Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

Transformada de Tjurina para Singularidades Determinantais

Bárbara Karolline de Lima Pereira

Orientador: *Bruna Oréfice Okamoto*

São Carlos
Julho de 2017

Transformada de Tjurina para Singularidades Determinantais

Bárbara Karolline de Lima Pereira

Orientador: *Bruna Oréfice Okamoto*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

São Carlos
Julho de 2017

Autor

Orientador

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primário [código]; Secundário [código].
Palavras chaves: Singularidade determinantal genérica, singularidades determinantal, transformada.

Aos meus pais, Maria Lúcia e Milton.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida e por sempre estar ao meu lado.

Aos meus pais, Milton e Maria Lúcia, por todo apoio, amor, carinho e por sempre acreditarem em mim.

Aos meus irmãos, Bruna e Eduardo, por me proporcionarem momentos de alegria e descontração.

A minha orientadora, Bruna Oréfice Okamoto, pela excelente orientação, paciência, disponibilidade e amizade ao longo da realização deste trabalho.

Ao João Nivaldo Tomazella por participar dos meus seminários, e pelas contribuições.

Ao Helge Møller Pedersen, pela atenção e disponibilidade em sanar minhas dúvidas.

Ao meu namorado, Rodnei, por todo amor, carinho, atenção, por sempre acreditar em mim e não me deixar desanimar perante as dificuldades.

Agradeço também a todos da família 109 e agregados, Karina, Wagner, Dalton, Flávia, Lucas, Tiago, Renato e Joel pela amizade, suporte e companheirismo durante esta etapa.

Agradeço também aos amigos do primeiro semestre de 2016, Claudio, Thaysa, Estefani, Renan, e Abel pelas conversas, momentos de estudos e descontração.

A Marielle pelas conversas de domingo.

A Maria Carolina pelas conversas entre um café e outro.

Aos professores e funcionários da Universidade Federal de São Carlos.

Aos professores da Universidade Federal de Lavras, em especial a Ana Claudia Pereira e ao Ricardo Edem Ferreira, pela amizade e confiança que sempre tiveram em mim.

A CAPES pelo auxílio financeiro.

O apoio de todos vocês foi fundamental para a conclusão desta etapa.

Abstract

We study the Tjurina transforms of determinantal singularities and its properties.

Resumo

Estudamos as transformadas de Tjurina de singularidades determinantais apresentada em [19], e algumas de suas propriedades.

Sumário

Introdução

Em Teoria de Singularidades, estamos sempre interessados em estudar as propriedades de uma variedade em uma vizinhança de seu conjunto singular. Nem sempre é possível fazer isso olhando diretamente para a variedade, uma maneira de resolver esse problema é trabalhar na transformada da variedade singular, isto é, em uma outra variedade que pode ser "mais simples" e que está relacionada à variedade inicial. Uma maneira de estudar propriedades de variedades singulares é relacionar invariantes aos seus pontos críticos. O número de Milnor é um invariante bem conhecido de variedades singulares. Esse número está definido para germes de hipersuperfície com singularidade isolada [14], curvas com singularidades isolada [4] e interseção completa com singularidade isolada [7]. As variedades que generalizam as interseções completas são as singularidades determinantais, que são definidas por menores de matrizes e têm a codimensão apropriada. Recentemente, uma generalização do número de milnor foi definida para variedades determinantais com singularidade isolada [18], [20], [5].

As propriedades desse número são um assunto muito atual em Teoria de Singularidades. Muitos autores têm trabalhado nisso, por exemplo [17] e [21]. Uma ferramenta para esse estudo é a transformada de Tjurina de uma singularidade determinantal. Por exemplo [21] exibe os módulos de homologia da suavização de uma Singularidade Determinantal Isolada (IDS) cuja transformada de Tjurina é uma interseção completa.

Sendo assim, é importante estudar a transformada de Tjurina de uma singularidade determinantal e suas propriedades. Essa dissertação é baseada em [19]. O Trabalho foi organizado em 6 capítulos: o primeiro capítulo é uma breve apresentação dos conceitos que serão utilizados ao longo da dissertação; o segundo capítulo apresenta a definição de singularidade determinantal genérica, singularidade determinantal e algumas propriedades de tais conjuntos; o terceiro capítulo é uma inspiração para o quarto, pois nele definimos a transformada de Tjurina, Tjurina Transposta e de Nash para singularidades determinantais genéricas; o quarto capítulo define a transformada de Tjurina de uma singularidade determinantal e apresenta algumas consequências dessa definição; O quinto capítulo apresenta condições de quando a transformada de Tjurina de uma Singularidade Determinantal Essencialmente Isolada ($EIDS$), é uma interseção completa local; por fim, o capítulo 6 exemplifica como a transformada de Tjurina pode ser utilizada para resolver singularidades do tipo A_n e E_7.

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

Neste capítulo apresentamos resultados preliminares que foram necessários na leitura de [19].

1.1 Alguns Resultados de Topologia

Lema 1.1. *[11] Seja $f : X \to Y$, uma aplicação contínua e fechada.*
Se $f^{-1}(y)$ é compacto para todo $y \in Y$, então f é uma aplicação própria.

Lema 1.2. *Sejam X, Y espaços topológicos.*
Se $f : X \to Y$ é homeomorfismo, então $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

Demonstração: De fato, seja $y \in f(\overline{A})$ e $U \subset Y$ aberto tal que $y \in U$. Seja $x \in \overline{A}$ tal que $y = f(x)$, segue da continuidade de f que $A \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$. Tome $z \in A \cap f^{-1}(U)$, então $f(z) \in f(A)$ e $f(z) \in U$, o que implica $f(z) \in f(A) \cap U$ e portanto $f(A) \cap U \neq \emptyset$ e consequentemente $y \in \overline{f(A)}$.

Para a outra inclusão note que $\overline{f(A)}$ é o menor fechado que contém $f(A)$, mas $A \subset \overline{A}$, o que implica $f(A) \subset f(\overline{A})$ e como f é homeomorfismo, temos que f é fechada e consequentemente $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$.

■

Proposição 1.3. Caracterização de continuidade por sequências*[15]*
Seja X espaço topológico com base enumerável, $f : X \to Y$ uma aplicação.
f é contínua se, e somente se, para toda sequência x_i, em X, convergindo para x tivermos que $f(x_i)$ converge para $f(x)$.

Proposição 1.4. *[15]*
Seja $f : X \to Y$, bijeção contínua.
Se X é compacto e Y é Hausdorff, então f é homeomorfismo.

1.2 Conjuntos Algébricos

Essa seção foi baseada em [14].

Sejam $\mathbb{C}$ o corpo dos números complexos e $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ o anel de polinômios nas variáveis $x_1, ..., x_n$ com coeficientes em $\mathbb{C}$.

Definição 1.5. *Um subconjunto V de $\mathbb{C}^n$ é um conjunto algébrico quando existe um conjunto, não vazio, de funções polinomiais $J \subset \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ tal que*

$$V = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n;\ f(x_1, ..., x_n) = 0 \text{ para todo } f \in J\}.$$

Exemplo 1.6. *$V_1 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2;\ x^2 - y^2 = 0\}$, $V_2 = \{(x, z) \in \mathbb{C}^2;\ x^2 - y^3 = 0\}$ e $V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3;\ x^2 + z^2 = 4, y = 0\}$ são conjuntos algébricos.*

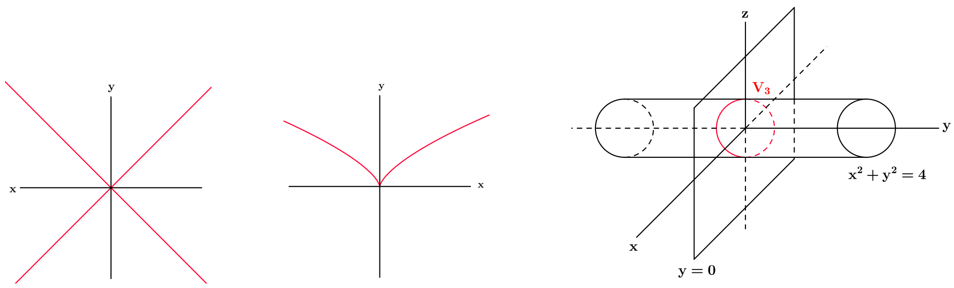

Figura 1.1: Conjuntos algébricos V_1, V_2 e V_3, respectivamente.

Com a finalidade de obtermos uma correspondência entre conjuntos algébricos e ideais em $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ enunciamos o:

Teorema 1.7. Teorema da base de Hilbert*[14]*

Todo ideal em $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ é gerado por uma quantidade finita de polinômios.

Agora somos capazes de estabelecer uma correspondência natural entre conjuntos algébricos de $\mathbb{C}^n$ e ideais em $\mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$, tal correspondência é dada por:

$$V \subset \mathbb{C} \mapsto \quad I(V) = \{f \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n];\ f(x_1, ..., x_n) = 0 \text{ para todo } (x_1, ..., x_n) \in V\}$$
$$I \subset \mathbb{C}[x_1, ..., x_n] \mapsto \quad v(I) = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C};\ f(x_1, ..., x_n) = 0 \text{ para todo } f \in I\}$$

Definição 1.8. *Seja $V \subset \mathbb{C}^n$ um conjunto algébrico não vazio, $f_1, ..., f_k$ polinômios que geram $I(V)$ e ρ o maior rank que a matriz jacobiana*

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right]_{k\times n} \text{ assume com } x \in V.$$

Um ponto $x \in V$ é chamado ponto singular de V quando

$$rank\Big[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\Big] < \rho.$$

Caso contrário, x é simples ou não singular.

Definição 1.9. *O Conjunto Singular de um conjunto algébrico V é o conjunto V_{sing} cujos elementos são todos os pontos singulares de V.*

O Conjunto Regular de V é dado por $V_{reg} = V \setminus V_{sing}$, ou seja, o conjunto de todos os pontos não singulares de V.

Exemplo 1.10. *Considere a variedade algébrica*

$$V = v(\langle f_1, f_2\rangle) \subset \mathbb{C}^3,$$

onde $f_1(x,y,z) = x^2 - y^3$, $f_2(x,y,z) = z^2 - x^5$. Temos

$$J(f_1,f_2)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & -3y^2 & 0 \\ -5x^4 & 0 & 2z \end{pmatrix},$$

note que $(1,1,1) \in V$ e $rank(J(f_1,f_2)(1,1,1)) = 2$, ou seja, $\rho = 2$. Desta maneira $(x,y,z) \in V_{sing}$ se, e somente se, $(x,y,z) \in V$ e $rank(J(f_1,f_2)(x,y,z)) < 2$, o que acontece se, e somente se,

$$x^2 - y^3 = 0,\ z^2 - x^5 = 0,\ -15x^4y^2 = 0,\ -6y^2z = 0,\ 4xz = 0,$$

ou seja,

$$V_{sing} = \{(0,0,0)\} \text{ e } V_{reg} = V \setminus \{(0,0,0)\}.$$

Seja V uma variedade algébrica e $I(V) = \langle f_1, ..., f_k\rangle$, o ideal correspondente, o qual é gerado por $f_1, ..., f_k$. Dessa maneira temos

$$V = \phi^{-1}(0),$$

com

$$\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k,$$
$$x \mapsto (f_1(x), ..., f_k(x))$$

Definição 1.11. *Seja $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$ e $V = \phi^{-1}(0)$, definimos*

$$codim(V) = max\{rank(J\phi(x));\ x \in V\}$$

e

$$dim(V) = n - codim(V).$$

Exemplo 1.12. *Os conjuntos algébricos do exemplo 1.6 são tais que* $dim(V_1) = dim(V_2) = dim(V_3) = 1$.

Definição 1.13. *Seja* $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$, *dizemos que* $\phi^{-1}(0)$ *é uma interseção completa quando*

$$dim(\phi^{-1}(0)) = n - p.$$

Lema 1.14. *Sejam* A *e* B *matrizes tais que o número de colunas de* A *é igual ao número de linhas de* B*, em outras palavras, tais que o produto* AB *faça sentido, então*

$$rank(AB) \leq min\{rank(A),\ rank(B)\}.$$

Teorema 1.15. *Sejam* $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$, $\psi : \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}^q$ *aplicações holomorfas.*

Se $Y = \psi^{-1}(0)$, $X = \phi^{-1}(Y)$ *tais que* $codim_{\mathbb{C}^p}(Y) = codim_{\mathbb{C}^n}(X)$, *então*

$$\phi^{-1}(Y_{sing}) \subset X_{sing}.$$

Demonstração: Seja $x_0 \in \phi^{-1}(Y_{sing})$, ou seja, $\phi(x_0) \in Y_{sing}$ e consequentemente

$$rank(J\psi(\phi(x_0))) < codim_{\mathbb{C}^p}(Y).$$

Por hipótese $X = \phi^{-1}(Y)$ o que implica $X = \phi^{-1}(\psi^{-1}(0)) = (\psi \circ \phi)^{-1}(0)$, logo $x \in X_{sing}$ se, e somente se,

$$rank(J((\psi \circ \phi)(x))) < codim_{\mathbb{C}^n}(X),$$

mas

$$\begin{aligned} rank(J(\psi \circ \phi)(x_0)) &= rank((J\psi)(\phi(x_0))(J\phi)(x_0)) \\ &\leq min\{rank((J\psi)(\phi(x_0))),\ rank((J\phi)(x_0))\} \\ &< codim_{\mathbb{C}^p}(Y) \\ &= codim_{\mathbb{C}^n}(X), \end{aligned}$$

assim concluímos que $x_0 \in X_{sing}$. Portanto $\phi^{-1}(Y_{sing}) \subset X_{sing}$.

■

Proposição 1.16. *Seja* $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$ *holomorfa e* $V = \phi^{-1}(0)$. *Então*

$$V_{reg} \text{ é um subconjunto aberto e denso de } V.$$

Demonstração: Vamos mostrar primeiro que V_{reg} é denso em V Para obtermos $\overline{V_{reg}} \subset V$ basta notar que V é fechado, pois é a imagem inversa de um conjunto fechado por uma função contínua. Vamos mostrar agora que $V \subset \overline{V_{reg}}$, note que $V_{sing} = \{x \in V;\ rank(J\phi(x)) < codim(\phi^{-1}(0))\}$, como $V_{sing} = V \setminus V_{reg}$ temos que $V_{reg} = \{x \in V;\ rank(J\phi(x)) = codim(\phi^{-1}(0))\}$. Seja l a quantidade de submatrizes de ordem é $codim(\phi^{-1}(0))$ que uma matriz N de ordem $p \times n$. Estabeleça uma ordenação $N_1, ..., N_l$ para tais matrizes e defina

$$\psi : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^l,$$
$$A \mapsto (det(N_1(A)), ..., det(N_l(A)))$$

Assim se $x \in V$ temos duas possibilidades:

a) $x \in V_{reg}$ e consequentemente $x \in \overline{V_{reg}}$.

b) $x \in V_{sing}$, ou seja, $\psi(x) = 0$, mas ψ não é identicamente nula, logo para todo $\epsilon > 0$ existe $x_\epsilon \in B(x, \epsilon)$ tal que $\psi(x_\epsilon) \neq (0, ..., 0)$, ou seja, $x_\epsilon \in V_{reg}$, resultando $x \in \overline{V_{reg}}$.

Dessa maneira concluímos que $\overline{V_{reg}} = V$. Por fim resta mostrar que V_{reg} é aberto em V, mas isso segue de $V_{reg} = V \cap (\psi^{-1}(\mathbb{C}^l \setminus \{0\}))$. O que completa a demonstração.

■

Definição 1.17. *Seja $V \subset \mathbb{C}^n$ um conjunto algébrico.*

V é uma variedade algébrica (ou conjunto algébrico irredutível) quando não existem subconjuntos algébricos próprios V_1, V_2 de V tais que $V = V_1 \cup V_2$. É comum dizermos também que V é uma variedade.

Se $V = V_1 \cup V_2$, V_1 e V_2 são chamadas componentes de V.

Exemplo 1.18. *No exemplo 1.6 temos que V_2 e V_3 são variedades algébricas enquanto V_1 não é uma variedade algébrica, e se decompõe em duas componentes irredutíveis.*

Definição 1.19. *Um conjunto algébrico é equidimensional quando todas as suas componentes irredutíveis possuem a mesma dimensão.*

Exemplo 1.20. *No exemplo 1.6 temos que V_1 é equidimensional.*

Lema 1.21. *[10] Se X é interseção completa, então X é equidimensional.*

Teorema 1.22. Teorema de Whitney*[14]*

Seja $V \subset \mathbb{C}^n$ um conjunto algébrico.

V_{reg} é uma variedade algébrica de dimensão $n - \rho$, onde ρ é dado na definição 1.8.

Lema 1.23. *[14] Se W é uma variedade algébrica irredutível, e V é subvariedade própria de W, então $dim(V) < dim(W)$.*

1.3 Aplicação Racional

Essa seção foi baseada em [8]

Seja $Y \subset \mathbb{C}^n$ variedade algébrica.

Definição 1.24. *Uma função $f : Y \to \mathbb{C}$ é regular em $p \in Y$, se existem $g,\ h \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ e uma vizinhança U de p em Y tal que*

$$f\big|_U = \frac{g}{h}.$$

Dizemos que f é regular quando f é regular em todo ponto $p \in Y$.

Definição 1.25. *Sejam X e Y duas variedades algébricas.*

Um morfismo $\phi : U \to Y$, $U \subset X$ aberto, é uma aplicação contínua tal que para todo aberto $V \subset Y$ e para toda função regular $f : V \to \mathbb{C}$ a função $f \circ \phi : \phi^{-1}(V) \to \mathbb{C}$ é regular.

Sejam $\psi : U \to X$, e $\phi : V \to Y$, morfismos, com U e V abertos. Dizemos que ψ e ϕ estão relacionadas, $\phi \sim \psi$, quando,

$$\phi\big|_{U \cap V} = \psi\big|_{U \cap V}.$$

Temos que $\sim$ é uma relação de equivalência.

Definição 1.26. *Sejam X e Y variedades.*

Uma aplicação racional $\phi : X \to Y$ é a classe de equivalência de um morfismo $\phi : U \to Y$, $U \subset X$ aberto.

Definição 1.27. *Um isomorfismo é uma aplicação racional com inversa também racional.*

Exemplo 1.28. *Seja $Y = v(x^2 - y^3) = \{(t^3, t^2);\ t \in \mathbb{C}\}$,*

$$\begin{aligned} f : Y \setminus \{(0,0)\} &\to \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\ (x, y) &\mapsto \frac{x}{y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{0\} &\to Y \setminus \{(0,0)\} \\ t &\mapsto (t^3, t^2) \end{aligned}$$

São aplicações racionais.

1.4 Transformada

Definição 1.29. *Sejam X um conjunto algébrico e $A \subset X$ um subconjunto algébrico fechado de X. Uma transformada de (X, A) é a variedade Y com uma aplicação própria $\Psi : Y \to X$ tal que:*

1. $\Psi : \Psi^{-1}(X \setminus A) \to X \setminus A$ *isomorfismo.*
2. $\overline{\Psi^{-1}(X \setminus A)} = Y$

Exemplo 1.30. *Seja $V = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2;\ x^2 - y^3 = 0\} = \{(t^3, t^2); t \in \mathbb{C}\}$.*
$\{(0, 0)\} \subset V$ é uma subvariedade algébrica fechada. Defina

$$\begin{aligned}\Psi : \mathbb{C} &\to V,\\ t &\mapsto (t^3, t^2)\end{aligned}$$

Note que Ψ é uma aplicação própria.

Consideremos agora $\Psi\big|_{\Psi^{-1}(V \setminus \{0\})} : \Psi^{-1}(V \setminus \{0\}) \to V \setminus \{0\}$, pelo exemplo 1.28 seque que $\Psi\big|_{\Psi^{-1}(V \setminus \{0\})}$ é isomorfismo.

Por fim, temos

$$\overline{\Psi^{-1}(V \setminus \{0\})} = \overline{\mathbb{C} \setminus \{0\}} = \mathbb{C}.$$

Dessa maneira concluímos que $\mathbb{C}$ e Ψ são uma transformada de $(V, \{0\})$.

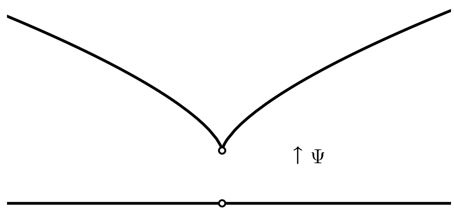

Figura 1.2: Exemplo de Transformada

Proposição 1.31. *Seja Y tal que $\Psi : Y \to X$ é transformada de (X, A). Então $dim(\Psi^{-1}(A)) < dim(X)$.*

Demonstração: De fato, note que $Y = \Psi^{-1}((X \setminus A) \cup A) = \Psi^{-1}(X \setminus A) \cup \Psi^{-1}(A)$, e por hipótese $Y = \overline{\Psi^{-1}(X \setminus A)}$, ou seja $\Psi^{-1}(A) \subset \overline{\Psi^{-1}(X \setminus A)}$, mas $\Psi^{-1}(X \setminus A) \cap \Psi^{-1}(A) = \emptyset$ o que implica $\Psi^{-1}(A) \subset \partial(\Psi^{-1}(X \setminus A))$, resultando $dim(\Psi^{-1}(A)) < dim(Y)$. Juntando com

$$dim(Y) = dim(\overline{\Psi^{-1}(X \setminus A)}) = dim(\Psi^{-1}(X \setminus A)) = dim(X \setminus A) \leq dim(X).$$

Obtemos

$$dim(\Psi^{-1}(A)) < dim(Y) \leq dim(X),$$

e o resultado segue.

■

Definição 1.32. *Uma resolução de* (X, X_{sing}) *é uma transformada com* Y *suave.*

Exemplo 1.33. *O exemplo 1.30 nos dá que* $\mathbb{C}$ *e* Ψ *são uma resolução de* $(V, \{(0,0)\})$*, pois* $\mathbb{C}$ *é variedade diferenciável, portanto suave.[14]*

Definição 1.34. *Sejam* $T_1,\ \Psi_1 : (T_1, A_1) \to (X, A)$ *e* $T_2,\ \Psi_2 : (T_2, A_2) \to (X, A)$*, transformadas distintas de um mesmo espaço e subespaço. Dizemos que* f *é uma aplicação entre transformadas quando* $\Psi_1 = \Psi_2 \circ f$*.*

$$\begin{tikzcd} T_1 \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "\Psi_1"] & \\ T_2 \arrow[r, "\Psi_2"'] & X \end{tikzcd}$$

Quando uma aplicação entre transformadas f *é um isomorfismo entre variedades (analíticas ou algébricas), dizemos que* f *é um isomorfismo.*

1.5 Grassmanniana

Nessa seção vamos definir a Variedade Grasmanniana, a qual é muito utilizada ao longo do texto.

Para mais detalhes sobre a Variedade Grassmanniana pode-se consultar [2], [12], [13] ou [19].

Definição 1.35. *Considere o espaço vetorial* $\mathbb{C}^n$*.*

Definiremos a Variedade Grassmanniana de ordem $k \leq n$ *de* $\mathbb{C}^n$*,* $Gr(k, n)$*, como sendo o conjunto de todos os subespaços vetoriais de* $\mathbb{C}^n$ *cuja dimensão é* k*.*

A topologia de $Gr(k, n)$ é dada pela topologia quociente que vem da seguinte relação de equivalência: sejam X e Y subespaços vetoriais de dimensão k de $\mathbb{C}^n$, consideramos as matrizes X e Y, $k \times n$, cujas linhas formam uma base dos subespaços X e Y, respectivamente. Dessa maneira as matrizes X e Y possuem *rank* máximo, ou seja $rank(X) = rank(Y) = k$ dizemos que

$$X \sim Y \Leftrightarrow \textit{ existe matriz não singular, } A\textit{, de ordem } k \textit{ tal que}$$

$$X = AY,$$

Proposição 1.36. *[12]*

A Grassmanianna é uma variedade diferenciável de dimensão $k(n-k)$

Proposição 1.37. *[12]*

A Variedade Grassmanniana é compacta.

Como é feito em [19] vamos considerar as seguintes cartas em $Gr(k,n)$, Seja $I = i_1, ..., i_k \subset 1, ..., n$, sem perda de generalidade suponha $i_1 < i_2 < ... < i_k$ e defina a aplicação:

$$A_I : M_{k,n-k} \to M_{k,n},$$
$$(x_{ij}) \mapsto A_I(x_{ij})$$

Sendo a matriz $A_I(x_{ij})$ composta pelas seguintes colunas

$$C_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{kj} \end{pmatrix} \; se \; j \notin I \text{ e } C_{i_l} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \; se \; i_l \in I,$$

Note que a l-ésima entrada de C_{i_l}, é não nula.

A partir de agora identificaremos a matriz $A_I(x_{ij})$ com o subespaço, $\widetilde{A}_I(x_{ij})$, gerado pelas linhas de $A_I(x_{ij})$, o qual é um elemento do $Gr(k,n)$.

Dessa maneira consideramos:

$$\widetilde{A}_I : M_{k,n-k} \to Gr(k,n)$$
$$(x_{i,j}) \mapsto \widetilde{A}_I(x_{i,j})$$

Proposição 1.38. *[13] A aplicação $T : Gr(k,n) \to Gr(n-k,n)$ dada por $T(V) = V^{\perp}$ é homeomorfismo.*

Proposição 1.39. *Seja (X_i) uma sequência convergente com $X_i \in Gr(k,n)$ para todo $i \in \mathbb{N}$.*

Se X é o limite da sequência (X_i), então para todo $x \in X$ existe sequência (x_i) convergindo para x tal que $x_i \in X_i \; \forall \, i \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Seja (X_i) sequência de elementos de $G(k,n)$, que converge para X. Como a Variedade Grassmanniana é compacta temos que $X \in Gr(k,n)$, desta maneira podemos tomar um representante para X, de tal forma que esse representante possua uma submatriz identidade de ordem k, sejam $C_{l_1}, ..., C_{l_k}$ as colunas dessa submatriz. Considere agora o conjunto $I = \{l_1, ..., l_k\} \subset \{1, ..., n\}$, logo temos que $X \in Im(A_I)$ o qual é aberto, pois A_I é homeomorfismo, então existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $i \geq i_0$ então $X_i \in Im(A_I)$, ou seja, as matrizes X_i possuem colunas do tipo

$$C_j^i = \begin{pmatrix} x_{1j}^i \\ \vdots \\ x_{kj}^i \end{pmatrix} \quad se \quad j \notin I \ e \ C_{l_s}^i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad se \ l_s \in I.$$

Assim segue do fato de X_i convergir para X e A_I ser homeomorfismo que x_{kj}^i converge para x_{kj}. De onde segue o resultado.

■

Proposição 1.40. *Sejam* $(f_{ij}) : \mathbb{C}^n \to M_{m,n}$*, holomorfa, tal que* $Im(F) \subset \{A \in M_{m,n};\ rank(A) = t-1\}$*,* (x_k)*, e* $W_k = \langle (f_{i1}(x_k), ..., f_{in}(x_k)),\ i = 1, ..., m\rangle$*, sequências em* $\mathbb{C}^N$ *e* $Gr(t-1, n)$*, respectivamente.*

Se x_k *converge para* x*, e* W_k *converge para* W*, então* $\langle (f_{i1}(x), ..., f_{in}(x)),\ i = 1, ..., m\rangle \subset W$*.*

Demonstração: Como $W \in Gr(t-1, n)$, existe $I = \{l_1, ..., l_{t-1}\} \subset \{1, ..., n\}$ tal que $W \subset Im(A_I)$. Mas W_i converge para W, então existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo

$$k > k_0,\ W_k \in Im(A_I).$$

Dessa maneira podemos escolher um representante W_k' de W_k tal que as colunas de W_k' são da seguinte forma

$$C_j^k = \begin{pmatrix} x_{1j}^k \\ \vdots \\ x_{mj}^k \end{pmatrix} \quad se \quad j \notin I \ e \ C_{l_s}^k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad se \ l_s \in I.$$

Note que as linhas L_s^k, $s = 1, ..., m$ de $F(x_k)$ pertencem a W_k', ou seja,

$$L_s^k = a_1 {L'}_1^k + ... + a_m {L'}_m^k,$$

sendo L'^k_r a linha r de W'_k mas L^k_s converge para L_s, sendo L_s a linha s de $F(x)$. O que implica $\langle (f_{i1}(x), ..., f_{in}(x),\ i = 1, ..., m)\rangle \subset W$.

1.6 Homotopia

Essa seção foi baseada em [16].

Sejam X, Y espaços topológicos.

Definição 1.41. *Uma aplicação contínua $g : X \to Y$ é homotópica a uma aplicação contínua $f : X \to Y$ quando existe uma aplicação $H : X \times [0, 1] \to Y$, tal que:*

$$H(x, 0) = f(x) \text{ para todo } x \in X \text{ e}$$
$$H(x, 1) = g(x) \text{ para todo } x \in X.$$

Definição 1.42. *Uma aplicação contínua $g : Y \to X$ é chamada homotopia inversa da aplicação contínua $f : X \to Y$ se as composições $f \circ g$, $g \circ f$ são homotópicas a $Id_Y : Y \to Y$, $Id_X : X \to X$, respectivamente.*

Aplicações contínuas que possuem homotopia inversa são chamadas equivalência de homotopias.

Os espaços X e Y são homotopicamente equivalentes quando existe uma equivalência de homotopia entre eles.

Definição 1.43. *Sejam X, Y espaços topológicos tais que $Y \subset X$, a aplicação contínua $f : X \to Y$ é uma retração quando $f\big|_Y = Id_y$*

Definição 1.44. *Seja $\rho : X \to Y$ uma retração, quando a composta $i \circ \rho$, sendo $i : Y \hookrightarrow X$ a inclusão, é homotópica à identidade, dizemos que ρ é uma deformação por retração.*

Proposição 1.45. *Uma deformação por retração $f : X \to Y$ e a inclusão $i : Y \hookrightarrow X$ são um par de homotopias inversas.*

Demonstração: De fato, note que $f \circ i : Y \to Y$ é tal que para todo $x \in Y$, $f(i(x)) = f(x) = x$, pois $f\big|_Y = Id_Y$, e assim $f \circ i = Id_Y$ e consequentemente $f \circ i$ é homotópica à Id_Y.

Consideremos agora $i \circ f : X \to X$, como f é uma deformação por retração temos que $i \circ f$ é homotópica à Id_X, o que concluí a demonstração.

∎

Capítulo 2

Singularidades Determinantais

Neste capítulo vamos introduzir nosso principal objeto de estudo, Singularidades Determinantais. Singularidades Determinantais são uma generalização do conceito de interseção completa, para defini-las precisamos primeiramente do conceito de Singularidades Determinantais Genéricas. Com essa finalidade consideramos $M_{m,n}$, com $m, n \in \mathbb{N}$, o conjunto das matrizes $m \times n$ com entradas em $\mathbb{C}$.

2.1 Singularidade Determinantal Genérica

Definição 2.1. *Sejam $m, n, t \in \mathbb{N}$, $0 < t \leq min\{m, n\}$, o conjunto*

$$M^t_{m,n} = \{A \in M_{m,n};\ rank(A) < t\},$$

é a singularidade determinantal genérica do tipo (m, n, t).

Exemplo 2.2. *Seja $M_{2,2} = (a_{ij})$, daí temos*

$$M^2_{2,2} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_{2,2};\ a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0 \right\}.$$

Pela referência [1] $M^t_{m,n}$ é uma variedade algébrica de dimensão $mn-(m-t+1)(n-t+1)$ cujo conjunto singular é $M^{t-1}_{m,n}$.

Observação:

O conjunto $\{(M^i_{m,n} \setminus M^{i-1}_{m,n}),\ i = 1, ..., t\}$, sendo $M^0_{m,n} = \emptyset$, forma uma partição de $M^t_{m,n}$. Cada conjunto $(M^i_{m,n} \setminus M^{i-1}_{m,n})$ é chamado estrato de $M^t_{m,n}$.

Lema 2.3. *[1] Seja $A \in (M^t_{m,n} \setminus M^{t-1}_{m,n})$, então o espaço tangente*

$$T_A M^t_{m,n} = \{B \in M_{m,n};\ B(Ker(A)) \subset Im(A)\}.$$

2.2 Singularidade Determinantal

Definição 2.4. *Seja* $F : U \subset \mathbb{C}^N \to M^t_{m,n}$ *uma aplicação com entradas holomorfas.*

$$X = F^{-1}(M^t_{m,n})$$

é uma singularidade determinantal do tipo (m, n, t) *quando*

$$dim(X) = N - (m - t + 1)(n - t + 1).$$

Como $X = F^{-1}(M^t_{m,n}) = F^{-1}\Big(\bigcup_{s=1}^{t}(M^s_{m,n} \setminus M^{s-1}_{m,n})\Big) = \bigcup_{s=1}^{t} F^{-1}(M^s_{m,n} \setminus M^{s-1}_{m,n})$, definiremos

$$X^s := F^{-1}(M^s_{m,n} \setminus M^{s-1}_{m,n}),$$

o qual nos dá uma partição de X.

Observação: Toda interseção completa é uma singularidade determinantal.

De fato, seja $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$ aplicação holomorfa tal que $\phi^{-1}(0)$ é interseção completa, ou seja, $dim(\phi^{-1}(0)) = n - p = n - (1 - 1 + 1)(p - 1 + 1)$, dessa maneira $\phi^{-1}(0) = \phi^{-1}(M^1_{1,p})$ e $dim(\phi^{-1}(M^1_{1,p})) = n - (1 - 1 + 1)(p - 1 + 1)$, portanto toda interseção completa é uma variedade determinantal do tipo $(1, p, 1)$.

Interseções completas podem ser vistas, também, como uma singularidades determinantais do tipo $(p, 1, 1)$, pois podemos identificar $\mathbb{C}^p$ com $M_{p,1}$.

Exemplo 2.5. *Seja*

$$F : \mathbb{C}^4 \to M_{2,3},$$
$$(x, y, z, w) \mapsto \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & w \end{pmatrix}$$

e $X = F^{-1}(M^2_{2,3}) = v(xz - y^2, yw - z^2, xw - zy)$.

Utilizando o Singular, *ver apêndice, obtemos* $dim(X) = 2 = 4-(2-2+1)(3-2+1)$, *portanto* X *é singularidade determinantal do tipo* $(2, 3, 2)$.

Seja $F : U \subset \mathbb{C}^N \to M_{m,n}$ aplicação holomorfa com $X = F^{-1}(M^t_{m,n})$ singularidade determinantal do tipo (m, n, t), se $F(0) \neq 0$, ou seja, existe $s \in \mathbb{N}$, $0 < s \leq min\{m, n\}$, tal que $rank(F(0)) = s$. Dessa maneira podemos encontrar outra aplicação $F' : U' \to M_{m-s,n-s}$ tal que $F'(0) = 0$ com $X = (F')^{-1}(M^{t-s}_{m-s,n-s})$ singularidade determinantal do tipo $(m - s, n - s, t - s)$.

Exemplo 2.6. *Seja* $F : \mathbb{C}^N \to M_{2,3}$ *aplicação holomorfa dada por* $F = (f_{ij})_{2\times 3}$, $X =$

$F^{-1}(M^2_{2,3})$ singularide determinantal do tipo $(2,3,2)$ com

$$F(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

como $f_{12} \neq 0$ existe vizinhança U' do zero tal que $f_{12}(x) \neq 0$ para todo $x \in U'$, dessa maneira considere $G : U' \subset \mathbb{C}^N \to M_{2,2}$ e $H : U' \subset \mathbb{C}^N \to M_{3,3}$ tais que

$$G = \begin{pmatrix} \frac{1}{f_{12}} & 0 \\ -\frac{f_{22}}{f_{12}} & 1 \end{pmatrix}, \text{ e } H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{f_{11}}{12} & -\frac{f_{13}}{f_{12}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

cálculos simples mostram que

$$GFH = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & f_{21} - \frac{f_{11}f_{22}}{f_{12}} & f_{23} - \frac{f_{13}f_{22}}{f_{12}} \end{pmatrix},$$

logo,

$$\begin{aligned} F' : U' &\to M_{1,2}, \\ x &\mapsto \left((f_{21} - \frac{f_{11}f_{22}}{f_{12}})(x), (f_{23} - \frac{f_{13}f_{22}}{f_{12}})(x) \right) \end{aligned}$$

é tal que $X = F^{-1}(M^2_{2,3}) = (F')^{-1}(M^1_{1,2})$, e como $codim(X) = codim(M^2_{2,3}) = 2 = codim(M^1_{1,2})$ concluímos que X é singularidade determinantal do tipo $(1,2,1) = (2-1, 3-1, 2-1)$.

O exemplo acima mostra que não há perda de generalidade em supor $F(0) = 0$.

Observação:

X tem estrutura de conjunto analítica cujo conjunto singular é dado por

$$X_{sing} = \{x \in X;\ rank(J(g_1, ..., g_k))(x) < codim(X) = (m-t+1)(n-t+1)\},$$

sendo $g_i,\ i = 1, ..., k$, os menores de ordem t de F.

Exemplo 2.7. *Ainda considerando*

$$\begin{aligned} F : \mathbb{C}^4 &\to M_{2,3}, \\ (x,y,z,w) &\mapsto \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & w \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e $X = F^{-1}(M^2_{2,3}) = v(xz - y^2, yw - z^2, xw - zy)$. *Temos que*

$$\begin{aligned} g_1(x,y,z,w) &= xz - y^2;\\ g_2(x,y,z,w) &= yw - z^2;\\ g_3(x,y,z,w) &= xw - zy. \end{aligned}$$

Então

$$J(g_1,g_2,g_3)(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} z & -2y & x & 0\\ 0 & w & -2z & y\\ w & -z & -y & x \end{pmatrix}$$

Utilizando o SINGULAR *mais uma vez, ver apêndice, obtemos*

$$\begin{aligned} X_{sing} &= v(w^2, zw, yw, xw, z^2, yz, xz, y^2, xy, x^2)\\ &= \{(0,0,0,0)\} \end{aligned}$$

O próximo resultado é um corolário do Teorema 1.15

Corolário 2.8. *Seja* $F : \mathbb{C}^N \to M_{m,n}$ *holomorfa tal que* $X = F^{-1}(M^t_{m,n})$ *é singularidade determinantal do tipo* (m,n,t), *então* $F^{-1}(M^{t-1}_{m,n}) \subset X_{sing}$.

Demonstração: Seja l a quantidade de submatrizes de ordem t que uma matriz $A \in M_{m,n}$, possui, dê uma ordenação $A_1, ..., A_l$, para tais matrizes e defina

$$\begin{aligned} \phi : M_{m,n} &\to \mathbb{C}^l,\\ A &\mapsto (det(A_1), ..., \det(A_l)) \end{aligned}$$

Note que $M^t_{m,n} = \phi^{-1}(0)$, por hipótese $X = F^{-1}(M^t_{m,n})$ e $codim_{\mathbb{C}^N}(X) = codim_{M_{m,n}}(M^t_{m,n})$, logo pelo teorema 1.15 temos que

$$F^{-1}(M^{t-1}_{m,n}) \subset X_{sing}.$$

■

Observação Em geral temos $X_{sing} \not\subset F^{-1}(M^{t-1}_{m,n})$.

Exemplo 2.9. *Seja*

$$\begin{aligned} F : \mathbb{C}^2 &\to M_{2,2},\\ (x,y) &\mapsto \begin{pmatrix} 2x & 27(y^3 - xy)\\ y^3 - xy & 2x^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$X = F^{-1}(M^2_{2,2}) = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2;\ f(x,y) := 4x^3 - 27(y^3 - xy)^2 = 0\},$$

Utilizando o SINGULAR, *ver apêndice, obtemos* $codim(X) = 1 = (2-2+1)(2-2+1)$, *ou seja,* X *é singularidade determinantal do tipo* $(2,2,2)$. *Mas*

$$J(f(x,y)) = \Big(12x^2 + 54y(y^3 - xy) \quad -54(y^3 - xy)(3y^2 - x)\Big)$$

o que resulta

$$\begin{aligned} X_{sing} &= v(\langle 4x^3 - 27y(y^3 - xy)\rangle) + I_1(Jf(x,y)) \\ &= v(4x^3 - 27y(y^3 - xy),\ 2x^2 + 9y(y^3 - xy)),\ (y^3 - xy)(3y^2 - x)) \\ &= v(2x^2 - 9xy^2 + 9y^4,\ xy(3y^2 - x),\ x^2(3y^2 - x)), \end{aligned}$$

logo $X_{sing} = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2;\ x = 3y^2\} \neq \{(0,0)\} = F^{-1}(M^1_{2,2})$.

Definição 2.10. *Seja* $F : U \subset \mathbb{C}^N \to M_{m,n}$ *holomorfa.*

$x \in U$ *é essencialmente não singular quando* F *intersecta o estrato* $(M^s_{m,n} \setminus M^{s-1}_{m,n})$ *transversalmente em* $F(x)$.

Definição 2.11. *Seja* X *uma singularidade determinantal do tipo* (m,n,t) *definida pela aplicação* $F : \mathbb{C}^N \to M_{m,n}$.

X *é chamada singularidade determinantal essencialmente isolada (EIDS) quando todos os pontos* $x \in X \setminus \{0\}$ *são essencialmente não singular.*

Teorema 2.12. *Seja* $F : \mathbb{C}^N \to M_{m,n}$.

Se $X = F^{-1}(M^t_{m,n})$ *é EIDS, então* $X_{sing} = F^{-1}(M^{t-1}_{m,n})$.

Demonstração: Pelo corolário 2.8 temos que $F^{-1}(M^{t-1}_{m,n}) \subset X_{sing}$. Mostremos então que $X_{sing} \subset F^{-1}(M^{t-1}_{m,n})$. De fato, seja $x \in F^{-1}(M^t_{m,n} \setminus M^{t-1}_{m,n})$, ou seja $F(x) \in (M^t_{m,n} \setminus M^{t-1}_{m,n})$, como X é $EIDS$ temos que F intersecta $(M^t_{m,n} \setminus M^{t-1}_{m,n})$ transversalmente em $F(x)$, mas $F^{-1}(M^t_{m,n} \setminus M^t_{m,n})$ é uma variedade diferenciável de dimensão $N-(m-t+1)(n-t+1)$, ou seja, $F^{-1}(M^t_{m,n} \setminus M^{t-1}_{m,n})$ é suave e portanto $x \notin X_{sing}$.

■

Exemplo 2.13. *Considere*

$$G : \mathbb{C}^4 \to M_{2,2},$$
$$(x,y,z,w) \mapsto \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

$X = F^{-1}(M^2_{2,2}) = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{C}^4;\ xw - zy = 0\}$.

Utilizando o SINGULAR, *ver apêndice, obtemos* $dim(X) = 3 = 4-(2-2+1)(2-2+1)$, *e* X *é singularidade determinantal do tipo* $(2,2,2)$.

Vamos mostrar que X é EIDS, ou seja, que para todo $(x,y,z,w) \in X \setminus \{(0,0,0,0)\}$, F intersecta $(M^2_{2,2} \setminus M^1_{2,2})$ transversalmente em $F(x,y,z,w)$, ou seja,

$$DF_{(x,y,z,w)}(T_{(x,y,z,w)}\mathbb{C}^4) + T_{F(x,y,z,w)}(M^2_{2,2} \setminus M^1_{2,2}) = T_{(x,y,z,w)}(M_{2,2}).$$

Como

$$DF_{(x,y,z,w)}(h_1,h_2,h_3,h_4) = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_3 & h_4 \end{pmatrix},$$

temos,

$$DF_{(x,y,z,w)}(T_{(x,y,z,w)}\mathbb{C}^4) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Logo F intersecta $(M^2_{2,2} \setminus M^1_{2,2})$ transversalmente em todo $(x,y,z,w) \in X \setminus \{(0,0,0)\}$, como desejávamos.

Exemplo 2.14. *Retomemos o exemplo 2.9.*

Como $X_{sing} \neq F^{-1}(M^1_{2,2})$, segue que X não é EIDS, mas faremos a conta explicitamente.

Lembre-se que

$$F : \mathbb{C}^2 \to M_{2,2}$$
$$(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} 2x & 27y^3 - 27xy \\ y^3 - xy & 2x^2 \end{pmatrix}$$

Vamos mostrar que existe $(x,y) \in X \setminus \{(0,0)\}$ tal que

$$DF_{(x,y)}(T_{(x,y)}) + T_{F(x,y)}(M^2_{2,2} \setminus M^1_{2,2}) \neq T_{F(x,y)}(M_{2,2}).$$

Sabemos que

$$DF_{(x,y)}(h_1,h_2) = \begin{pmatrix} 2h_1 & 81y^2h_2 - 27xh_2 - 27yh_1 \\ 3y^2h_2 - xh_2 - yh_1 & 4xh_1 \end{pmatrix}.$$

Consideremos o ponto $(\frac{3y^2}{4}, y) \in X$, note que:

1) $DF_{(3y^2,2)}(T_{(3y^2,y)}(\mathbb{C}^2)) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 & -27y \\ -y & 12y^2 \end{pmatrix} \right\rangle;$

2) $T_{F(3y^2,y)}(M^2_{2,2} \setminus M^1_{2,2}) = \{B \in M_{2,2};\ B(ker(F(3y^2,y))) \subset Im(F(3y^2,y))\};$

3) $ker(F(3y^2,y)) = \langle (9y^2,1) \rangle$, *e* $Im(F(3y^2,y)) = \langle (6y^2,-2y^3) \rangle.$

Logo

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \in T_{F(3y^2),y},$$

se, e somente se,

$$(9b_1 + b_2, 9b_3y + b_4) \in Im(F(3y^2, y)),$$

o que é equivalente a

$$det \begin{pmatrix} 9b_1 + b_2 & 9b_3y + b_4 \\ 6y^2 & -2y^3 \end{pmatrix} = 0,$$

o que acontece se, e somente se, $b_4 = -\frac{1}{3}b_2y - 9b_3y - 3b_1y^2$ *e consequentemente*

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & -\frac{1}{3}b_2y - 9b_3y - 3b_1y^2 \end{pmatrix}.$$

Portanto

$$T_{F(3y^2,y)}(M_{2,2}^2 \setminus M_{2,2}^1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3y^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3}y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -9y \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Mas

$$dim(DF_{(3y^2,y)}T_{(3y^2,y)}\mathbb{C}^2 + T_{F(3y^2,y)}(M_{2,2}^2 \setminus M_{2,2}^1)) = 3,$$

o que prova

$$DF_{(x,y)}(T_{(x,y)}) + T_{F(x,y)}(M_{2,2}^2 \setminus M_{2,2}^1) \neq T_{F(x,y)}(M_{2,2}).$$

Capítulo 3

Resoluções de Singularidades Determinantais Genéricas

Neste capítulo, estudamos as transformadas de Tjurina e de Nash de uma singularidade determinantal genérica. A escrita se baseia na seção 3 de [19].

Definição 3.1. *Dados números inteiros positivos, m, n e t, tais que $t \leq min\{m, n\}$, a transformada de Tjurina da singularidade determinantal genérica $M^t_{m,n}$*

$$Tjur(M^t_{m,n}) := \{(A, V) \in M_{m,n} \times Gr(n - t + 1, n);\ A(V) = 0\},\ \textit{ou seja,}$$
$$Tjur(M^t_{m,n}) := \{(A, V) \in M_{m,n} \times Gr(n - t + 1, n);\ V \subset ker(A)\},$$

considerando $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, a aplicação linear cuja matriz nas bases canônicas é A

De [1] temos que a aplicação

$$\begin{aligned} \pi : Tjur(M^t_{m,n}) &\to M_{m,n} \\ (A, V) &\mapsto A \end{aligned}$$

faz de $Tjur(M^t_{m,n})$ uma transformada. Ainda da referência [1] temos que $Tjur(M^t_{m,n})$ é uma resolução de $(M^t_{m,n}, M^{t-1}_{m,n})$.

Assim como definimos a Transformada de Tjurina, podemos definir também a transformada de Tjurina Tansposta de uma singularidade determinantal genérica $M^t_{m,n}$

Definição 3.2. *A transformada de Tjurina transposta é dada por*

$$Tjur^T(M^t_{m,n}) := \{(A, W) \in M_{m,n} \times Gr(m - t + 1, m);\ A^T(W) = 0\},\ \textit{ou seja,}$$
$$Tjur^T(M^t_{m,n}) := \{(A, W) \in M_{m,n} \times Gr(m - t + 1, m);\ W \subset ker(A^T)\}.$$

Observe que $Tjur^T(M^t_{m,n}) = Tjur(M^t_{n,m})$, ou seja, a Tjurina transposta de $M^t_{m,n}$ é a Tjurina de $M^t_{n,m}$, portanto segue também de [1] que a aplicação que faz de $Tjur^T(M^t_{m,n})$

uma transformada é

$$\pi_T : Tjur^T(M^t_{m,n}) \to M_{m,n},$$
$$(A, W) \mapsto A$$

e $Tjur^T(M^t_{m,n})$ é uma resolução de $(M^t_{m,n}, M^{t-1}_{m,n})$.

Vejamos agora outras caracterizações da Transformada de Tjurina Transposta, para isso precisaremos dos seguintes conceitos:

Definição 3.3. *Seja $A \in M_{m,n}$, a qual será vista como aplicação linear $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$.*

O cokernel de A, é o núcleo de A^T, em símbolos:

$$coker(A) = ker(A^T).$$

Dessa maneira, temos

$$Tjur^T(M^t_{m,n}) = \{(A, W) \in M_{m,n} \times Gr(m - t + 1, m); W \subset coker(A^T)\}.$$

Para obtermos uma segunda caracterização, observe que dados $(A, W) \in Tjur^T(M^t_{m,n})$, se $(w_1, ..., w_m) \in W$ então o produto escalar entre $(w_1, ..., w_m)$ e $(a_{1j}, ..., a_{mj})$ é zero para todo $j = 1, ..., n$, ou seja, $W \subset (Im(A))^\perp$, pois $\langle (a_{1j}, ..., a_{mj}) \rangle = Im(A)$. Considerando o homeomorfismo $f : Gr(m - t + 1) \to Gr(t - 1, m)$ dado por $f(W) = W^\perp$, obtemos

$$Tjur^T(M^t_{m,n}) = \{(A, W) \in M_{m,n} \times Gr(t - 1, m);\ Im(A) \subset W\}.$$

Proposição 3.4. *Não existe aplicação contínua entre as transformadas $Tjur(M^t_{m,n})$ e $Tjut^T(M^t_{m,n})$*

Demonstração: Antes de começarmos a demonstração determinaremos os conjuntos $\pi^{-1}(M^t_{m,n} \setminus M^{t-1}_{m,n})$ e $\pi_T^{-1}(M^t_{m,n} \setminus M^{t-1}_{m,n})$, se $A \in (M^t_{m,n} \setminus M^{t-1}_{m,n})$ então $rank(A) = t - 1$, assim a dimensão da imagem de A é $t - 1$ e a dimensão do núcleo de A é $n - t + 1$. Logo

$$\pi^{-1}(M^t_{m,n} \setminus M^{t-1}_{m,n}) = \{(A, ker(A)) \in M_{m,n} \times Gr(n - t + 1, n); rank(A) = t - 1\} \text{ e}$$
$$\pi_T^{-1}(M^t_{m,n} \setminus M^{t-1}_{m,n}) = \{(A, Im(A)) \in M_{m,n} \times Gr(t - 1, n); rank(A) = t - 1\}.$$

Vamos mostrar, primeiramente, que não existe aplicação contínua $f : Tjur(M^t_{m,n}) \to Tjur^T(M^t_{m,n})$.

Seja $f : Tjur(M^t_{m,n}) \to Tjur^T(M^t_{m,n})$, aplicação entre transformadas, mostraremos que existem sequências (A_i, V_i), (B_i, W_i) em $Tjur(M^t_{m,n})$ que convergem para um mesmo ponto com $f(A_i, V_i)$ e $f(B_i, W_i)$ convergindo para pontos distintos, assim f não é contínua.

Tome $\beta_1 = \{e_1, ..., e_n\}$, $\beta_2 = \{\widetilde{e}_1, ..., \widetilde{e}_m\}$ bases de $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^m$, respectivamente, a partir de agora representaremos as coordenadas nessas bases. Defina

$$\begin{aligned} A : \mathbb{C}^n &\to \mathbb{C}^m \\ (x_1, ..., x_n) &\mapsto (x_1, ..., x_{t-2}, 0, ..., 0) \end{aligned}$$

Temos $rank(A) = t - 2$, logo $A \in M_{m,n}^{t-1}$.

Seja V o subespaço gerado por $\{e_t, ..., e_n\}$, assim $V \subset ker(A)$, pois $A(x_t e_t + ... + x_n e_n) = A(0, ..., 0, x_t, ..., x_n) = (0, ..., 0)$. Consideremos as aplicações $A_i : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ e $B_i : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ dadas por $A_i(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_{t-2}, \frac{1}{i}x_{t-1}, 0, ..., 0)$ e $B_i(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_{t-2}, 0, \frac{1}{i}x_{t-1}, 0, ..., 0)$.

Afirmamos que $ker(A_i) = ker(B_i) = V$, de fato, temos que $V \subset ker(A_i)$ e $V \subset ker(B_i)$, mostraremos somente a inclusão contrária.

Seja $(x_1, ..., x_n) \in ker(A_i)$, então $A_i(x_1, ..., x_n) = (0, ..., 0)$, ou seja $x_1 = ... = x_{t-2} = x_{t-1} = 0$, portanto $(x_1, ..., x_n) \in V$ e $ker(A_i) \subset V$. De maneira análoga concluímos que $ker(B_i) \subset V$.

Assim obtemos duas sequências $(A_i, ker(A_i)) = (A_i, V)$, $(B_i, ker(B_i)) = (B_i, V)$ ambas convergindo para (A, V).

Como f é aplicação entre transformadas temos que o diagrama

$$\begin{tikzcd} Tjur(M_{m,n}^t) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & Tjur^T(M_{m,n}^t) \arrow[d, "\pi_T"] \\ & M_{m,n} \end{tikzcd}$$

é comutativo, ou seja $\pi_T \circ f = \pi$, logo $A = \pi_T \circ f(A, W) = \pi(f_1(A, W), f_2(A, W)) = f_1(A, W)$, mas $A \in (M_{m,n}^t \setminus M_{m,n}^{t-1})$ então $f_2(A, W) = Im(A)$. Assim seque que

$$f(A_i, ker(A_i)) = f(A_i, V) = (A_i, Im(A_i)),$$

$$f(B_i, ker(B_i)) = f(B_i, V) = (B_i, Im(B_i)).$$

Mas a imagem de A_i e B_i são geradas por $W_1 = \{\widetilde{e}_1, ..., \widetilde{e}_{t-2}, \widetilde{e}_{t-1}\}$ e $W_2 = \{\widetilde{e}_1, ..., \widetilde{e}_{t-2}, \widetilde{e}_t\}$, respectivamente. Pelas dimensões segue que

$$\begin{gathered} Im(A_i) = \langle W_1 \rangle, \ Im(B_i) = \langle W_2 \rangle, \\ f(A_i, ker(A_i)) = (A_i, Im(A_i)) = (A_i, W_1) \text{ e} \\ f(B_i, ker(B_i)) = (B_i, Im(B_i)) = (A_i, W_2). \end{gathered}$$

Portanto $f(A_i, ker(A_i)) = (A_i, Im(A_i)) = (A_i, \langle W_1 \rangle)$ converge para $(A, \langle W_1 \rangle)$ e $f(B_i, ker(B_i)) = (B_i, Im(B_i)) = (B_i, \langle W_2 \rangle)$ converge para $(A, \langle W_2 \rangle)$, como $\langle W_1 \rangle \neq \langle W_2 \rangle$ temos que f não é contínua.

Utilizaremos a mesma técnica para mostrar que não existe aplicação contínua $g : Tjur^T(M^t_{m,n}) \to Tjur(M^t_{m,n})$.

Seja $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ como anteriormente e W o subespaço de $\mathbb{C}^m$ gerado por $\{\widetilde{e}_1, ..., \widetilde{e}_{t-1}\}$ e defina as seguintes de aplicações $A'_i : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, $B'_i : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ dadas por $A'_i(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_{t-2}, \frac{1}{i}x_{t-1}, 0, ...0)$, $B'_i(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_{t-2}, \frac{1}{i}x_t, 0, ...0)$. Afirmamos que $Im(A'_i) = Im(B'_i) = W$.

Evidentemente temos que $W \subset Im(A'_i)$ e $W \subset Im(B'_i)$, e como $dim(Im(A'_i)) = dim(Im(B'_i)) = dim(W) = t-1$ temos que $Im(A'_i) = Im(B'_i) = W$ e assim as sequências $(A'_i, Im(A'_i)) = (A'_i, W)$, $(B'_i, Im(B'_i)) = (B'_i, W)$ convergem para (A, W).

Mas note que $ker(A'_i)$, $ker(B'_i)$ são gerados por $V_1 = \{e_t, ..., e_n\}$, $V_2 = \{e_{t-1}, e_{t+1}..., e_n\}$, respectivamente.

Como g é aplicação entre transformadas temos que o diagrama

$$\begin{tikzcd} Tjur^T(M^t_{m,n}) \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\pi_T"'] & Tjur(M^t_{m,n}) \arrow[d, "\pi"] \\ & M_{m,n} \end{tikzcd}$$

é comutativo, ou seja, $\pi \circ g = \pi_T$, logo $A = \pi \circ g(A, W) = \pi(g_1(A, W), g_2(A, W)) = g_1(A, W)$, mas $g_2(A, W) \in Gr(n-t+1, n)$, e $g_2(A, W) \subset ker(A)$, assim temos $g_2(A, W) = ker(A)$. Portanto

$$g(A'_i, Im(A'_i)) = (A'_i, ker(A'_i)) = (A'_i, \langle V_1 \rangle) \text{ e}$$
$$g(B'_i, Im(B'_i)) = (B'_i, ker(B'_i)) = (B'_i, \langle V_2 \rangle),$$

consequentemente $g(A'_i, Im(A'_i))$ converge para $(A, \langle V_1 \rangle)$ e $g(B'_i, Im(B'_i))$ converge para $(A, \langle V_2 \rangle)$, como $\langle V_1 \rangle \neq \langle V_2 \rangle$ temos que g não é contínua.

■

Com o objetivo de introduzir a transformada de Nash, definiremos a aplicação de Gauss sobre a parte regular de $M^t_{m,n}$.

Definição 3.5. *A aplicação de Gauss sobre a parte regular de $M^t_{m,n}$ é dada por*

$$\psi : (M^t_{m,n} \setminus M^{t-1}_{m,n}) \to M_{m,n} \times Gr(mn - (m-t+1)(n-t+1), mn).$$
$$A \mapsto (A, T_A(M^t_{m,n} \setminus M^{t-1}_{m,n}))$$

gerando o seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd} & M_{m,n} \times Gr(mn - (m-t+1)(n-t+1),\ mn) \arrow[d, "\pi_1"] \\ (M^t_{m,n} \setminus M^{t-1}_{m,n}) \arrow[ur, "\psi"] \arrow[r, "i"'] & M_{m,n} \end{tikzcd}$$

sendo π_1 a projeção e i a inclusão.

Definição 3.6. *A transformada de Nash de $M^t_{m,n}$, $Nash(M^t_{m,n})$, é definida como o fecho da imagem da aplicação de Gauss ψ em $M_{m,n} \times Gr(mn-(m-t+1)(n-t+1), mn)$.*

[3]Aplicação que faz de $Nash(M^t_{m,n})$ uma transformada é

$$\pi_N : Nash(M^t_{m,n}) \to M^t_{m,n},$$
$$\pi_N(A,V) \mapsto A$$

Proposição 3.7. *Para singularidades determinantais genéricas a transformada de Nash é:*

$$Nash(M^t_{m,n}) = \{(A,W_1,W_2) \in M_{m,n} \times Gr(n-t+1,n) \times Gr(t-1,m);\ W_1 \subset ker(A) \text{ e } Im(A) \subset W_2\}.$$

Demonstração: Faremos a demonstração em 3 partes: primeiramente definiremos uma aplicação $\alpha : Gr(n-t+1,n) \times Gr(t-1,m) \to Gr(mn-(m-t+1)(n-t+1), mn)$, a qual será um homeomorfismo sobre a sua imagem; na parte dois definiremos duas aplicações, $\beta : (M^t_{m,n} \setminus M^{t-1}_{m,n}) \to M^t_{m,n} \times Gr(n-t+1,n) \times Gr(t-1,m)$ e $\gamma : M_{m,n} \times Gr(n-t+1,n) \times Gr(t-1,m) \to Gr(mn-(n-t+1)(m-t+1), mn)$, tais que $\gamma \circ \beta$ é a aplicação de Gauss na parte regular de $M^t_{m,n}$, por fim mostraremos

$$\overline{\gamma \circ \beta(M^t_{m,n} \setminus M^{t-1}_{m,n})} = \{(A,W_1,W_2) \in M_{m,n} \times Gr(n-t+1,n) \times Gr(t-1,m);\ W_1 \subset ker(A) \text{ e } Im(A) \subset W_2\}.$$

Parte 1:Defina

$$\alpha : Gr(n-t+1,n) \times Gr(t-1,m) \to Gr(mn-(m-t+1)(n-t+1), mn).$$
$$(W_1,W_2) \mapsto \{B \in M_{m,n};\ B(W_1) \subset W_2\}$$

$$(W_1,W_2) \in Gr(n-t+1,n) \times Gr(t-1,m) \Rightarrow \alpha(W_1,W_2)$$

é subespaço vetorial de $\mathbb{C}^{mn}$ de dimensão $mn-(m-t+1)(n-t+1)$, sejam $(W_1,W_2) \in Gr(n-t+1,n) \times Gr(t-1,m)$.

i) A aplicação nula pertence $\alpha(W_1,W_2)$ logo $\alpha(W_1,W_2) \neq \emptyset$;

ii) Se $B_1,\ B_2 \in \alpha(W_1,W_2)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ temos que $B_1+B_2 \in \alpha(W_1,W_2)$ e $\lambda B_1 \in \alpha(W_1,W_2)$,

iii) A dimensão de $\alpha(W_1,W_2)$ é $mn-(m-t+1)(n-t+1)$: Note que $dim(W_1)=n-t+1$, $dim(W_2)=t-1$ e sendo $W_2^{\perp}$ o complemento ortogonal de W_2 temos que $dim(W_2^{\perp}) = m-t+1$, tomemos assim as bases $\{x_1,...,x_{n-t+1}\}$, $\{y_1,...,y_{t-1}\}$ e $\{y_t,...,y_m\}$ bases de W_1, W_2 e $W_2^{\perp}$, respectivamente. Se $B \in \alpha(W_1,W_2)$ então $B(x_i) \neq y_{t+j}$ para todo

$i = 1, ..., n-t+1$ e $j = 0, 1, ..., m-t$. Completemos $\{x_1, ..., x_{n-t+1}\}$ a uma base $\{x_1, ..., x_{n-t+1}, x_{n-t}, ..., x_n\}$ de $\mathbb{C}^n$, temos mn possibilidades para definir aplicações lineares $B : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, mas como $B \in \alpha(W_1, W_2)$ teremos apenas $mn - (m-t+1)(n-t+1)$ possibilidades para definir a aplicação $B \in \alpha(W_1, W_2)$, portanto $dim(\alpha(W_1, W_2)) = mn - (m-t+1)(n-t+1)$.

Mostraremos agora que α é injetiva, para isso sejam (V_1, V_2), $(W_1, W_2) \in Gr(n-t+1, n) \times Gr(t-1, m)$ com $(V_1, V_2) \neq (W_1, W_2)$.

Suponha que $V_1 \neq W_1$, então, como $dim(V_1) = dim(W_1)$, existe $v_1 \in V_1$ tal que $v_1 \notin W_1$. Tome então $v_2 \in \mathbb{C}^n \setminus V_2$ e defina $B : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ linear tal que $B(v_1) = v_2$ e $B(x) = 0$ se x não pertence ao espaço gerado por v_2, segue que $B(W_1) \subset W_2$ e portanto $B \in \alpha(W_1, W_2)$, mas também temos que $B(V_1) = \langle v_2 \rangle \not\subset V_2$, logo $B \notin \alpha(V_1, V_2)$ e assim $\alpha(V_1, V_2) \neq \alpha(W_1, W_2)$.

Se $V_1 = W_1$ então temos necessariamente que $V_2 \neq W_2$, como anteriormente existe $v_2 \in V_2$ tal que $v_2 \notin W_2$ e considere $v_1 \in V_1 = W_1$ e defina $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, linear, dada por $A(v_1) = v_2$ e $A(x) = 0$ para todo $x \neq av_1$, assim segue que $A(V_1) = \langle v_2 \rangle \subset V_2$ e $A(W_1) = A(V_1) = \langle v_2 \rangle \not\subset W_2$ e consequentemente $B \in \alpha(V_1, V_2)$ e $B \notin \alpha(W_1, W_2)$, portanto $\alpha(V_1, V_2) \neq \alpha(W_1, W_2)$, e α é injetiva, ou seja α é bijeção sobre sua imagem.

Vamos mostrar aqora que α é contínua, note que α está definida em espaço hausdorff com base enumerável, o que nos permite utilizar a caracterização de continuidade por sequências.

Sejam $((V_i, W_i))$ sequência convergente em $Gr(n-t+1, n) \times Gr(t-1, m)$ com $lim(V_i, W_i) = (V, W)$. Considere agora $\mathfrak{B}_i = \alpha(V_i, W_i)$ sequência em $Gr(mn - (n-t+1)(m-t+1), mn)$, mas como $Gr(mn - (n-t+1)(m-t+1), mn)$ é compacto segue que, existe uma subsequência $\mathfrak{B}'_i$ de $\mathfrak{B}_i$ convergente, seja $lim\mathfrak{B}'_i = \mathfrak{B}$. Tome $B \in \mathfrak{B}$, $B_i \in \mathfrak{B}_{\mathrm{i}}$, $v \in V$ e $v_i \in V_i$ tais que B_i converge para B e v_i converge para v, defina agora $w_i = B_i(v_i)$, então w_i converge para $B(v) = w \in W$ pois $w_i \in W_i$ para todo i e como W_i converge para W temos que $w \in W$. Assim para todo $v \in V$, $B \in \mathfrak{B}$ temos $B(v) \in W$, logo $\mathfrak{B} \subset \alpha(V, W)$, mas $dim\mathfrak{B} = dim\alpha(V, W)$ o que implica $\mathfrak{B} = \alpha(V, W)$. Desta maneira mostramos que qualquer subsequência convergente de $\mathfrak{B}_i$ converge para $\alpha(V, W)$, logo $\mathfrak{B}_i$ converge para $\alpha(V, W)$, ou seja, $lim(\alpha(V_i, W_i)) = \alpha(V, W)$ para toda sequência $((V_i, W_i))$ em $Gr(n-t+1, n) \times Gr(t-1, m)$ convergindo para (V, W). Desta maneira concluímos que α é contínua.

Para finalizar a parte 1, note que α é bijeção sobre a sua imagem, está definida em um conjunto compacto e contra-domínio Hausdorff, assim α é homeomorfismo sobre sua imagem.

Parte 2: Defina

$$\beta : (M^t_{m,n} \setminus M^{t-1}_{m,n}) \to M^t_{m,n} \times Gr(n-t+1, n) \times Gr(t-1, m)$$
$$\beta(A) = (A, ker(A), Im(A))$$

e

$$\gamma : M_{m,n} \times Gr(n-t+1,n) \times Gr(t-1,m) \to Gr(mn-(n-t+1)(m-t+1), mn).$$
$$\gamma(A,V,W) = (A, \alpha(V,W))$$

γ está evidentemente bem definida, verifiquemos que β também está. Sabemos que $ker(A)$ é subespaço de $\mathbb{C}^n$ e $Im(A)$ é subespaço de $\mathbb{C}^m$, assim basta verificar as dimensões. Como $A \in (M^t_{m,n} \setminus M^{t-1}_{m,n})$ temos que $rank(A) = t-1$, ou seja $dim(Im(A)) = t-1$ e pelo teorema do núcleo e da imagem segue que $dim(ker(A)) = n-t+1$ e β está bem definida. Observe agora que $\gamma \circ \beta(A) = (A, \alpha(ker(A), Im(A))$, como $\alpha(ker(A), Im(A)) = \{B \in M_{m,n};\ B(ker(A)) \subset Im(A)\} = T_A M^t_{m,n}$, temos que $\gamma \circ \beta$ é a aplicação de Gauss na parte regular de $M^t_{m,n}$, logo $Nash(M^t_{m,n}) = \overline{\gamma \circ \beta((M^t_{m,n} \setminus M^{t-1}_{m,n}))}$. Mas γ é continua e possui inversa $\gamma^{-1} = (\pi_1, \alpha^{-1} \circ \pi_2)$, no qual $\pi_1 : M_{m,n} \times Gr(mn-(m-t+1)(n-t+1), mn) \to M_{m,n}$, $\pi_2 : M_{m,n} \times Gr(mn-(m-t+1)(n-t+1), mn) \to Gr(mn-(m-t+1)(n-t+1), mn)$ são dadas por $\pi_1(A,V) = A$, $\pi_2(A,V) = V$, desta maneira obtemos que γ é homeomorfismo sobre sua imagem, pelo lema 1.2 $Nash(M^t_{m,n}) = \gamma(\overline{\beta(M^t_{m,n} \setminus M^{t-1}_{m,n})})$.

Parte 3: Vamos mostrar que
$Nash(M^t_{m,n}) = \{(A,V,W) \in M_{m,n} \times Gr(n-t+1,n) \times Gr(t-1,m);\ V \subset ker(A)$, e $Im(A) \subset W\} = \mathcal{N}$. Suponha que exista $(A,V,W) \in \overline{\beta(M^t_{m,n} \setminus M^{t-1}_{m,n})}$ tal que $(A,V,W) \notin \mathcal{N}$, logo $V \not\subset ker(A)$ ou $Im(A) \not\subset W$.

Se $V \not\subset ker(A)$, então existe $v \in V$ tal que $A(v) \neq 0$, mas $(A,V,W) \in \beta(\overline{M^t_{m,n} \setminus M^{t-1}_{m,n}})$, então existe uma sequência (A_i, V_i, W_i) em $\beta(M^t_{m,n} \setminus M^{t-1}_{m,n})$ convergindo para (A,V,W). Assim existe $v_i \in V_i$ tal que v_i converge para v, e portanto $A_i(v_i)$ converge para $A(v)$, mas $A_i(v_i) = 0$ para todo i, desta maneira $A(v) = 0$ e $v \in ker(A)$, o que contradiz nossa suposição inicial.

Se $Im(A) \not\subset W$, então existe $x \in \mathbb{C}^n$ tal que $A(x) \notin W$, mas $(A,V,W) \in \beta(\overline{M^t_{m,n} \setminus M^{t-1}_{m,n}})$ logo existe uma sequência (A_i, V_i, W_i) em $\beta(M^t_{m,n} \setminus M^{t-1}_{m,n})$ tal que (A_i, V_i, W_i) converge para (A,V,W), sendo $V_i = ker(A_i)$ e $W_i = Im(A_i)$, daí $A_i(x)$ converge para $A(x)$ e como $A_i(x) \in W_i$ para todo i e W_i converge para W temos que $A(x) \in W$. O que contradiz nossa suposição inicial.

Desta maneira concluímos que $\beta(\overline{M^t_{m,n} \setminus M^{t-1}_{m,n}}) \subset \mathcal{N}$.

Para concluirmos a igualdade tome $(A,V,W) \in \mathcal{N}$, e seja $r = rank(A)$. Como $V \subset ker(A)$ e $Im(A) \subset W$ temos que existem V' e W' subespaços de $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^m$, respectivamente, tais que

$$V \oplus V' = ker(A) \text{ e } Im(A) \oplus W' = W,$$

assim temos que $dim(V') = t-r-1$ e $dim(W') = t-r-1$. Construiremos agora uma aplicação $A' : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$.

Sejam $\{a_1, ..., a_{t-1-r}\}$, $\{b_{t-r}, ..., b_{n-r}\}$ e $\{d_1, ..., d_{t-1-r}\}$ bases de V', V e W' respectivamente, então $\{a_1, ..., a_{t-1-r}, b_{t-r}, ..., b_{n-r}\}$ é uma base de $ker(A)$, completando a uma base de $\mathbb{C}^n$ obtemos $\{a_1, ..., a_{t-1-r}, b_{t-r}, ..., b_{n-r}, c_{n-r+1}, ..., c_n\}$, defina $A' : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, linear dada por $A'(a_i) = d_i$ e $A'(b_j) = 0 = A'(c_k)$ para todo $i = 1, ..., t-1-r$, $j = t-r, ..., n-r$ e $k = n-r+1, ..., n$.

Consideremos agora a sequência $A_i = A + \frac{1}{i}A'$, afirmamos que $ker(A_i) = V$ e $Im(A_i) = W$. De fato, como $V \subset ker(A')$ e $V \subset ker(A)$ temos que $V \subset ker(A_i)$ para todo i. Consideremos então $x \in ker(A_i)$, então $A_i(x) = A(x) + \frac{1}{i}A'(x) = 0$, mas $x = \sigma_1 a_1 + ... + \sigma_{t-1-r}a_{t-1-r} + \sigma_{t-r}b_{t-r} + ... + \sigma_{n-r}b_{n-r} + \sigma_{n-r+1}c_{n-r+1} + ... + \sigma_n c_n$, resultando em, $A(x) = \sigma_{n-r+1}A(c_{n-r+1}) + ... + \sigma_n A(c_n)$ e $A'(x) = \sigma_1 d_1 + ... + \sigma_{t-1-r}d_{t-1-r}$, assim temos que $A(x) \in Im(A)$ e $A'(x) \in W'$, mas $A(x) + \frac{1}{i}A'(x) = 0$ de onde vem que $A(x) = A'(x) = 0$ e portanto $ker(A_i) \subset ker(A) \cap ker(A') = V$, pela forma como A_i foi construída, assim resulta a primeira igualdade.

Para a segunda igualdade note que $Im(A_i) \subset W$, pois $W = Im(A) \oplus W'$, basta mostrar então que $W \subset Im(A_i)$. Seja $w \in W$, como $W = Im(A) \oplus W'$ segue que $w = w_1 + w_2$ com $w_1 \in Im(A)$ e $w_2 \in W' = Im(A')$, desta maneira existem $v_1,\ v_2 \in \mathbb{C}^n$ tais que $A(v_1) = w_1$ e $\frac{1}{i}A'(iv_2) = A'(v_2) = w_2$, mas $v_1 = s_1 a_1 + ... + s_{t-1-r}a_{t-1-r} + s_{t-r}b_{t-r} + ... + s_{n-r}b_{n-r} + s_{n-r+1}c_{n-r+1} ... + s_n c_n$, $iv_2 = z_1 a_1 + ... + z_{t-1-r}a_{t-1-r} + z_{t-r}b_{t-r} + ... + z_{n-r}b_{n-r} + z_{n-r+1}cn - r + 1 ... + z_n c_n$, portanto $A(v_1) = A(s_{n-r+1}c_{n-r+1} ... + s_n c_n)$ e $A'(iv_2) = A'(z_1 a_1 + ... + z_{t-1-r}a_{t-1-r})$, assim tome $u_1 = s_{n-r+1}c_{n-r+1} ... + s_n c_n$ e $u_2 = z_{t-r}b_{t-r} + ... + z_{n-r}b_{n-r}$, daí seja $u = u_1 + u_2$, então $A_i(u) = A(u_1) + \frac{1}{i}A'(u_2) = w$, logo $w \in Im(A_i)$.

Assim construímos uma sequência $(A_i, V_i, W_i) = (A_i, V, W)$ em $\beta(M^t_{m,n} \setminus M^{t-1}_{m,n})$ convergindo para (A, V, W), logo $\mathcal{N} \subset \overline{\beta(M^t_{m,n} \setminus M^{t-1}_{m,n})}$. O que completa a demonstração.

■

Corolário 3.8. *$Nash(M^t_{m,n})$ é suave.*

Demonstração: Vamos mostrar que $Nash(M^t_{m,n}) = TjurM^t_{m,n} \times_{M_{m,n}} Tjur^T(M^t_{m,n})$, daí como $Tjur(M^t_{m,n})$, $Tjur^T(M^t_{m,n})$ e $M_{m,n}$ são suaves temos que $Nash(M^t_{m,n})$ é suave. Consideremos as aplicações: $\pi : M_{m,n} \times Gr(n-t+1, n) \to M_{m,n}$, $\pi' : M_{m,n} \times Gr(t-1, m) \to M_{m,n}$, projeções da primeira coordenada, e,

$$\begin{array}{rlcrl} \phi : Nash(M^t_{m,n}) \to & Tjur(M^t_{m,n}), & \qquad & \phi^T : Nash(M^t_{m,n}) \to & Tjur^T(M^t_{m,n}) \\ (A, V, W) \mapsto & (A, V) & & (A, V, W) \mapsto & (A, W) \end{array}$$

Note que o diagrama

$$\begin{tikzcd} Nash(M^t_{m,n}) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\phi^T"'] & Tjur(M^t_{m,n}) \arrow[d, "\pi"] \\ Tjur^T(M^t_{m,n}) \arrow[r, "\pi'"'] & M_{m,n} \end{tikzcd}$$

é comutativo, portanto

$$Nash(M^t_{m,n}) = TjurM^t_{m,n} \times_{M_{m,n}} Tjur^T(M^t_{m,n}),$$

o que completa a demonstração.

■

Para demonstrar as próximas proposições utilizaremos 1.45

Proposição 3.9. *$Nash(M^t_{m,n})$ é homotópicamente equivalente a $\pi_N^{-1}(0)$.*

Demonstração: Como $\pi_N : Nash(M^t_{m,n}) \to M_{m,n}$ é dada por $\pi_N(A, V, W) = A$, temos que $\pi_N^{-1}(0) = \{0\} \times Gr(n-t+1, n) \times Gr(t-1, m)$.

Defina

$$\begin{aligned} f_0 : Nash(M^t_{m,n}) &\to \pi_N^{-1}(0), \\ (A, V, W) &\mapsto (0, V, W) \end{aligned}$$

logo f_0 é contínua, pois cada função coordenada é contínua, além disso como $f_0\big|_{\pi_n^{-1}(0)} = Id_{\pi_n^{-1}(0)}$, temos que f_0 é uma retração.

Vamos mostrar que $i \circ f_0 : Nash(M^t_{m,n}) \to Nash(M^t_{m,n})$ é homotópica a $Id_{Nash(M^t_{m,n})}$. Para isso defina

$$\begin{aligned} F : Nash(M^t_{m,n}) \times \mathbb{C} &\to Nash(M^t_{m,n}), \\ (A, V, W, s) &\mapsto (s \cdot A, V, W) \end{aligned}$$

a qual está bem definida e é contínua, pois cada função coordenada é contínua. Consideremos agora $H = F\big|_{Nash(M^t_{m,n}) \times [0,1]} : Nash(M^t_{m,n}) \times [0,1] \to Nash(M^t_{m,n})$, então

$$H(A, V, W, 1) = (A, V, W) \text{ para todo } (A, V, W) \in Nash(M^t_{m,n}),$$

$$H(A, V, W, 0) = (0, V, W) \text{ para todo } (A, V, W) \in Nash(M^t_{m,n}),$$

ou seja, $H(\cdot, 1) = Id_{Nash(M^t_{m,n})}$ e $H(\cdot, 0) = i \circ f_0$ e portanto $Nash(M^t_{m,n})$ e $\pi^{-1}(0)$ são homotópicamente equivalentes.

■

Proposição 3.10. *$Tjur(M^t_{m,n})$ é homotópicamente equivalente a $\pi^{-1}(0)$.*

Demonstração: Sabemos que $\pi : Tjur(M^t_{m,n}) \to M_{m,n}$ é dada por $\pi(A, V) = A$, logo $\pi^{-1}(0) = \{0\} \times Gr(n-t+1, n)$. Defina $g_0 : Tjur(M^t_{m,n}) \to \pi^{-1}(0)$ dada por $g_0(A, V) = (0 \cdot A, V)$, g_0 é contínua e $g_0\big|_{\pi^{-1}(0)} = Id_{\pi^{-1}(0)}$, ou seja, g_0 é uma retração.

Como anteriormente, vamos mostrar que $i \circ g_0 : Tjur(M^t_{m,n}) \to Tjur(M^t_{m,n})$ é homotópica a $Id_{Tjur(M^t_{m,n})}$. Defina

$$G : Tjur(M^t_{m,n}) \times \mathbb{C} \to Tjur(M^t_{m,n}),$$
$$(A, V, s) \mapsto (sA, V)$$

G está bem definida e é contínua, assim basta considerar $H_2 = G\big|_{Tjur(M^t_{m,n})\times[0,1]} : Tjur(M^t_{m,n}) \times [0,1] \to Tjur(M^t_{m,n})$, pois

$$H_2(A, V, 1) = (A, V) \text{ para todo } (A, V) \in Tjur(M^t_{m,n}),$$

$$H(A, V, 0) = (0, V) \text{ para todo } (A, V) \in Tjur(M^t_{m,n}),$$

ou seja, $H_2(\cdot, 1) = Id_{Tjur(M^t_{m,n})}$ e $H_2(\cdot, 0) = i \circ g_0$ e portanto $Tjur(M^t_{m,n})$ e $\pi_T^{-1}(0)$ são homotopicamente equivalentes.

■

Proposição 3.11. *$Tjur^T(M^t_{m,n})$ é homotópicamente equivalente a $\pi_T^{-1}(0)$.*

Demonstração: Como $\pi_T : Tjur^T(M^t_{m,n}) \to M_{m,n}$ é dada por $\pi(A, W) = A$, segue que $\pi_T^{-1}(0) = \{0\} \times Gr(t-1, m)$.

Definamos então $h_0 : Tjur^T(M^t_{m,n}) \to M_{m,n}$ dada por $h_0(A, W) = (0 \cdot A, W)$, h_0 é uma retração. Mostraremos então que $i \circ h_0$ é homotópica a $Id_{Tjur^T(M^t_{m,n})}$. Para isso defina

$$K : Tjur^T(M^t_{m,n}) \times \mathbb{C} \to Tjur^T(M^t_{m,n}),$$
$$K(A, W, s) = (s \cdot A, W)$$

a qual está bem definida e é contínua. Por fim consideremos $H_3 = K\big|_{Tjur^T(M^t_{m,n})\times[0,1]} : Tjur^T(M^t_{m,n}) \times [0,1] \to Tjur^T(M^t_{m,n})$, pois

$$H_3(A, W, 1) = (A, W) \text{ para todo } (A, W) \in Tjur^T(M^t_{m,n}),$$

$$H_3(A, W, 0) = (0, W) \text{ para todo } (A, W) \in Tjur(M^t_{m,n}),$$

ou seja, $H_3(\cdot, 1) = Id_{Tjur^T(M^t_{m,n})}$ e $H_3(\cdot, 0) = i \circ g_0$ e assim $Tjur^T(M^t_{m,n})$ e $\pi_T^{-1}(0)$ são homotopicamente equivalentes.

■

Capítulo 4

Transformada de Singularidades Determinantais

Neste capítulo definiremos a transformada de Tjurina e a transformada de Tjurina transposta de singularidades determinantais. Para isso consideramos $F : \mathbb{C}^N \to M_{m,n}$ holomorfa, $X = F^{-1}(M^t_{m,n})$ singularidade determinantal do tipo (m, n, t), ou seja, $codim(X) = codim(M^t_{m,n}) = (m - t + 1)(n - t + 1)$. Toda a seção foi baseada em [19].

4.1 Transformada de Tjurina

Definição 4.1. *A transformada de Tjurina de (X, X_{sing}), sendo X singularidade determinantal do tipo (m, n, t) dada por $F : \mathbb{C}^N \to M^t_{m,n}$ $(F = (f_{ij})_{m\times n})$ é o conjunto*

$$Tjur(X) = \overline{\{(x, W) \in X_{reg} \times Gr(t - 1, n);\ W = \langle (f_{i1}(x), f_{i2}(x), ..., f_{in}(x)),\ i = 1, 2, ..., m\rangle\}},$$

com a aplicação $\pi_{Tj} : Tjur(X) \to X$ dada por $\pi_{Tj}(x, W) = x$. Sendo $\langle (f_{i1}(x), f_{i2}(x), ..., f_{in}(x)),\ i = 1, 2, ..., m\rangle$ o subespaço gerado pelas linhas da matriz $F(x)$.

Vamos mostrar que $Tjur(X)$ com π_{Tj} satisfaz as condições da definição 1.29, para isso será necessário o lema 1.1.

Note que $\pi_{Tj} = \pi_1|_{Tjur(X)} : Tjur(X) \to X$ sendo π_1 a projeção na primeira entrada, o que nos dá a continuidade de π_{Tj}. Para ver que π_{Tj} é fechada, tome $F \subset Tjur(X)$ fechado, (x_i) sequência em $\pi_{Tj}(F)$, tal que x_i converge para x, vamos mostrar que $x \in \pi_{Tj}(F)$. De fato, como $x_i \in \pi_{Tj}(F)$ existe $(x_i, W_i) \in F$ tal que $\pi_{Tj}(x_i, W_i) = x_i$, daí como F é contínua, temos que $F(x_i)$ converge para $F(x)$, mas $\langle (f_{k1}(x_i), ..., f_{kn}(x_i)),\ k = 1, ..., m\rangle \subset W_i$, para todo i, o que implica $\langle (f_{k1}(x), ..., f_{kn}(x)),\ k = 1, ..., m\rangle \subset W$ e portanto $x = \pi_{Tj}(x, W)$ o que resulta $x \in \pi_{Tj}(F)$.

Consideremos agora $x \in X$, então

$$(\pi_{Tj})^{-1}(x) = \{(x, \langle (f_{i1}(x), f_{i2}(x), ..., f_{in}(x)),\ i = 1, 2, ..., m\rangle)\},$$

se $x \in X_{reg}$, ou

$$\begin{aligned}(\pi_{Tj})^{-1}(x) &= \{(x, W);\ \langle (f_{i1}(x), f_{i2}(x), ..., f_{in}(x)),\ i = 1, 2, ..., m\rangle \subset W\} \\ &= \{x\} \times \{W;\ \langle (f_{i1}(x), f_{i2}(x), ..., f_{in}(x)),\ i = 1, 2, ..., m\rangle \subset W\}\end{aligned}$$

se $x \notin X_{reg}$, os quais são compactos pois, se $x \in X_{reg}$ então $\pi_{Tj}^{-1}(x)$ possui um único elementos, e se $x \in X_{sing}$, temos que $\pi_{Tj}^{-1}(x)$ é fechado e assim

$$\begin{aligned}\pi_{Tj}^{-1}(x) &= \overline{\pi_{Tj}^{-1}(x)} \\ &= \overline{\{x\} \times \{W;\ \langle (f_{i1}(x), f_{i2}(x), ..., f_{in}(x)),\ i = 1, 2, ..., m\rangle \subset W\}} \\ &= \overline{\{x\}} \times \overline{\{W;\ \langle (f_{i1}(x), f_{i2}(x), ..., f_{in}(x)),\ i = 1, 2, ..., m\rangle \subset W\}},\end{aligned}$$

que é o produto de compactos, portanto compacto.

Resta verificarmos as condições *1.* e *2.*:

1. Note que

$$\begin{aligned}\alpha : X_{reg} &\to X_{reg} \times Gr(t-1, n), \\ x &\mapsto (x, \langle (f_{i1}(x), f_{i2}(x), ..., f_{in}(x)),\ i = 1, 2, ..., m\rangle)\end{aligned}$$

é inversa de $\pi_{Tj}|_{(\pi_{Tj})^{-1}(X_{reg})}$, como α é contínua e ambas são racionais, temos que a condição *1.* da definição 1.29 é satisfeita.

2. $\overline{(\pi_{Tj})^{-1}(X_{reg})} = \overline{\{(x, \langle (f_{i1}(x), f_{i2}(x), ..., f_{in}(x)),\ i = 1, 2, ..., m\rangle)\}} = Tjur(X)$,

o que completa a demonstração.

A proposição seguinte nos dá outra caracterização da Transformada de Tjurina.

Proposição 4.2. $Tjur(X) = \overline{\{(x, W) \in X_{reg} \times Gr(n-t+1, n);\ W = ker(F(x))\}}$

Demonstração: Seja $(x, \langle (f_{i1}(x), f_{i2}(x), ..., f_{in}(x)),\ i = 1, 2, ..., m\rangle) \in \{(x, W) \in X_{reg} \times Gr(t-1, n);\ W = \langle (f_{i1}(x), f_{i2}(x), ..., f_{in}(x)),\ i = 1, 2, ..., m\rangle\}$, então $rank(F(x)) = t-1$, ou seja, $dim(Im(F(x))) = t-1$. Considere $\{w_1, ..., w_{t-1}\}$ base de $Im(F(x))$, então existe $v_i \in \mathbb{C}^n$ tal que $F(x)v_i = w_i$ para todo $i = 1, 2, ..., t-1$. Afirmamos que $\{v_1, ..., v_{t-1}\}$ é linearmente independente. De fato, sejam $\alpha_1, ..., \alpha_{t-1} \in \mathbb{C}$ tais que $\sum_{i=1}^{t-1} \alpha_i v_i = 0$, então

$$0 = F(x)(\sum_{i=1}^{t-1} \alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^{t-1} \alpha_i w_i,$$

logo $\alpha_i = 0$ para todo $i = 1, ..., t-1$ e $\{v_1, ..., v_{t-1}\}$ é linearmente independente.

Dessa maneira temos que dado $(x, \langle (f_{i1}(x), f_{i2}(x), ..., f_{in}(x)),\ \ i = 1, 2, ..., m\rangle) \in \{(x, W) \in X_{reg} \times Gr(t-1, n);\ W = \langle (f_{i1}(x), f_{i2}(x), ..., f_{in}(x)),\ \ i = 1, 2, ..., m\rangle\}$ existe $\{v_1, ..., v_{t-1}\} \subset \mathbb{C}^n$ tal que $\langle (f_{i1}(x), f_{i2}(x), ..., f_{in}(x)),\ \ i = 1, 2, ..., m\rangle = \langle F(x)v_1, ..., F(x)v_{t-1}\rangle$, assim considerando o homeomorfismo

$$\begin{aligned} f : Gr(t-1, n) &\to Gr(n-t+1, n), \\ V &\mapsto V^{\perp} \end{aligned}$$

temos que $ker(F(x)) = \langle v_1, ..., v_{t-1}\rangle^{\perp} = f(\langle v_1, ..., v_{t-1}\rangle)$, como f é homeomorfismo temos que

$$Tjur(X) = \overline{\{(x, ker(F(x))) \in X_{reg} \times Gr(n-t+1, n)\}}.$$

■

Se $F : \mathbb{C}^N \to M_{m,m}$, dizemos que X é uma *hipersuperfície de tipo (m,m,m)*, quando $X = F^{-1}(M^m_{m,m}) = v(det(F))$, sendo

$$\begin{aligned} det(F) : \mathbb{C}^N &\to \mathbb{C}, \\ x &\mapsto det(F(x)) \end{aligned}$$

e $dim(X) = N - (m-m+1)(m-m+1) = N-1$.

Proposição 4.3. *Seja $F : \mathbb{C}^N \to M_{m,n}$, $X = F^{-1}(M^t_{m,n})$ singularidade determinantal do tipo (m, n, t). Se X é uma interseção completa que não é uma hipersuperfície do tipo (m, m, m), então $Tjur(X) = X$.*

Demonstração: Como X é uma interseção completa que não é uma hipersuperfície do tipo (m, m, m), então X é uma variedade determinantal do tipo $(m, n, 1)$. De fato, como X é uma interseção completa segue que $t = 1$, ou seja, $X = F^{-1}(M^1_{m,n}) = F^{-1}(0)$ e $dim(X) = N - mn = N - (m-1+1)(n-1+1)$, o que prova a afirmação anterior. Dessa maneira temos, por definição, que

$$Tjur(X) = \overline{\{(x, \langle (f_{i1}(x), f_{i2}(x), ..., f_{in}(x)),\ i = 1, 2, ..., m\rangle) \in X_{reg} \times Gr(0, n)\}},$$

Como $Gr(0, n)$ só tem um elemento segue que

$$Tjur(X) = \overline{\pi^{-1}_{Tj}(X_{reg})} = \overline{X_{reg}} = X$$

pela proposição 1.16.

■

Nesse momento, queremos analisar propriedades locais da transformada de Tjurina, assim, definiremos a seguinte aplicação:

$$\widetilde{F}_I : \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^{(t-1)(n-t+1)} \rightarrow M_{m+t-1,n},$$
$$(x,a) = \begin{pmatrix} A_I(a) \\ F(x) \end{pmatrix}$$

Sendo $A_I : \mathbb{C}^{(t-1)(n-t+1)} \rightarrow M_{t-1,n}$ como na seção 3, capítulo 1.

Proposição 4.4. *$\langle (f_{i1}(x),...,f_{in}(x)), i = 1,...,m\rangle \subset \widetilde{A}_I(a)$ se, e somente se, $rank(\widetilde{F}_I(x,a)) = t-1$, onde $\widetilde{A}_I(a)$ denota o subespaço gerado pelas linhas da matriz $A_I(a)$.*

Demonstração: Suponhamos que $\langle (f_{i1}(x),...,f_{in}(x)), i = 1,...,m\rangle \subset \widetilde{A}_I(a)$, então as linhas da matriz $F(x)$ podem ser escritas como combinação linear das linhas de $A_I(a)$, pois elas formam uma base de $\widetilde{A}_I(a)$. Assim, como $rank(A_I(a)) = t-1$, segue que $rank(\widetilde{F}_I(x,a)) = t-1$.

Reciprocamente se $rank(\widetilde{F}_I(x,a)) = t-1$ segue que a matriz $\begin{pmatrix} A_I(a) \\ F(x) \end{pmatrix}$ tem somente $t-1$ linhas linearmente independente, mas $A_I(a)$ possui $t-1$ linhas linearmente independentes, o que implica que $(f_{i1}(x),...,f_{in}(x))$ pode ser escrito como combinação linear das linhas de $A_I(a)$ para todo $i = 1,...,m$, o que implica $\langle (f_{i1}(x),...,f_{in}(x)), i = 1,...,m\rangle \subset \widetilde{A}_I(a)$.

■

Para $F : \mathbb{C}^N \rightarrow M_{m,n}$ e $X = F^{-1}(M^t_{m,n})$, singularidade determinantal, defina:

$$\widetilde{Tjur}_I(X) = (\widetilde{F}_I)^{-1}(M^t_{m+t-1,n}), \text{ e}$$
$$Tjur_I(X) = \{(x,W) \in Tjur(X);\ W \in Im(\widetilde{A}_I)\}$$

Note que $\widetilde{Tjur}_I(X) \subset \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^{(t-1)(n-t+1)}$ e $Tjur_I(X) \subset X \times Gr(t-1,n)$, mas devido a identificação entre $A_I(a) \in M_{t-1,n}$ e $\widetilde{A}_I(a) \in Gr(t-1,n)$ vamos considerar, então, $\widetilde{Tjur}_I(X) \subset X \times Gr(t-1,n)$.

Proposição 4.5. *Para $F : \mathbb{C}^N \rightarrow M_{m,n}$ e $X = F^{-1}(M^t_{m,n})$, singularidade determinantal, temos $Tjur_I(X) \subset \widetilde{Tjur}_I(X)$.*

Demonstração: Seja $(x,W) \in Tjur_I(X)$, então, $(x,W) \in Tjur(X)$ e $W = A_I(a)$ para algum $a \in \mathbb{C}^{(t-1)(n-t+1)}$. Consideremos dois casos:

1) Se $(x,W) \in \{(x, \langle (f_{i1}(x),...,f_{in}(x)), i = 1,...,m\rangle;\ x \in X_{reg}\}$, então $\langle (f_{i1}(x),...,f_{in}(x)), i = 1,...,m\rangle = W = \widetilde{A}_I(a)$, para algum $a \in \mathbb{C}^{(t-1)(n-t+1)}$, consequentemente $rank(\widetilde{F}_I(x,a)) = t-1$, de onde vem $(x,a) \in (\widetilde{F}_I)^{-1}(M^t_{n+t-1,n})$.

2) Se $(x,W) \in \overline{\{(x, \langle (f_{i1}(x),...,f_{in}(x)), i=1,...,m\rangle;\ x \in X_{reg}\}} \backslash \{(x, \langle (f_{i1}(x),...,f_{in}(x)), i=1,...,m\rangle;\ x \in X_{reg}\}$, então existe uma sequência $(x_k, W_k) \in \{(x, \langle (f_{i1}(x),...,f_{in}(x)), i=1,...,m\rangle;\ x \in X_{reg}\}$ tal que

$$(x_k, W_k) \text{ converge para } (x, W),$$

logo $x_k \to x$, $W_k \to W$ e como F é contínua segue que $F(x_k) \to F(x)$, e assim segue que $\langle (f_{i1}(x),...,f_{in}(x)), i=1,...,m\rangle \subset W = \widetilde{A}_I(a)$ para algum $a \in \mathbb{C}^{(t-1)(n-t+1)}$, ou seja, $(x,a) \in \widetilde{Tjur}_I(X)$, o que completa a demonstração.

■

O exemplo 4.11 mostra que em geral temos $\widetilde{Tjur_I}(X) \neq Tjur_I(X)$

O que será feito de agora em diante tem a finalidade de mostrar que $\widetilde{Tjur}_I(X)$ não é necessariamente uma singularidade determinantal, para isso sejam

$$\begin{aligned} \widetilde{\pi}_I : \widetilde{Tjur}_I(X) &\to X, \qquad\qquad \pi_I^{Tj} = \pi_{Tj}\Big|_{Tjur_I(X)}. \\ (x,a) &\mapsto x \end{aligned}$$

Proposição 4.6. $(\pi_I^{Tj})^{-1}(X_{reg}) = (\widetilde{\pi}_I)^{-1}(X_{reg})$.

Demonstração: Note que

$$\begin{aligned}
(\pi_I^{Tj})^{-1}(X_{reg}) &= \{(x, \langle (f_{i1}(x),...,f_{in}(x)), i=1,...,m\rangle); x \in X_{reg} \\
&\quad \text{e } \langle (f_{i1}(x),...,f_{in}(x)), i=1,...,m\rangle \in Im(\widetilde{A}_I)\} \\
(\widetilde{\pi}_I)^{-1}(X_{reg}) &= \{(x,a) \in \widetilde{Tjur}_I(X); x \in X_{reg}\} \\
&= \{(x,a); x \in X_{reg} \text{ e } rank(\widetilde{F}_I^{Tj})(x,a) < t\} \\
&= \{(x,a); x \in X_{reg} \text{ e } rank(\widetilde{F}_I^{Tj})(x,a) = t-1\} \\
&= \{(x,a); x \in X_{reg} \text{ e } \langle (f_{i1}(x),...,f_{in}(x)); i=1,...,m\rangle \subset \widetilde{A}_I(a)\} \\
&= \{(x,a); x \in X_{reg} \text{ e } \langle (f_{i1}(x),...,f_{in}(x)); i=1,...,m\rangle = \widetilde{A}_I(a)\}.
\end{aligned}$$

Assim segue que $(\pi_I^{Tj})^{-1}(X_{reg}) = (\widetilde{\pi}_I)^{-1}(X_{reg})$.

■

Como

$$\begin{aligned}
\widetilde{Tjur}_I(X) &= (\widetilde{F}_I^{Tj})^{-1}(M^t_{m+t-1,n})\\
&= \{(x,a) \in \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^{(t-1)(n-t+1)};\ rank(\widetilde{F}_I(x,a) = t-1)\}\\
&= \{(x,a) \in \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^{(t-1)(n-t+1)};\ rank(F(x)) < t \text{ e}\\
&\quad \langle (f_{i1}(x),...,f_{in}(x)), i = 1,...,m\rangle \subset A_I(a)\}\\
&= \bigcup_{s=1}^{t} Z_s,
\end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned}
Z_s = \{(x,a) \in \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^{(t-1)(n-t+1)};\ rank(F(x)) = s-1\ e\\
\langle (f_{i1}(x),...,f_{in}(x)), i = 1,...,m\rangle \subset A_I(a)\}.
\end{aligned}$$

Logo

$$dim(\widetilde{Tjur}_I)(X) = max\{dim(Z_s),\ s = 1,...,t\},$$

mas

$$\begin{aligned}
Z_t &= \{(x,a) \in \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^{(t-1)(n-t+1)};\ rank(F(x)) = t-1\ e\\
&\quad \langle (f_{i1}(x),...,f_{im}(x)), i = 1,...,m\rangle \subset \widetilde{A}_I(a)\}\\
&= \{(x,a) \in \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^{(t-1)(n-t+1)};\ rank(F(x)) = t-1 \text{ e}\\
&\quad \langle (f_{i1}(x),...,f_{im}(x)), i = 1,...,m\rangle = \widetilde{A}_I(a)\}.
\end{aligned}$$

Dessa maneira podemos identificar Z_t com $F^{-1}(M^t_{m,n} \setminus M^{t-1}_{m,n})$, logo,

$$X_{reg} \subset F^{-1}(M^t_{m,n} \setminus M^{t-1}_{m,n}) \subset X,$$

e

$$dim(Z_t) = dim(F(M^t_{m,n} \setminus M^{t-1}_{m,n})) = dim(X).$$

De onde vem

$$dim(\widetilde{Tjur}_I(X)) = max\{dim(X),\ dim(Z_s),\ s = 1,...,t-1\}.$$

Analisemos a dimensão de Z_s com $s = 1,...,t-1$. Seja $x \in X^s$, então

$$(x,W) \in Z_s \text{ se, e somente se, } \langle (f_{i1}(x),...,f_{in}(x)), i = 1,...,m\rangle \subset W,$$

logo existe um subespaço $V_{F(x)}$ de $\langle (f_{i1}(x),...,f_{in}(x)), i = 1,...,m\rangle^{\perp}$, sendo $\langle (f_{i1}(x),...,f_{im}(x)), i = 1,...,m\rangle^{\perp}$ o complemento ortogonal de $\langle (f_{i1}(x),...,f_{in}(x)), i =$

$1, ..., m\rangle$ em W, tal que

$$W = V_{F(x)} \oplus \langle (f_{i1}(x), ..., f_{in}(x)), i = 1, ..., m\rangle.$$

Por outro lado temos que para todo $V \in Gr(t-s, n-s+1)$

$$dim(V \oplus \langle (f_{i1}(x), ..., f_{im}(x)), i = 1, ..., m\rangle) = t-1.$$

Dessa maneira para cada $x \in F^{-1}(M^s_{m,n} \setminus M^{s-1}_{m,n})$ defina:

$$\begin{aligned} f_x : Gr(t-s, n-s+1) &\to \{W \in Gr(t-1, n); \langle (f_{i1}(x), ..., f_{in}(x)), i = 1, ..., m\rangle \subset W\}. \\ V_{F(x)} &\mapsto V_{F(x)} \oplus \langle (f_{i1}(x), ..., f_{in}(x)), i = 1, ..., m\rangle \end{aligned}$$

Pela discussão anterior temos que f_x é bijeção, além disso f_x é contínua, pois

$$\begin{aligned} f_x(V_{F(x)}) &= V_{F(x)} \oplus \langle (f_{i1}(x), ..., f_{in}(x)), i = 1, ..., m\rangle \\ &= (V_{F(x)}, \langle (f_{i1}(x), ..., f_{in}(x)), i = 1, ..., m\rangle), \end{aligned}$$

portando f_x é contínua, pois cada função coordenada é contínua.

Como f_x é bijeção contínua, definida em compacto e contra domínio Hausdorff, segue que f_x é homeomorfismo, e, consequentemente,

$$dim(\{W \in Gr(t-1, n); \langle (f_{i1}(x), ..., f_{im}(x)), i = 1, ..., m\rangle \subset W\}) = dim(Gr(t-s, n-s+1)).$$

Por fim

$$dim(Z_s) = dim(X^s) + dim(Gr(t-s, n-s+1)), \tag{4.1}$$

implicando

$$dim(\widetilde{Tjur}_I(X)) = dim(X)$$

se, e somente se,

$$dim(X^s) \leq N - (m-s+1)(n-t+1)$$

para todo $s = 1, ..., t-1$.

Se X tem singularidade isolada, então $dim(X_{sing}) = 0$ e como $X^s \subset X_{sing}$, para todo $s = 1, ..., t-1$ obtemos que $N \geq (m-s+1)(n-t+1)$ para todo $s = 1, ..., t-1$.

Proposição 4.7. *Se $dim(\widetilde{Tjur}_I(X)) = dim(X)$, então $\widetilde{Tjur}_I(X)$ é uma singularidade determinantal to tipo $(m+t-1, n, t)$.*

Demonstração: Basta verificarmos se a codimensão de $\widetilde{Tjur}_I(X) = codim(M^t_{m+t-1,n}) =$

$m(n-t+1)$. De fato, como $\widetilde{Tjur}_I(X) \subset \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^{(t-1)(n-t+1)}$, temos que

$$\begin{aligned} codim(\widetilde{Tjur}_I(X)) &= dim(\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^{(t-1)(n-t+1)}) - dim(\widetilde{Tjur}_I(X)) \\ &= N + (t-1)(n-t+1) - dim(X) \\ &= N + (t-1)(n-t+1) - N + (m-t+1)(n-t+1) \\ &= m(n-t+1). \end{aligned}$$

■

Proposição 4.8. *Se $\widetilde{Tjur}_I(X)$ é singularidade determinantal, então $dim(X^s) \leq N - (m-s+1)(n-t+1)$ para todo $s = 1, ..., t-1$.*

Demonstração: Seja $(\widetilde{Tjur}_I)(X) = (\widetilde{F}_I)^{-1}(M^t_{m+t-1,n})$ singularidade determinantal, ou seja,

$$\begin{aligned} codim(\widetilde{Tjur}_I(X)) &= codim(M^t_{m+t-1,n}) \\ &= (m+t-1-t+1)(n-t+1) \\ &= m(n-t+1), \end{aligned}$$

em outras palavras

$$\begin{aligned} dim((\widetilde{Tjur}_I)(X)) &= N + (t-1)(n-t+1) - m(n-t+1) \\ &= N - (m-t+1)(n-t+1) \\ &= dim(X), \end{aligned}$$

o que implica $dim(X^s) \leq N - (m-s+1)(n-t+1)$ para todo $s = 1, ..., t-1$ e completa a demonstração.

■

Como $rank(\widetilde{F}_I(0,0)) = t-1$ podemos encontrar pelo exemplo 2.6 uma aplicação $F'_I : \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^{(t-1)(n-t+1)} \to M_{m,n-t+1}$ tal que X é singularidade determinantal do tipo $(m, n-t+1, 1)$. Logo pela proposição 4.7 segue que $\widetilde{Tjur}_I(X)$ é interseção completa. A próxima proposição nos diz quando $Tjur_I(X) = \widetilde{Tjur}_I(X)$,

Proposição 4.9. *$\widetilde{Tjur}_I(X) = Tjur_I(X)$ se, e somente se $dim(X^s) < N - (m-s+1)(n-t+1)$ para todo $s = 1, ..., t-1$.*

Demonstração: Suponha que $Tjur_I(X) = \widetilde{Tjur}_I(X) = \sqcup_{s=1}^t Z_s$. Como π_{Tj} é aplicação de transformada temos

$$dim(\pi_{Tj}^{-1}(X_{sing})) < dim(X),$$

como $Z_s \subset \pi_{Tj}^{-1}(X_{sing})$ para todo $s = 1, ..., t-1$, temos

$$dim(Z_s) \leq dim(\pi_{Tj}^{-1}(X_{sing})) < dim(X),$$

mas, de 4.1,

$$dim(Z_s) = dim(X^s) + dim(Gr(t-s, n-s+1)),$$

logo

$$\begin{aligned} dim(X^s) &< dim(X) - dim(Gr(t-s, n-s+1)) \\ &< N - (m-t+1)(n-t+1) - (t-s)(n-s+1-t+s) \\ &< N - (m-s+1)(n-t+1) \end{aligned}$$

o que completa a primeira parte da proposição. Por outro lado suponha $dim(X^s) < N - (m-s+1)(n-t+1)$ para todo $s = 1, ..., t-1$, o que implica, pela observação antes da proposição 4.7 $dim(\widetilde{Tjur_I}(X)) = dim(Tjur_I(X)) = dim(X)$.

Como

$$\begin{aligned} (\widetilde{\pi}_I)^{-1}(X^{t-1}) &= \{(x,a) \in \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^{(t-1)(n-t+1)};\ rank(F(x)) = t-2 \ e \ rank(\widetilde{F}_I(x,a)) = t-1\} \\ &= Z_{t-1}, \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} dim((\widetilde{\pi}_I)^{-1}(X^{t-1})) &= dim(Z_{t-1}) \\ &= dim(X^{t-1}) + (t-(t-1))(n-t+1) \\ &= N - (m-(t-1)+1)(n-t+1) + (n-t+1) \\ &< N - (m-t+3)(n-t+1) \\ &< N - (m-t+1)(n-t+1) = dim(X) \end{aligned}$$

mas $Tjur_I(X) \subset \widetilde{Tjur_I}(X)$. Desta maneira se $Tjur_I(X) \neq \widetilde{Tjur_I}(X)$ então existe uma componente irredutível V tal que $\widetilde{Tjur_I}(X) \supset Tjur_I(X) \cup V$, mas $\widetilde{Tjur_I}(X)$ é interseção completa, o que implica $\widetilde{Tjur_I}(X)$ é equidimensional, como

$$(\widetilde{\pi}_I)^{-1}(X_{reg}) = (\pi_{Tj}^{-1}(X_{reg})),$$

temos que $V \subset (\widetilde{\pi}_I)^{-1}(X^{t-1})$ e consequentemente $dim(V) \leq dim(\widetilde{\pi}_I^{-1}(X^{t-1})) < dim(X)$, o que é uma contradição, portanto $Tjur_I(X) = \widetilde{Tjur_I}(X)$.

■

Note que $rank(\widetilde{F}_I^{Tj}(0,0)) = t-1$, como no exemplo 2.6 podemos encontrar uma outra aplicação $F_I' : \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^{(t-1)(n-t+1)} \to M_{m,n-t+1}$ tal que $\widetilde{Tjur}_I^{Tj}(X) = (F_I')^{-1}(0)$. Como anteriormente, explicitaremos o método a partir de um exemplo. O processo nesse caso é mais simples, pois $\widetilde{F}_I^{Tj}(x,a)$ possui uma submatriz identidade de ordem $t-1$.

Exemplo 4.10. *Seja $F : \mathbb{C}^N \to M_{3,4}$, dada por $F = (f_{ij})$, e $X = F^{-1}(M_{3,4}^3)$ singularidade determinantal do tipo $(3,4,3)$. Considere $I = \{1,3\}$, então*

$$\widetilde{F}_I : \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^4 \to M_{5,4},$$

$$(x, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & a_{11} & 0 & a_{12} \\ 0 & a_{21} & 1 & a_{22} \\ f_{11}(x) & f_{12}(x) & f_{13}(x) & f_{14}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & f_{23}(x) & f_{24}(x) \\ f_{31}(x) & f_{32}(x) & f_{33}(x) & f_{34}(x) \end{pmatrix}$$

Chamaremos de C_k e L_k a k-ésima coluna e k-ésima linha de $\widetilde{F}_I$, respectivamente. Façamos as seguintes operações com $\widetilde{F}_I(x, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$.

$$C_2' = -a_{11}C_1 - a_{21}C_3 + C_2,\ C_4' = -a_{12}C_1 - a_{22}C_3 + C_4,$$

dessa maneira obtemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ f_{11}(x) & f_{12}(x) - a_{11}f_{11}(x) - a_{21}f_{13}(x) & f_{13}(x) & f_{14}(x) - a_{12}f_{11}(x) - a_{22}f_{13}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) - a_{11}f_{21}(x) - a_{21}f_{23}(x) & f_{23}(x) & f_{24}(x) - a_{12}f_{21}(x) - a_{22}f_{23}(x) \\ f_{31}(x) & f_{32}(x) - a_{11}f_{31}(x) - a_{21}f_{33}(x) & f_{33}(x) & f_{34}(x) - a_{12}f_{31}(x) - a_{22}f_{23}(x) \end{pmatrix}$$

Por fim realizaremos as operações

$$L_3' = L_3 - f_{11}(x)L_1 - f_{13}L_2,\ L_4' = L_4 - f_{21}(x)L_1 - f_{23}L_2,\ L_5' = L_5 - f_{31}(x)L_1 - f_{33}L_2,$$

na matriz anterior, obtendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & f_{12}(x) - a_{11}f_{11}(x) - a_{21}f_{13}(x) & 0 & f_{14}(x) - a_{12}f_{11}(x) - a_{22}f_{13}(x) \\ 0 & f_{22}(x) - a_{11}f_{21}(x) - a_{21}f_{23}(x) & 0 & f_{24}(x) - a_{12}f_{21}(x) - a_{22}f_{23}(x) \\ 0 & f_{32}(x) - a_{11}f_{31}(x) - a_{21}f_{33}(x) & 0 & f_{34}(x) - a_{12}f_{31}(x) - a_{22}f_{23}(x) \end{pmatrix}$$

Dessa maneira, os menores de ordem três da matriz anterior ainda definem $\widetilde{Tjur}_I(X)$, o que é equivalente aos menores de ordem 1 da matriz

$$\begin{pmatrix} f_{12}(x) - a_{11}f_{11}(x) - a_{21}f_{13}(x) & f_{14}(x) - a_{12}f_{11}(x) - a_{22}f_{13}(x) \\ f_{22}(x) - a_{11}f_{21}(x) - a_{21}f_{23}(x) & f_{24}(x) - a_{12}f_{21}(x) - a_{22}f_{23}(x) \\ f_{32}(x) - a_{11}f_{31}(x) - a_{21}f_{33}(x) & f_{34}(x) - a_{12}f_{31}(x) - a_{22}f_{23}(x) \end{pmatrix}$$

O procedimento do exemplo 4.10 pode ser executado para qualquer $F : \mathbb{C}^N \to M_{m,n}$ e $I \subset \{1,\ 2,\ ...\ n\}$.

Exemplo 4.11. *Seja*

$$F : \mathbb{C}^4 \to M_{2,3},$$
$$(x, y, z, w) \mapsto \begin{pmatrix} w^3 & y & x \\ z & w & y^3 \end{pmatrix}$$

e $X = F^{-1}(M^2_{2,3})$ *singularidade determinantal do tipo* $(2, 3, 2)$ *com* $X_{sing} = \{(0, 0, 0, 0)\}$.

Utilizando o SINGULAR, *ver apêndice, verificamos que* $\widetilde{Tjur}_I(X) = \widetilde{F}_I^{-1}(M^2_{3,3})$ *é singularidade determinantal para todo* I, *mas*

$$\widetilde{Tjur}_{\{2\}}(X) \neq Tjur_{\{2\}}(X).$$

De fato, seja

$$\widetilde{F}_I : \mathbb{C}^4 \to M_{2,3},$$
$$(x, y, z, w, a_1, a_3) \mapsto \begin{pmatrix} a_1 & 1 & a_3 \\ w^3 & y & x \\ z & w & y^3 \end{pmatrix}$$

então,

$$F'_{\{2\}} : \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^2 \to M_{2,2}$$
$$(x, y, z, w, a_1, a_3) \mapsto \begin{pmatrix} w^3 - ya_1 & x - ya_3 \\ z - wa_1 & y^3 - wa_3 \end{pmatrix}$$

Como $\widetilde{Tjur}_{\{2\}}(X) = (F'_{\{2\}})^{-1}(M^1_{2,2})$ *segue que*

$$\begin{aligned} \widetilde{Tjur}_{\{2\}}(X) &= v(w^3 - ya_1, x - ya_3, z - wa_1, y^3 - wa_3) \\ &\cong v(w^3 - ya_1, y^3 - wa_3) \\ &= v(w^8 - a_1^3a_3, -w^3 + ya_1, yw^5 - a_1^2a_3, y^2w^2 - a_1a_3, y^3 - wa_3) \cup v(w, y), \end{aligned}$$

Utilizamos o Singular, *ver apêndice, na última igualdade. Por outro lado*

$$\begin{aligned}
Tjur_{\{2\}}(X) &= \overline{\{(x,W)\in Tjur(X); W=\langle(a_1,1,a_3)\rangle, \textit{para algum } a_1,a_3\in\mathbb{C}\}}\\
&= \overline{\{(x,\langle(f_{i1}(x),...,f_{in}(x))\rangle);\ x\in X e\ \langle(f_{i1}(x),...,f_{in}(x))\rangle =}\\
&\quad \overline{\langle(a_1,1,a_3)\rangle \textit{para algum } a_1,a_3\in\mathbb{C}\}\setminus\{(0,0,0,0)\}\times\mathbb{C}^2}\\
&\cong \overline{v(w^3-ya_1, x-ya_3, z-wa_1, y^3-wa_3)\cup v(w,y)\setminus\{(0,0,0)\}\times\mathbb{C}^2}\\
&= v(w^8-a_1^3a_3, -w^3+ya_1, yw^5-a_1^2a_3, y^2w^2-a_1a_3, y^3-wa_3).
\end{aligned}$$

Desta maneira vemos que $Tjur_{\{2\}}(X)\neq \widetilde{Tjur}_{\{2\}}(X)$.

Verifiquemos que $Tjur_I(X)=\widetilde{Tjur}_I(X)$ *quando* $I=\{1\}$ *ou* $I=\{3\}$.

Como

$$\begin{aligned}
F'_{\{1\}}: \mathbb{C}^4\times\mathbb{C}^2 &\to M_{2,2}\\
(x,y,z,w,a_1,a_3) &\mapsto \begin{pmatrix} y-a_2w^3 & x-a_3w^3\\ w-a_2z & y^3-a_3z\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

então

$$\widetilde{Tjur}_{\{1\}}(X)=v(x-a_3w^3, y-a_2w^3, -a_3z+y^3, w-a_2z).$$

Enquanto que

$$\begin{aligned}
Tjur_{\{1\}}(X) &= \overline{\{(x,\langle(f_{i1}(x),...,f_{in}(x)),\ i=1,2\rangle); x\in X_{reg} \text{ e}}\\
&\quad \overline{\langle(f_{i1}(x),...,f_{in}(x)),\ i=1,2\rangle\subset\langle(a_1,a_2,1)\rangle\}}\\
&= \overline{v(I_2(F)+I_2(\widetilde{F}_{\{1\}}))\setminus\{(0,0,0,0)\}\times\mathbb{C}^2}\\
&= \overline{v(x-a_3w^3, y-a_2w^3, -a_3z+y^3, w-a_2z)\setminus\{(0,0,0,0)\}\times\mathbb{C}^2}\\
&= v(x-a_3w^3, y-a_2w^3, -a_3z+y^3, w-a_2z)
\end{aligned}$$

o que implica $Tjur_{\{1\}}(X)=\widetilde{Tjur}_{\{1\}}(X)$.

Por fim,

$$\begin{aligned}
F'_{\{3\}}: \mathbb{C}^4\times\mathbb{C}^2 &\to M_{2,2}\\
(x,y,z,w,a_1,a_2) &\mapsto \begin{pmatrix} w^3-xa_1 & y-xa_2\\ z-y^3a_1 & w-y^3a_2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

então

$$\widetilde{Tjur}_{\{3\}}(X)=v(w^3-a_1x, y-a_2x, z-a_1y^3, w-a_2y^3).$$

Enquanto que

$$\begin{aligned}
Tjur_{\{3\}}(X) &= \overline{\{(x, \langle((f_{i1}(x), ..., f_{in}(x)),\ i = 1, 2\rangle); x \in X_{reg} \text{ e}} \\
&\quad \overline{\langle(f_{i1}(x), ..., f_{in}(x)),\ i = 1, 2\rangle \subset \langle(a_1, a_2, 1)\rangle\}} \\
&= \overline{v(I_2(F) + I_2(\widetilde{F}_{\{3\}})) \setminus \{(0, 0, 0, 0)\} \times \mathbb{C}^2} \\
&= v(w^3 - a_1x, y - a_2x, z - a_1y^3, w - a_2y^3)
\end{aligned}$$

o que implica $Tjur_{\{3\}}(X) = \widetilde{Tjur}_{\{3\}}(X)$.

Exemplo 4.12. *Seja*

$$F : \mathbb{C}^4 \to M_{3,2}$$
$$(x, y, z, w) \mapsto \begin{pmatrix} w^3 & z \\ y & w \\ x & y^3 \end{pmatrix},$$

e $X = F^{-1}(M^2_{3,2})$ *singularidade determinantal do tipo* $(3, 2, 2)$*, com* $X_{sing} = \{(0, 0, 0, 0)\}$.

Consideremos $I = \{1\}$.

Assim,

$$\widetilde{F}_{\{1\}} : \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C} \to M_{1,3},$$
$$(x, y, z, w, a_2) \mapsto \begin{pmatrix} z - w^3a_2 \\ w - a_2y \\ y^3 - a_2x \end{pmatrix}$$

e consequentemente $\widetilde{Tjur}_1(X) = v(z - w^3a_2,\ w - a_2y,\ y^3 - a_2x) \cong v(z - y^3a_2^4,\ w - a_2y,\ y^3 - a_2x)$.

Enquanto

$$\begin{aligned}
Tjur_{\{1\}}(X) &= \overline{\{v(z - w^3a_2,\ w - a_2y,\ y^3 - a_2x)\} \setminus \{(0, 0, 0, 0) \times \mathbb{C}^2\}} \\
&\cong \overline{v(z - y^3a_2^4,\ y^3 - a_2x) \setminus \{(0, 0, 0)\} \times \mathbb{C}^2} \\
&= v(z - y^3a_2^4,\ y^3 - a_2x)
\end{aligned}$$

Portanto $Tjur_{\{1\}}(X) = \widetilde{Tjur}_{\{1\}}(X)$.

Por fim, seja $I = \{2\}$.

Assim,

$$\widetilde{F}_{\{2\}} : \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C} \to M_{1,3},$$

$$(x, y, z, w, a_1) mapsto \begin{pmatrix} w^3 - a_1 z \\ y - a_1 w \\ x - a_1 y^3 \end{pmatrix}$$

e consequentemente

$$\begin{aligned} \widetilde{Tjur}_1(X) &= v(w^3 - a_1 z,\ y - a_1 w,\ x - a_1 y^3) \\ &\cong v(w^3 - a_1 z,\ x - a_1^4 w^3). \end{aligned}$$

Enquanto

$$\begin{aligned} Tjur_{\{2\}}(X) &= \overline{v(w^3 - a_1 z,\ y - a_1 w,\ x - a_1 y^3) \setminus \{(0,0,0,0)\} \times \mathbb{C}^2} \\ &\cong \overline{v(w^3 - a_1 z,\ x - a_1^4 w^3) \setminus \{(0,0,0)\} \times \mathbb{C}^2} \\ &= v(w^3 - a_1 z,\ x - a_1^4 w^3). \end{aligned}$$

Portanto $Tjur_{\{2\}}(X) = \widetilde{Tjur}_{\{2\}}(X)$.

4.2 Transformada de Tjurina Transposta

Dada a aplicação $F : \mathbb{C}^N \to M_{m,n}$, definindo uma singularidade determinantal $X = F^{-1}(M^t_{m,n})$, podemos considerar

$$G : \mathbb{C}^N \to M_{n,m}$$

definida por $G(x) = (F(x))^t$. Com essa identificação, teremos que $Tjur^T(X) = Tjur(X^T)$, onde $X^T = G^{-1}(M^t_{n,m})$.

Definição 4.13. *Seja* $F : \mathbb{C}^N \to M_{m,n}$ *dada por* $F = (f_{ij})$, *holomorfa, e* $X = F^{-1}(M_{m,n})$ *singularidade determinantal do tipo* (m, n, t),

$$Tjur^T(X) = \overline{\{(x, W) \in X_{reg} \times Gr(t-1, m);\ \langle (f_{1j}(x), ..., f_{mj}(x));\ j = 1, ..., n \rangle \}},$$

a aplicação $\pi_{TjT} : Tjur^T(X) \to X$, *dada por* $\pi_{TjT}(x, W) = x$, *faz de* $Tjur^T(X)$ *uma transformada. Sendo* $\langle (f_{1j}(x), ..., f_{mj}(x));\ j = 1, ..., n \rangle$ *o subespaço gerado pelas colunas de* $F(x)$

Lema 4.14. *Sejam* $F : \mathbb{C}^N \to M_{m,n}$, $G : \mathbb{C}^N \to M_{n,m}$ *dadas por* $F(x) = (f_{ij}(x))$ *e* $G(x) = (F(x))^T$. *Então* $X = F^{-1}(M^t_{m,n}) = (G)^{-1}(M^t_{n,m}) = X^T$, *e consequentemente* $X_{reg} = X^T_{reg}$, $X_{sing} = X^T_{sing}$.

Demonstração: De fato, basta notar que

$$X = F^{-1}(M^t_{m,n}) = v(I_t(F)) = v(I_t(F^T)) = v(I_t(G)) = (G^{-1}(M^t_{n,m}) = X^T,$$

o que completa a prova.

■

A partir dessa identificação é imediato que π_{Tj^T} faz de $Tjur^T(X)$ uma transformada de (X, X_{sing}).

Como para a Transformada de Tjurina, a Transformada de Tjurina Transposta também possui outra caracterização.

Proposição 4.15. $Tjur^T(X) = \overline{\{(x,W) \in X_{reg} \times Gr(t-1,m); W = Im(F(x))\}}$, *considerando* $F(x) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ *transformação linear.*

Demonstração: Basta observar que se $A \in M_{m,n}$, então $\langle (a_{1j}, ..., a_{mj}), j = 1, ..., n\rangle = Im(A)$ considerando $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$.

■

Vamos definir agora $\widetilde{Tjur}^T_I(X)$, para isso consideremos

$$\begin{aligned} \overline{F}^T_I : \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^{(t-1)(m-t+1)} &\to M_{n,m+t-1} \\ (x,a) &\mapsto \begin{pmatrix} A^T_I(a) & F(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como esperado defina $\widetilde{Tjur}^T_I(X) = (\overline{F})^{-1}(M^t_{n,m+t-1})$.

Proposição 4.16. $\widetilde{Tjur}^T_I(X) = \widetilde{Tjur}_I(X^T)$, *sendo* $X = F^{-1}(M^t_{m,n})$ *e* $X^T = (G)^{-1}(M^t_{n,m})$.

Demonstração: Note que

$$\begin{aligned} \widetilde{Tjur}_I(X^T) &= ((\widetilde{F}_I)^{-1}(M^t_{n,m+t-1}) \\ &= ((\overline{F}^T_I)^T)^{-1}(M^t_{m+t-1,n}) \\ &= v(I_t((\overline{F}^T_I)^T)) \\ &= v(I_t(\overline{F}^T_I)) \\ &= (\overline{F}^T_I)^{-1}(M^t_{n,m+t-1}) \\ &= \widetilde{Tjur}^T_I(X). \end{aligned}$$

■

Dessa maneira obtemos os seguintes resultados que correspondem a 4.7, 4.8 e 4.9.

Proposição 4.17. $\widetilde{Tjur}_I^T(X)$ *é singularidade determinantal se, e somente se,* $dim(F^{-1}(M_{m,n}^s \setminus M_{m,n}^{s-1})) \leq N - (m-t+1)(n-s+1)$ *para todo* $s = 1,\ ...,\ t-1$.

Proposição 4.18. *Se* $\widetilde{Tjur}_I^T(X) = Tjur_I^T(X)$, *então* $dim(F^{-1}(M_{m,n}^s \setminus M_{m,n}^{s-1})) < N - (m-t+1)(n-s+1)$ *para todo* $s = 1,\ ...,\ t-1$

Capítulo 5

Quando Tjur(X) é Interseção Completa

O objetivo desse capítulo é obter condições gerais de quando a transformada de Tjurina de uma $EIDS$ é uma interseção completa.

Vamos considerar $F : \mathbb{C}^N \to M_{m,n}$ holomorfa, $X = F^{-1}(M^t_{m,n})$ $EIDS$, ou seja, para todo $x \in X \setminus \{0\}$, F intersecta o estrado $(M^s_{m,n} \setminus M^{s-1}_{m,n})$, a que $F(x)$ pertence, transversalmente em $F(x)$.

Lema 5.1. *Se X é $EIDS$, então $dim(F^{-1}(M^s_{m,n} \setminus M^{s-1}_{m,n})) = N - (m-s+1)(n-s+1)$ para todo $s = 2, ..., t$*

Demonstração: De fato, $(M^s_{m,n} \setminus M^{s-1}_{m,n})$ é variedade diferenciável de dimensão $(s-1)(m+n-s+1)$ em $M_{m,n}$. Por X ser $EIDS$ temos que para todo $x \in (X \setminus \{0\})$ F intersecta o estrato $(M^s_{m,n} \setminus M^{s-1}_{m,n})$, a que $F(x)$ pertence, transversalmente para todo $s = 2, ..., t$, logo $F^{-1}(M^s_{m,n} \setminus M^{s-1}_{m,n})$ é subvariedade diferenciável de $M_{m,n}$, tal que $codim(F^{-1}(M^s_{m,n} \setminus M^{s-1}_{m,n})) = codim(M^s_{m,n} \setminus M^{s-1}_{m,n}) = mn - (s-1)(m+n-s+1) = (m-s+1)(n-s+1)$, ou seja, $dim(F^{-1}(M^s_{m,n} \setminus M^{s-1}_{m,n})) = N - (m-s+1)(n-s+1)$ para todo $s = 2, ..., t$.

■

Definição 5.2. *Seja $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$, $X = F^{-1}(0)$ é interseção completa local, quando para todo $x \in X$ existe aberto U contendo x tal que $X \cap U$ é interseção completa.*

Proposição 5.3. *Seja X $EIDS$ do tipo (m, n, t).*

1) *Se $dim(F^{-1}(M^1_{m,n})) < N - m(n-t+1)$, então $Tjur(X)$ é uma interseção completa local.*

2) *Se $dim(F^{-1}(M^1_{m,n})) < N - n(m-t+1)$, então $Tjur^T(X)$ é uma interseção completa local.*

Demonstração: 1) Vamos mostrar que $Tjur_I(X)$ é interseção completa para todo I. Para isso mostraremos que $\widetilde{Tjur_I}(X) = Tjur_I(X)$, pois nesse caso teremos $dim(\widetilde{Tjur_I}(X)) = dim(Tjur_I(X)) = dim(X)$ e assim como foi comentado após a proposição 4.8, $\widetilde{Tjur_I}(X)$ é interseção completa, resultando que $Tjur_I(X)$ é interseção completa. Mostremos então que $\widetilde{Tjur}_I(X) = Tjur_I(X)$, pela proposição 4.9 basta mostrar que $dim(X^s) < N-(m-s+1)(n-t+1)$ para todo $s = 2, ..., t-1$, mas por X ser $EIDS$ temos que

$$\begin{aligned} dim(X^s) &= N-(m-s+t)(n-s+1) \\ &< N-(m-s+1)(n-t+1), \end{aligned}$$

para todo $s = 2, ..., t-1$. Juntando as desigualdades acima com a hipótese temos que

$$dim(X^s) < N-(m-s+1)(n-t+1),$$

para todo $s = 1, ..., t-1$, assim segue pela proposição 4.9 que $\widetilde{Tjur}_I(X) = Tjur_I(X)$, o que completa a demonstração.

2) Segue do item anterior utilizando a identificação entre $\widetilde{Tjur}_I^T(X)$ e $\widetilde{Tjur}_I(X^T)$.

■

Lema 5.4. *Seja $F : \mathbb{C}^N \to M_{m,n}$ holomorfa tal que $X^2 \neq \emptyset$, então $dim(X^1) < dim(X^2)$.*

Demonstração: Como F é holomorfa, temos que a restrição

$$\begin{aligned} G = F\big|_{F^{-1}(M^2_{m,n})} : F^{-1}(M^2_{m,n}) &\to M^2_{m,n}, \\ x &\mapsto F(x) \end{aligned}$$

é holomorfa e não nula, pois $X^2 \neq \emptyset$.

Desta maneira se $x \in X^1$, segue que para todo $\varepsilon > 0$ existe $x_\varepsilon \in B(x,\varepsilon) \cap F^{-1}(M^2_{m,n})$ tal que $G(x_\varepsilon) \neq 0$, ou seja,

$$X^1 = G^{-1}(M^1_{m,n}) \subset \overline{G^{-1}(M^2_{m,n} \setminus M^1_{m,n})} = \overline{X^2},$$

mas

$$X^1 \cap X^2 = \emptyset$$

o que implica,

$$X^1 \subset \partial(X^2),$$

e consequentemente

$$dim(X^1) < dim(X^2).$$

■

Proposição 5.5. *Seja X uma $EIDS$ do tipo (m, n, t), com $t \geq 3$ e $X^2 \neq \emptyset$, então $Tjur_I(X)$ ou $Tjur_I^T(X)$ é interseção completa local.*

Demonstração: Vamos utilizar a proposição 5.3.

1) Se $m = max\{m,\ n\}$, então temos por hipótese que $t-2 \geq 1$, o que implica,

$$m(t-2) \geq m \geq n > n-1.$$

Mas

$$\begin{aligned} dim(X^1) &< dim(X^2) \\ &= N-(m-2+1)(n-2+1) \\ &= N-mn+m+n-1 \\ &< N-mn+m+m(t-2) = N-m(n-t+1). \end{aligned}$$

Logo pela proposição 5.3 segue que $Tjur(X)$ é interseção completa local.

2) Se $n = max\{m, n\}$, então

$$n(t-2) \geq n \geq m > m-1,$$

mas

$$\begin{aligned} dim(X^1) &< dim(X^2) \\ &= N-(m-2+1)(n-2+1) \\ &= N-mn+n+m-1 \\ &< N-mn+n+n(t-2) = N-n(m-t+1). \end{aligned}$$

Desta maneira $Tjur^T(X)$ é interseção completa local, pela proposição 5.3.

■

A proposição 5.5 nos diz, com uma condição sobre t, quando a Transformada de Tjurina ou a Transformada de Tjurina transposta de uma $EIDS$ do tipo (m,n,t) é interseção completa local. Note que se $t = 1$ temos $F(x) = 0$ para todo $x \in X$, logo $\langle (f_{i1},(x),...,f_{in}(x)),\ i = 1,...,m\rangle = \{0\}$, para todo $x \in X$, consequentemente

$$\begin{aligned} Tjur(X) &= \overline{\{(x, \langle (f_{i1},(x),...,f_{in}(x)),\ i=1,...,m\rangle);\ x \in X_{reg}\}} \\ &= \overline{\{(x,\{0\});\ x \in X_{reg}\}} \\ &= \overline{X_{reg}} \\ &= X, \end{aligned}$$

e assim $Tjur(X)$ é interseção completa.

Os exemplos 4.11 e 4.12 mostram que $Tjur(X)$ ou $Tjur^T(X)$ podem ser interseção completa local com $t < 3$.

Nas proposições anteriores mostramos que $Tjur_I(X) = \widetilde{Tjur}_I(X)$ ou $Tjur_J^T(X) = \widetilde{Tjur}_J^T(X)$ e por $\widetilde{Tjur}_I(X)$ ou $\widetilde{Tjur}_J^T(X)$ serem interseções completas obtínhamos os resultados desejados.

Exemplo 5.6. *Esse exemplo mostra um caso em que* $Tjur_I(X) \neq \widetilde{Tjur}_I(X)$, $Tjur_J^T(X) \neq \widetilde{Tjur}_J^T(X)$ *para todo* I, J *mas* $Tjur(X)$ *e* $Tjur^T(X)$ *são interseções completas locais. Seja*

$$F : \mathbb{C}^3 \to M_{2,3},$$
$$(x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} z & y & x^{k-3} \\ 0 & x & y \end{pmatrix}$$

com $k > 4$ *e* $X = F^{-1}(M_{3,2}^2)$ *singularidade determinantal com* $X_{sing} = \{(0,0,0)\}$.

Então $\widetilde{Tjur}_{\{1\}}(X) = (F'_{\{1\}})^{-1}(M_{2,2}^1)$, *sendo*

$$F'_{\{1\}} : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^2 \to M_{2,2},$$
$$(x, y, z, w, a_2, a_3) \mapsto \begin{pmatrix} y - a_2 z & x^{k-3} - a_3 z \\ x & y \end{pmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \widetilde{Tjur}_{\{1\}}(X) &= v(y - a_2 z, x^{k-3} - a_3 z, x, y) \\ &= v(x, y, z) \cup v(x, y, a_2 a_3), \end{aligned}$$

enquanto

$$\begin{aligned} Tjur_{\{1\}}(X) &= \overline{v(x, y, z) \cup v(x, y, a_2 a_3) \setminus \{(0,0,0) \times \mathbb{C}\}} \\ &= v(x, y, a_2, a_3). \end{aligned}$$

Dessa maneira

$$\widetilde{Tjur}_{\{1\}}(X) \neq Tjur_{\{1\}}(X),$$

mas $dim(Tjur_{\{1\}}) = 1 = 5 - 4$ *e portanto* $Tjur_{\{1\}}(X)$ *é Interseção completa.* $Tjur_{\{2\}}(X) = (F'_{\{2\}})^{-1}(M_{2,2}^1)$, *sendo*

$$F'_{\{2\}} : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^2 \to M_{2,2},$$
$$(x, y, z, a_1, a_3) \mapsto \begin{pmatrix} z - a_1 y & x^{k-3} - a_3 y \\ -a_1 x & y - a_3 x \end{pmatrix}$$

logo

$$\begin{aligned}\widetilde{Tjur}_{\{2\}}(X) &= v(z - a_1y,\ x^{k-3} - a_2y,\ -a_1x,\ y - a_3x) \\ &= v(a_1, z, y - a_3x, x^{k-3} - a_3y) \cup v(x, y, z)\end{aligned}$$

enquanto

$$\begin{aligned}Tjur_{\{2\}}(X) &= \overline{v(a_1, z, y - a_3x, x^{k-3} - a_3y) \cup v(x, y, z) \setminus \{(0,0,0)\} \times \mathbb{C}^2} \\ &= \overline{v(a_1, z, y - a_3x, x^{k-3} - a_3y) \setminus \{(0,0,0)\} \times \mathbb{C}^2} \\ &= v(a_1, z, y - a_3x, x^{k-3} - a_3^2).\end{aligned}$$

Logo $Tjur_{\{2\}}(X) \neq \widetilde{Tjur}_{\{2\}}(X)$, *mas* $codim(Tjur_{\{2\}}(X)) = 5 - dim(Tjur_{\{2\}}(X)) = 5 - dim(X) = 4$, *ou seja,* $Tjur_{\{2\}}(X)$ *é Interseção Completa*

$Tjur_{\{3\}}(X) = (F'_{\{3\}})^{-1}(M^1_{2,2})$, *sendo*

$$\begin{aligned}&F'_{\{3\}} : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^2 \to M_{2,2}, \\ &(x, y, z, a_1, a_2) \mapsto \begin{pmatrix} z - a_1x^{k-3} & y - a_2x^{k-3} \\ -a_1y & x - a_2y \end{pmatrix}\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}\widetilde{Tjur}_{\{3\}}(X) &= v(z - a_1x^{k-3},\ y - a_2x^{k-3},\ -a_1y,\ x - a_2y) \\ &= v(a_1,\ z,\ y - a_2x^{k-3}, x - a_2y) \cup v(x, y, z, a_2),\end{aligned}$$

enquanto

$$\begin{aligned}Tjur_{\{3\}}(X) &= \overline{v(a_1,\ z,\ y - a_2x^{k-3}, x - a_2y) \cup v(x, y, z, a_2) \setminus \{(0,0,0)\} \times \mathbb{C}^2} \\ &= \overline{v(a_1,\ z,\ y - a_2x^{k-3}, x - a_2y) \setminus \{(0,0,0)\} \times \mathbb{C}^2} \\ &= v(a_1,\ z,\ y - a_2x^{k-3}, x - a_2y).\end{aligned}$$

Logo $Tjur_{\{3\}}(X) \neq \widetilde{Tjur}_{\{3\}}(X)$, *mas* $codim(Tjur_{\{3\}}(X)) = 5 - dim(Tjur_I(X)) = 5 - dim(X) = 4$, *ou seja,* $Tjur_{\{3\}}(X)$ *é Interseção Completa.*

Vamos calcular agora a Tjurina transposta de X.

Para isso vamos considerar:

$$F^T : \mathbb{C}^3 \to M_{3,2},$$
$$(x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} z & 0 \\ y & x \\ x^{k-3} & y \end{pmatrix}$$

logo $X = (F)^{-1}(M_{3,2}^2)$ *é singularidade determinantal e* $X_{sing} = \{(0,0,0)\}$. *Então* $\widetilde{Tjur}^T(X) = \widetilde{Tjur}(X^T) = (F_{\{1\}}'^T)^{-1}(M_{1,3}^1)$, *sendo*

$$(F_{\{1\}}'^T) \to M_{1,3},$$
$$(x,y,z,a_2) \mapsto \begin{pmatrix} -a_2 z \\ x - a_2 y \\ y - a_2 x^{k-3} \end{pmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \widetilde{Tjur}_{\{1\}}^T(X) &= v(-a_2 z,\ x - a_2 y,\ y - a_2 x^{k-3}) \\ &= v(a_2,\ x,\ y) \cup v(z, x - a_2 y, y - a_2 x^{k-3}), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Tjur_{\{1\}}^T &= \overline{v(a_2,\ x,\ y) \cap v(z, x - a_2 y, y - a_2 x^{k-3}) \setminus \{(0,0,0)\} \times \mathbb{C}} \\ &= \overline{v(a_2,\ x,\ y) \setminus \{(0,0,0) \times \mathbb{C}\}} \\ &= v(a_2,\ x,\ y). \end{aligned}$$

Logo $\widetilde{Tjur}_{\{1\}}^T \neq Tjur_{\{1\}}^T(X)$ *e* $codim(Tjur_{\{1\}}^T) = 5 - dim(Tjur_{\{1\}}^T(X)) = 5 - dim(X) = 3$, *portanto* $Tjur_{\{1\}}^T(X)$ *é interseção completa local.*

Calculemos agora $\widetilde{Tjur}_{\{2\}}^T(X) = \widetilde{Tjur}_{\{2\}}(X^T) = (F_{\{2\}}'^T)^{-1}(M_{1,3}^1)$, *sendo*

$$(F_{\{2\}}'^T) \to M_{1,3},$$
$$(x,y,z,a_2) \mapsto \begin{pmatrix} z \\ y - a_1 x \\ x^{k-3} - a_1 y \end{pmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \widetilde{Tjur}_{\{2\}}^T(X) &= v(z,\ y - a_1 x,\ x^{k-3} - a_1 y) \\ &= v(x,y,z) \cup v(z, y - a_1 x, x^{k-4} - a_1^2), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Tjur^T_{\{2\}} &= \overline{v(x,y,z)\cup v(z,y-a_1x,x^{k-4}-a_1^2)\setminus\{(0,0,0)\}\times\mathbb{C}} \\ &= \overline{v(z,y-a_1x,x^{k-4}-a_1^2)\setminus\{(0,0,0)\times\mathbb{C}\}} \\ &= v(z,y-a_1x,x^{k-4}-a_1^2). \end{aligned}$$

Logo $\widetilde{Tjur}^T_{\{2\}} \neq Tjur^T_{\{2\}}(X)$ *e* $codim(Tjur^T_{\{2\}}) = 5 - dim(Tjur^T_{\{2\}}(X)) = 5 - dim(X) = 3$, *portanto* $Tjur^T_{\{1\}}(X)$ *é interseção completa local.*

Na proposição 5.5, apresentamos condições para que a transformada de Tjurina de uma $EIDS$ do tipo (m,n,t), $t \geq 3$ seja interseção completa local. A próxima proposição mostra que mesmo quando $t = 2$ a transformada de Tjurina de X ainda pode ser uma interseção completa local.

Proposição 5.7. *Seja* X *uma* $EIDS$ *do tipo* $(m,n,2)$*. Se* $min\{m,\ n\} \leq dim(X) - dim(X^1)$*, então* $Tjur(X)$ *ou* $Tjur^T(X)$ *é interseção completa local.*

Demonstração: Mais uma vez, basta mostrarmos que $dim(X^1) < N - m(n-1)$ ou $dim(X^1) < N - n(m-1)$. Por hipótese temos que

$$dim(X^1) \leq dim(X) - min\{m,\ n\} = N - (n-1)(m-1) - min\{m,\ n\}.$$

1) Se $min\{m,\ n\} = n$, então

$$\begin{aligned} dim(X^1) &\leq N - (n-1)(m-1) - n \\ &< N - (n-1)(m-1) - n + 1 \\ &= N - m(n-1), \end{aligned}$$

e portanto $Tjur(X)$ é interseção completa local.

2) Se $min\{m,\ n\} = m$, então

$$\begin{aligned} dim(X^1) &\leq N - (n-1)(m-1) - m \\ &< N - (n-1)(m-1) - m + 1 \\ &= N - n(m-1), \end{aligned}$$

e portanto $Tjur^T(X)$ é interseção completa local.

■

Corolário 5.8. *Seja* X *uma* $EIDS$ *do tipo* $(m,n,2)$ *com singularidade isolada. Se* $min\{m,n\} \leq dim(X)$*, então* $Tjur(X)$ *ou* $Tjur^T(X)$ *é interseção completa local.*

Demonstração: De fato, como $X = F^{-1}(M^2_{m,n})$ é $EIDS$ e tem singularidade isolada, temos que $X_{sing} = X^1$ e $dim(X^1) = 0$, logo $min\{m,\ n\} \leq dim(X) = dim(X) - dim(X^1)$, e assim pela proposição anterior temos que $Tjur(X)$ ou $Tjur^T(X)$ é interseção completa local.

$\blacksquare$

Capítulo 6

Exemplos

Nesse capítulo vamos mostrar, através de exemplos, como a transformada de Tjurina pode ser utilizada para obtermos resoluções de hipersuperfícies.

Exemplo 6.1. *Singularidades do tipo A_n são hipersuperfícies $X = f^{-1}(0)$ dadas por*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}^k &\to \mathbb{C}, \\ (x_1, ..., x_k) &\mapsto x_1^{n+1} + P(x_2, ..., x_k) \end{aligned}$$

com $n \geq 3$ e P uma forma quadrática homogênea.

Consideremos a singularidade

$$A_n = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3;\ -z^{n+1} + xy = 0\}.$$

Seja

$$\begin{aligned} F : \mathbb{C} &\to M_{2,2}, \\ (x, y, z) &\mapsto \begin{pmatrix} x & z^l \\ z^{n-l+1} & y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

com $0 < l \leq n$. Assim

$$X = F^{-1}(M_{2,2}^2) = A_n,$$

é singularidade determinantal, pois $dim(X) = 2 = 3 - (2 - 2 + 1)(2 - 2 + 1)$.

O objetivo é utilizar a proposição 5.3, para obtermos uma interseção completa e analisarmos se a mesma é suave ou não.

Note que $X^1 = \{(0, 0, 0)\}$, ou seja $dim(X^1) = 0 < 3 - 2(2 - 2 + 1)$. Resta verificarmos se X é EIDS, ou seja, se para todo $(x, y, z) \in X \setminus \{(0, 0, 0)\}$

$$DF_{(x,y,z)}(T_{(x,y,z)}\mathbb{C}^3) + T_{F(x,y,z)}(M_{2,2}^2 \setminus M_{2,2}^1) = T_{F(x,y,z)}(M_{2,2}).$$

Seja $(x,y,z) \in X \setminus \{(0,0,0)\}$, *em outras palavras* $rank(F(x,y,z)) = 1$. *Note que*

$$DF_{(x,y,z)}(h_1,h_2,h_3) = \begin{pmatrix} h_1 & lz^{l-1}h_3 \\ (n-l+1)z^{n-l}h_3 & h_2 \end{pmatrix}$$

Consideramos os três casos:

1) $x = 0,\ y \neq 0,\ z = 0$. *Logo*

$$DF_{(0,y,0)} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

mas $ker(F(0,y,0)) = \langle (1,0) \rangle$, *tome assim*

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

pois

$$B_1(1,0) = (0,0),\ B_2(1,0) = (1,0) = F(0,y,0)(0,\tfrac{1}{y})$$

que pertencem a $Im(F(0,y,0))$. *Como* $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_1, B_2 \right\}$ *é linearmente independente, temos que o resultado segue para os pontos* $(0,y,0)$

2) $x \neq 0,\ y = z = 0$.

Logo

$$DF_{(x,0,0)} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

mas $ker(F(x,0,0)) = \langle (0,1) \rangle$, *tome assim*

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

pois

$$B_1(1,0) = F(x,0,0)(\tfrac{1}{x},0),\ B_2(1,0) = (0,0)$$

que pertencem a $Im(F(x,0,0))$. *Mas* $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_1, B_2 \right\}$ *é linearmente independente, e temos o resultado para os pontos* $(x,0,0)$

3) $x \neq 0,\ y \neq 0,\ z \neq 0$, *tais que* $-z^{n+1} + (xy) = 0$ *Logo*

$$DF_{(x,y,z)} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & lz^{l-1} \\ (n-l+1)z^{n-l} & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

assim, $ker(F(x,y,z)) = \langle(y, -z^{n-l+1})\rangle$, *e considere*

$$B = \begin{pmatrix} \frac{x}{y} & -z^{-n+1} \\ \frac{z^{n-l+1}}{y} & \frac{y}{z^{n-l+1}} \end{pmatrix},$$

pois

$$B_1(y, -z^{n-l+1}) = (x + z^l, z^{n-l+1} + y)$$

que pertencem a $Im(F(x,y,z))$.

Daí como

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & lz^{l-1} \\ (n-l+1)z^{n-l} & 0 \end{pmatrix}, B \right\}$$

é linearmente independente, temos que o X *é EIDS.*

Assim pela proposição 5.3 *temos*

$$Tjur_I(X) = \widetilde{Tjur}_I(X) = (F_I)^{-1}(M^1_{2,1}),$$

para $I = \{1\}$, $\{2\}$ *sendo,*

$$\begin{aligned} F_{\{1\}} : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C} &\to M_{2,1} \\ (x,y,z,a_2) &\mapsto \begin{pmatrix} z^l - a_2 x \\ y - a_2 z^{n-l+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{\{2\}} : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C} &\to M_{2,1} \\ (x,y,z,a_1) &\mapsto \begin{pmatrix} x - a_1 z^l \\ z^{n-l+1} - a_1 y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Desta maneira obtemos uma singularidade do tipo A_{l-1} *e* A_{n-l}*, ou seja, a transformada de Tjurina simplificou a singularidade. Note ainda que podemos escrever os resultados obtidas como singularidades determinantais para aplicarmos a transformada de Tjurina novamente.*

O próximo exemplo é um caso particular do anterior.

Exemplo 6.2. *Considere*

$$X = v(-z^4 + xy),$$

o qual é hipersuperfície, e possui conjunto singular $X_{sing} = \{(0,0,0)\}$. *Utilizaremos a* *transformada de Tjurina para resolver essa singularidade. Seja*

$$F : \mathbb{C}^3 \to M_{2,2},$$
$$(x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} x & z \\ z^3 & y \end{pmatrix}$$

note que $X = F^{-1}(M^2_{2,2})$, $dim(X) = 2$ *e portanto* X *é singularidade determinantal. Utilizaremos, como no exemplo anterior a proposição 5.3. Verifiquemos as hipóteses,* $dim(X^1) = 0 < 3 - 2(2 - 2 + 1)$.

X *é EIDS.*

De fato, mostremos que para todo $(x, y, z) \in X \setminus \{(0, 0, 0)\}$ *temos que*

$$DF_{(x,y,z)}(T_{(x,y,z)}\mathbb{C}^3) + T_{F(x,y,z)}(M^2_{2,2} \setminus M^1_{2,2}) = T_{F(x,y,z)}(M_{2,2}).$$

Sabemos

$$DF_{(x,y,z)}(h_1, h_2, h_3) = \begin{pmatrix} h_1 & h_3 \\ 3z^2h_3 & h_2 \end{pmatrix}$$

Faremos em 3 etapas:

1) Considere $x = 0$, $y \neq 0$, $z = 0$, *então*

$$DF_{(0,y,0)}(T_{(0,y,0)}\mathbb{C}^3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$ker(F(0, y, 0)) = \langle (1, 0) \rangle,$$

Tome

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

pois

$$B(a, 0) = (0, a) = F(0, y, 0)(a, \tfrac{a}{y}),$$

logo $B \in T_{F(0,y,0)}(M^2_{2,2} \setminus M^1_{2,2})$, *e*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B \right\}$$

é linearmente independente. então para pontos os pontos $(0, y, 0)$ *temos que* F *intersecta* $M^2_{2,2} \setminus M^1_{2,2}$ *transversalmente.*

2) Considere $x \neq 0$, $y = z = 0$, *logo*

$$DF_{(x,0,0)}(T_{(x,0,0)}\mathbb{C}^3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$ker(F(x,0,0)) = \langle (0,1) \rangle,$$

Considere

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

pois

$$B(0,a) = (0,0) \in Im(F(x,0,0)),$$

assim $B \in T_{F(0,y,0)}(M^2_{2,2} \setminus M^1_{2,2})$, *e*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B \right\}$$

é linearmente independente. Consequentemente para $(x,0,0)$ *temos que* F *intersecta* $M^2_{2,2} \setminus M^1_{2,2}$ *transversalmente.*

3) Considere $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, *tais que* $(x,y,z) \in X$

$$DF_{(x,y,z)}(T_{(x,y,z)}\mathbb{C}^3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3z^2 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$ker(F(x,y,z)) = \langle (-z,x) \rangle,$$

Seja

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -z^2 & \frac{y}{x} \end{pmatrix},$$

pois

$$B(-z,y) = (z+x, z^3+y) = F(x,y,z)(1,1),$$

e assim $B \in T_{F(x,y,z)}(M^2_{2,2} \setminus M^1_{2,2})$, *e*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3z^2 & 0 \end{pmatrix}, B \right\}$$

é linearmente independente, e finalmente obtemos que F *intersecta* $M^2_{2,2} \setminus M^1_{2,2}$ *transversalmente.*

Logo X *é* $EIDS$, *e as hipóteses do teorema 5.3 são satisfeitas, desta maneira segue que*

$$Tjur_I(X) = \widetilde{Tjur}_I(X) = (F'_I)^{-1}(M^1_{2,1}),$$

para todo $I = \{1\}, \{2\}$, *sendo*

$$\begin{aligned} F'_{\{1\}} &: \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C} \to M_{2,1} \\ (x, y, z, a_2) &\mapsto \begin{pmatrix} z - a_2 x \\ y - a_2 z^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} F'_{\{2\}} &: \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C} \to M_{2,1} \\ (x, y, z, a_1) &\mapsto \begin{pmatrix} x - a_1 z \\ z^3 - a_1 y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} Tjur_{\{1\}}(X) &= v(z - a_2 x,\ y - a_2 z^3) \subset \mathbb{C}^4 \\ &\cong v(z - a_2 x) \subset \mathbb{C}^3, \textit{utilizamos a substituição } y = a_2 z^3 \\ &= v(z - wx) \textit{ fizemos } a_2 = w. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Tjur_{\{2\}}(X) &= v(x - a_1 z, z^3 - a_1 y) \subset \mathbb{C}^4 \\ &= v(z^3 - a_1 y) \subset \mathbb{C}^3 \textit{utilizamos a substituição } x = a_1 z \\ &= v(z^3 - wy),\ \textit{fizemos}\ \ a_1 = w. \end{aligned}$$

Observe que $(Tjur_{\{1\}}(X))_{sing} = \emptyset$ *e* $(Tjur_{\{2\}}(X))_{sing} = \{(0, 0, 0)\}$ *pois,*

$$J(z - wx) = \begin{pmatrix} -w & 1 & -x \end{pmatrix}; \qquad J(z^3 - wy) = \begin{pmatrix} -w & 3z^2 & -y \end{pmatrix}$$

Consideremos agora

$$Tjur_{\{2\}}(X) = v(z^3 - wy),$$

Seja

$$\begin{aligned} G &: \mathbb{C}^3 \to M_{2,2} \\ (y, z, w) &\to \begin{pmatrix} z & y \\ w & z^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Assim segue que $G^{-1}(M^2_{2,2}) = Tjur_{\{2\}}(X) = Y$, *logo* $dim(Y) = 2$ *portanto* Y *é singularidade determinantal*

Afirmamos que $dim(Y^1) = 0 < 3 - 2(2 - 2 + 1)$ *e* Y *é EIDS.*

Logo

$$Tjur_{\{I\}}(Y) = \widetilde{Tjur}_I(Y) = (G'_I)^{-1}(M^1_{2,1}),$$

com $I = \{1\}, \{2\}$ *sendo*

$$G'_{\{1\}} : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C} \to M_{2,2},$$
$$(y, z, w, a_2) \mapsto \begin{pmatrix} y - a_2 z \\ z^2 - a_2 w \end{pmatrix}$$

$$G'_{\{2\}} : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C} \to M_{2,2},$$
$$(y, z, w, a_1) \mapsto \begin{pmatrix} z - a_1 y \\ w - a_1 z^2 \end{pmatrix}$$

ou seja

$$\begin{aligned} Tjur_{\{1\}}(Y) &= v(y - a_2 z,\ z^2 - a_2 w) \subset \mathbb{C}^4 \\ &= v(z^2 - a_2 w) \subset \mathbb{C}^3 \textit{consideramos } y = a_2 z \\ &= v(z^2 - xw),\ \textit{fizemos } x = a_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Tjur_{\{2\}}(Y) &= v(z - a_1 y,\ w - a_1 z^2) \subset \mathbb{C}^4 \\ &= v(z - a_1 y) \subset \mathbb{C}^3 \textit{consideramos } w = a_1 z^2 \\ &= v(z - xy),\ \textit{fizemos } x = a_1. \end{aligned}$$

Observe que $(Tjur_{\{1\}}(Y))_{sing} = \{(0,0,0)\}$ *e* $(Tjur_{\{2\}}(Y))_{sing} = \emptyset$ *pois,*

$$J(z^2 - xw) = \begin{pmatrix} -w & 2z & -x \end{pmatrix}; \qquad J(z - xy) = \begin{pmatrix} -y & -x & 1 \end{pmatrix}$$

Considere agora $Z = Tjur_{\{1\}}(Y) = v(z^2 - xw)$.

Seja

$$H : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C} \to M_{2,2},$$
$$(x, z, w) \mapsto \begin{pmatrix} z & x \\ w & z \end{pmatrix}$$

logo $H^{-1}(M^2_{2,2}) = Z$, $dim(Z) = 2$ *e* Z *é singularidade determinantal.*

Daí como $dim(Z^1) = 0 < 3 - 2(2 - 2 + 1)$, *e* Z *é* $EIDS$, *temos que*

$$Tjur_I(Z) = \widetilde{Tjur}_I(Z) = (H'_I)^{-1}(M^1_{2,1}),$$

para $I = \{1\},\ \{2\}$, *sendo*

$$\begin{aligned} H'_{\{1\}} &: \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C} \to M_{2,1} \\ (x, z, w) &\mapsto \begin{pmatrix} x - a_2 z \\ z - a_2 w \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H'_{\{2\}} &: \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C} \to M_{2,1}. \\ (x, z, w, a_1) &\mapsto \begin{pmatrix} z - x a_1 \\ w - a_1 z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} Tjur_{\{1\}}(z) &= v(x - a_2 z,\ z - a_2 w) \subset \mathbb{C}^4 \\ &= v(z - a_2 w) \subset \mathbb{C}^3 \mathit{consideramos}\ x = a_2 z \\ &= v(z - yw),\ \mathit{fizemos}\ y = a_2. \\ Tjur_{\{2\}}(Z) &= v(z - a_1 x,\ w - a_1 z) \subset \mathbb{C}^4 \\ &= v(z - a_1 x) \subset \mathbb{C}^3 \mathit{consideramos}\ w = a_1 z \\ &= v(z - yx),\ \mathit{fizemos}\ y = a_1. \end{aligned}$$

Logo $(Tjur_{\{1\}}(Z))_{sing} = \emptyset$ *e* $(Tjur_{\{2\}}(Z))_{sing} = \emptyset$ *pois,*

$$J(z - yw) = \begin{pmatrix} -w & 1 & -y \end{pmatrix}; \qquad J(z - yx) = \begin{pmatrix} -y & -x & 1 \end{pmatrix}.$$

Desta maneira resolvemos a singularidade.

No próximo exemplo, utilizaremos a transformada de Tjurina para resolver uma singularidade do tipo E_7.

Exemplo 6.3. *Seja* $A = v(y^2 + x(x^2 + z^2))$, *então* $dim(A) = 2$, $A_{sing} = \{(0,0,0)\}$. *Como anteriormente vamos utilizar a proposição 5.3. Note que*

$$A = F^{-1}(M^2_{2,2}),$$

sendo

$$\begin{aligned} F &: \mathbb{C}^3 \to M_{2,2} \\ (x, y, z) &\to \begin{pmatrix} y & x^2 + z^3 \\ -x & y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Afirmamos que $dim(A^1) = 0 < 3 - 2(2 - 2 + 1)$ *e que* A *é* $EIDS$, *portanto*

$$Tjur_I(A) = \widetilde{Tjur}_I(A) = (F_I')^{-1}(M_{2,2}^2),$$

para todo $I = \{1\},\ \{2\}$, *sendo*

$$\begin{aligned} F_{\{1\}}' &: \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C} \to M_{2,2} \\ (x,y,z,a_2) &\to \begin{pmatrix} x^2+z^3-a_2y \\ y+a_2x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{\{2\}}' &: \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C} \to M_{2,2}. \\ (x,y,z,a_1) &\to \begin{pmatrix} y-a_1(x^2+z^3) \\ -x-a_1y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} Tjur_1(A) &= v(x^2+z^3-a_2y,\ y+a_2x) \\ &= v(x^2+z^3+w^2x) \text{ fizemos } \ y=-a_2x \text{ e } a_2=w. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Tjur_2(A) &= v(y-a_1(x^2+z^3),\ -x-a_1y) \\ &= v(x+w^2(x^2+z^2)) \text{ fizemos } \ x=-a_1y \text{ e } a_1=w. \end{aligned}$$

Como

$$J(x^2+z^3+w^2x) = \begin{pmatrix} 2x+w^2 & 3z^2 & 2wx \end{pmatrix}$$

e

$$J(x+w^2(x^2+z^2)) = \begin{pmatrix} 1+2xw^2 & 2zw^2 & 2w(x^2+z^2) \end{pmatrix}$$

segue que $(Tjur_{\{1\}}(A))_{sing}) = \{(0,0,0)\}$ *e* $(Tjur_2(A))_{sing} = \emptyset$.

Considere $B = Tjur_{\{A\}}$, *então* $B = G^{-1}(M_{2,2}^2)$, *sendo*

$$\begin{aligned} G &: \mathbb{C}^3 \to M_{2,2} \\ (x,z,w) &\mapsto \begin{pmatrix} x & z^2 \\ -z & x+w^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Afirmamos que $dim(B) = 2$, $dim(B^{-1}) = 0 < 3-2(2-2+1)$, *e* B *é* $EIDS$, *então pela proposição 5.3 temos*

$$Tjur_I(B) = \widetilde{Tjur}_I(B) = (G_I')^{-1}(M_{2,1}^1)$$

para $I = \{1\},\ \{2\}$, *sendo*

$$\begin{aligned} G'_{\{1\}} &: \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C} \to M_{2,2}, \\ (x,z,w,a_2) &\mapsto \begin{pmatrix} z^2 - a_2 x \\ x + w^2 + a_2 z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G'_{\{2\}} &: \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C} \to M_{2,2}, \\ (x,z,w,a_1) &\mapsto \begin{pmatrix} x - a_1 z^2 \\ -z - a_1(x + w^2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} Tjur_1(B) &= v(z^2 - a_2 x,\ x + w^2 + a_2 z) \\ &= v(z^2 + yw^2 + y^2 z) \text{ fizemos } \ x = -w^2 - a_2 z \text{ e } a_2 = y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Tjur_2(A) &= v(x - a_1 z^2,\ -z - a_1(x + w^2)) \\ &= v(-z - y(yz^2 + w^2)) \text{ fizemos } \ x = a_1 z^2 \text{ e } a_1 = y. \end{aligned}$$

e $(Tjur_{\{1\}}(B))_{sing} = \{(0,0,0)\}$ *e* $(Tjur_{\{2\}}(B))_{sing} = \emptyset$, *pois*

$$J(z^2 + yw^2 + y^2 z) = \begin{pmatrix} w^2 + 2yz & 2z + y^2 & 2yw \end{pmatrix}$$

e

$$J(-z - y(yz^2 + w^2)) = \begin{pmatrix} 2yz^2 + w^2 & 1 + 2zy^2 & 2yw \end{pmatrix}$$

Seja então $C = Tjur_{\{1\}}(B) = H^{-1}(M^2_{2,2})$, *com*

$$\begin{aligned} H &: \mathbb{C}^3 \to M_{2,2} \\ (y,z,w) &\mapsto \begin{pmatrix} y & z \\ -z & w^2 + zy \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Note que $dim(C) = 2$ *e* $dim(B^{-1}) = 0 < 3 - 2(2 - 2 + 1)$ *e além disso, afirmamos que* C *é EIDS, então*

$$Tjur_I(C) = \widetilde{Tjur}_I(C) = H'^{-1}(M^1_{2,1}),$$

com $I = \{1\},\ I = \{2\}$, *sendo*

$$\begin{aligned} H'_{\{1\}} &: \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C} \to M_{2,1}, \\ (x,z,w,a_2) &\mapsto \begin{pmatrix} z - ya_2 \\ w^2 + zy + a_2 z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H'_{\{2\}} &: \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C} \to M_{2,1}, \\ (x, z, w, a_1) &\mapsto \begin{pmatrix} y - a_1 z \\ -z - a_1(w^2 + zy) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} Tjur_{\{1\}}(C) &= v(z - ya_2,\ w^2 + zy + a_2 z) \\ &= v(yx^2 + y^2x + w^2)\ fizemos\ z = ya_2\ e\ a_2 = x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Tjur_{\{2\}}(C) &= v(y - a_1 z,\ -z - a_1(w^2 + zy)) \\ &= v(-z - x(w^2 + xz^2))\ fizemos\ y = a_1 z\ e\ a_1 = x, \end{aligned}$$

de onde vem que $(Tjur_{\{1\}}(C))_{sing} = \{(0,0,0)\}$ *e* $(Tjur_{\{2\}}(C))_{sing} = \emptyset$, *pois*

$$J(yx^2 + y^2x + w^2) = \begin{pmatrix} 2xy + y^2 & x^2 + 2yx & 2w \end{pmatrix},$$

e

$$J(-z - x(w^2 + xz^2) = \begin{pmatrix} -w^2 - 2xz^2 & -1 + 2zx^2 & -2wx \end{pmatrix}.$$

Trabalharemos então com $D = Tjur_{\{1\}}(C) = K^{-1}(M^2_{2,2})$, *sendo*

$$\begin{aligned} K &: \mathbb{C}^3 \to M_{2,2} \\ (x, y, w) &\mapsto \begin{pmatrix} xy & w \\ -w & x + y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como $dim(D) = 2$ *e* $dim(D^{-1}) = 0 < 3 - 2(2 - 2 + 1)$ *e* D *é* $EIDS$, *então*

$$Tjur_I(D) = \widetilde{Tjur}_I(D) = (K'_I)^{-1}(M^1_{2,1}),$$

com $I = \{1\},\ I = \{2\}$, *sendo*

$$\begin{aligned} K'_{\{1\}} &: \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C} \to M_{2,1}, \\ (x, z, w, a_2) &\mapsto \begin{pmatrix} w - a_2 xy \\ x + y + a_2 w \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K'_{\{2\}} &: \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C} \to M_{2,1}, \\ (x, z, w, a_1) &\mapsto \begin{pmatrix} xy - a_1 w \\ -w - a_1(x + y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} Tjur_{\{1\}}(D) &= v(w - a_2xy,\ x + y + a_2w) \\ &= v(x + y + z^2xy)\ fizemos\ w = a_2xy\ e\ a_2 = z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Tjur_{\{2\}}(D) &= v(xy - a_1w, -w - a_1(x + y)) \\ &= v(xy + z^2(x + y))\ fizemos\ a_1w = xy\ e\ a_1 = z, \end{aligned}$$

de onde vem que $(Tjur_{\{1\}})_{sing} = \emptyset$ *e* $(Tjur_{\{2\}})_{sing} = \{(0,0,0)\}$, *pois*

$$J(x + y + z^2xy) = \begin{pmatrix} 1 + z^2y & 1 + z^2x & 2xyz \end{pmatrix},$$

e

$$J(xy + z^2(x + y)) = \begin{pmatrix} y + z^2 & x + z^2 & 2z(x + y) \end{pmatrix}.$$

Seja $E = Tjur_{\{1\}}(D) = L^{-1}(M^2_{2,2})$, *sendo*

$$\begin{aligned} L : \mathbb{C}^3 &\to M_{2,2} \\ (x, y, z) &\mapsto \begin{pmatrix} x & z(x + y) \\ -z & y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Note que $dim(E) = 2$ *e* $dim(E^{-1}) = 0 < 3 - 2(2 - 2 + 1)$ *e* E *é* $EIDS$, *então*

$$Tjur_I(E) = \widetilde{Tjur}_I(E) = (L'_I)^{-1}(M^1_{2,1}),$$

com $I = \{1\},\ I = \{2\}$, *sendo*

$$\begin{aligned} L'_{\{1\}} : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C} &\to M_{2,1}, \\ (x, y, z, a_2) &\mapsto \begin{pmatrix} z(x + y) - a_2x \\ y + a_2z \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L'_{\{2\}} : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C} &\to M_{2,1}, \\ (x, y, z, a_1) &\mapsto \begin{pmatrix} x - a_1z(x + y) \\ -z - a_1y \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} Tjur_{\{1\}}(E) &= v(z(x + y) - a_2x,\ y + a_2z) \\ &= v(xz - wz^2 - wx)\ fizemos\ y = -a_2z\ e\ a_2 = w, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Tjur_{\{2\}}(E) &= v(x - a_1 z(x+y),\ -z - a_1 y) \\ &= v(x + w^2 y(x+y))\ fizemos\ z = -a_1 y\ e\ a_1 = w, \end{aligned}$$

de onde vem que $(Tjur_{\{1\}}(E))_{sing} = \{(0,0,0)\}$ *e* $(Tjur_{\{2\}}(E))_{sing} = \emptyset$, *pois*

$$J(x + y + z^2 xy) = \begin{pmatrix} z - w & x - 2wz & -z^2 - x \end{pmatrix},$$

e

$$J(x + w^2 y(x+y)) = \begin{pmatrix} 1 + w^2 y & w^2 x + 2w^2 y & 2wyx + 2wy^2 \end{pmatrix}.$$

Seja $F = Tjur_{\{1\}}(E) = N^{-1}(M^2_{2,2})$, *sendo*

$$\begin{aligned} N : \mathbb{C}^3 &\to M_{2,2}, \\ (x,z,w) &\mapsto \begin{pmatrix} z & x \\ w & x - wz \end{pmatrix} \end{aligned}$$

como $dim(F) = 2$ *e* $dim(F^1) = 0 < 3 - 2(2-2+1)$ *e* E *é* $EIDS$, *então*

$$Tjur_I(F) = \widetilde{Tjur}_I(F) = (N'_I)^{-1}(M^1_{2,1}),$$

com $I = \{1\},\ I = \{2\}$, *sendo*

$$\begin{aligned} N'_{\{1\}} : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C} &\to M_{2,1}, \\ (x,y,z,a_2) &\mapsto \begin{pmatrix} x - a_2 z \\ x - wz - a_2 w \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L'_{\{2\}} : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C} &\to M_{2,1}, \\ (x,y,z,a_1) &\mapsto \begin{pmatrix} z - a_1 x \\ w - a_1(x - wz) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} Tjur_{\{1\}}(F) &= v(x - a_2 z,\ x - wz - a_2 w) \\ &= v(-wz - y(-z + w))\ fizemos\ x = a_2 z\ e\ a_2 = y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Tjur_{\{2\}}(F) &= v(z - a_1 x, w - a_1(x - wz)) \\ &= v(w - yx + y^2 wx)\ fizemos\ z = a_1 x\ e\ a_1 = y, \end{aligned}$$

de onde vem que $(Tjur_{\{1\}}(F))_{sing} = \{(0,0,0)\}$ *e* $(Tjur_{\{2\}}(F))_{sing} = \emptyset$, *pois*

$$J(-wz - y(-z+w)) = \begin{pmatrix} z-w & y-w & -z-y \end{pmatrix},$$

e

$$J(w - yx + y^2wx) = \begin{pmatrix} -y+y^2w & -x+2ywx & 1+y^2x \end{pmatrix}.$$

Seja $G = Tjur_{\{1\}}(F) = P^{-1}(M_{2,2}^2)$, *sendo*

$$\begin{aligned} P : \mathbb{C}^3 &\to M_{2,2}, \\ (y,z,w) &\mapsto \begin{pmatrix} -y & w \\ z & w-z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

como $dim(G) = 2$ *e* $dim(G^1) = 0 < 3 - 2(2-2+1)$ *e* G *é* $EIDS$, *então*

$$Tjur_I(G) = \widetilde{Tjur}_I(G) = (P_I')^{-1}(M_{2,1}^1),$$

com $I = \{1\},\ I = \{2\}$, *sendo*

$$\begin{aligned} P_{\{1\}}' : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C} &\to M_{2,1}, \\ (x,y,z,a_2) &\mapsto \begin{pmatrix} w - a_2y \\ -z + w - a_2z \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{\{2\}}' : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C} &\to M_{2,1}, \\ (x,y,z,a_1) &\mapsto \begin{pmatrix} y - a_1w \\ z - a_1(-z+w) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} Tjur_{\{1\}}(G) &= v(w - a_2y,\ -z + w - a_2z) \\ &= v(-z + x(y-z))\ fizemos\ w = a_2y\ e\ a_2 = x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Tjur_{\{2\}}(G) &= v(y - a_1w,\ z - a_1(-z+w)) \\ &= v(z + xz - y)\ fizemos\ y = a_1w\ e\ a_2 = x, \end{aligned}$$

de onde vem que $(Tjur_{\{1\}}(G))_{sing} = \emptyset$ *e* $(Tjur_{\{2\}}(G))_{sing} = \emptyset$, *pois*

$$J(-z + x(y-z)) = \begin{pmatrix} y-z & x & -1-x \end{pmatrix},$$

e

$$J(z + xz - y) = \begin{pmatrix} z & -1 & -x \end{pmatrix}.$$

Dessa maneira resolvemos a singularidade E_7.

Apêndice A

Contas no Singular

Apresentamos as contas que foram feitas no software singular.

Exemplo 2.5:

```
> ring r=0, (x,y,z,w),dp;
> matrix F[2][3]=x,y,z,y,z,w;
> ideal i=minor(F,2);
> dim(i);
2
```

Exemplo 2.7

```
> ring r=0, (x,y,z,w), dp;
> matrix F[2][3]=x,y,z,y,z,w;
> ideal i=minor(F,2);
> i;
i[1]=-z2+yw
i[2]=-yz+xw
i[3]=y2-xz
> dim(i);
2
> matrix J=jacob(i);
> print(J);
0, w, -2z,y,
w, -z,-y, x,
-z,2y,-x, 0
> ideal j=minor(J,2);
> ideal s=i+j;
> s;
s[1]=-z2+yw
s[2]=-yz+xw
```

```
s[3]=y2-xz
s[4]=-x2
s[5]=2y2+xz
s[6]=-yz-xw
s[7]=-xy
s[8]=4yz-xw
s[9]=-2z2
s[10]=z2-2yw
s[11]=-2y2
s[12]=-zw
s[13]=-xz
s[14]=-yz
s[15]=2z2+yw
s[16]=y2-2xz
s[17]=-w2
s[18]=yw
> std(s);
s[1]=w2
s[2]=zw
s[3]=yw
s[4]=xw
s[5]=z2
s[6]=yz
s[7]=xz
s[8]=y2
s[9]=xy
s[10]=x2
```

Exemplo 2.9

```
> ring r=0, (x,y), dp;
> matrix F[2][2]=2x,27y3-27xy,y3-xy,2x2;
> ideal i=minor (F,2);
> dim(i);
1
> matrix J= jacob(i);
> ideal j=minor(J,1);
> ideal s=i+j;
> std(s);
s[1]=9y4-9xy2+2x2
s[2]=3xy3-x2y
```

```
s[3]=3x2y2-x3
```

Exemplo 2.13

```
> ring r=0, (x,y,z,w),dp;
> matrix G[2][2]=x,y,z,w;
> ideal i= minor(G,2);
> dim(i);
3
```

Exemplo 4.11

```
> ring r=0, (x,y,z,w),dp;
> matrix F[2][2]=w3,y,x,z,w,y3;
> matrix F[2][3]=w3,y,x,z,w,y3;
// ** redefining F **
> ideal i= minor(F,2);
> dim(i);
2
> matrix J=jacob(i);
> ideal s=i+minor(J,2);
> std(s);
s[1]=zw
s[2]=yw
s[3]=xw
s[4]=z2
s[5]=yz
s[6]=xz
s[7]=xy
s[8]=x2
s[9]=w4
s[10]=y4

> ring r=0, (x,y,z,w,a,b),dp;
> matrix F[3][3]=1,a,b,w3,y,x,z,w,y3;
> ideal i=minor(F,2);
> dim(std(i));
2

> matrix F[3][3]=a,1,b,w3,y,x,z,w,y3;
// ** redefining F **
> ideal i=minor(F,2);
// ** redefining i **
```

```
> dim(std(i));
2

> matrix F[3][3]=a,b,1,w3,y,x,z,w,y3;
// ** redefining F **
> ideal i=minor(F,2);
// ** redefining i **
> dim(std(i));
>2

> matrix F[3][3]=a,1,b,w3,y,x,z,w,y3;
// ** redefining F **
> ideal i=minor(F,2);
// ** redefining i **
> LIB"primdec.lib";
> list l=primdecGTZ(i);
> l;
i[1]:
i[1]:
i[1]=w8-a3b
i[2]=-w3+ya
i[3]=yw5-a2b
i[4]=y2w2-ab
i[5]=y3-wb
i[6]=-wa+z
i[7]=-yb+x
i[2]:
i[1]=w8-a3b
i[2]=-w3+ya
i[3]=yw5-a2b
i[4]=y2w2-ab
i[5]=y3-wb
i[6]=-wa+z
i[7]=-yb+x
i[2]:
i[1]:
i[1]=w
i[2]=y
i[3]=-wa+z
i[4]=-yb+x
```

i[2]:

i[1]=w

i[2]=y

i[3]=-wa+z

i[4]=-yb+x

Referências Bibliográficas

[1] Arbarello, E.; Cornalba, M.; Griffiths P. A.; Harris, J.;*Geometry of Algebraic Curves*, Nova York: Springer - Verlag, 1985. 386 p.

[2] Boothby, W. M., *An Introduction to Differenciable Manifolds and Riemannian Geometry*, segunda edição revisada, Londres: Academic Press, 2003.

[3] Brasselet, J. P.; Seade, J; Suwa, T.;*Vector Fields on Singular Varieties*, volume 1987 of Lecture Notes in Mathematics, Berlim: Springer-Velarg, 2009.

[4] Buchweitz, R. O.; Greuel, G. M.;*The Milnor number and deformations of complex curve singularities*, Invent. Math. **58** (1980), No. 3, 241–248.

[5] Damon, J.; Pike, B.; *Solvable groups, free divisors and nonisolated matrix singularities II: Vanishing topology*, Geom. Topol. **18** (2014), No. 2, 911–962.

[6] Fruehbis-Krueguer A.;Zach M *On the Vanishing Topology of Isolated Cohen-Macaulay Codimension 2 Singularities*, arXiv:1501.01915.

[7] Hamm, H. A.;*Lokale topologische Eigenschaften komplexer Räume*, Math. Ann. **191** (1971), 235–252.

[8] Hartshorne R. *Algebraic Geometry*, New York: Springer-Velarg, 1977.

[9] Henrique, D. A., *A Obstrução de Euler de uma função*, São Carlos,ICMC/USP,2013

[10] de Jong, T.; Pfister, G.*Local Analytic Geometry. Basic Theory and Applications*; Advanced Lectures in Mathematics. Friedr.Vieeweg Sohn, Braunschweig, 2000.

[11] Lee, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds* 2ª ed. New York: Springer 2003

[12] Lima, E.L., *Variedades diferenciáveis* , Publicações matemáticas, IMPA 2007.

[13] Milnor, J. W,; Stasheff, J. D. *Characteristic Classes*, New Jersey: Princeton University Press and University of Tokyo, 1974.

[14] Milnor J.; *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, Annals of Math. Studies,Princeton University Press (1968).

[15] Munkres, J. R.,*Topology - A First Course*, Prentice-Hall Inc. , New Jersey, 1975

[16] Novik, S. P.; Rokhlin, V. A. *Topology II, Homotopy and Homology. Classical Manifolds*, Berlin: Springer-Verlag,2000.

[17] Nuño-Ballesteros, J. J.; Oréfice-Okamoto, B.; Tomazella, J. N.;*Equisingularity of families of isolated determinantal singularities*, prepint.

[18] Nuño-Ballesteros, J. J.; Oréfice-Okamoto, B.; Tomazella, J. N.;*The vanishing Euler characteristic of an isolated determinantal singularity*, Israel J. Math. **197** (2013), No. 1, 475–495.

[19] Pedersen, H. M. *On Tjurina Transform and Resolution of Determinantal Singularities*, arXiv:1604.06029v2.

[20] Soares Ruas, M. A.; Da Silva Pereira, M.; *Codimension two determinantal varieties with isolated singularities.* Math. Scand. 115 (2014), no. 2, 161–172.

[21] Zach, M. *Vanishing cycles of smoothable isolated Cohen-Macaulay codimension 2 singuarities of type 2*, preprint