DETERMINAÇÃO DO POLINÔMIO CARACTERÍSTICO: MÉTODOS DE KRYLOV E LEVERRIER

MARIA CRISTINA CORDEIRO SOUSA[1], **ALVARO JULIO YUCRA HANCCO**[2]

Universidade Federal de São Carlos, Departamento de Matemática, SP, Brasil

cristinacordeiro18.to@uft.edu.br[1], alvaroyucra@uft.edu.br[2]

Resumo

A obtenção do polinômio característico, importante em diversos problemas na Álgebra Linear, depende diretamente do cálculo do determinante de matrizes $n \times n$. Quando lidamos com matrizes quadradas de ordem no máximo 3, existem métodos bem conhecidos e de fácil aplicação. Todavia, a complexidade se evidencia para o cálculo do determinante de matrizes quadradas de ordem maior que 3, e destacamos o famoso Teorema de Laplace que, apesar de possuir inúmeras operações, pode ser útil para essa situação. A fim de tentar diminuir essa quantidade de operações, o objetivo principal deste trabalho é apresentar dois métodos para se determinar o polinômio característico de uma matriz e mostrar o quanto eles são eficazes no que diz respeito ao número de operações utilizadas para se chegar a tal fim.

PALAVRAS-CHAVE: Polinômio Característico. Método de Krylov. Método de Leverrier.

Introdução

Vamos determinar o polinômio característico de qualquer matriz quadrada de ordem n. Para isso, considere o importante resultado a seguir cuja demonstração encontra-se em [1].

Lema 1. (*Somas de Newton*) Seja $p(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ um polinômio de grau $n \in \{1, 2, \cdots\}$. Sejam também $x_1, x_2, \cdots, x_n$ suas n raízes complexas e $s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$, com $k = 1, 2, \cdots, n$. Então, para $k = 1, 2, \cdots, n$, vale

$$s_k + a_1s_{k-1} + a_2s_{k-2} + \cdots + a_{k-1}s_1 = -ka_k.$$

Exemplo 2. Consideremos o polinômio $p(x) = x^5+3x^4-5x^3-15x^2+4x+12$. É possível mostrar que suas raízes são $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$ e $x_5 = -3$. Na notação do Lema 1, temos que $s_1 = 2-2+1-1-3 = -3$, $s_2 = 2^2+(-2)^2+1^2+(-1)^2+(-3)^2 = 19$. Temos também que $s_3 = -27$, $s_4 = 115$ e $s_5 = -243$. Então, com $a_1 = 3$, $a_2 = -5$, $a_3 = -15$, $a_4 = 4$ e $a_5 = 12$, segue que

$$s_5 + a_1s_4 + a_2s_3 + a_3s_2 + a_4s_1 = -60 = -5 \cdot 12 = -5a_5,$$

como o Lema 1 garante. ■

O polinômio característico de uma matriz quadrada A é definido como sendo $p(x) = det(xI - A)$, onde I é a matriz identidade da mesma ordem que A. Para facilitar o cálculo desse determinante e descobrirmos seus coeficientes, apresentaremos os métodos de Leverrier e de Krylov.

Método de Leverrier

Suponha que queiramos determinar os coeficientes do polinômio $p(x) = det(xI - A) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, em que A é uma matriz de ordem n. Sejam $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ as raízes de p (e, portanto, autovalores de A). Na mesma notação do Lema 1, segue que

$$s_k + a_1s_{k-1} + a_2s_{k-2} + \cdots + a_{k-1}s_1 = -ka_k$$

para todo $k = 1, 2, \cdots, n$. Desta forma, para $k = 1$, temos $a_1 = -s_1$; para $k = 2$, $s_2 + a_1s_1 = -2a_2$, isto é, $a_2 = -\left(\frac{s_2 + a_1s_1}{2}\right)$. Claramente, vale que

$$a_n = -\left(\frac{s_n + a_1s_{n-1} + a_{n-1}s_1}{n}\right). \quad (1)$$

Ora, sabendo que existe uma matriz inversível Q tal que

$$B := \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = QAQ^{-1},$$

segue indutivamente que, para $k = 1, 2, \cdots, n$, $B^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix} = QA^kQ^{-1}$. Assim, como a função traço satisfaz $tr(CD) = tr(DC)$ para quaisquer matrizes quadradas C e D, temos que

$$s_k = \lambda_1^k + \cdots + \lambda_n^k = tr(B^k) = tr(QA^kQ^{-1}) = tr(A^kQ^{-1}Q) = tr(A^k).$$

Exemplo 3. Vamos determinar o polinômio característico da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Mostra-se que $s_1 = tr(A) = 4$, $s_2 = tr(A^2) = 60$, $s_3 = tr(A^3) = 352$ e $s_4 = tr(A^4) = 2724$. Logo, de (1), tem-se $a_1 = -4$, $a_2 = -22$, $a_3 = -8$ e $a_4 = 9$, o que conclui que o polinômio procurado é $p(x) = x^4 - 4x^3 - 22x^2 - 8x + 9$. ■

Método de Krylov

Sob as notações anteriores, o Teorema de Cayley-Hamilton garante que o polinômio $p(x) = det(xI - A) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ se anula na matriz A, isto é, $A^n + a_1A^{n-1} + \cdots + a_nI = \mathbf{0}$. Assim, para qualquer vetor coluna não nulo y_0, temos que $A^ny_0 + a_1A^{n-1}y_0 + \cdots + a_ny_0 = \mathbf{0}$. Chamando $y_k = A^ky_0$, segue que $y_n + a_1y_{n-1} + \cdots + a_ny_0 = \mathbf{0}$, que é um sistema linear simples da forma $BX = C$, onde B é a matriz conhecida cujas colunas são os y_k, X é a matriz incógnita formada pelos coeficientes a_i e $C = -y_n$. A partir daqui, basta escolher um método (dentre tantos) para resolver este sistema linear e encontrar a matriz X.

Exemplo 4. Vamos encontrar o polinômio da matriz A do Exemplo 3 pelo método de Krylov. Primeiramente, escolhemos $y_0 = [1\ 0\ 0\ 0]^t$. Com essa escolha, o sistema linear encontrado é

$$\begin{bmatrix} 73 & 5 & 1 & 1 \\ 155 & 10 & 5 & 0 \\ 119 & 19 & 2 & 0 \\ 90 & 30 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 401 \\ 880 \\ 910 \\ 1020 \end{bmatrix}$$

cuja solução é $a_1 = -4$, $a_2 = -22$, $a_3 = -8$ e $a_4 = 9$, assim como encontramos no Exemplo 3. ■

Comparações

Os métodos de Leverrier e Krylov são eficazes quando lidamos com ordens maiores que 5. No que se trata de métodos numéricos, feitos por máquinas, sua eficácia se torna ainda mais notória. Abaixo, apresentamos uma tabela comparativa que deixa isso claro.

Método	Quantidade total de operações aritméticas			
	Ordem 3	Ordem 5	Ordem 7	Ordem 9
Direto	32	558	23.770	1.712.158
Leverrier	68	744	3.324	9.872
Krylov	105	669	2.309	5.897

Fonte: [2]

Referências

[1] Kurosh, A. G, *Curso de algebra Superior*, Editorial Mir, 1977.

[2] Lenimar, N. A., *Os métodos de Krylov, de Leverrier e dos coeficientes indeterminados para o cálculo do polinômio característico de uma matriz*, UFPB, João Pessoa, 2014.