# PROCESSOS ITERATIVOS PARA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

**NELLY ALMEIDA DA SILVA, JOSÉ CARLOS DE OLIVEIRA JUNIOR**[2]

Universidade Federal de São Carlos, Departamento de Matemática, SP, Brasil

nellyalmeida@.uft.edu.br[1], jc.oliveira@uft.edu.br[2]

## Resumo

Muitos fenômenos naturais (na Física, na Biologia e em Probabilidade, por exemplo) podem ser modelados, ou aproximados, por meio de sistemas lineares. Encontrar soluções, pois, de tais sistemas torna-se relevante para melhor compreender o fenômeno estudado. Na prática, porém, nem sempre isso é possível devido ao grande número de variáveis envolvidas e, portanto, devemos recorrer a processos computacionais para obtermos sucesso na resolução. Existem dois tipos de processos, a saber, o *processo exato* e o *processo iterativo*. Este consiste em obter uma sequência de soluções aproximadas de um problema de tal forma que cada termo desta sequência é obtido a partir dos termos anteriores por uma regra explícita e que, em um determinado sentido, esses termos se aproximam da solução correta do problema. Neste trabalho, destacamos esse processo e fazemos um estudo qualitativo sobre a resolução de sistemas lineares, aplicando-o e mostrando a relação que existe entre ele e a Álgebra Linear.

**PALAVRAS-CHAVE:** Sistemas Lineares. Processos iterativos. Aproximação.

## Introdução

O objetivo principal desta pesquisa é resolver o sistema linear na forma $AX = B$, em que $A$ e $B$ são matrizes e $X$ é a matriz incógnita, utilizando métodos iterativos.

**Definição 1.** Considere a sequência de matrizes de ordem $r \times s$ dada por $A_n = (a_{ij}^n)$. Dizemos que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para (ou se aproxima de, ou ainda, tem como limite) a matriz $A = (a_{ij})$ de mesma ordem se, para todo $i$ e todo $j$,

$$\lim_{n\to\infty} a_{ij}^n = a_{ij}.$$

Neste caso, vamos usar a notação $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ ou $A_n \to A$.

Um exemplo que vamos lidar neste trabalho é quando a sequência considerada é uma sequência de matrizes colunas na forma $X_n = \begin{bmatrix} a_1^n \\ a_2^n \\ \vdots \\ a_k^n \end{bmatrix}$.

**Definição 2.** Nas mesmas notações da Definição 1., dizemos que a série de matrizes

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n + A_{n+1} + \cdots$$

tem como soma a matriz $S$, e escrevemos $S = A_1 + A_2 + \cdots$, se a sequência $B_n = A_1 + \cdots + A_n$ tem como limite a matriz $S$, isto é, se $\lim_{n\to\infty}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = S$.

Autovalores, na Álgebra linear, desenvolvem um papel importante para a compreensão de certos problemas. Vamos, agora, relacionar esse conceito com as definições 1 e 2 para alcançarmos o objetivo do trabalho. Lembramos que, se $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ são os autovalores (mesmo que complexos) de uma matriz $A$, então existe uma matriz inversível $Q$ tal que $A = Q \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{bmatrix} Q^{-1}$. Neste caso, dizemos que $A$ é diagonalizável. Destacamos também que, da Definição 1, segue que, se $P_1$ é uma matriz constante, então $\lim_{n\to\infty}(PA_n) = P \lim_{n\to\infty} A_n$ quando as operações são possíveis.

## Resultados

O primeiro resultado, mostrado a seguir, garante a equivalência entre as potências de uma matriz fixa $A$ convergir à matriz nula e o módulo dos autovalores de $A$ ser menor que 1. Sua demonstração pode ser encontrada em [1] página 335. Essa propriedade se assemelha à propriedade dos números reais que diz que $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ só acontece quando $|a| < 1$.

**Teorema 3.** Seja $A$ uma matriz quadrada de ordem $k \times k$. Então, $\lim_{n\to\infty} A^n = \mathbf{0}$ (matriz nula de ordem $k \times k$) se, e somente se, os autovalores de $A$ têm módulo menor que 1.

Outro resultado importante nessa direção é o seguinte teorema, que usaremos para garantir a unicidade da solução do sistema $AX = B$.

**Teorema 4.** Seja $A$ uma matriz quadrada de ordem $k \times k$. Então, $\lim_{n\to\infty} A^n = \mathbf{0}$ se, e somente se, $I - A$ é uma matriz inversível e $I + A + \cdots + A^n + A^{n+1} + \cdots = (I - A)^{-1}$, onde $I$ é a matriz identidade de ordem $k \times k$.

Consideremos o sistema $AX = B$, no qual queremos determinar suas soluções $X$. Escrevemos este sistema na forma equivalente $X = (I - A)X + B = MX + N$, onde $M = I - A$ e $N = B$. Assim, determinar soluções de $AX = B$ é equivalente a determinar soluções de $X = MX + N$. Vamos, então, estudar este último sistema e colocar hipóteses suficientes para que exista solução para ele (e, portanto, para o primeiro). Começamos escolhendo aleatoriamente uma matriz coluna qualquer $X_1$ e definindo, iterativamente, a sequência $X_{n+1} = MX_n + N$. O seguinte resultado fornece condições suficientes para que a sequência $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convirja.

**Teorema 5.** Se um sistema linear é dado na forma $X = MX + N$, onde $M$ é uma matriz quadrada tal que todos os seus autovalores possuem módulo menor que 1, então, iniciando com uma matriz coluna qualquer $X_1$, a sequência de matrizes coluna obtida pela fórmula

$$X_{n+1} = MX_n + N$$

tem como limite a matriz coluna $X$ que é solução do sistema $X = MX + N$.

**Demonstração:** É possível mostrar por indução que, para $n \geq 2$,

$$X_n = M^{n-1}X_1 + (I + M + \cdots + M^{n-2})N,$$

em que $M^0 = I$. Como, por hipótese, a matriz $M$ tem seus autovalores com módulo menor que 1, pelos Teoremas 3 e 4, segue que

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} M^{n-1}X_1 + \lim_{n\to\infty}[(I + M + \cdots + M^{n-2})N] = (I - M)^{-1}N.$$

Chamando $X = (I - M)^{-1}N$, concluímos que $X = MX + N$. ■

É possível mostrar também que, dentro das hipóteses do Teorema 5, a solução encontrada é única. Com efeito, sejam $X$ e $Y$ matrizes tais que $X = MX + N$ e $Y = MY + N$. Subtraindo a primeira equação da segunda, obtemos $Y - X = M(Y - X)$, isto é, $(I - M)(Y - X) = \mathbf{0}$. Aplicando a inversa $(I - M)^{-1}$ (que existe pelos Teoremas 3 e 4) em ambos os lados da igualdade, segue que $Y - X = \mathbf{0}$, ou seja, $Y = X$, como queríamos mostrar.

O Teorema 5 nos fornece uma maneira de mostrarmos que o sistema $X = MX + N$ possui solução que se baseia em olhar para o módulo dos autovalores da matriz $M$. Isso, entretanto, não é uma tarefa fácil em geral. A seguir, apresentamos um resultado que vem na direção de auxiliar o estudo dos autovalores de uma matriz. Sua demonstração se encontra em [1], páginas 342 e 343.

**Teorema 6.** Se $M = [b_{ij}]_{k\times k}$ é uma matriz tal que sua norma $\|M\| := \max_{1\leq i\leq k} \sum_{j=1}^{k} |b_{ij}| < 1$, então todos seus autovalores têm módulo menor que 1 e, por conseguinte, o sistema $X = MX + N$ possui solução pelo método iterativo.

**Exemplo 7.** Vamos mostrar que o sistema linear $\begin{cases} 0,3x + 0,1z - 0,1t = 6 \\ 1,4y + 0,2t = -2 \\ x/4 + y/5 + 0,5z = -0,7 \\ 0,6y + 0,2z + 0,9t = 65 \end{cases}$ possui solução. Escrevemos $X = MX + N$, em que $M = \begin{bmatrix} 0,7 & 0 & 0,1 & -0,1 \\ 0 & -0,4 & 0 & 0,2 \\ 0,25 & 0,2 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,2 & 0,1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -0,7 & 65. \end{bmatrix}^t$. Como $\|M\| := \max_{1\leq i\leq k} \sum_{j=1}^{k} |b_{ij}| < 1$, segue do Teorema 6 que o sistema considerado tem solução pelo método iterativo. ■

## Referências

[1] José Luiz Boldrini [et. al.], **Álgebra Linear**, 3ª ed., São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.