0)|^N dx d\tau < \infty. \tag{2.3.11}$$

Portanto, pelo Teorema 2.1.2 f_1 (e f_2) tem um valor de fronteira bf_1 (e bf_2) em $t = 0$. Da expressão (2.3.8) temos que

$$bf_1 = \chi_{(0,A)}(x) g(x) + \sum_{j=0}^{p} c_j \delta_0^{(j)} \tag{2.3.12}$$

onde $\chi_{(0,A)}(x)$ é a função característica de $(0,A)$ e $\delta_0^{(j)}$ são as derivadas da distribuição delta de Dirac na origem de ordem j. Para ver que isto de fato vale, basta mostrar que o suporte de $bf_1(x) - \chi_{(0,A)}(x)g(x)$ está contido na origem (Teorema 1.5.3 de **[H1]**). A distribuição bf_2 também tem uma estrutura semelhante ($bf_2 = \chi_{(-A,0)}(x)g(x) + \sum_{j=0}^{q} d_j\delta_0^{(j)}$). Se em (2.3.12) tivermos $\sum_{j=0}^{p} c_j\delta_0^{(j)} \neq 0$, podemos supor que $c_p \neq 0$. Considere, agora, a solução $h(x,t) = Z(x,t)^p f_1(x,t)$, é fácil ver que $h(x,t)$ tem um valor de fronteira quando $t \to 0$. Note que $bh = \chi_{(0,A)}(x)g(x)Z(x,0)^p + c\delta_0$. De fato, dada $\eta \in C_c^\infty(-A,A)$ temos

$$\lim_{t\to 0}\langle h(x,t),\eta(x)\rangle = \lim_{t\to 0}\langle f_1(x,t), Z(x,t)^p\eta(x)\rangle = \langle bf_1, \eta(x)Z(x,0)^p\rangle.$$

Como $Z(x,0) = x + i\varphi(x,0) = x + ix^2 r(x)$, então

$$\begin{aligned}\langle c_j\delta_0^{(j)}, \eta(x)Z(x,0)^p\rangle &= \langle c_j\delta_0^{(j)}, x^p + x^{p+1}\tilde{r}(x)\rangle \\ &= \begin{cases} (-1)^j\langle c_j\delta_0, c'x\tilde{r}(x)\rangle = 0, & \text{se } j<p \\ (-1)^p\langle c_p\delta_0, c''(\eta(x) + \tilde{c}xR(x))\rangle = c\eta(0), & \text{se } j=p\end{cases}\end{aligned}$$

Portanto, $bh = \chi_{(0,A)}(x)g(x)Z(x,0)^p + c\delta_0$. Se provarmos que $c=0$ então $c_p = 0$, o que seria uma contradição. Logo $\sum_{j=0}^{p} c_j\delta_0^{(j)} = 0$. Assim, trocando f_1 por f_1Z^p é suficiente considerar o caso em que $p=0$ em (2.3.12), ou seja,

$$bf_1 = \chi_{(0,A)}(x)g(x) + c\delta_0. \tag{2.3.13}$$

Sabemos que para $\psi \in C_c^\infty(-A,A)$, para qualquer inteiro positivo $m \geq N$, para $\dot{t} \in \Gamma^0$ fixo e $0 < T_0 < T$,

$$\begin{aligned}\langle Z_x(x,0)bf_1, \psi\rangle &= \int_0^A (f_1)_{(\dot{t})}(x,T_0)\psi_m(x,T_0)d_xZ_{(\dot{t})}(x,T_0) \\ &\quad + \int_0^A\int_0^{T_0}(f_1)_{(\dot{t})}(x,\tau)L_{(\dot{t})}\psi_m(x,\tau)d\tau\wedge dZ_{(\dot{t})}\end{aligned} \tag{2.3.14}$$

onde

$$(f_1)_{(\dot{t})}(x,\tau) = f_1(x,\tau\dot{t}), \quad L_{(\dot{t})} = \frac{\partial}{\partial\tau} + b^{(\dot{t})}(x,\tau)\frac{\partial}{\partial x},$$

com $b^{(\dot{t})}(x,\tau) = \dot{t}\cdot(b_1(x,\tau\dot{t}),\ldots,b_n(x,\tau\dot{t}))$,

$$\psi_m(x,\tau) = \sum_{k=0}^{m}(\varphi_{(\dot{t})}(x,\tau) - \varphi_{(\dot{t})}(x,0))^k\frac{V^k\psi(x)}{k!}, \qquad V = \frac{i}{Z_x(x,0)}\frac{\partial}{\partial x}, \tag{2.3.15}$$

$\varphi_{(\dot{t})}(x,\tau) = \varphi(x,\tau\dot{t})$ e

$$L_{(\dot{t})}\psi_m = -\frac{i\partial_\tau(\varphi_{(\dot{t})})(x,\tau)}{1 + i\partial_x(\varphi_{(\dot{t})})(x,\tau)}\frac{1}{m!}\frac{\partial}{\partial x}\left(V^m\psi(x)\right)(\varphi_{(\dot{t})}(x,\tau) - \varphi_{(\dot{t})}(x,0))^m. \tag{2.3.16}$$

Gostaríamos de usar uma variação da fórmula (2.3.14) com ψ suave, mas não necessariamente com suporte compacto. Seja $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ e para $m \geq N$ seja $\psi_m(x,\tau)$ definida como em (2.3.15). Para $0 < B < A$, $0 < \epsilon < T_0 < T$ e $\dot{t} \in \Gamma^0$, a fórmula de integração por partes dá:

$$\begin{aligned}\int_0^B (f_1)_{(\dot{t})}(x,\epsilon)\psi_m(x,\epsilon)d_x Z_{(\dot{t})}(x,\epsilon) &= \int_0^B (f_1)_{(\dot{t})}(x,T_0)\psi_m(x,T_0)d_x Z_{(\dot{t})}(x,T_0) \\ &+ \int_\epsilon^{T_0}\int_0^B (f_1)_{(\dot{t})}(x,\tau)L_{(\dot{t})}\psi_m(x,\tau)d\tau\wedge dZ_{(\dot{t})} \\ &- i\int_\epsilon^{T_0}(f_1)_{(\dot{t})}(B,\tau)\psi_m(B,\tau)\partial_\tau(\varphi_{(\dot{t})})(B,\tau)d\tau. \quad (2.3.17)\end{aligned}$$

Observação: Esta fórmula vale diretamente caso $f_1 \in C^1$, mas pela regularização considerada no Passo 2 da demonstração do Teorema 2.1.2 podemos provar que ela também vale no caso em que f_1 é contínua.

Nosso objetivo é fazer $\epsilon \to 0$ em (2.3.17). Primeiro fixe $h \in C_c^\infty(-B,B)$, $h \equiv 1$ em $(-B_1,B_1)$, para algum $0 < B_1 < B$. Então,

$$\begin{aligned}\int_0^B (f_1)_{(\dot{t})}(x,\epsilon)\psi_m(x,\epsilon)d_x Z_{(\dot{t})}(x,\epsilon) &= \int_{-A}^A (f_1)_{(\dot{t})}(x,\epsilon)h(x)\psi_m(x,\epsilon)d_x Z_{(\dot{t})}(x,\epsilon) \\ &+ \int_{-B}^B (f_1)_{(\dot{t})}(x,\epsilon)(1-h(x))\psi_m(x,\epsilon)d_x Z_{(\dot{t})}(x,\epsilon). \quad (2.3.18)\end{aligned}$$

Como $\psi_m(x,\epsilon)(f_1)_{(\dot{t})}(x,\epsilon) \to \psi(x)bf_1(x)$ em $\mathcal{D}'(-A,A)$ quando $\epsilon \to 0$, temos

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-A}^A (f_1)_{(\dot{t})}(x,\epsilon)h(x)\psi_m(x,\epsilon)d_x Z_{(\dot{t})}(x,\epsilon) = \langle bf_1, h(x)\psi(x)\rangle. \quad (2.3.19)$$

O lema seguinte dá o valor do limite da segunda integral do lado direito de (2.3.18).

Lema 2.3.4 *Após escolher B e B_1 convenientemente, temos*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-A}^B (f_1)_{(\dot{t})}(x,\epsilon)(1-h(x))\psi_m(x,\epsilon)d_x Z_{(\dot{t})}(x,\epsilon) = \int_0^B g(x)(1-h(x))\psi(x)dx. \quad (2.3.20)$$

Demonstração: Considere os conjuntos

$$E_1 = \{x \in [0,B] : \ \varphi_{(\dot{t})}(x,\tau) = \varphi_{(\dot{t})}(x,0), \quad \tau \in [0,\lambda], \ \text{ para algum } \ \lambda > 0\},$$

$$E_2 = \{x \in [0,B] : \ \varphi_{(\dot{t})}(x,\tau) \geq \varphi_{(\dot{t})}(x,0), \quad \tau \in [0,\lambda], \ \text{ para algum } \ \lambda > 0\},$$

$$E_3 = \{x \in [0,B] : \ \varphi_{(\dot{t})}(x,\tau) \leq \varphi_{(\dot{t})}(x,0), \quad \tau \in [0,\lambda], \ \text{ para algum } \ \lambda > 0\},$$

$$E_4 = \{x \in [0,B] : \ \text{ para algum } \ \tau_j \to 0, \ s_j \to 0, \quad \varphi_{(\dot{t})}(x,s_j) < \varphi_{(\dot{t})}(x,0) < \varphi_{(\dot{t})}(x,\tau_j)\}.$$

Observe que o intervalo $[0,B] = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$. Suponha $E_4 \neq \emptyset$. Seja $x_0 \in E_4$. Pelo Lema Fundamental e pelo comentário logo abaixo do enunciado do Teorema 2.3.1 segue que existe uma função holomorfa H definida numa vizinhança de $Z(x_0,0)$ tal que $(f_1)_{(\dot{t})}(x,\tau) = H(Z_{(\dot{t})}(x,\tau))$, para x perto de x_0 e $\tau > 0$ perto de zero. Em particular, $(f_1)_{(\dot{t})}(x,\tau)$ tem uma extensão suave a uma vizinhança de $(x_0,0)$. Assim, escolhendo $B_1 < B$ próximos de x_0 temos que (2.3.20) vale. Portanto, podemos assumir $E_4 = \emptyset$. Cada um dos outros três conjuntos podem ser escritos como uma união enumerável de conjuntos fechados como segue:

$$E_1 = \cup_{j=1}^{\infty} E_{1j} \text{ onde } E_{1j} = \{x \in [0,B] : \ \varphi_{(t)}(x,\tau) = \varphi_{(t)}(x,0), \quad \tau \in [0,1/j]\},$$

$$E_2 = \cup_{j=1}^{\infty} E_{2j} \text{ onde } E_{2j} = \{x \in [0,B] : \ \varphi_{(t)}(x,\tau) \geq \varphi_{(t)}(x,0), \quad \tau \in [0,1/j]\},$$

$$E_3 = \cup_{j=1}^{\infty} E_{3j} \text{ onde } E_{3j} = \{x \in [0,B] : \ \varphi_{(t)}(x,\tau) \leq \varphi_{(t)}(x,0), \quad \tau \in [0,1/j]\}.$$

Assim, o intervalo $[0,B]$ é uma união enumerável dos E_{ij} e pelo Teorema de Baire um destes conjuntos contém um intervalo $[B', B'']$, $B' < B''$. Consideremos dois casos essenciais:

Caso 1. Suponha $\varphi_{(t)}(x,\tau) = \varphi_{(t)}(x,0)$ em $[B',B''] \times [0,T_1]$ para algum $T_1 > 0$. Então, o campo vetorial $L_{(t)} = \frac{\partial}{\partial \tau}$ em $[B',B''] \times [0,T_1]$ e assim $(f_1)_{(t)}(x,\tau) \equiv g(x)$ em $[B',B''] \times [0,T_1]$ o que estabelece (2.3.20) com $B = B''$ e $B_1 < B$.

Caso 2. Suponha $\varphi_{(t)}(x,\tau) \geq \varphi_{(t)}(x,0)$ em $[B',B''] \times [0,T_2]$ para algum $T_2 > 0$. Se $[B',B''] \subseteq E_1$, então pelo Teorema de Baire estaremos na situação do Caso 1. Portanto, podemos assumir que existe $x_0 \in (B',B'')$ e uma seqüência $\tau_j \to 0$ tal que $\varphi_{(t)}(x_0,\tau_j) > \varphi_{(t)}(x_0,0)$. Pelo Lema Fundamental e os comentários abaixo do enunciado do Teorema 2.3.1 existem um intervalo, que continuaremos indicando por (B',B''), contendo x_0, um número positivo ϵ_1 e uma função holomorfa H definida no domínio

$$S = \{Z(x,0) + iZ_x(x,0)v : \ x \in (B',B''), \ 0 < v < \epsilon_1\}$$

tais que para toda $\eta \in C_c^{\infty}(B',B'')$,

$$\langle bf_1, \eta(x) Z_x(x,0)\rangle = \lim_{v \to 0} \int H(Z(x,0) + iZ_x(x,0)v)\eta(x) d_x Z(x,0).$$

Note que S está acima da curva $\Sigma = \{x + i\varphi(x,0)\}$ e $Z_{(t)}(x,0) = Z(x,0)$. Encolhendo o intervalo (B',B'') em torno de x_0, podemos assumir que existe $\epsilon_2 > 0$ de modo que o domínio

$$\Omega = \{x + i(\varphi(x,0) + s) : \ x \in (B',B''), \ 0 < s < \epsilon_2\} \subseteq Z_{(t)}((B',B'') \times (0,T_2)).$$

De fato, seja $k = \sup_j |\varphi_{(t)}(x_0,\tau_j)| > |\varphi_{(t)}(x_0,0)| = |\varphi(x_0,0)|$. Como Z é uma função suave ($Z_{(t)}$ também é), os pontos da reta vertical que passa por x_0, e estão entre os pontos $Z_{(t)}(x_0,0) = Z(x_0,0)$ e $x_0 + ik$ estão contidos no conjunto $Z_{(t)}((B',B'') \times (0,T_2))$. Pela continuidade de $\varphi_{(t)}$ temos que para cada j existe uma vizinhança V_j de modo que $\varphi_{(t)}(x_0,\tau) > \varphi_{(t)}(x_0,0)$ para $\tau \in V_j$. Em particular, existe uma vizinhança V do ponto que assume o supremo. Do mesmo modo, existe uma vizinhança U de x_0 tal que $\varphi_{(t)}(x,\tau) > \varphi_{(t)}(x,0)$ para $(x,\tau) \in U \times V$. Considere o conjunto de pontos $W = \{x + iy : \ x \in U, \ \varphi_{(t)}(x,0) < y < \varphi_{(t)}(x,\tau), \ \tau \in (0,T_2)\}$ por convexidade $W \subseteq Z_{(t)}((B',B'') \times (0,T_2))$. Agora escolha o novo intervalo (B',B'') como sendo U e ϵ_2 tal que $\varphi_{(t)}(x,0) + s < \varphi_{(t)}(x,\tau)$ para $0 < s < \epsilon_2$. Assim, $\Omega \subseteq W \subseteq Z_{(t)}((B',B'') \times (0,T_2))$.

Seja $T_3 > 0$ e (C',C'') um intervalo contendo x_0 de modo que, se $Q_1 = (C',C'') \times (0,T_3)$, então $Z_{(t)}(Q_1) \subseteq \overline{S}$. Seja G uma função holomorfa em S tal que $G'(z) = H(z)$ em S. Note que G é contínua até a fronteira $\Sigma = \{x + i\varphi(x,0) : x \in (C',C'')\}$, pois o valor de fronteira de $G' = H$ é uma função integrável (veja Proposição 1.6.5).

Defina $h_{(t)}(x,\tau) = G(x+i\varphi_{(t)}(x,\tau)) = G(x+i\varphi(x,\tau\dot{t}))$. Note que $h_{(t)}$ é contínua em $\overline{Q_1}$ e $L_{(t)}h_{(t)} = 0$ em Q_1. Se $M_{(t)} = \frac{1}{\partial_x(Z_{(t)})(x,\tau)}\frac{\partial}{\partial x}$, então $M_{(t)}h_{(t)}(x,\tau)$ também é uma solução de $L_{(t)}$ em Q_1 e seu valor de fronteira é igual a bf_1 em (C',C''). De fato, seja $\eta \in C_c^\infty(C',C'')$. Temos:

$$\begin{aligned}
\langle bf_1, \eta(x)Z_x(x,0)\rangle &= \lim_{v\to 0}\int H(Z(x,0)+iZ_x(x,0)v)\eta(x)d_xZ(x,0)\\
&= \lim_{v\to 0}\int G'(Z(x,0)+iZ_x(x,0)v)\eta(x)d_xZ(x,0)\\
&= -\lim_{v\to 0}\int G(Z(x,0)+iZ_x(x,0)v)\eta'(x)\frac{\partial}{\partial x}(1+i\varphi_x(x,0))dx\\
&= -\int bh_{(t)}(x)\eta'(x)\frac{\partial}{\partial x}(1+i\varphi_x(x,0))dx
\end{aligned}$$

e assim $bf_1(x) = b(M_{(t)}h_{(t)})(x)$ em (C',C''). Observe agora que Q_1 poderia ter sido escolhido de modo que $\varphi_{(t)}(x,T_3) > \varphi_{(t)}(x,0)$, para cada $x \in (C',C'')$. Isto significa que Q_1 é uma órbita simples de Sussmann (veja Seção 1.4) para os campos vetoriais $X_{(t)} = ReL_{(t)}$ e $Y_{(t)} = ImL_{(t)}$. Para ver que isto de fato acontece precisamos conectar quaisquer dois pontos de Q_1 por um caminho de órbitas de $X_{(t)}$ e $Y_{(t)}$. Sejam $p=(x,\tau)$ e $q=(y,s)$ dois pontos arbitrários de Q_1. Como

$$X_{(t)} = \frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\partial_x(\varphi_{(t)})(x,\tau)\partial_\tau(\varphi_{(t)})(x,\tau)}{1+\partial_x(\varphi_{(t)})(x,\tau)^2}\frac{\partial}{\partial x}$$

temos que $X_{(t)}$ possui um órbita não nula em p, isto é, existe $\gamma_1 : R_1 = I_1\times J_1 \longrightarrow Q_1$ tal que $\gamma_1(p) = p$ e $\gamma_1'(s,\tau) = X_{(t)}(\gamma_1(s,\tau))$. Como $\varphi_{(t)}(x,T_3) > \varphi_{(t)}(x,0)$ para todo $x\in(C',C'')$ existe um ponto $p_1 = (x_1,\tau_1)\in\gamma_1(R_1)$ tal que $\frac{\partial}{\partial\tau}\varphi_{(t)}(x_1,\tau_1)\neq 0$, ou seja, $Y_{(t)}$ tem uma órbita não nula passando por p_1. Suponha que não conseguimos chegar ao ponto q com um caminho de órbitas. Seja $\tilde{p}$ o supremo (ou extremo) do conjunto de pontos que conseguimos alcançar com as órbitas que saíram de p. Considere a órbita de $X_{(t)}$ que passa por $\tilde{p}$ (sempre existe pela expressão de $X_{(t)}$). Ao longo desta órbita há um ponto onde a órbita de $Y_{(t)}$ não se anula (pelo fato de $\varphi_{(t)}(x,T_3) > \varphi_{(t)}(x,0)$ para todo $x\in(C',C'')$), neste ponto poderíamos prosseguir ultrapassando o ponto supremo $\tilde{p}$ o que seria uma contradição. Logo, podemos ligar p e q por órbitas de $X_{(t)}$ e $Y_{(t)}$.

Portanto, pelo Teorema 1.3.2, $M_{(t)}h_{(t)}(x,\tau) = (f_1)_{(t)}(x,\tau)$ em Q_1 (Unicidade do Problema de Cauchy para superfícies não características para estruturas localmente integráveis). Isto por sua vez implica que $H(x+i\varphi_{(t)}(x,\tau)) = (f_1)_{(t)}(x,\tau)$ em Q_1 sempre que $Z_{(t)}(x,\tau)\in S$. De fato, se $Z_{(t)}(x,\tau)\in S$ então $H(Z_{(t)}(x,\tau)) = G'(Z_{(t)}(x,\tau))$, por outro lado $(f_1)_{(t)}(x,\tau) = M_{(t)}h_{(t)}(x,\tau) = G'(Z_{(t)}(x,\tau))$, em Q_1. Logo vale a igualdade acima. Como $bH(x+i\varphi_{(t)}(x,0)) = b(M_{(t)}h_{(t)})(x)$ é uma função integrável em (C',C'') a função maximal não-tangencial H^* está em $L^1(\Sigma)$ após, possivelmente, diminuir Σ (veja Proposição 1.6.5).

A seguinte afirmação conclui a demonstração deste lema.

Afirmação:

(a) $\lim_{\tau\to 0}(f_1)_{(t)}(x,\tau)=g(x)$, q.t.p. $x\in(C',C'')$,
(b) $|(f_1)_{(t)}(x,\tau)|\leq H^*(x)$, q.t.p. $(x,\tau)\in Q_1$.
Prova: Observe primeiramente que $(f_1)_{(t)}(x,\tau)=H(x+i\varphi_{(t)}(x,\tau))$ sempre que $\varphi_{(t)}(x,\tau)>\varphi_{(t)}(x,0)$. Por outro lado, para qualquer $\rho>0$ podemos aplicar o Teorema de Baouendi-Treves, Teorema 1.2.1, a função contínua $(f_1)_{(t)}(x,\tau)$ definida em $(0,A)\times(\rho,T)$. Encolhendo Q_1 podemos assumir que a restrição de $(f_1)_{(t)}$ ao conjunto $Q_1\cap\{\tau\geq\rho\}$ é uniformemente aproximada por uma seqüência de polinômios em $Z_{(t)}(x,\tau)$, $p_k(Z_{(t)}(x,\tau))$. Sejam $x_1\in(C',C'')$, $\tau_1\in(0,T_3)$ tais que $\varphi_{(t)}(x_1,\tau_1)=\varphi_{(t)}(x_1,0)$ e $\tau_2\in(0,T_3]$, $\tau_1\leq\tau_2$ tal que $\varphi_{(t)}(x_1,\tau)\equiv\varphi_{(t)}(x_1,0)$ para $\tau_1\leq\tau\leq\tau_2$ e τ_2 é maximal para esta propriedade (é claro que não há problema se $\tau_1=\tau_2$). Note que $\tau_2<T_3$, pela forma com Q_1 foi escolhido. Como $Z_{(t)}(x,\tau)$ é constante em $\{x_1\}\times[\tau_1,\tau_2]$ segue que $p_k(Z_{(t)}(x,\tau))$ também é constante em $\{x_1\}\times[\max(\tau_1,\rho),\tau_2]$ e assim deve ser $(f_1)_{(t)}(x,\tau)$. Fazendo $\rho\to 0$ concluímos que $(f_1)_{(t)}(x_1,\tau)$ é constante em $[\tau_1,\tau_2]$. Assim, $\varphi_{(t)}(x_1,\tau_2+\epsilon_k)>\varphi_{(t)}(x_1,0)$ para alguma seqüência $\epsilon_k\searrow 0$ (isso segue da maximalidade de τ_2) e pela continuidade de $(f_1)_{(t)}(x,\tau)$ para $\tau>0$ vemos que para qualquer $\tau_1\leq\tau\leq\tau_2$

$$(f_1)_{(t)}(x_1,\tau)=(f_1)_{(t)}(x_1,\tau_2)=\lim_{\epsilon_k\to 0}(f_1)_{(t)}(x_1,\tau_2+\epsilon_k)=\lim_{\epsilon_k\to 0}H(x_1+i\varphi_{(t)}(x_1,\tau_2+\epsilon_k)).$$

Além disso, $x_1+i\varphi_{(t)}(x_1,\tau_2+\epsilon_k)\to x_1+i\varphi_{(t)}(x_1,0)=x_1+i\varphi(x_1,0)\in\Sigma$ não-tangencialmente. Assim, a menos que x_1 pertença a um conjunto excepcional de medida zero, teremos

$$(f_1)_{(t)}(x_1,\tau)=bH(x_1+i\varphi(x_1,0))=g(x_1),\quad \tau_1\leq\tau\leq\tau_2$$

(resultado sobre existência do limite tangencial q.t.p. veja a Proposição 1.6.5). Isto mostra, em particular, que

$$\varphi_{(t)}(x_1,\tau_1)=\varphi_{(t)}(x_1,0)\Longrightarrow(f_1)_{(t)}(x_1,\tau_1)=g(x_1),\qquad \text{q.t.p.}\quad x_1\in(C',C'').$$

Resumindo, para $x\in(C',C'')$ q.t.p., $(f_1)_{(t)}(x,\tau)=H(x+i\varphi_{(t)}(x,\tau))$ se $\varphi_{(t)}(x,\tau)>\varphi_{(t)}(x,0)$ e $(f_1)_{(t)}(x,\tau)=bH(x+i\varphi_{(t)}(x,0))$ se $\varphi_{(t)}(x,\tau)=\varphi_{(t)}(x,0)$. Como $|H(x+i\varphi_{(t)}(x,\tau))|$ e $|bH(x+i\varphi_{(t)}(x,0))|$ são dominadas por $H^*(x)$ isto prova o item (b): $|(f_1)_{(t)}(x,\tau)|\leq H^*(x)$, q.t.p. $(x,\tau)\in Q_1$. Também é fácil ver que (a) vale: quando $\tau\to 0$ temos ou $(f_1)_{(t)}(x,\tau)=H(x+i\varphi_{(t)}(x,\tau))$ ou $(f_1)_{(t)}(x,\tau)=bH(x+i\varphi_{(t)}(x,0))$ assim

$$\lim_{\tau\to 0}(f_1)_{(t)}(x,\tau)=bH(x+i\varphi_{(t)}(x,0))=g(x),$$

pois $H(z)\to bH(x+i\varphi_{(t)}(x,0))$ se $S\ni z\longrightarrow x+i\varphi_{(t)}(x,0)=x+i\varphi(x,0)$ não-tangencialmente, o que prova o item (a). Concluindo a prova da Afirmação.

Agora, aplicando o Teorema da Convergência Dominada estabelecemos (2.3.20) no Caso 2 (escolha B_1 e B tais que $|(f_1)_{(t)}(B,\tau)|\leq H^*(B)$). $\square$

De (2.3.18), (2.3.19) e (2.3.20) concluímos que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^B (f_1)_{(t)}(x,\epsilon)\psi_m(x,\epsilon)d_xZ_{(t)}(x,\epsilon) = \langle bf_1, h(x)\psi(x)\rangle + \int_0^B g(x)(1-h(x))\psi(x)dx$$
$$= \int_0^B g(x)\psi(x)dx + c\psi(0). \tag{2.3.21}$$

Voltando a equação (2.3.17) temos ainda dois limites para estudar. Observe que podemos escolher B tal que $\lim_{\tau\to 0}(f_1)_{(t)}(B,\tau)$ existe o que, por sua vez, implica a existência de

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^{T_0}(f_1)_{(t)}(B,\tau)\psi_m(B,\tau)\partial_\tau(\varphi_{(t)})(B,\tau)d\tau$$
$$= \int_0^{T_0}(f_1)_{(t)}(B,\tau)\psi_m(B,\tau)\partial_\tau(\varphi_{(t)})(B,\tau)d\tau \tag{2.3.22}$$

(a existência de tal B é garantida pela Afirmação acima). Como $m \geq N$, o produto $(f_1)_{(t)}(x,\tau)L_{(t)}\psi_m(x,\tau)$ é limitado e portanto,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^B\int_\epsilon^{T_0}(f_1)_{(t)}(x,\tau)L_{(t)}\psi_m(x,\tau)d\tau\wedge dZ_{(t)} \qquad \text{existe.} \tag{2.3.23}$$

Agora, usando (2.3.21), (2.3.22) e (2.3.23) podemos fazer $\epsilon\to 0$ em (2.3.17) e então, para algum $0 < B < A$ e qualquer $\psi\in C^\infty(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\int_0^B g(x)\psi(x)dx + c\psi(0) &= \int_0^B (f_1)_{(t)}(x,T_0)\psi_m(x,T_0)d_xZ_{(t)}(x,T_0)\\ &+ \int_0^B\int_0^{T_0}(f_1)_{(t)}(x,\tau)L_{(t)}\psi_m(x,\tau)d\tau\wedge dZ_{(t)}\\ &- i\int_0^{T_0}(f_1)_{(t)}(B,\tau)\psi_m(B,\tau)\partial_\tau(\varphi_{(t)})(B,\tau)d\tau.\end{aligned} \tag{2.3.24}$$

Aplicaremos a fórmula (2.3.24) a função

$$\psi(x) = \left(\frac{Z_{(t)}(x,0) - Z_{(t)}(\delta,0)}{1+\delta}\right)^n$$

onde n é um inteiro positivo, $n > N$ e escolha $B = \delta$. Nosso objetivo é mostrar que $c = 0$ para esta escolha de ψ. Para esta ψ temos

$$\psi_n(x,\tau) = \sum_{k=0}^n i^k\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(\varphi_{(t)}(x,\tau)-\varphi_{(t)}(x,0))^k(Z_{(t)}(x,0)-Z_{(t)}(\delta,0))^{n-k}}{(1+\delta)^n k!}$$

e

$$L_{(t)}\psi_n(x,\tau) = \frac{-i\partial_\tau(\varphi_{(t)})(x,\tau)}{1+i\partial_x(\varphi_{(t)})(x,\tau)}\frac{1}{n!}\frac{\partial}{\partial x}V^n\psi(x)(\varphi_{(t)}(x,\tau)-\varphi_{(t)}(x,0))^n \equiv 0,$$

pois $\psi(x)$ é um polinômio em $Z_{(t)}(x,0)$ de grau n. De (2.3.24) obtemos:

$$\int_0^\delta g(x)\left(\frac{Z_{(t)}(x,0)-Z_{(t)}(\delta,0)}{1+\delta}\right)^n dx + c\left(\frac{-Z_{(t)}(\delta,0)}{1+\delta}\right)^n =$$
$$= \int_0^\delta (f_1)_{(t)}(x,T_0)\psi_n(x,T_0)d_xZ_{(t)}(x,T_0)$$
$$-i\int_0^{T_0}(f_1)_{(t)}(\delta,\tau)\psi_n(\delta,\tau)\partial_\tau(\varphi_{(t)})(\delta,\tau)d\tau. \tag{2.3.25}$$

Para estimar $\int_0^\delta (f_1)_{(t)}(x,T_0)\psi_n(x,T_0)dZ_{(t)}(x,T_0)$, consideremos cada termo

$$\frac{1}{k!}\int_0^\delta (f_1)_{(t)}(x,T_0)(\varphi_{(t)}(x,T_0)-\varphi_{(t)}(x,0))^k V^k\psi(x)dZ_{(t)}(x,T_0).$$

Usando (2.3.7) e (2.3.9), podemos assumir que T_0 e δ são suficientemente pequenos, de modo que

$$|\varphi_{(t)}(x,\tau)-\varphi_{(t)}(x,0)| \le \frac{|x|}{2} \qquad x\in(0,\delta),\quad \tau\in(0,T_0). \tag{2.3.26}$$

Também segue de (2.3.7) que

$$\left|\frac{Z_{(t)}(x,0)-Z_{(t)}(\delta,0)}{1+\delta}\right| \le |x-\delta|. \tag{2.3.27}$$

Portanto, de (2.3.26) e (2.3.27), para cada $k=0,1,\dots,n$, temos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k!}\left|\int_0^\delta (f_1)_{(t)}(x,T_0)(\varphi_{(t)}(x,T_0)-\varphi_{(t)}(x,0))^k V^k\psi(x)d_xZ_{(t)}(x,T_0)\right| \\
\le\ & \frac{\|f_{(t)}(\cdot,T_0)\|2^{-k}}{k!(1+\delta)^k}n(n-1)\cdots(n-k+1)\int_0^\delta x^k\left|\frac{Z_{(t)}(x,0)-Z_{(t)}(\delta,0)}{1+\delta}\right|^{n-k}dx \\
\le\ & \frac{\|f_{(t)}(\cdot,T_0)\|}{k!}\frac{2^{-k}}{(1+\delta)^k}n(n-1)\cdots(n-k+1)\int_0^\delta x^k|x-\delta|^{n-k}dx \\
=\ & 2^{-k}\frac{\delta^{n+1}}{(1+\delta)^k}\frac{\|f_{(t)}(\cdot,T_0)\|}{n+1}.
\end{aligned} \tag{2.3.28}$$

Somando de $k=0$ até $k=n$, obtemos:

$$\left|\int_0^\delta (f_1)_{(t)}(x,T_0)\psi_n(x,T_0)d_xZ_{(t)}(x,T_0)\right| \le 2\frac{\delta^{n+1}}{n+1}\|f_{(t)}(\cdot,T_0)\|_{L^\infty(0,\delta)}. \tag{2.3.29}$$

Considere agora o termo

$$\int_0^{T_0}(f_1)_{(t)}(\delta,\tau)\psi_n(\delta,\tau)\partial_\tau(\varphi_{(t)})(\delta,\tau)d\tau.$$

Observe que da escolha de $\psi(x)$ temos

$$\psi_n(\delta,\tau) = i^n \frac{(\varphi_{(t)}(\delta,\tau) - \varphi_{(t)}(\delta,0))^n}{(1+\delta)^n}. \tag{2.3.30}$$

Defina

$$h(x) = \int_0^T |f_{(t)}(x,\tau)||\varphi_{(t)}(x,\tau) - \varphi_{(t)}(x,0)|^N d\tau.$$

Como $|f_{(t)}(x,\tau)||\varphi_{(t)}(x,\tau) - \varphi_{(t)}(x,0)|^N \in L^1((-A,A)\times(0,T))$ (conseqüência da hipótese), sabemos que $h \in L^1(-A,A)$. Portanto para $\lambda > 0$, se definirmos

$$E_\lambda = \{x \in (-A,A) :\ h(x) > \lambda\},$$

sua medida satisfaz

$$|E_\lambda| \leq \frac{\|h\|_{L^1(-A,A)}}{\lambda}.$$

Em particular, escolhendo $\lambda = \delta^{-2}$, temos:

$$|E_{\delta^{-2}}| \leq \|h\|_{L^1(-A,A)}\delta^2.$$

Portanto, podemos assumir que δ é escolhido de modo que

$$\int_0^{T_0} |(f_1)_{(t)}(\delta,\tau)||\varphi_{(t)}(\delta,\tau) - \varphi_{(t)}(\delta,0)|^N d\tau \leq \frac{1}{\delta^2}. \tag{2.3.31}$$

De fato, para $\lambda = \delta^{-2}$ temos que

$$\left|\left\{x \in (0,\delta) :\ h(x) > \frac{1}{\delta^2}\right\}\right| \leq \left|\left\{x \in (-A,A) :\ h(x) > \frac{1}{\delta^2}\right\}\right| \leq \|h\|_{L^1(-A,A)}\delta^2 \leq \frac{1}{2}\delta,$$

a última desigualdade vale se δ for escolhido suficientemente pequeno. Portanto,

$$\left|\left\{x \in (0,\delta) :\ h(x) \leq \frac{1}{\delta^2}\right\}\right| \geq \frac{1}{2}\delta, \qquad \text{pois } |(0,\delta)| = \delta.$$

Logo, existe $x_1 \in (\frac{\delta}{2},\delta)$ tal que $h(x_1) \leq \frac{1}{\delta^2} \leq \frac{1}{x_1^2}$. Escolha $\delta = x_1$, então $h(\delta) \leq \frac{1}{\delta^2}$ o que garante a validade de (2.3.31). Continuaremos a demonstração escrevendo simplesmente δ e quando for necessário invocaremos x_1.

Portanto de (2.3.30) e (2.3.31),

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^{T_0} (f_1)_{(t)}(\delta,\tau)\psi_n(\delta,\tau)\partial_\tau(\varphi_{(t)})(\delta,\tau)d\tau\right| \\
\leq\ & \frac{1}{(1+\delta)^n}\int_0^{T_0} |(f_1)_{(t)}(\delta,\tau)||\varphi_{(t)}(\delta,\tau) - \varphi_{(t)}(\delta,0)|^n|\partial_\tau(\varphi_{(t)})|d\tau \\
\leq\ & \frac{C\delta}{(1+\delta)^n}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{n-N}\int_0^{T_0} |(f_1)_{(t)}(\delta,\tau)||\varphi_{(t)}(\delta,\tau) - \varphi_{(t)}(\delta,0)|^N d\tau \\
\leq\ & C\frac{\delta^{n-N-1}2^{N-n}}{(1+\delta)^n}.
\end{aligned} \tag{2.3.32}$$

De (2.3.25), (2.3.29) e (2.3.32) concluímos que

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^\delta g(x) \left(\frac{Z_{(t)}(x,0) - Z_{(t)}(\delta,0)}{1+\delta} \right)^n dx + c \left(\frac{-Z_{(t)}(\delta,0)}{1+\delta} \right)^n \right| \\ \leq \quad & 2\|f_{(t)}(\cdot, T_0)\|_{L^\infty(0,\delta)} \frac{\delta^{n+1}}{n+1} + C \frac{\delta^{n-N-1} 2^{N-n}}{(1+\delta)^n}. \end{aligned} \tag{2.3.33}$$

Usando (2.3.27) temos

$$\left| \int_0^\delta g(x) \left(\frac{Z_{(t)}(x,0) - Z_{(t)}(\delta,0)}{1+\delta} \right)^n dx \right| \leq \int_0^\delta |g(x)||x-\delta|^n dx \leq \|g\|_{L^1(0,\delta)} \delta^n. \tag{2.3.34}$$

De (2.3.33) e (2.3.34) obtemos:

$$c \frac{|Z_{(t)}(\delta,0)|^n}{(1+\delta)^n} \leq 2 \frac{\|f_{(t)}(\cdot, T_0)\| \delta^{n+1}}{n+1} + C \frac{\delta^{n-N-1} 2^{N-n}}{(1+\delta)^n} + \|g\|_{L^1(0,\delta)} \delta^n \tag{2.3.35}$$

onde C é independente de δ e n. Usamos agora a desigualdade $|Z_{(t)}(\delta,0)| \geq \delta$ para obter (de (2.3.35)) que

$$c \frac{\delta^n}{(1+\delta)^n} \leq \frac{2\|f_{(t)}(\cdot, T_0)\| \delta^{n+1}}{n+1} + C \frac{\delta^{n-N-1} 2^{N-n}}{(1+\delta)^n} + \|g\|_{L^1(0,\delta)} \delta^n. \tag{2.3.36}$$

A expressão acima é verdadeira para $\delta = x_1 \in (\frac{\delta}{2}, \delta)$ (para validade de (2.3.32)). Escolha $\delta = \frac{1}{n}$ então $\frac{1}{2n} < x_1 < \frac{1}{n}$. Assim, fazendo $n \to \infty$ concluímos de (2.3.36) que $c = 0$. Portanto, $bf_1 = g \in L^1_{\text{loc}}$. Um argumento similar com $\psi(x) = \left(\frac{Z_{(t)}(x,0) + Z_{(t)}(\delta,0)}{1+\delta} \right)^n$ mostra que bf_2 está em L^1_{loc}. Segue que bf é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue. Concluindo a demonstração do Teorema 2.3.1. ∎

2.4 Considerações finais

No nosso trabalho apresentamos apenas uma condição suficiente para a existência do valor fraco de fronteira de uma solução contínua f de $\mathcal{L}f = 0$, onde $\mathcal{L}$ é uma estrutura localmente integrável de co-posto um. A necessidade desta condição não foi estudada neste trabalho. Um resultado que se tem a este respeito foi estabelecido por Berhanu e Hounie em **[BH3]** e é o seguinte:

Teorema 2.4.1 *(Teorema 2.1 de* **[BH3]***) Sejam $L = \frac{\partial}{\partial t} + a(x,t)\frac{\partial}{\partial x}$ um campo vetorial analítico-real em $Q = (-A, A) \times (-B, B) \subset \mathbb{R}^2$ e $Z(x,t) = x + i\varphi(x,t)$ uma integral primeira analítica-real de L em Q, com φ a valores reais, $\varphi(0,0) = \varphi_x(0,0) = 0$. Seja f uma função contínua em $Q^+ = (-A, A) \times (0, B)$ e $Lf = 0$ em Q^+. Assuma que $\lim_{t\to 0} f(\cdot, t) = bf$ existe no sentido das distribuições e que bf é uma distribuição de ordem fixa N em $(-A, A)$. Então existe um número inteiro n tal que para todo conjunto compacto K em $(-A, A)$ e $0 < T < B$,*

$$|f(x,t)||\varphi(x,t) - \varphi(x,0)|^n \leq C, \quad \forall (x,t) \in K \times (0,T], \; C = C(K,T). \tag{2.4.1}$$

Como conseqüência do Teorema 2.4.1 e do Teorema 1.1 de **[BH3]** (enunciado na introdução deste texto como Teorema 1) Berhanu e Hounie obtém:

Corolário 2.4.2 *(Corolário 2.2 de* **[BH3]***) Sejam L analítico-real e f contínua em Q^+, $Lf = 0$ em Q^+. São equivalentes:*

1. $\lim_{t\to 0} f(\cdot, t) = bf$ *existe no sentido das distribuições e bf é uma distribuição de ordem fixa em $(-A, A)$;*

2. *existe um natural N tal que para todo conjunto compacto K de $(-A, A)$*

$$|f(x,t)||\varphi(x,t) - \varphi(x,0)|^N \leq C, \quad \forall x \in K$$

para alguma constante $C = C(K)$;

3. *existe um natural M tal que para qualquer conjunto compacto Kde $(-A, A)$, existe uma constante $c = c(K) > 0$ tal que*

$$\int_0^B \int_K |\varphi(x,t) - \varphi(x,0)|^M |f(x,t)| dx dt \leq c.$$

Na demonstração da propriedade de F. e M. Riesz um argumento muito importante é o Lema Fundamental (Lema 2.2.3) o qual descreve o conjunto frente de onda de uma solução homogênea de uma estrutura localmente integrável. Veremos alguns exemplos desta caracterização do conjunto frente de onda.

Exemplo 2.4.3 *Considere no plano o campo vetorial dado por*

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{2ixt}{1 + it^2} \frac{\partial}{\partial x}.$$

Lé localmente integrável, sendo $Z(x,t) = x(1 + it^2)$ uma integral primeira de L no plano. No exemplo 4.3 de **[BH1]***, Berhanu e Hounie, constroem uma função h que é solução homogênea de L com a propriedade que o conjunto frente de onda C^∞ do traço $h(x,0)$ na origem contém ambas as direções 1 e -1. Note que L não é elíptico na origem e nem o ponto $(0,0)$ é aproximado por pontos elípticos, ou seja, L não é elíptico em nenhum ponto $(0,t)$, $t > 0$.*

Exemplo 2.4.4 *Seja $\Omega = \mathbb{R}^2$ com coordenadas (x,t). Considere o operador de Mizohata*

$$M = \frac{\partial}{\partial t} - it\frac{\partial}{\partial x} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2).$$

Note que $Z(x,t) = x + i\frac{t^2}{2}$ é uma integral primeira de M.
Defina $u(x,t) = \sqrt{x + i\frac{t^2}{2}}$ e para $\epsilon > 0$ considere $u_\epsilon(x,t) = \sqrt{x + i\left(\frac{t^2}{2} + \epsilon\right)}$, onde escolhemos o ramo da raiz quadrada definida no complementar do eixo imaginário

negativo que é real no eixo real positivo. Como $u_\epsilon(x,t) \to u(x,t)$ *uniformemente quando* $\epsilon \to 0$ *e* $Mu_\epsilon = 0$ *temos que* $Mu = 0$. *Considere agora a função*

$$F(z) = \sqrt{z}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad z = re^{i\theta}, \quad \frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}.$$

Note que $(F \circ Z)(x,t) = u(x,t)$. *Como* $Z(x,t)|_{t=0} = x$ *segue que* $WF(bu) \subset WF(bF)$, *sendo* $bu(x) = b(x,0)$ *e*

$$bF(x) = F(x,0) = \begin{cases} \sqrt{x}, & se \quad x \geq 0 \\ \sqrt{|x|}i, & se \quad x < 0 \end{cases}$$

Assim, $(0,-1) \notin WF(bu)$ *enquanto* $(0,1) \in WF(bu)$.

O próximo exemplo mostra a importância de assumir que as soluções são contínuas no Teorema 2.3.1. Mostraremos que soluções menos regulares podem ter valores de fronteira que são medidas singulares com respeito à medida de Lebesgue.

Exemplo 2.4.5 *Defina* $\varphi(x,t) = xt$, $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ *e escolha*

$$Z(x,t) = x + i\varphi(x,t), \quad L = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{i\varphi_t(x,t)}{1 + i\varphi_x(x,t)}\frac{\partial}{\partial x},$$

então $LZ = 0$. *A estrutura gerada por* L *é localmente integrável. Defina a função* $H(x,t) = 1$ *se* $x > 0$, $H(x,t) = 0$ *se* $x \leq 0$. *Então* $LH = 0$ *no sentido das distribuições. Considere o campo vetorial*

$$M = \frac{1}{1 + i\varphi_x(x,t)}\frac{\partial}{\partial x}$$

que comuta com L, *isto é,* $ML = LM$. *Portanto* $u = MH$ *é uma medida que satisfaz a equação* $Lu = LMH = MLH = 0$ *e possui um valor de fronteira na subvariedade fortemente não-característica* $\{t = 0\}$, *o qual é a medida de Dirac* $\delta(x)$.

Bibliografia

[B] E. Bär, *Soluções singulares para operadores diferenciais parciais com coeficientes constantes*, Dissertação de Mestrado, São Carlos: UFSCar, 2004.

[BCH] S. Berhanu, P. Cordaro and J. Hounie, *An Introduction to Involutive Structures*, New Mathematical Monographs: 6 Cambridge: Cambridge University Press; 1 edition (January 31, 2008).

[BCT] M. S. Baouendi and C. H. Chang and F. Treves, *Microlocal hypo-analyticity and extensions of CR functions*, J. Diff. Geom. **18** (1983), 21-36.

[BER] M. S. Baouendi, P. Ebenfelt and L. P. Rothschild, *Real submanifolds in complex Space and their mappings*, Princeton: Princeton University Press, c1999. (Princeton Mathematical Series; v.47).

[BH1] S. Berhanu and J. Hounie, *An F. and M. Riesz theorem for planar vector fields*, Math. Ann. **320** (2001), 463-485.

[BH2] S. Berhanu and J. Hounie, *On boundary properties of solutions of complex vector fields*, J. Funct. Anal. **192** (2002), 446-490.

[BH3] S. Berhanu and J. Hounie, *Traces and the F. and M. Riesz theorem for planar vector fields* , Annales de l'institut Fourier **53** (2003), 1425-1460.

[BH4] S. Berhanu and J. Hounie, *The F. and M. Riesz property for vector fields*, Contemporary Math. **368** (2005), 25-39.

[BH5] S. Berhanu and J. Hounie, *An F. and M. Riesz theorem for a system of vector fields*, Inventiones Math. **162** (2005), 357-380.

[BK] K. Barbey and H. Konig, *Abstract analytic function theory and Hardy algebras*, Lecture Notes in Math., 553, Belin: Springer, 1977.

[Br] R. G. M. Brummelhuis, *A microlocal F. and M. Riesz theorem with applications*, Revista Matemática Iberoamericana **5** (1989), 331-391.

[Du] P. Duren, *Theory of H^p spaces*, New York: Dover, 2000.

[Ho] J. Hounie, *Teoria Elementar das Distribuições*, 12° Col. Bras. Mat., Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

[H1] L. Hörmander, *Linear Partial Differential Operators*, Berlin: Springer-Verlag, 1969.

[H2] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, 2 ed. Berlin: Springer-Verlag, c1990.

[H3] L. Hörmander, *Uniqueness theorems and wave front sets for solutions of linear differential equations with analytic coefficients*, Comm. Pure Appl. Math. **24** (1971), 671-704.

[H4] L. Hörmander, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, 3 ed. Amsterdam: North-Holland, 1990. (North-Holland Mathematical Library; v.7)

[K1] S. Koshi, *Topics in complex analysis: Recent developments on the F. and M. Riesz theorem*, Banach Center Publ., 31, Warsaw: Polish Acad. Sci., 1995.

[K2] S. Koshi, *The F. and M. Riesz theorem on locally compact abelian groups*, Infinite-dimen. harmonic analysis (Tubigen) (1995), 138-145.

[P] Ch. Pommerenke, *Boundary behaviour of conformal maps*, Berlin: Springer-Verlag, 1992.

[R1] W. Rudin, *Functional Analysis*, New York: McGraw-Hill Book, c1973.

[R2] W. Rudin, *Real and Complex Analisis*, 3 ed. New York: McGraw-Hill, 1987.

[Sj] J. Sjöstrand, *Singularites analytiques microlocales*, Asterisque **95** (1982), Soc. Math. France.

[Su] H. J. Sussmann, *Orbits of families of vector fields and integrability of distributions*, Trans. Amer. Math. Soc. **180** (1973), 171-188.

[T1] F. Treves, *Hypo-analytic structures: local theory*, Princeton: Princeton University Press, c1992. (Princeton Mathematical Series; v.40).

[T2] F. Treves, *Approximation and representation of solutions in locally integrable structures with boundary*, Aspects of Mathematics and its Applications (1986), 781-816.