UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Equações de evolução fracionária: Existência, Unicidade, Blow-up, Estimativas $L^p - L^q$, Conservação Generalizada de Energia e Espalhamento.

LINNIKER MONTEIRO LOURENÇO

São Carlos - SP

Agosto de 2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Equações de evolução fracionária: Existência, Unicidade, Blow-up, Estimativas $L^p - L^q$, Conservação Generalizada de Energia e Espalhamento.

LINNIKER MONTEIRO LOURENÇO

Orientador: Marcelo Rempel Ebert

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

São Carlos - SP

Agosto de 2018

Resumo

Nesta tese estudamos algumas equações de evolução no sentido de Petrowsky. Quando os coeficiente são constantes obtemos estimativas $L^p - L^q$ para equações lineares e as aplicamos para obter resultados de existência, unicidade e Blow-up para um caso semilinear. Quando os coeficientes são variáveis no tempo obtemos estimativas do tipo $L^p - L^q$, estimativas de energia e espalhamento para problemas lineares.

Abstract

In this thesis we study some σ-evolution equations in the Petrowsky's sense. When the coefficients are constant we obtain $L^p - L^q$ estimates for linear equations and apply them to obtain results of existence, uniqueness and Blow-up for a semilinear model. When we have time-dependent coefficients, we obtain $L^p - L^q$ estimates, energy estimates and scattering for linear problems.

Conteúdo

Introdução. **4**

1 Equações de Evolução Lineares com Coeficientes Constantes. **8**
1.1 Representação da solução por multiplicadores . . . 8
1.2 Frequências baixas . . . 10
1.3 Frequências Altas . . . 12
1.3.1 Estimativa na Antidiagonal . . . 14
1.3.2 Estimativa na Diagonal . . . 18
1.3.3 Estimativa dentro do Triângulo. . . . 20
1.4 Optimalidade da região . . . 21
1.5 Aplicação para Equações de Evolução Lineares . . . 23

2 Existência e Unicidade para uma equação de Evolução Semilinear **28**
2.1 Problema de Cauchy Semilinear . . . 28
2.1.1 Caso $2\sigma \geq n$ . . . 29
2.1.2 Caso $2\sigma < n$. . . . 34
2.1.3 Otimalidade do $p_c(n)$. . . . 42
2.2 Discussões Complementares e Problemas em Aberto . . . 43

3 Equações de evolução invariantes por escala. **46**
3.1 Velocidade de propagação polinomial . . . 46
3.2 Invariante por Escala com termo de massa . . . 51
3.2.1 Caso $\delta = 0$. . . . 52
3.2.2 Caso $2\delta = \sigma$. . . . 65

4 Equações de Evolução com coeficientes variáveis. **77**
4.1 Velocidade de propagação com tendência decrescente . . . 77
4.2 Diagonalização . . . 79
4.3 Operador de Möller . . . 84
4.4 Potêncial efetivo e não-efetivo. . . . 86
4.4.1 Massa crescente . . . 88
4.4.2 Massa decrescente . . . 91
4.5 Espalhamento . . . 99
4.5.1 Classe de Símbolos . . . 104
4.5.2 Estados de Espalhamento . . . 107
4.5.3 Conservação Generalizada de Energia . . . 110
4.6 Invariante por escala. . . . 112
4.7 Problemas em aberto e discussões complementares. . . . 116

A Apêndice **118**

Apêndice **118**
A.1 Teoria de Funções especiais. 118
A.1.1 A função de Bessel. 118
A.1.2 Função de Weber e Hankel 119
A.1.3 Equações hipergeométricas Confluentes 120
A.1.4 Equações de onda do tipo Coulomb 121
A.2 Resultados de Análise Funcional 123
A.3 Fourier Multipliers 123
A.4 Espaços de Besov 125

Bibliografia **128**

Introdução

Nesta Tese estamos interessados em Equações de Evolução provenientes de operadores de evolução no sentido de Petrovsky, que vamos definir a seguir, veja também [22]. Considere operador

$$P = D_t^m + \sum_{j=1}^{m} A_j(t,x,D_x)D_t^{m-j} \tag{0.1}$$

onde $A_j(t,x,D_x) = \sum_{k=0}^{k=jp} A_{j,k}(t,x,D_x)$ são operadores diferenciais de ordem $p \geq 1$ e $A_{j,k}(t,x,D_x)$ são operadores parciais lineares de ordem k. O operador (0.1) é um operador de p-evolução no sentido de Petrovsky quando o símbolo principal:

$$\tau^m + \sum_{j=1}^{m} A_{j,jp}(t,x,D_x)\tau^{m-j} \tag{0.2}$$

tem m raízes reais distintas $\tau_1 = \tau_1(t,x,\xi), \tau_2 = \tau_2(t,x,\xi), \dots \tau_m = \tau_m(t,x,\xi)$ para todos os pontos (t,x) no domínio de definição dos coeficientes e todo $\xi \neq 0$. Essa definição tem importância devido ao resultado de Lax-Mizohata, o qual afirma que essa é uma condição nescessária para que o problema de Cauchy

$$Pu = f, \qquad \partial_t^j u(0,x) = u_j(x), \qquad j = 0,1,\cdots,m \tag{0.3}$$

seja bem-posto, veja [57]. O conjunto dos operadores de 1-evolução representa os operadores estritamente hiperbólicos, enquanto que os p-evolução representam generalizações do Schrödinger. A teoria de Equações de Evolução tem se desenvolvido bastante nos últimos anos, devido a sua relação com Análise Harmônica e problemas de Física Matemática.

Coeficiente Constantes

Problemas de Cauchy semilineares como, por exemplo, a equação da onda semilinear:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = |u|^p \\ u(0,x) = u_0(x), u_t(0,x) = u_1(x), \end{cases} \tag{0.4}$$

tem sido objeto de interesse frequênte na área de equações diferênciais parciais. Determinar quando se tem existência global no tempo foi um tema de ativa pesquisa nos últimos anos e estimativas para a solução da equação da onda linear tem se mostrado muito importante nesse estudo. Em [79], Strauss conjecturou que a raiz positiva $p_c(n)$ da equação:

$$(n-1)p^2 - (n+1)p - 2 = 0$$

é o expoente crítico para o problema de existêncial global, ou seja, se $p \leq p_c(n)$ o problema de Cauchy (0.4) não possui solução global no tempo para dados pequenos enquanto que se $p > p_c(n)$, o mesmo problema

possui solução global no tempo para dados suficientemente pequenos. O expoente $p_c(n)$ passou a ser conhecido como expoente de Strauss e, desde então, vários avanços foram feitos no sentido de verificar essa conjectura. Em [30] e [29] Glassey verificou a conjectura para o caso $n = 2$ quando $p < p_c(2)$ e $p > p_c(2)$; em [63], Shaeffer verificou o caso $p = p_c(n)$ para as dimensões $n = 2, 3$; John, em [40], verificou para o caso $p < p_c(3)$ e $p_c(3) < p < p_{conf}(n)$. Para $n > 3$, Sideris, em [72], provou a não existência global de soluções em $C([0,\infty), L^{\frac{2(n+1)}{n-1}}(\mathbb{R}^n))$ para dados pequenos adequados e $1 < p < p_c(n)$. A existência para $n > 3$ foi verificada por Giorgiev-Lindblad-Sogge em [27] para $p_c(n) < p < p_{conf}(n)$ melhorando um resultado anterior [50] em que os autores obtiveram solução fraca para dados radiais. Por fim, o caso $p = p_c(n)$ com $n > 3$ foi verificado independentemente por Yordanov-Zhang em [92] e Zhou Yi, em [87]. A potencia $p_{conf}(n)$ é conhecida como potência conforme e, em [49], mostra-se que pode-se obter solução global para dados pequenos desde que assumamos certa regularidade dos dados iniciais.
Espera-se que quanto melhor as estimativas relativas a parte linear mais eficientes se tornam os métodos de se obter existência global no tempo para o problema semilinear. Se considerarmos o problema de Cauchy (0.6) com $\sigma = 2$, mediante um argumento de scaling usado para equações dispersivas não lineares nós obtemos que $s_p \doteq \frac{n}{2} - \frac{4}{p-1}$ é o índice crítico no espaço de sobolev $\dot{H}^s(R^n)$, qual seja, podemos esperar que se $s \geq s_p$, o problema de Cauchy (0.6) é bem posto em $H^s(R^n)$, ao menos localmente, enquanto que é não bem-posto para $s < s_p$. Em [31] os autores obtiveram uma estimativa de tipo Strichartz para o problema linear e provaram a existência global para dados iniciais pequenos em espaços de Besov $B^s_{2,q}(R^n), s > s_p$ para o problema de Cauchy (0.6), quando $p > 1 + \frac{8}{n}$ e $n \geq 4$, e para $p > 5$ no caso $n = 3$. Recomendamos [89] para o resultado de mal-posto no caso $0 < s < s_p$.
Se olharmos para a energia $C([0,T], H^2(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0,T], L^2(\mathbb{R}^n))$, então temos que assumir $\frac{n}{2} - \frac{4}{p-1} < 2$ e disso temos uma limitação superior para p, isto é, $p < \frac{n+4}{n-4}$ para $n > 4$ (veja observação em [89]).
No primeiro capítulo discutimos técnicas para se obter estimativas $L^p - L^q$ para o problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} + (-\Delta)^\sigma u = 0\,, & t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = f(x), \qquad u_t(0,x) = g(x). \end{cases} \tag{0.5}$$

Obtemos estimativas $L^p - L^q$ e de Energia para a solução de (0.5) singulares e não-singulares, sendo necessário para esse último caso, exigir mais regularidade nos dados iniciais. Nota-se, nesses problemas uma diferença na taxa de decaimento da solução entre os casos $\sigma = 1$, $\sigma \geq 2$ e $\sigma < 2$, mas $\neq 1$. A razão disso está na restrição para o valor p em que temos as estimativas $L^p - L^q$ na linha dual, além da tese do lema de Littmann.
No segundo capítulo dessa tese usando as estimativas lineares, vamos obter existência global no tempo acima do expoente crítico $p_c(n)$, em alguns casos, para a equação:

$$\begin{cases} u_{tt} + (-\Delta)^\sigma u = |u|^p\,, & t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = 0, \ \ u_t(0,x) = g(x), \end{cases} \tag{0.6}$$

com $p > 1$ e $\sigma > 1$, onde o expoente crítico é dado por

$$p_c(n) \doteq \begin{cases} \frac{n+\sigma}{n-\sigma}, & n > \sigma; \\ \infty, & n \leq \sigma. \end{cases} \tag{0.7}$$

Uma contribuição dessa Tese foi mostrar que $p_c(n)$ é de fato o expoente crítico para qualquer inteiro $\sigma > 1$, com $\sigma < n \leq 2\sigma$, no entanto, no caso $n > 2\sigma$, nós temos em geral, um intervalo entre o resultado de não existência e o de existência, veja os Teoremas 2.1.9, 2.1.16 e 2.1.20 para mais detalhes.

Coeficiente Variáveis.

No caso em que a velocidade de propagação é dependente do tempo consideramos inicialmente

$$u_{tt} + m^2(t)(-\Delta)^\delta u = 0, \ \ u(0,x) = u_(x), \ \ u_t(0,x) = u_1(x). \tag{0.8}$$

Em [21] os autores estudaram estimativas de Energia quando a massa é integrável e $\delta = 1$. Quando $m(t) = (1+t)^\ell$ e $\ell = -\frac{2}{3}$ em [25] e [26] os autores obtiveram estimativas $L^p - L^q$ para a solução de (0.8) e mostraram certas relações com problemas de cosmologia. Nessa Tese, no caso em que $-1 < \ell < 0$ provamos estimativas de energia para o problema (0.8) usando teoria de funções especiais. Além de estimativas do tipo $L^1 - L^2$, veja os Teoremas 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3 e 4.1.2. Nesses Teoremas nota-se que o caso $\ell = -\frac{2}{3}$ divide $(-1, 0)$ em dois intervalos de modo a termos comportamentos distintos em cada um deles.
No capítulos 3 dessa tese consideramos o problema de evolução com termo de massa,

$$\begin{cases} Lu = u_{tt} + (-\Delta)^\sigma u + m(t)^2(-\triangle)^\delta u = 0\,, \quad t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = u_0(x), \ \ u_t(0,x) = u_1(x), \end{cases} \tag{0.9}$$

com $m(t) = (1+t)^{\frac{\delta}{\sigma}-1}$, ou seja, o caso invariante por escala. Quando $\sigma = 1$ e $\delta = 0$ Böhme em [5] provou estimativas de Energia e $L^p - L^q$ na linha dual. Nessa Tese provamos estimativas de energia e estimativas do tipo $L^p - L^q$ na linha dual quando $2\delta = \sigma$. Além disso, nesse mesmo caso provamos estimativas do tipo $L^1 - L^2$ quando $2\sigma > n$ que é uma condição natural para esse tipo de estimativa. Quando $\delta = 0$ e σ qualquer, provamos estimativas $L^1 - L^2$, também com a hipótese natural $2\sigma > n$. Para completude, fizemos também as estimativas na linha dual para o caso $\delta = 0$.
Para $m(t)$ mais geral, no capítulo 4, estudamos apenas estimativas de Energia e Espalhamento. Quando $\delta = 0$ em [5] é proposta essencialmente a seguinte classificação para a Energia: Quando $tm(t) \to \infty$, temos que $\|u_t(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \|\nabla u(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + m(t)\|u(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \leq C\|u_t(0,\cdot)\|_{L^2}^2 + \|u(0,\cdot)\|_{H^2}^2$, que ela passa a chamar de potêncial efetivo por essa razão, ou seja, o termo com a massa tem um influência na estimativa da Energia, uma vez que, ema geral, só podemos esperar que $\|u_t(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \|\nabla u(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + m^2(t)\|u(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \leq C\|u_t(0,\cdot)\|_{L^2}^2 + \|u(0,\cdot)\|_{H^2}^2$. Quando $tm(t) \to 0$ e $\int_0^\infty (1+t)m^2(t)dt < \infty$, Böhme provou um Teorema de espalhamento para a onda livre $u_{tt} - \Delta u = 0$. Além disso, em [19] os autores explicaram as propriedades qualitativas da solução para(0.9) com um potêncial $m(t)$ satisfazendo $(1+t)m(t)^2 \notin L^1(\mathbb{R}^+)$ e $\lim_{t\to\infty} tm(t) = 0$. A Energia de tipo Klein-Gordon da solução de (0.9) é dada por:

$$E_{KG}(u)(t) \doteq \frac{1}{2}\big(\|u_t(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \|(-\Delta)^{\sigma/2}u(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + m(t)^2\|(-\Delta)^{\delta/2}u(t,\cdot)\|_{L^2}^2\big). \tag{0.10}$$

Para o caso $\delta > 0$ o modelo invariante por escala no caso $2\delta = \sigma$ que pode ser tratado com funções especiais não indica que podemos esperar um efeito dissipativo. De fato provamos que com condições adequadas em $m(t)$ temos conservação generalizada de Energia, ou seja:

$$cE_{KG}(0) \leq E_{KG}(t) \leq CE_{KG}(0).$$

Veja o Teorema 4.4.8 para $\delta > 0$ e o Corolário 4.4.10 para o caso $\delta = 0$. Além disso provamos que no caso $2\delta \leq \sigma$ e quando a massa decai suficientemente rápida, temos um Teorema de Espalhamento para $u_{tt} + (-\Delta)^\sigma u = 0$. Veja o Teorema 4.5.6 para o espalhamento, e o Teorema 4.5.7 para conservação generalizada de energia quando tivermos a mesma condição na massa, porém com a condição $2\delta > \sigma$. Provamos também uma estimativa de Energia conjecturada em [5] quando a massa tem tendência crescente, veja 4.4.2.
Por fim, temos uma apêndice com alguns resultados conhecidos em Análise e que foram usados em todo o texto completam essa tese.

Capítulo 1

Equações de Evolução Lineares com Coeficientes Constantes.

Nesse capítulo estaremos interessados em obter estimativas $L^p - L^q$ para a solução do seguinte problema de Cauchy.

$$\begin{cases} u_{tt} + a^2(-\Delta)^\sigma u = 0 \\ u(0,x) = \phi(x), \;\; u_t(0,x) = \psi(x) \end{cases} \tag{1.1}$$

onde a é constante positiva e $\sigma > 0$, que podemos supor sem perda de generalidade ser igual a um. Este é um operador σ-evolução no sentido de Petrowsky, pois seu simbolo $\tau^2 + |\xi|^{2\sigma}$ tem parte imaginária pura. O caso $\sigma = 2$ é um importante modelo na literatura ele é conhecido como operador de Germain-Lagrange, ou ainda operador de beam e o operador tipo plate nos casos $n = 1$ e $n = 2$, respectivamente. O operador linear de beam herda algumas propriedades, mas não todas, do operador de Schrödinger. Em particular, nós não temos conservação de massa, pois os coeficientes da beam são reais. Por outro lado, a representação funcional da solução contém oscilações como ocorre para o operador de onda. No entanto, o operador Germain-Lagrange não de tipo Kovalesvkiano [15], logo não se tem velocidade de propagação finita.

1.1 Representação da solução por multiplicadores

Considere a representação da solução da Equação de evolução (1.1) dada a seguir:

$$u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(\Big(e^{i|\xi|^\sigma t} + e^{-i|\xi|^\sigma t}\Big)\frac{1}{2}\mathcal{F}(\phi)(\xi)\Big) + \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(\Big(e^{i|\xi|^\sigma t} - e^{-i|\xi|^\sigma t}\Big)\frac{1}{2i|\xi|^\sigma}\mathcal{F}(\psi)(\xi)\Big).$$

ou ainda

$$u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(\cos(t|\xi|^\sigma)\mathcal{F}(\phi)(\xi)\Big) + \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(\sin(t|\xi|^\sigma)\frac{1}{|\xi|^\sigma}\mathcal{F}(\psi)(\xi)\Big).$$

Assim nossa análise se resume no estudo dos multiplicadores $e^{\pm i|\xi|^\sigma t}$, $\frac{e^{\pm i|\xi|^\sigma t}}{|\xi|^\sigma}$ e $\frac{\sin(t|\xi|^\sigma)}{|\xi|^\sigma}$. Vamos ver que uma vantagem significativa desse último com relação ao segundo é sua limitação, o que garante a estimativa L^2-L^2.
O Problema (1.1) é bem-posto, por exemplo, em $L^2(\mathbb{R}^n)$, ou melhor, suponha $\sigma > 1$ e seja $u(t,x)$ solução de (1.1), se $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$, então temos que

$$u(t,x) \in C\big(\mathbb{R}, H^\sigma(\mathbb{R}^n)\big) \cap C^1\big(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^n)\big).$$

isso será provado no Teorema 1.5.10.
Suponhamos que exista c tal que a estimativa a seguir seja satisfeita para todo $\varphi \in \mathcal{S}$.

$$\|\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(\frac{e^{i|\xi|^\sigma}}{|\xi|^r}\mathcal{F}(\varphi)(\xi)\Big)\|_q \leq c\|\varphi\|_p. \tag{1.2}$$

Como

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(\frac{e^{i|\xi|^\sigma t}}{|\xi|^r}\mathcal{F}(\varphi)(\xi)\Big)\|_{L^q_x} =& t^{\frac{r}{\sigma}}\|\mathcal{F}^{-1}_{\eta\to t^{-\frac{1}{\sigma}}x}\Big(\frac{e^{i|\eta|^\sigma}}{|\eta|^r}\mathcal{F}(\tau_{t^{\frac{1}{\sigma}}}\varphi)(\eta)\Big)\|_{L^q_x}\\ =& t^{\frac{r}{\sigma}+\frac{n}{q\sigma}}\|\mathcal{F}^{-1}_{\eta\to y}\Big(\frac{e^{i|\eta|^\sigma}}{|\eta|^r}\mathcal{F}(\tau_{t^{\frac{1}{\sigma}}}\varphi)(\eta)\Big)\|_{L^q_y}\\ \leq& ct^{\frac{r}{\sigma}+\frac{n}{q\sigma}}\|\tau_{t^{\frac{1}{\sigma}}}\varphi\|_p \leq ct^{\frac{r}{\sigma}+\frac{n}{q\sigma}-\frac{n}{\sigma p}}\|\varphi\|_p.\end{aligned}$$

onde $\tau_r\varphi(\xi) = \varphi(r\xi)$, temos

$$\|\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(\frac{e^{i|\xi|^\sigma t}}{|\xi|^r}\mathcal{F}(\varphi)(\xi)\Big)\|_q \leq ct^{\frac{1}{\sigma}\Big(r+n(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})\Big)}\|\varphi\|_p. \tag{1.3}$$

Observação 1.1.1. *No argumento acima a função $e^{i|x|^\sigma}$ não desempenha nenhum papel importante, assim poderíamos ter uma função qualquer $f(x)$ em seu lugar, ou seja: Se vale* (1.2) *com $f(|\xi|^\sigma)$ no lugar de $e^{i|\xi|^\sigma}$, concluímos a estimativa* (1.3) *com $f(t|\xi|^\sigma)$ no lugar de $e^{i|\xi|^\sigma t}$.*

Note que não precisamos provar qual o decaimento ótimo, pois esse é fornecido pelo argumento acima, só precisamos provar que vale (1.2), ou seja, não precisamos nos preocupar com o tempo. Diz-se, nesse caso, que nossa solução é homogênea, ou que nosso problema é homogêneo. Isso é uma enorme vantagem, e fornece uma significativa simplificação nas contas. Vamos supor, por um instante que em vez de (1.1) tivessemos considerado, por exemplo, o seguinte problema de Cauchy.

$$u_{tt} + (-\Delta)^\sigma u + m^2(-\Delta)^\delta u = 0,\ \ u(0,x) = \phi(x),\ \ u_t(0,x) = \psi(x),$$

onde m é uma constante postiva e $\delta \neq \sigma$. Nesse caso, não se tem homogêneidade e as estimativas para os multiplicadores devem levar em consideração o tempo o que dificulta enorme o trabalho se quisermos provar decaimentos ótimos. Em [53] os autores estudaram esse problema para quando $\sigma = 1$ e $\delta = 0$, e obtiveram resultados ótimos. Na verdade classificaram o decaimento $L^p - L^q$ dos multiplicadores associados, e nota-se, nesse paper, que o expoente do decaimento como função de $x = \frac{1}{p}$ e $y = \frac{1}{q}$, diferente do caso em que $m = 0$, não é linear, porém é linear por partes. Além disso, novamente, como não existe o argumento de homogeneidade os autores do paper provaram a otimalidade dos decaimentos obtidos com exemplos.
Assim vamos passar a provar (1.2). Para isso dividiremos nosso espaço em frequências baixas e altas. Consideremos a função de corte radial $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n_\xi)$ satisfazendo $\chi(\xi) \equiv 0$ para $|\xi| \leq \frac{1}{2}$, $\chi(\xi) \equiv 1$ para $|\xi| \geq \frac{3}{4}$, e $\chi(\xi) \in [0,1]$, vamos usar χ genericamente para qualquer função que com essas propriedades. Basicamente, na antidiagonal usaremos para frequências baixas e altas, respectivamente, o Teorema de Paley A.3.5 e o Lema de Littman 1.3.3. Da mesma forma usaremos fora da anti-diagonal Mikhlin-Mormander A.3.6 e técnicas de decomposição diádica.

1.2 Frequências baixas

Estimativa na Anti-diagonal.

No paper [35] Hörmander faz um estudo de operadores invariantes por translação, onde ele prova por exemplo que esses quando limitados de L^p em L^q podem ser representados em Schwartz como operadores de convolução com um núcleo que é uma distribuição temperada, nesse paper ele obtém uma famosa extensão do Teorema A.3.6 que é de Mikhlin, mas que estamos chamando de Mikhlin-Hörmander e que fornece uma condição integral mais fraca do que estamos supondo em A.3.6, porém também suficiente para uma função L^∞ estar em M_p^p para $1 < p < \infty$, essa versão mais forte não vamos precisar aqui. Desse paper o resultado que, de fato, vamos usar é o Teorema A.3.5 que é útil para provar a proposição a seguir.

Proposição 1.2.1. *Para $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$ e $0 \leq r \leq n\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\Big)$, temos*

$$g \doteq e^{\pm i|\xi|^\sigma} \frac{1 - \chi(\xi)}{|\xi|^r} \in M_p^q. \tag{1.4}$$

Demonstração. Considere primeiro o caso $r > 0$, segue que

$$|\{\xi \in \mathbb{R}^n : |g(\xi)| \geq l\}| \leq |\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq l^{-\frac{1}{r}}\}| \leq Cl^{-\frac{n}{r}} \tag{1.5}$$

temos para $l \geq 1$ que $l^{-\frac{n}{r}} \leq l^{-\frac{1}{(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})}}$. Além disso para $l > 0$, $\{\xi \in \mathbb{R}^n : |g(\xi)| \geq l\} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 1\}$, logo temos

$$|\{\xi \in \mathbb{R}^n : |g(\xi)| \geq l\}| \leq Cl^{-b}, \tag{1.6}$$

onde $(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) = \frac{1}{b}$. Logo, pelo Teorema A.3.5 segue o resultado no caso $r > 0$. Agora, se $r = 0$ temos para $l > 1$ que $|\{\xi \in \mathbb{R}^n : |g(\xi)| \geq l\}| = 0$. Assim escolha $C \doteq |\{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 1\}|$, temos que vale (1.6) para qualquer $b > 0$, logo pelo Teorema A.3.5 temos o resultado para quaisquer p, q com $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$. □

Note que para provar o resultado acima só precisamos que no lugar de $e^{\pm i|\xi|^\sigma}$ tenhamos uma função limitada na bola unitária. Assim deduzimos imediatamente o seguinte Teorema.

Proposição 1.2.2. *Para $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$, temos*

$$g \doteq \frac{\sin(|\xi|^\sigma)}{|\xi|^\sigma}\Big(1 - \chi(\xi)\Big) \in M_p^q. \tag{1.7}$$

Demonstração. Análoga a Proposição 1.2.1, com $r = 0$ e com $\frac{\sin(|\xi|^\sigma)}{|\xi|^\sigma}$ no lugar de $e^{\pm i|\xi|^\sigma}$. □

Estimativa na Diagonal.

Quando $r > 0$ o multiplicador $e^{\pm i|\xi|^\sigma} \frac{1-\chi(\xi)}{|\xi|^r}$ não é limitado, logo não pode estar em M_p qualquer que seja $1 \leq p \leq \infty$, veja o Teorema A.3.4. Mesmo no caso $r = 0$, se tomarmor por exemplo $\sigma = 2$ o mesmo Teorema A.3.4 diz que na diagonal só temos estimativa no ponto $p = 2$. Assim, tendo em vista o nosso objetivo, vamos estudar os multiplicadores $\frac{\sin(|\xi|^\sigma)}{|\xi|^\sigma}\Big(1 - \chi(\xi)\Big)$ e $\cos(|\xi|^\sigma)$. Para provar a limitação na diagonal vamos aplicar Mikhlin-Hormander A.3.6, mas para isso vamos lançar mão do seguinte Lema.

Lema 1.2.3. *Para todo multi-índice α e $0 < |\xi| \leq R$ temos:*

$$|\partial^\alpha \sin(|\xi|^\sigma)| \leq C_{\alpha,R}|\xi|^{\sigma-|\alpha|} \ \ e \ \ |\partial^\alpha \cos(|\xi|^\sigma)| \leq C_{\alpha,R}|\xi|^{-|\alpha|}.$$

Demonstração. Para $|\alpha| = 0$ o resultado é óbvio, suponha que as desigualdades são válidas para todos $|\alpha| \leq k$ com k inteiro. Seja α um multi-índice com $\alpha = \alpha_0 + e_j$ e $|\alpha_0| = k$. Como

$$\partial^{e_j} \sin(|\xi|^\sigma) = \sigma \cos(|\xi|^\sigma)|\xi|^{\sigma-2}\xi_j,$$

temos que:

$$\partial^\alpha \sin(|\xi|^\sigma) = \partial^{\alpha_0}\partial^{e_j} \sin(|\xi|^\sigma) = \sigma\partial^{\alpha_0} \cos(|\xi|^\sigma)|\xi|^{\sigma-2}\xi_j.$$

Portanto

$$|\partial^\alpha \sin(|\xi|^\sigma)| \leq C_\alpha \sum_{\beta+\gamma=\alpha_0} |\partial^\beta \cos(|\xi|^\sigma)||\partial^\gamma |\xi|^{\sigma-2}\xi_j|.$$

Como $|\xi|^{\sigma-2}\xi_j$ é homogênea de grau $\sigma - 1$ e $|\beta| \leq k$ temos pelo Lema A.4.6 e por hipótese de indução que para $0 < |\xi| \leq R$

$$|\partial^\alpha \sin(|\xi|^\sigma)| \leq C_{\alpha,R} \sum_{\beta+\gamma=\alpha_0} |\xi|^{-|\beta|}|\xi|^{\sigma-2-|\gamma|} \leq C_{\alpha,R}|\xi|^{\sigma-|\alpha|}.$$

Analogamente temos que

$$|\partial^\alpha \cos(|\xi|^\sigma)| = |\partial^{\alpha_0} \sin(|\xi|^\sigma)\sigma|\xi|^{\sigma-2}\xi_j| \leq C_{\alpha,R}|\xi|^{-|\alpha|}.$$

□

Finalmente temos as estimativa na diagonal.

Proposição 1.2.4. *Para todo multi-índice α e $1 < p < \infty$, temos*

$$g \doteq \frac{\sin(|\xi|^\sigma)}{|\xi|^\sigma}\Big(1 - \chi(\xi)\Big) \in M_p. \tag{1.8}$$

Demonstração. Considere $m(\xi) \doteq \frac{\sin(|\xi|^\sigma)}{|\xi|^\sigma}$, podemos concluir pelos Lemas A.4.6 e 1.2.3 que para $0 < |\xi| \leq R$,

$$|\partial^\alpha m(\xi)| \leq C_\alpha \sum_{\beta+\gamma=\alpha} |\partial^\beta \sin(|\xi|^\sigma)||\partial^\gamma |\xi|^{-\sigma}| \leq C_{\alpha,R}|\xi|^{-|\alpha|}$$

para todo multi-índice α. Como $g(\xi) = m(\xi)$ para ξ pequeno, temos portanto que $|\partial^\alpha g(\xi)| \leq C_\alpha|\xi|^{-\alpha}$. Logo aplicando Mikhlin-Hormander A.3.6 temos provado a Proposição. □

Corolário 1.2.5. *Para $1 < p \leq q < \infty$, temos que*

$$\frac{\sin(|\xi|^\sigma)}{|\xi|^\sigma}\Big(1 - \chi(\xi)\Big) \in M_p^q,$$

para todo $\sigma \neq 0$.

Demonstração. Aplique a Proposição 1.2.2 e o Corolário 1.2.4. □

A figura 1.1 mostra a região em que provamos a limitação do multiplicador.

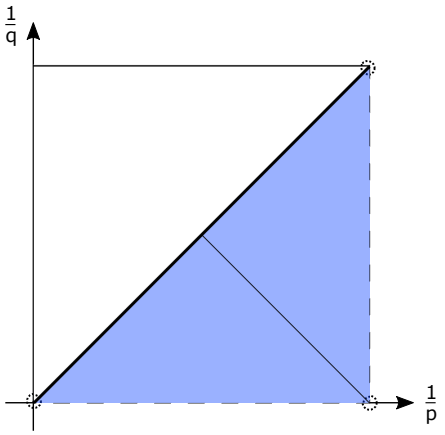


Figura 1.1: Frequência Baixa.

Estimativa $L^1 - L^q$

Em alguns casos podemos provar estimativas do tipo $L^1 - L^q$ em frequências baixas para o multiplicador:

$$m_\sigma(\xi) \in \{\frac{\sin(|\xi|^\sigma)}{|\xi|^\sigma}, \cos(|\xi|^\sigma), e^{it|\xi|^\sigma}\}.$$

Proposição 1.2.6. *Para $2 \leq q \leq \infty$, temos que*

$$m_\sigma(\xi)\Big(1 - \chi(\xi)\Big) \in M_1^q,$$

para todo σ.

Demonstração. Temos pela desigualdade de Minkowski para integrais, e como $q \geq 2$ temos usando Hausdorff-Young, Teorema A.3.3, que:

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to\cdot}\{m_\sigma(\xi)\Big(1-\chi(\xi)\Big)\mathcal{F}(\phi)(\xi)\}\|_q &\lesssim \|\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to\cdot}\{m_\sigma(\xi)\Big(1-\chi(\xi)\Big)\}\|_q\|\phi\|_1\\ &\lesssim \|m_\sigma(\cdot)\Big(1-\chi(\cdot)\Big)\|_r\|\phi\|_1\end{aligned}$$

onde $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1$. Mas

$$\|m_\sigma(\cdot)\Big(1 - \chi(\cdot)\Big)\|_r \lesssim 1.$$

o que prova a Proposição.

□

1.3 Frequências Altas

Em [56], [55] e [54] Miyachi e em [65] Peral fecharam o estudo no espaço de Hardy com índice $0 < p < \infty$ do seguinte mutliplicador

$$m_{\sigma,r}(\xi) \doteq e^{\pm i|\xi|^\sigma}\frac{\chi(\xi)}{|\xi|^r}$$

provaram dentre outras coisas o seguinte Teorema.

Teorema 1.3.1. *Seja $0 < \sigma < 1$ ou $\sigma > 1$.*

$$m_{\sigma,r} \in M_p^q$$

(1) *para* $p > 1$ *e* $q < \infty$ *se, e somente se* $p \leq q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$ *e* $\frac{\sigma-1}{p} + \frac{1}{q} \geq \frac{\sigma}{2} - \frac{r}{n}$ *ou* $p \leq q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$ *e* $\frac{1}{p} + \frac{\sigma-1}{q} \leq \frac{r}{n} + \frac{\sigma}{2}$;

(2) *para* $p = 1$ *e* $1 < q < \infty$ *se, e somente se* $1 + \frac{\sigma-1}{q} < \frac{r}{n} + \frac{\sigma}{2}$;

(3) *para* $p = 1$ *e* $q = \infty$ *se, e somente se* $n(1 - \frac{\sigma}{2}) \leq r$;

(4) *para* $p = 1$ *e* $q = 1$ *se, e somente se* $r > \sigma\frac{n}{2}$.

Demonstração. Veja em [56]. □

No caso $\sigma = 1$ eles obtiveram o seguinte Teorema.

Teorema 1.3.2. *Temos que*

$$m_{1,r} \in M_p^q$$

(1) *para* $p > 1$ *e* $q < \infty$ *se, e somente se* $p \leq q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$ *e* $\frac{1}{p} - \frac{n}{q} \leq r - \frac{n-1}{2}$ *ou* $p \leq q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$ *e* $\frac{n}{p} - \frac{1}{q} \leq r + \frac{n-1}{2}$;

(2) *para* $p = 1$ *e* $1 < q < \infty$ *se, e somente se* $r - \frac{n+1}{2} > -\frac{1}{q}$;

(3) *para* $p = 1$ *e* $q = \infty$ *se, e somente se* $r > \frac{n+1}{2}$;

(4) *para* $p = 1$ *e* $q = 1$ *se, e somente se* $r > \frac{n-1}{2}$.

Demonstração. Veja em [56]. □

A figura 1.2 ilustra o caso $r = \sigma$, definimos $\frac{1}{\tilde{q}} = \frac{1}{\sigma-1}\Big(\sigma\big(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\big) - 1\Big)$.

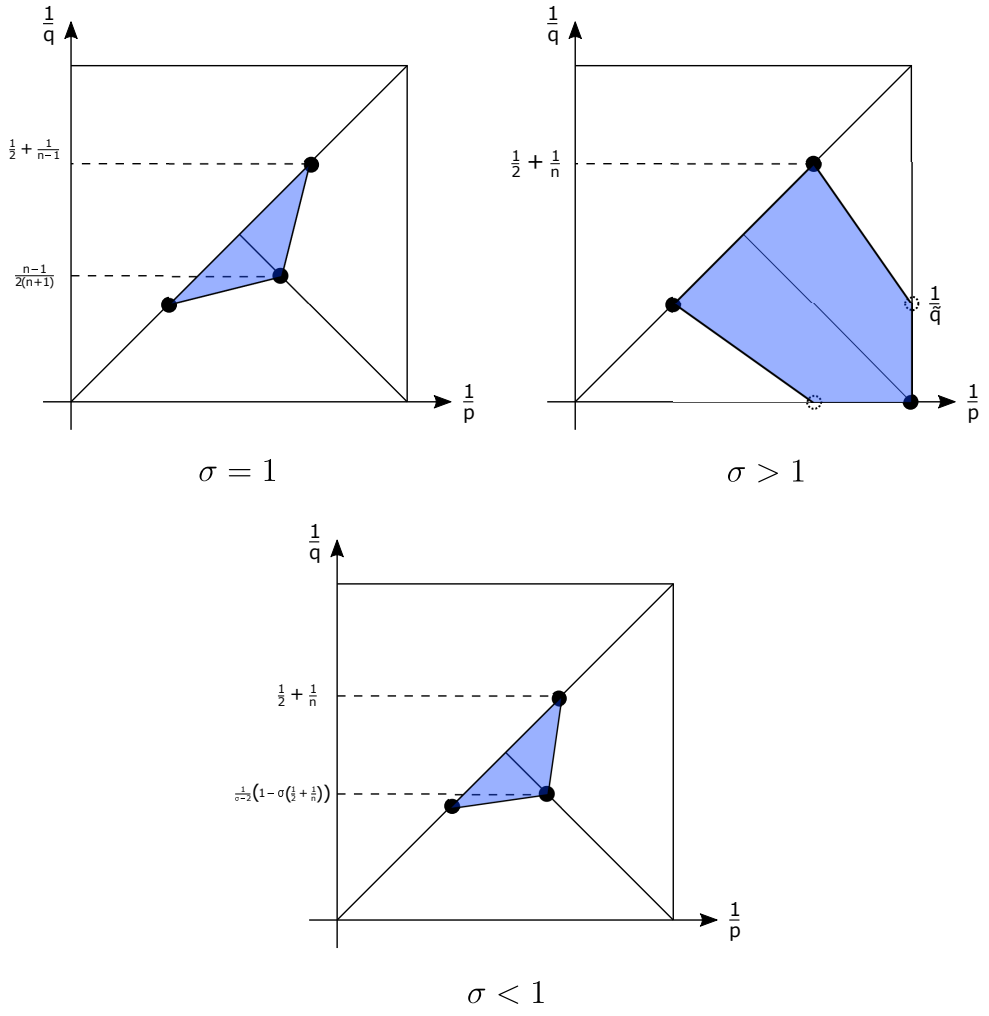


Figura 1.2: Caso $\sigma = r$

Para se demonstrar esses resultados os autores fazem uso que o dual do espaço de Hardy H^1 é o espaço BMO e do Teorema de Interpolação de Stein, pode-se ver esses Teoremas, por exemplo, em [23] e [75]. Vamos provar as estimativas para o mutliplicador $m_{\sigma,r}$ sem uso desses Teoremas, vamos usar apenas técnicas de decompoição diádica. Porém com essa técnica só conseguimos, em geral, a estimativa para os pontos do interior da parte pintada da figura 1.2. A estratégia é simples, vamos primeiro provar, usando o Lema de Littman 1.3.3 que temos a estimativa na antidiagonal, para o caso $\sigma = 1$ veja, por exemplo, [9] e para $\sigma > 1$, com regularidade, veja [64]. Depois, vamos reproduzir o que foi feito em [73] para a Diagonal sem os pontos extremos. Finalmente, vamos fazer os demais casos. Depois disso, tudo ficará claro que o modo de fazer os demais casos é análogo ao que foi feito na diagonal por Sjöestrand [73], e esse é o objetivo de escolher essa ordem de apresentação, para deixar claro o que se obteve e como, a partir do que já tinha sido feito. Para mostrar que não vale a estimativa no complementar do fecho da região pintada na figura 1.2 a demonstração também será análoga a que foi feita em [73] para a diagonal, novamente faremos apenas uma adaptação.

1.3.1 Estimativa na Antidiagonal

Em [9] Brenner usa o Lema de Littman para provar estimativas na antidiagonal para o multiplicador $m_{1,1}$, em [64] Pecher faz o mesmo para $m_{\sigma,\sigma}$, σ inteiro positivo, mas como ele precisava de estimativas não singulares, pediu regularidade nos dado iniciais, ou melhor dizendo, provou que $m_{\sigma,\sigma}$ é um operador limitado de $W^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$, onde $W^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Sobolev. Mostraremos que podemos obter com as mesmas técnicas de Brenner estimativas sem regularidade.

Lema 1.3.3. *Considere a integral oscilatória*

$$\mathcal{F}^{-1}_{\eta\to x}\Big(e^{-i\tau p(\eta)}v(\eta)\Big),$$

onde a amplitude $v\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tem suporte no disco $D[\frac{1}{2},2]=\{\xi\in\mathbb{R}^n;\frac{1}{2}\le|\xi|\le 2\}$ enquanto a função de fase p é C^∞ no suporte de v. Além disso, suponha que o rank do Hessiano $H_p(\eta)$ é maior ou igual a k no suporte de v. Então a seguinte estimativa vale:

$$\|\mathcal{F}^{-1}_{\eta\to x}\Big(e^{-i\tau p(\eta)}v(\eta)\Big)\|_{L^\infty}\le C(1+\tau)^{-\frac{k}{2}}\sum_{|\alpha|\le M}\|D^\alpha_\eta v(\eta)\|_{L^\infty},$$

onde M é um inteiro adequado.

Demonstração. Veja em [52]. □

A demonstração do resultado acima pode não ser muita clara para alguns leitores. Vamos usar o Lema quando $p(\eta)$ e v são radiais, nesse caso a demonstração pode ser obtida de maneira alternativa, usando propriedades da função de Bessel e o Lema de Van der Corput que vamos indicar adiante.

Lema 1.3.4. *Suponha $v\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é radial e tem suporte no disco $D[\frac{1}{2},2]=\{\xi\in\mathbb{R}^n;\frac{1}{2}\le|\xi|\le 2\}$, então para $\sigma>0$ real, temos*

$$\|\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\left(e^{-it|\xi|^\sigma}v(\xi)\right)\|_{L^\infty_x}\le\begin{cases}C(1+t)^{-\left(\frac{n-1}{2}\right)} & \text{,para } \sigma=1;\\ C(1+t)^{-\frac{n}{2}} & \text{,para } \sigma\neq 1.\end{cases}\tag{1.9}$$

onde $C>0$ é uma constante não nula.

Demonstração. Precisamos estimar a seguinte integral oscilatória

$$\int_{\mathbb{R}^n}e^{ix\xi-it|\xi|^\sigma}v(\xi)d\xi$$

considerando a fase $\varphi(\xi):=ix\xi-it|\xi|^\sigma$, temos $i\Phi(\xi,t,x):=\nabla\varphi(\xi)=ix-it\sigma|\xi|^{\sigma-1}\xi$, logo no caso $|x-t\sigma|\xi|^{\sigma-1}\xi|\ge 1$ vamos usar um método de integração por partes. Vamos considerar um operador diferêncial D tal que $De^{ix\xi-it|\xi|^\sigma}=e^{ix\xi-it|\xi|^\sigma}$, considere

$$Df:=\frac{1}{|\Phi(\xi,t,x)|^2}\sum_{j=1}^n\Phi_j(\xi,t,x)\frac{1}{i}\partial_{\xi_j}f$$

aqui $\Phi_j(\xi,t,x)$ é a j-ésima componente de $\Phi(\xi,t,x)$. Agora aplicando a integração por partes $N\ge 1$ vezes concluímos que

$$\Big|\int_{|x-t\sigma|\xi|^{\sigma-1}\xi|\ge 1}e^{ix\xi-it|\xi|^\sigma}v(\xi)d\xi\Big|\le C_N(1+t)^{-N}\tag{1.10}$$

onde a constante C_N não depende de x ou t.
Passamos agora a considerar o caso $|x-t\sigma|\xi|^{\sigma-1}\xi|<1$, como estamos restritos a $\frac{1}{2}\le|\xi|\le 2$ temos que existe uma constante $c_0>0$ tal que para t grande temos:

$$c_0^{-1}t<|x|<c_0t.\tag{1.11}$$

Usando (A.6) para $e^{itr^\sigma}v(r)$ temos

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(e^{-it|\xi|^\sigma)}v(\xi)\Big)=(2\pi)^{\frac{n}{2}}\int_0^\infty e^{itr^\sigma}v(r)r^{n-1}\left(r|x|\right)^{\frac{2-n}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(r|x|)dr\tag{1.12}$$

Supondo $\sigma\neq 1$ temos que a derivada segunda com relação a r de itr^σ é $\ge Ct$ no suporte de $\psi(r):=v(r)r^{n-1}\left(r|x|\right)^{\frac{2-n}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(r|x|)$, logo usando o Lema de Van der Corput A.1.3, temos:

$$\Big| \int_0^\infty e^{itr^\sigma} v(r) r^{n-1} (r|x|)^{\frac{2-n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(r|x|) dr \Big| \leq C t^{-\frac{1}{2}} \left(\|\psi\|_{L^\infty} + \|\psi'\|_{L^1} \right). \tag{1.13}$$

Agora usando a Proposição A.1.1 com $k = 0$ e $k = 1$ temos, usando (1.11), que

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{L^\infty} &\leq C_1 |x|^{-\left(\frac{n-1}{2}\right)} \lesssim t^{-\left(\frac{n-1}{2}\right)}; \\ \|\psi'\|_{L^1} &\leq C_1 |x|^{-\left(\frac{n-1}{2}\right)-1} \lesssim t^{-\left(\frac{n-1}{2}\right)-1}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Assim, como a integral que queremos estimar é limitada uniformemente em x, podemos deduzir que das estimativa acima que

$$\Big| \int_0^\infty e^{itr^\sigma} v(r) r^{n-1} (r|x|)^{\frac{2-n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(r|x|) dr \Big| \leq C(1+t)^{-\frac{n}{2}} \tag{1.15}$$

onde a constante C é uniforme em x.
No caso de $\sigma = 1$ não podemos usar Van der Corput, mas podemos fazer uma estimativa direta de (1.12) usando a desigualdade (1.14) e lembrando que o suporte de v é compacto. Portanto, essas estimativas juntamente com (1.10), prova o Lema.

□

Caso $\sigma \neq 1$

Proposição 1.3.5. *Suponha $\sigma \neq 1$. Então, se $1 < p \leq 2$ e $(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})(n(2-\sigma)) \leq r$ ou $p = 1$ e $n(2-\sigma) < 2r$, temos*

$$m_{\sigma,r}(\xi) \doteq e^{\pm i|\xi|^\sigma} \frac{\chi(\xi)}{|\xi|^r} \in M_p^{p^*}. \tag{1.16}$$

onde p^* é o expoente conjugado a p, ou seja, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$.

Demonstração. Seja ϕ como na definição A.4.1 dos espaços de Besov, lembrando que $\phi_k(\xi) \doteq \phi(2^{-k}\xi)$ para todo k inteiro. Vamos provar que

$$e^{\pm i|\xi|^\sigma} \frac{\chi(\xi)\phi_k(\xi)}{|\xi|^r} \in M_1^\infty \text{ com norma menor ou igual a } C 2^{k(n-r-\sigma\frac{\varrho}{2})},$$

onde C independe de k. Faça $2^{-k}\xi \doteq \eta$, como $\chi(\xi)\frac{\phi_k(\xi)}{|\xi|^r} = \frac{\phi_k(\xi)}{|\xi|^r}$ para $k > 1$ temos pelo Lema de Littman que:

$$\begin{aligned} \Big\| \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(e^{\pm i|\xi|^\sigma} \frac{\phi_k(\xi)}{|\xi|^r} \Big) \Big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &= 2^{k(n-r)} \Big\| \mathcal{F}^{-1}_{\eta\to x}\Big(e^{\pm i 2^{k\sigma}|\eta|^\sigma} \frac{\phi(\eta)}{|\eta|^r} \Big) \Big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C 2^{k(n-r)} (1 + 2^{k\sigma})^{-\frac{n}{2}}, \end{aligned}$$

para $k > 1$. Sabemos também que para $k \leq 0$, $\chi(\xi)\phi_k(\xi) = 0$ e $\chi(\xi)\frac{\phi_1(\xi)}{|\xi|^r}$ é integrável. Portanto podemos concluir que para todo k inteiro:

$$\Big\| \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(e^{\pm i|\xi|^\sigma} \frac{\chi(\xi)\phi_k(\xi)}{|\xi|^r} \mathcal{F}(f) \Big) \Big\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C 2^{k(n-r-\sigma\frac{n}{2})} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.17}$$

Além disso, usando Plancherel temos

$$\Big\|\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(e^{\pm i|\xi|^\sigma}\frac{\chi(\xi)\phi_k(\xi)}{|\xi|^r}\mathcal{F}(f)\Big)\Big\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C2^{-kr}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Finalmente por Riesz-Thorin, Teorema A.3.1, segue que

$$\Big\|\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(e^{\pm i|\xi|^\sigma}\frac{\chi(\xi)\phi_k(\xi)}{|\xi|^r}\mathcal{F}(f)\Big)\Big\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C2^{k\Big(-r+(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})(n(2-\sigma))\Big)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.18}$$

onde $1\leq p\leq 2$ e $\frac{1}{p}+\frac{1}{p^*}=1$. Agora note que por hipótese, quando $1<p\leq 2$ e

$$\Big(-r+(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})(n(2-\sigma))\Big)\leq 0,$$

temos pelo Lema A.4.1, que:

$$\Big\|\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(e^{\pm i|\xi|^\sigma}\frac{\chi(\xi)}{|\xi|^r}\mathcal{F}(f)\Big)\Big\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Quando temos $1\leq p\leq 2$ e a hipótese $\Big(-r+(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})(n(2-\sigma))\Big)<0$, segue a série converge

$$\begin{aligned}\Big\|\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(e^{\pm i|\xi|^\sigma}\frac{\chi(\xi)}{|\xi|^r}\mathcal{F}(f)\Big)\Big\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big\|\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(e^{\pm i|\xi|^\sigma}\frac{\chi(\xi)\phi_k(\xi)}{|\xi|^r}\mathcal{F}(f)\Big)\Big\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}\\ &\leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},\end{aligned}$$

concluíndo assim a demonstração.

□

Corolário 1.3.6. *Se $\sigma\neq 1$, então para $1<p\leq 2$ e $(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})(2n(\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{2}))\leq 1$ ou $p=1$ e $n(\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{2})<1$. temos:*

$$m_{\sigma,\sigma}(\xi)\doteq e^{\pm i|\xi|^\sigma}\frac{\chi(\xi)}{|\xi|^\sigma}\in M^{p^*}_p, \tag{1.19}$$

para todo $1\leq p\leq 2$.

Demonstração. Aplique a Proposição 1.3.5 para o caso $\sigma=r$. □

Caso $\sigma=1$

Na demonstração da Proposição 1.3.5 após aplicarmos Litmann com $\sigma=1$ temos que o expoente em (1.17) fica $k(n-r-\frac{n-1}{2})$. Assim, tal como demonstrado em [9] para $r=1$, podemos provar a sequinte Proposição.

Proposição 1.3.7. *Suponha que $1<p\leq 2$. Então para $(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})(n+1)\leq r$, temos*

$$m_{1,r}(\xi)\doteq e^{\pm i|\xi|}\frac{\chi(\xi)}{|\xi|^r}\in M^{p^*}_p. \tag{1.20}$$

onde p^* é o expoente conjugado a p, ou seja, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p^*}=1$.
A mesma conclusão é válida no caso $p=1$, desde que $\frac{n+1}{2}<r$.

Demonstração. Analogamente a demonstração da Proposição 1.3.5 após aplicar Littman temos para $k>1$ que:

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(e^{\pm i|\xi|}\frac{\chi(\xi)\phi_k(\xi)}{|\xi|^r}\mathcal{F}(f)\Big)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C2^{k(n-r-\frac{n-1}{2})}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.21}$$

Por outro lado usando Plancherel temos

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(e^{\pm i|\xi|}\frac{\chi(\xi)\phi_k(\xi)}{|\xi|^r}\mathcal{F}(f)\Big)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C2^{-kr}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Assim por Riesz-Thorin A.3.1, segue que.

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(e^{\pm i|\xi|}\frac{\chi(\xi)\phi_k(\xi)}{|\xi|^r}\mathcal{F}(f)\Big)\right\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C2^{k\Big(-r+(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})(n+1))\Big)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

onde $1 < p \leq 2$ e $\frac{1}{p}+\frac{1}{p^*}=1$. Agora note que pela hipótese, $\Big(-r+(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})(n+1)\Big) \leq 0$ e logo pelo Lema A.4.1, temos

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(e^{\pm i|\xi|}\frac{\chi(\xi)\phi_k(\xi)}{|\xi|^r}\mathcal{F}(f)\Big)\right\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

onde C indenpende de k. Como, por hipótese, $2 \geq p > 1$ podemos aplicar o Lema A.4.1 e concluir a primeira parte da Proposição. No caso de $p = 1$ e $\frac{n+1}{2} < r$ temos na desigualdade (1.21) que o expoente é negativo e a partir de agora é só seguir o que foi feito na Proposição 1.3.5, ou seja, usar que a respectiva série converge. □

Observação 1.3.8. *Note que quando $\frac{r}{n+1}+\frac{1}{2} < 1$ o extremo inferior da anti-diagonal onde vale a estimativa é $\frac{1}{p}=\frac{r}{n+1}+\frac{1}{2}$ que é fechado para a estimativa (vale a estimativa no ponto). Quando $\frac{r}{n+1}+\frac{1}{2} > 1$ temos que o extremo inferior será quando $p = 1$, também fechado. Essa técnica não diz sobre o caso $r = \frac{n+1}{2}$ se o respectivo ponto extremo $p = 1$ será fechado ou não. Embora sabemos, por Miyachi, que é aberto.*

Corolário 1.3.9. *Se $(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}) \leq \frac{1}{n+1}$, temos para $n > 1$ que*

$$f(\xi) \doteq e^{\pm i|\xi|}\frac{\chi(\xi)}{|\xi|} \in M^{p^*}_p. \tag{1.22}$$

onde p^* é o expoente conjugado a p, ou seja, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p^*}=1$.

Demonstração. Aplique a Proposição 1.3.7. □

1.3.2 Estimativa na Diagonal

Os resultados que serão apresentados nessa subseção para $\sigma < 1$ foram primeiramente provados por Hirchmann [33] e Wainger [88], respectivamente em 1959 e 1965. Para $\sigma > 1$ foi provado primeiramente por Sjöstrand em 1970 [73] e por Ishii [39], em 1974. Seguiremos os cálculos feitos por Sjöstrand, que os provou para todo $\sigma > 0$.

Caso $\sigma \neq 1$.

Proposição 1.3.10. *Se $1 \leq q < s$, $s \geq 2$ e se para N inteiro com $N > n\frac{s-q}{qs}$ tivermos $f, D^N f \in L^{s^*}$, então*

$$\|f\|_{M^q_1} \leq C\|f\|^{1-\frac{n}{N}(\frac{1}{q}-\frac{1}{s})}_{s^*}\|D^N f\|^{\frac{n}{N}(\frac{1}{q}-\frac{1}{s})}_{s^*}.$$

Demonstração. Denote $a \doteq \mathcal{F}^{-1}(f)$, logo temos pela desigualdade de Hölder para $\frac{s}{q} \geq 1$ e por Hausdorff-Young para $s \geq 2$ que

$$\begin{aligned}\|a\|_q^q &= \int_{|x|\leq r} |a|^q(x)dx + \int_{|x|\geq r} |x|^{-Nq}|x|^{Nq}|a|^q(x)dx \\ &\leq \|a\|_s^q r^{n(1-\frac{q}{s})} + \||x|^N a(x)\|_s^q \Big(\int_{|x|\geq r} |x|^{-N\frac{sq}{s-q}} dx \Big)^{1-\frac{q}{s}} \\ &\lesssim \|f\|_{s^*}^q r^{n(1-\frac{q}{s})} + \|D^N f(x)\|_{s^*}^q r^{-Nq+n(1-\frac{q}{s})},\end{aligned}$$

onde na última desigualdade estamos usando que $n\frac{s-q}{sq} - N < 0$ e que $f, D^N f \in L^{s^*}$. Logo

$$\|a\|_q \leq C\|f\|_2 r^{n(\frac{1}{q}-\frac{1}{s})} + \|D^N f(x)\|_2 r^{-N+n(\frac{1}{q}-\frac{1}{s})},$$

onde C é uma constante que só depende da dimensão. Assim escolha $r = \|f\|_2^{-\frac{1}{N}} \|D^N f\|_2^{\frac{1}{N}}$ e obtenha o resultado.

□

Corolário 1.3.11. *Para $1 < p \leq 2$, $N > \frac{n}{2}$ e $\theta = 2(1-\frac{1}{p})$ temos*

$$\|f\|_{M_p} \leq \|f\|_2^{(1-\frac{n}{2N})(1-\theta)} \|D^N f\|_2^{\frac{n}{2N}(1-\theta)} \|f\|_\infty^\theta.$$

Demonstração. Aplicando o Lema A.3.2 com $p = 1$, $p_0 = 1$ e $q_0 = 2$ juntamente com a Proposição 1.3.10 para $q = 1$ e $s = 2$, e lembrando que $\|f\|_{M_2} = \|f\|_\infty$. □

Proposição 1.3.12. *Se $n\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right| < \frac{r}{\sigma}$, então $f \doteq m_{\sigma,r} \in M_p$.*

Demonstração. O caso $p = 2$ é imediato. Seja a dado por $\mathcal{F}(a) = f$ e defina a_k, por $\mathcal{F}(a_k)(\xi) \doteq \phi_k(\xi)\mathcal{F}(a)(\xi)$. Pelo Lema A.4.6, como $\sigma > 0$, para M inteiro positivo podemos provar que

$$|D^M \mathcal{F}(a)(\xi)| \leq C_M |\xi|^{-r+M(\sigma-1)},$$

e portanto

$$\|D^M \mathcal{F}(a_k)\|_2 \leq C'_M 2^{k(-r+M(\sigma-1)+\frac{n}{2})}. \tag{1.23}$$

Pelo Corolário 1.3.11, com $\theta = 2(1-\frac{1}{p})$, temos que

$$\|\mathcal{F}(a_k)\|_{M_p} \leq C 2^{k\sigma(\frac{n}{2}-\frac{r}{\sigma})(1-\theta)} 2^{-kr\theta} = C 2^{k\sigma(n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{r}{\sigma})}. \tag{1.24}$$

Como o suporte de χ está em um complementar de uma vizinhança da origem temos que existe um k_0 inteiro tal que $f = \sum_{k=k_0}^\infty \mathcal{F}(a_k)$, logo pela hipótese a série a seguir converge,

$$\|f\|_{M_p} \leq C \sum_{k=k_0}^\infty 2^{k\sigma(n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{r}{\sigma})} \leq C_0.$$

□

Note que para provar a Proposição 1.3.12 só pedimos que $\sigma > 0$, vamos ver que no caso $\sigma = 1$ a estimativa vale em um intervalo maior, mas para os demais casos esse é o maior intervalo aberto na diagonal onde temos a limitação do multiplicador. Segue imediatamente para o caso $r = \sigma$ o Corolário a seguir.

Corolário 1.3.13. *Se $\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right| < \frac{1}{n}$, então $f = \frac{e^{\pm i|\xi|^\sigma}}{|\xi|^\sigma}\chi(\xi) \in M_p$.*

Demonstração. Aplique a Proposição 1.3.12 para $r = \sigma$. □

Caso $\sigma = 1$

A demonstração da Proposição a seguir pode ser encontrada no paper de 1970, [73]. A estimativa nos end-points foi demonstrada, nesse caso, primeiramente por Peral em 1980 no paper [65].

Proposição 1.3.14. *Se* $\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right| < \frac{r}{n-1}$, *então* $f(\xi) \doteq e^{\pm i|\xi|}\frac{\chi(\xi)}{|\xi|^r} \in M_p$.

Demonstração. Veja em [73]. □

1.3.3 Estimativa dentro do Triângulo.

Considerando o Triângulo $\triangle$ com vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$, vamos provar as estimativas com $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$ em uma região de $\triangle$, para isso vamos usar técnicas de decomposição diádica.

Caso $\sigma \neq 1$**.**

Na Proposição 1.3.12, Sjöstrand, em frequências intermediárias, interpola os pontos $p = q = 1$ com $p = q = 2$ e assim obtém uma condição para que a Série Diádica convirja. Nossa estratégia para obter nos demais pontos dentro do triângulo foi simplesmente escolher para interpolar os pontos $p = q = 1$ com $1 < p \leq 2$ e $q = p'$, dual de p. Em seu paper Sjöstrand não estava procurando estimativas fora da diagonal, por isso talvêz não tenha estendido seu resultado, ou talvez ele não tivesse conhecimento do resultado na antidiagonal, ou talvez simplesmente não achava importante. A estratégia pode, então ser ilustrada pela seta vermelha na figura 1.3.

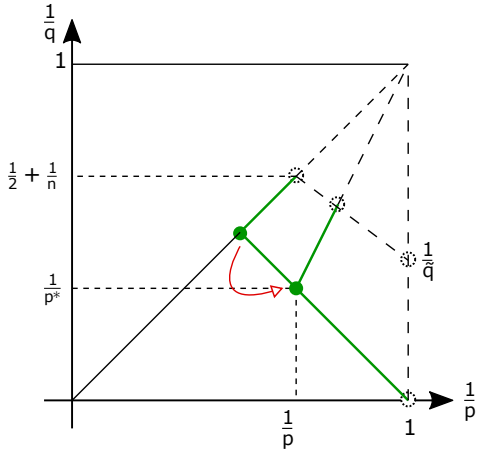


Figura 1.3: Estimativa no Triângulo.

Proposição 1.3.15. *Se* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$ *e* $\frac{1}{p} + \frac{\sigma-1}{q} < \frac{r}{n} + \frac{\sigma}{2}$, *então* $f(\xi) \doteq e^{\pm i|\xi|^\sigma}\frac{\chi(\xi)}{|\xi|^r} \in M^q_p$. *A mesma conclusão vale se* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$ *e* $\frac{1-\sigma}{p} - \frac{1}{q} < \frac{r}{n} - \frac{\sigma}{2}$.

Demonstração. Vamos provar o caso acima da antidiagonal $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$, o outro caso segue por argumento de dualidade. Considere a distribuição $a \doteq \mathcal{F}^{-1}(f)$, e seja ϕ uma função como na definição de espaços de Besov, com suporte em $\{x : \frac{1}{2} \leq |x| \leq 2\}$, e para k inteiro, $\phi_k(\xi) \doteq \phi(2^{-k}|\xi|)$. Analogamente defina a_k, por $\mathcal{F}(a_k)(\xi) \doteq \phi_k(\xi)\mathcal{F}(a)(\xi)$. Temos por (1.24) para $p = 1$ que

$$\|\mathcal{F}(a_k)\|_{M_1} \leq C2^{k\sigma(\frac{n}{2} - \frac{r}{\sigma})}.$$

Por (1.18) temos também que

$$\|\mathcal{F}(a_k)\|_{M^{p_0^*}_{p_0}} \leq C2^{k\left(-r + (\frac{1}{p_0} - \frac{1}{2})(n(2-\sigma))\right)}$$

Portanto pelo Lema A.3.2 temos que para $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \theta$ e $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{p_0^*} + \theta$, com $0 \leq \theta \leq 1$, vale

$$\|\mathcal{F}(a_k)\|_{M_p^q} \leq C2^{k\left(-r+(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{2})(n(2-\sigma))\right)(1-\theta)} 2^{k\sigma(\frac{n}{2}-\frac{r}{\sigma})\theta} = C2^{kn\left(\frac{1}{p}+\frac{\sigma-1}{q}-\left(\frac{\sigma}{2}+\frac{r}{n}\right)\right)}.$$

Como para algum k_0 fixo, temos a estimativa pela seguinte Série Diádica

$$\|\mathcal{F}(a)\|_{M_p^q} \leq C \sum_{k \geq k_0} \|\mathcal{F}(a_k)\|_{M_p^q},$$

pela hipótese temos que a Série converge, o que prova a Proposição.

□

Observação 1.3.16. *Para o caso $\sigma = 1$ basta interpolar os pontos da diagonal $\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right| < \frac{r}{n-1}$ e antidiagonal $(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})(n+1) \leq r$, obtendo assim um triângulo, cuja parte acima da antidiagonal é dada por $\frac{n}{p}-\frac{1}{q} < r+\frac{n-1}{2}$.*

1.4 Optimalidade da região

Vamos provar que a figura onde obtemos a estimativa é a maior possível a menos, possívelmente de seu bordo. As técnicas usadas foram adaptadas de Sjöstrand [73].

Caso $\sigma > 1$

Considere $f(\xi) \doteq m_{\sigma,r}$.

Lema 1.4.1. *Se $\sigma > 1$ e $n + \frac{\sigma}{\sigma-1}(\frac{r}{\sigma} - \frac{n}{2}) > 0$, então*

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = C_1|x|^{-(n+\frac{\sigma}{\sigma-1}(\frac{r}{\sigma}-\frac{n}{2}))} e^{iC_2|x|^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}}[1 + O(|x|^{-\frac{\sigma}{2(\sigma-1)}})],$$

quando $|x| \to \infty$, e C_1, C_2 são constantes não nulas.

Demonstração. Veja em [73]. □

Lema 1.4.2. *Para $1 \leq p \leq \infty$, e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$, se $\alpha > \frac{n}{p^*}$, então $f_\alpha \in L^p$, onde*

$$\mathcal{F}(f_\alpha) = \chi(\xi)|\xi|^{-\alpha}.$$

Demonstração. Veja em [73]. □

Proposição 1.4.3. *Se $\sigma > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$ e $f \in M_p^q$, então $\frac{1}{p} + \frac{\sigma-1}{q} \leq \sigma\left(\frac{1}{2} + \frac{r}{\sigma n}\right)$.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $\frac{1}{p} + \frac{\sigma-1}{q} - \sigma\left(\frac{1}{2} + \frac{r}{\sigma n}\right) > 0$, assim é possível escolher $\lambda > 0$ tal que $0 < \sigma\lambda - \frac{n}{p^*} = n(\frac{1}{p} + \frac{\sigma-1}{q} - \sigma\left(\frac{1}{2} + \frac{r}{\sigma n}\right))$, para esse λ temos $q(n + \frac{\sigma}{\sigma-1}(\frac{r}{\sigma} + \lambda - \frac{n}{2})) = n$. Agora, pelo Lema 1.4.2, temos que $f_{\sigma\lambda} \in L^p$, mas $f(D)f_{\sigma\lambda}$ não está em L^q, onde $\mathcal{F}(f(D)f_{\sigma\lambda})(\xi) = f(\xi)\mathcal{F}(f_{\sigma\lambda})(\xi) = \chi(\xi)|\xi|^{-\sigma(\frac{r}{\sigma}+\lambda)}e^{i|\xi|^\sigma}$, pois como $n + \frac{\sigma}{\sigma-1}(\frac{r}{\sigma} + \lambda - \frac{n}{2}) > 0$, pelo Lema 1.4.1, com $r + \sigma\lambda$ no lugar de r, temos:

$$f(D)f_{\sigma\lambda}(x) = C_1|x|^{-(n+\frac{\sigma}{\sigma-1}(\frac{r}{\sigma}+\lambda-\frac{n}{2}))} e^{iC_2|x|^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}}[1 + O(|x|^{-\frac{\sigma}{2(\sigma-1)}})]$$

quando $|x| \to \infty$, logo para x suficientemente grande temos

$$|x|^{-(n+\frac{\sigma}{\sigma-1}(\frac{r}{\sigma}+\lambda-\frac{n}{2}))} \lesssim |f(D)f_{\sigma\lambda}(x)|$$

e o lado esquerdo não está em L^q pela escolha de λ. O que produz um absurdo pois $f \in M_p^q$. □

Observação 1.4.4. *Note que quando $r < \frac{\sigma n}{2}$ a intersseção da reta $\frac{1}{p} + \frac{\sigma-1}{q} = \sigma\left(\frac{1}{2} + \frac{r}{\sigma n}\right)$ com $p = 1$ é um ponto menor do que 1, enquanto que com relação a diagonal a intersseção ocorre no ponto $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{r}{\sigma n} < 1$. No caso $r \geq \frac{\sigma n}{2}$ a proposição isolada não fornece nenhuma informação. Ou seja, só podemos concluir que $1 \leq p \leq q \leq \infty$, e já sabemos da teoria de multiplicadores que isso vale em geral.*

Caso $\sigma < 1$

Lema 1.4.5. *Se $\sigma > 1$ e $n + \frac{\sigma}{\sigma-1}(\frac{r}{\sigma} - \frac{n}{2}) > 0$, então*

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = C_1|x|^{-(n+\frac{\sigma}{\sigma-1}(\frac{r}{\sigma}-\frac{n}{2}))}e^{iC_2|x|^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}}[1 + O(|x|^{-\frac{\sigma}{2(\sigma-1)}})] + b_\sigma(|x|),$$

quando $|x| \to 0$, C_1, C_2 são constantes não nulas e b_σ é uma função contínua.

Demonstração. Veja em [73]. □

Proposição 1.4.6. *Se $\sigma < 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$ e $f \in M_p^q$, então $\frac{1}{p} + \frac{\sigma-1}{q} \leq \sigma\left(\frac{1}{2} + \frac{r}{\sigma n}\right)$.*

Demonstração. A demonstração é similar a da Proposição 1.4.3. Suponha, por absurdo, que $\frac{1}{p} + \frac{\sigma-1}{q} - \sigma\left(\frac{1}{2} + \frac{r}{\sigma n}\right) > 0$, assim é possível escolher $\lambda > 0$ tal que $0 < \sigma\lambda - \frac{n}{p^*} = n(\frac{1}{p} + \frac{\sigma-1}{q} - \sigma\left(\frac{1}{2} + \frac{r}{\sigma n}\right))$, para esse λ temos $q(n + \frac{\sigma}{\sigma-1}(\frac{r}{\sigma} + \lambda - \frac{n}{2})) = n$. Agora, pelo Lema 1.4.2, temos que $f_{\sigma\lambda} \in L^p$, mas $f(D)f_{\sigma\lambda}$ não está em L^q, onde $\mathcal{F}(f(D)f_{\sigma\lambda})(\xi) = f(\xi)\mathcal{F}(f_{\sigma\lambda})(\xi) = \chi(\xi)|\xi|^{-\sigma(\frac{r}{\sigma}+\lambda)}e^{i|\xi|^\sigma}$, pois como $n + \frac{\sigma}{\sigma-1}(\frac{r}{\sigma} + \lambda - \frac{n}{2}) > 0$, pelo Lema 1.4.5, com $r + \sigma\lambda$ no lugar de r, temos:

$$f(D)f_{\sigma\lambda}(x) = C_1|x|^{-(n+\frac{\sigma}{\sigma-1}(\frac{r}{\sigma}+\lambda-\frac{n}{2}))}e^{iC_2|x|^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}}[1 + O(|x|^{-\frac{\sigma}{2(\sigma-1)}})] + b_\sigma(|\xi|)$$

quando $|x| \to 0$, logo para x suficientemente pequeno temos

$$|b_\sigma(|x|)| + |x|^{-\frac{n}{q}} \lesssim |f(D)f_{\sigma\lambda}(x)|$$

e o lado esquerdo não está em L^q, pois se tivesse como b_σ é contínua teríamos que $|x|^{-\frac{n}{q}}$ está em L^q, o que daria um absurdo, logo f não pertence a M_p^q. □

Caso $\sigma = 1$

Lema 1.4.7. *Para $\sigma = 1$ temos que $\mathcal{F}^{-1}(f) \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{S}^{n-1})$ e*

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = b(x) + C(sgn(1-|x|))|1-|x||^{r-\frac{n+1}{2}}(1 + o(1)),$$

quando $|x| \to 1$. Onde $b \in L^\infty$, se $r - \frac{n-1}{2} < 1$ e $r - \frac{n-1}{2}$ é não inteiro. Além disso:

$$a(x) \doteq \mathcal{F}^{-1}(f)(x) = O(|x|^{-N}),$$

quando $|x| \to \infty$, para qualquer N.

Demonstração. Veja em [73]. □

Proposição 1.4.8. *Se $f \in M_p^q$, $\frac{n}{p} - \frac{1}{q} - \frac{n-1}{2} \leq r$.*

Demonstração. Pelo Lema 1.4.7 temos que $a \in L^q$ implica que $q(r - \frac{n+1}{2}) > -1$, ou seja, $r > \frac{n+1}{2} - \frac{1}{p}$. Vamos supor que $f \in M_p^q$, mas $\frac{n}{p} - \frac{1}{q} - \frac{n-1}{2} > r$, então $r = \frac{n}{p} - \frac{1}{q} - \frac{n-1}{2} - \epsilon$, com $\epsilon > 0$. Considere $\lambda = \frac{n}{p^*} + \epsilon$, segue pelo Lema 1.4.2 que $f_\lambda \in L^p$, logo segue de nossa hipótese que $f(D)f_\lambda \in L^q$, assim aplicando a conclusão do começo da demonstração para $r + \lambda$ no lugar de r temos que $r + \lambda > \frac{n+1}{2} - \frac{1}{q}$. Por outro lado $r + \lambda = \frac{n}{p} - \frac{1}{q} - \frac{n-1}{2} - \epsilon + \frac{n}{p^*} + \epsilon = \frac{n+1}{2} - \frac{1}{q}$, um absurdo que conclui a demontração. □

1.5 Aplicação para Equações de Evolução Lineares

Nessa seção usaremos a seguinte notação para representar a solução

$$u(t,x) = K_1(t,\cdot) * \psi(x) + K_2(t,\cdot) * \phi(x),$$

em que

$$\begin{aligned} K_1(t,x) :=& \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(\frac{\sin(t|\xi|^\sigma)}{|\xi|^\sigma}\Big) \\ K_2(t,x) :=& \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(\cos(t|\xi|^\sigma)\Big). \end{aligned}$$

Estimativa na linha dual

Teorema 1.5.1. *Suponha $\sigma \geq 2$ e $1 < p \leq 2$ ou $p = 1$ desde que $\sigma > 2$. Se $u(t,x)$ é solução de*

$$u_{tt} + (-\Delta)^\sigma u = 0, \;\; u(0,x) = \phi(x), \;\; u_t(0,x) = \psi(x),$$

então

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^{p^*}} \leq ct^{\frac{2n}{\sigma}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\Big(\|\phi\|_{L^p} + t\|\psi\|_{L^p}\Big).$$

onde c é uma constante independente dos dados iniciais.

Demonstração. Em decorrência das Proposições 1.3.5 e 1.2.1 e da desigualdade (1.3) temos que:

$$\Big\|F^{-1}_{\xi\to x}\Big(\Big(e^{i|\xi|^\sigma t} + e^{-i|\xi|^\sigma t}\Big)\frac{1}{2}F(\phi)(\xi)\Big)\Big\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq Ct^{\frac{2n}{\sigma}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\|\phi\|_{L^p}.$$

Pelas proposições 1.3.5, 1.2.2 e 1.2.6 juntamente com a observação 1.1.1 temos:

$$\begin{aligned} &\Big\|\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(\Big(e^{i|\xi|^\sigma t} - e^{-i|\xi|^\sigma t}\Big)\frac{1}{2i|\xi|^\sigma}\mathcal{F}(\psi)(\xi)\Big)\Big\|_{L^{p^*}} \\ \leq& ct\Big\|\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(\sin(t|\xi|^\sigma)\frac{1-\chi(t|\xi|^\sigma)}{t|\xi|^\sigma}\mathcal{F}(\psi)(\xi)\Big)\Big\|_{L^{p^*}} + ct^{1+\frac{2n}{\sigma}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\|\psi\|_{L^p} \\ \leq& ct^{1+\frac{2n}{\sigma}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\|\psi\|_{L^p}. \end{aligned}$$

□

Teorema 1.5.2. *Suponha $\sigma \neq 1$ e $1 < p \leq 2$ e $\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\Big)2n\Big(\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{2}\Big) \leq 1$ ou $p = 1$ e $n\Big(\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{2}\Big) < 1$. Se $u(t,x)$ é solução de*

$$u_{tt} + (-\Delta)^\sigma u = 0, \;\; u(0,x) = \phi(x), \;\; u_t(0,x) = \psi(x),$$

então

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^{p^*}} \leq ct^{\frac{2n}{\sigma}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\Big(\|\phi\|_{L^p} + t\||D|^\sigma\phi\|_{L^p} + t\|\psi\|_{L^p}\Big).$$

onde c é uma constante independente dos dados iniciais.

Demonstração. Em decorrência das Proposições 1.3.5 e 1.2.1 e da desigualdade (1.3) temos que:

$$\begin{aligned}
&\Big\|\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(\Big(e^{i|\xi|^\sigma t}-e^{-i|\xi|^\sigma t}\Big)\frac{1}{2}\mathcal{F}(\phi)(\xi)\Big)\Big\|_{L^{p^*}}\\
\leq& ct\Big\|\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(\cos(t|\xi|^\sigma)\big(1-\chi(t|\xi|^\sigma)\big)\mathcal{F}(\phi)(\xi)\Big)\Big\|_{L^{p^*}}+\Big\|\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(\Big(\frac{e^{i|\xi|^\sigma t}-e^{-i|\xi|^\sigma t}}{2|\xi|^\sigma}\Big)|\xi|^\sigma\mathcal{F}(\phi)(\xi)\Big)\Big\|_{L^{p^*}}\\
\leq& ct^{\frac{2n}{\sigma}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\|\phi\|_{L^p}+ct^{1+\frac{2n}{\sigma}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\||D|^\sigma\phi\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

Pelas proposições 1.3.5, 1.2.2 e 1.2.6 juntamente com a observação 1.1.1 temos:

$$\begin{aligned}
&\Big\|\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(\Big(e^{i|\xi|^\sigma t}-e^{-i|\xi|^\sigma t}\Big)\frac{1}{2i|\xi|^\sigma}\mathcal{F}(\psi)(\xi)\Big)\Big\|_{L^{p^*}}\\
\leq& ct\Big\|\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(\sin(t|\xi|^\sigma)\frac{1-\chi(t|\xi|^\sigma)}{t|\xi|^\sigma}\mathcal{F}(\psi)(\xi)\Big)\Big\|_{L^{p^*}}+ct^{1+\frac{2n}{\sigma}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\|\psi\|_{L^p}\\
\leq& ct^{1+\frac{2n}{\sigma}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\|\psi\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

□

A proposição 1.3.5 impõe uma outra restrição em p, mas a demonstração do resultado a seguir é análoga a dada no Teorema 1.5.2.

Teorema 1.5.3. *Suponha que $1<p\leq 2$ e $(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})\leq\frac{1}{n+1}$ e seja $u(t,x)$ solução de*

$$u_{tt}-\Delta u=0,\;\; u(0,x)=\phi(x),\;\; u_t(0,x)=\psi(x).$$

Então

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^{p^*}}\leq ct^{2n(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\Big(\|\phi\|_{L^p}+t\||D|\phi\|_{L^p}+t\|\psi\|_{L^p}\Big),$$

onde c é uma constante independente dos dados iniciais.

Demonstração. Análoga a dada no Teorema 1.5.2. □

Agora vamos obter estimativa não singular para a energia com regularidade nos dados iniciais, note que mesmo no caso $\sigma=1$ não temos restrição em $1<p\leq 2$.

Teorema 1.5.4. *Suponha que $1<p\leq 2$ e $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ e seja $u(t,x)$ solução de*

$$u_{tt}-\Delta u=0,\;\; u(0,x)=\phi(x),\;\; u_t(0,x)=\psi(x),$$

então

$$\|(u_t(t,\cdot),\nabla u(t,\cdot))\|_{L^q}\leq c(1+t)^{-\frac{n-1}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\Big(\|\phi\|_{H^{p,r+1}}+\|\psi\|_{H^{p,r}}\Big),$$

onde c é uma constante independente dos dados iniciais e $r=n\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big)$.

Demonstração. Veja em [22]. □

Teorema 1.5.5. *Suponha que $1<p\leq 2$ e $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ e seja $u(t,x)$ solução de*

$$u_{tt}+(-\Delta)^\sigma u=0,\;\; u(0,x)=\phi(x),\;\; u_t(0,x)=\psi(x),$$

com $\sigma\neq 1$, então

$$\|(u_t(t,\cdot),(-\Delta)^{\sigma/2}u(t,\cdot))\|_{L^q}\leq c(1+t)^{-g(\sigma)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\Big(\|\phi\|_{L^{p,\sigma+r}}+\|\psi\|_{L^{p,r}}\Big).$$

onde c é uma constante independente dos dados iniciais, $r = n\big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\big)$ e $g(\sigma) = \frac{n}{\sigma}$ quando $\sigma \geq 2$ e $g(\sigma) = \frac{n}{2}$ quando $0 < \sigma < 2$, $\sigma \neq 1$.

Demonstração. Primeiramente note que em baixa frequência pela Proposição 1.2.1 temos

$$\Big\|\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\cos(t|\xi|^\sigma)}{|\xi|^r}\big(1-\chi(t|\xi|^\sigma)\big)|\xi|^{\sigma+r}\widehat{\phi}(\xi)\Big)\Big\|_{L^q} \leq Ct^{\frac{r}{\sigma}-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\||D|^{\sigma+r}\phi\|_{L^p},$$

com $r \leq n\big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\big)$. Enquanto que para frequências altas, pela Proposição 1.3.5, temos

$$\Big\|\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{e^{it|\xi|^\sigma}}{|\xi|^r}\chi(t|\xi|^\sigma)|\xi|^{r+\sigma}\widehat{\phi}(\xi)\Big)\Big\|_{L^q} \leq Ct^{\frac{r}{\sigma}-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\||D|^{r+\sigma}\phi\|_{L^p},$$

para $n\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\Big)\big(1 - \frac{\sigma}{2}\big) \leq r$. Portanto tomando $r = n\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\Big)$, temos

$$\Big\|\mathcal{F}^{-1}\Big(\cos(t|\xi|^\sigma)|\xi|^\sigma\widehat{\phi}(\xi)\Big)\Big\|_{L^q} \leq C\||D|^{\sigma+n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\phi\|_{L^p}.$$

Agora tome $r_1 = \max\{0, n\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\Big)\big(1 - \frac{\sigma}{2}\big)\}$, logo

$$\Big\|\mathcal{F}^{-1}\Big(\cos(t|\xi|^\sigma)|\xi|^\sigma\widehat{\phi}(\xi)\Big)\Big\|_{L^q} \leq Ct^{-g(\sigma)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\||D|^{r_1+\sigma}\phi\|_{L^p},$$

onde $g(\sigma) = \frac{n}{\sigma}$ quando $\sigma \geq 2$ e $g(\sigma) = \frac{n}{2}$ quando $\sigma < 2$ e $\sigma \neq 1$. Como $r \geq r_1$, temos

$$\Big\|\mathcal{F}^{-1}\Big(\cos(t|\xi|^\sigma)|\xi|^\sigma\widehat{\phi}(\xi)\Big)\Big\|_{L^q} \leq C(1+t)^{-g(\sigma)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|\langle D\rangle^{\sigma+n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\phi\|_{L^p},$$

onde $\langle\xi\rangle = \big(1 + |\xi|^2\big)^{\frac{1}{2}}$. Analogamente temos

$$\Big\|\mathcal{F}^{-1}\Big(\sin(t|\xi|^\sigma)\widehat{\psi}(\xi)\Big)\Big\|_{L^q} \leq C(1+t)^{-g(\sigma)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|\langle D\rangle^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\psi\|_{L^p},$$

□

Teorema 1.5.6. *Suponha que $1 < p \leq 2$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e seja $u(t,x)$ solução de*

$$u_{tt} + (-\Delta)^\sigma u = 0, \;\; u(0,x) = \phi(x), \;\; u_t(0,x) = \psi(x),$$

com $\sigma > 0$, então

$$\|u(t,\cdot))\|_{L^q} \leq c(1+t)^{-g(\sigma)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\Big(\|\phi\|_{L^{p,r}} + \|\psi\|_{L^{p,r-\sigma}}\Big).$$

onde c é uma constante independente dos dados iniciais, $r = n\big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\big) \geq \sigma$ e $g(\sigma) = \frac{n}{\sigma}$ quando $\sigma \geq 2$, $g(\sigma) = \frac{n}{2}$ quando $0 < \sigma < 2$, $\sigma \neq 1$ e $g(1) = \frac{n-1}{2}$.

Demonstração. O caso $\sigma = 1$ encontra-se em [22], a demonstração dos demais casos é análoga ao Teorema anterior. □

Estimativa com o primeiro dado nulo

Teorema 1.5.7. *Suponha $\sigma \neq 1$ e seja $u(t,x)$ solução de*

$$u_{tt} + (-\Delta)^\sigma u = 0, \;\; u(0,x) \equiv 0, \;\; u_t(0,x) = \psi(x),$$

Então para todo $1 < p \leq q < \infty$ *com* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \geq 1$ *e* $\frac{1}{p}+\frac{\sigma-1}{q} \leq \sigma\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\Big)$ *ou* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \leq 1$ *e* $\frac{\sigma-1}{p}-\frac{1}{q} \leq \sigma\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\Big)$, *temos*

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^q} \leq C_{p,q}t^{1+\frac{n}{\sigma}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}\|\psi\|_{L^p}. \tag{1.25}$$

onde $C_{p,q}$ *é uma constante independente dos dados iniciais.*

Demonstração. Basta notar que podemos decompor o multiplicador de $u(t,x)$ em frequências altas e baixas como a seguir.

$$u(t,\cdot) = \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(\Big(e^{i|\xi|^\sigma t}-e^{-i|\xi|^\sigma t}\Big)\frac{1}{2i|\xi|^\sigma}\chi(t|\xi|^\sigma)\mathcal{F}(\psi)(\xi)\Big) + \mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(\frac{\sin(t|\xi|^\sigma)}{|\xi|^\sigma}\big(1-\chi(t|\xi|^\sigma)\big)\mathcal{F}(\psi)\Big)$$

e agora para o primeiro multiplicador combine a Proposição 1.3.15 com a Observação 1.1.1, e analogamente para o segundo combine a Proposição 1.2.2 com a mesma observação e conclua o Teorema na interseção dos seus domínios de validade para p e q.

□

Estimativa com regularidade no primeiro dado

Teorema 1.5.8. *Suponha* $\sigma \neq 1$ *e seja* $u(t,x)$ *solução de*

$$u_{tt}+(-\Delta)^\sigma u = 0,\ \ u(0,x)=\phi(x),\ \ u_t(0,x)=\psi(x),$$

Então para todo $1 < p \leq q < \infty$ *com* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \geq 1$ *e* $\frac{1}{p}+\frac{\sigma-1}{q} \leq \sigma\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\Big)$ *ou* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \leq 1$ *e* $\frac{\sigma-1}{p}-\frac{1}{q} \leq \sigma\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\Big)$, *temos*

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^q} \leq ct^{\frac{n}{\sigma}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}\Big(\|\phi\|_{L^p}+t\||D|^\sigma\phi\|_{L^p}+t\|\psi\|_{L^p}\Big). \tag{1.26}$$

onde c *é uma constante independente dos dados iniciais.*

Demonstração. Primeiramente observe que:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(\cos(t|\xi|^\sigma)\mathcal{F}(\phi)(\xi)\Big)\\
=&\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(\big(1-\chi(t|\xi|^\sigma)\big)\cos(t|\xi|^\sigma)\mathcal{F}(\phi)(\xi)\Big)+\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(\chi(t|\xi|^\sigma)\frac{e^{i|\xi|^\sigma t}+e^{-i|\xi|^\sigma t}}{2|\xi|^\sigma}|\xi|^\sigma\mathcal{F}(\phi)(\xi)\Big)\\
=&\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(\big(1-\chi(t|\xi|^\sigma)\big)\cos(t|\xi|^\sigma)\mathcal{F}(\phi)(\xi)\Big)+\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(\chi(t|\xi|^\sigma)\frac{e^{i|\xi|^\sigma t}+e^{-i|\xi|^\sigma t}}{2|\xi|^\sigma}\mathcal{F}(|D|^\sigma\phi)(\xi)\Big).
\end{aligned}$$

A partir de agora a demonstração é análoga a do Teorema 1.5.7. □

O Teorema a seguir será usado no próximo capítulo.

Teorema 1.5.9. *Suponha* $\sigma > 1$ *e seja* $u(t,x)$ *solução de*

$$u_{tt}+(-\Delta)^\sigma u = 0,\ \ u(0,x)=\phi(x),\ \ u_t(0,x)=\psi(x).$$

Se $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *e* $\phi \in H^1(\mathbb{R}^n)$, *então para* $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{q} \geq \frac{1}{2}-\frac{1}{n}$, *temos que*

$$u(t,x) \in C\big(\mathbb{R}, L^q(\mathbb{R}^n)\big).$$

Demonstração. Pelo Teorema da convergência dominada, temos:

$$\begin{aligned}
&\|\big(K_1(t+\Delta t,\cdot)-K_1(t,\cdot)\big)*_x\psi(\cdot)\|_{L^q_x}^2\\
&\leq C\|\left(\frac{\sin((t+\Delta t)|\xi|^\sigma)}{|\xi|^\sigma}-\frac{\sin(t|\xi|^\sigma)}{|\xi|^\sigma}\right)\widehat{\psi}(\xi)(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L^2}^2\\
&\leq C\Delta t\int_{|\xi|\leq 1}|\widehat{\psi}(\xi)|^2d\xi+C\int_{|\xi|>1}\Big(\sin((t+\Delta t)|\xi|^\sigma)-\sin(t|\xi|^\sigma)\Big)^2|\widehat{\psi}(\xi)|^2d\xi\to 0,
\end{aligned}$$

quando $\Delta t\to 0$.
Agora, como $\frac{1}{2}\geq\frac{1}{q}\geq\frac{1}{2}-\frac{1}{n}$, temos o mergulho de Sobolev A.2.2 $H^1(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow L^q$. Logo, como $\phi\in H^1(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$\begin{aligned}
&\|\big(K_2(t+\Delta t,\cdot)-K_2(t,\cdot)\big)*_x\phi(\cdot)\|_{L^q_x}\\
&\leq C\|\big(\cos((t+\Delta t)|\xi|^\sigma)-\cos(t|\xi|^\sigma)\big)\widehat{\phi}(\xi)(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L^2}\to 0,
\end{aligned}$$

quando $\Delta t\to 0$.

□

Se nos restringirmos a $L^2(\mathbb{R}^n)$ temos:

Teorema 1.5.10. *Suponha $\sigma>1$ e seja $u(t,x)$ solução de*

$$u_{tt}+(-\Delta)^\sigma u=0,\ \ u(0,x)=\phi(x),\ \ u_t(0,x)=\psi(x).$$

Se $\psi\in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\phi\in\dot{H}^\sigma(\mathbb{R}^n)$, então temos que

$$u(t,x)\in C\big(\mathbb{R},\dot{H}^\sigma(\mathbb{R}^n)\big)\cap C^1\big(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^n)\big).$$

Demonstração. Como $\phi\in\dot{H}^\sigma(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$\begin{aligned}
&\|\big(\partial_tK_2(t+\Delta t,\cdot)-\partial_tK_2(t,\cdot)\big)*_x\phi(\cdot)\|_{L^2_x}\\
&\leq C\|\big(\sin((t+\Delta t)|\xi|^\sigma)-\sin(t|\xi|^\sigma)\big)\widehat{\phi}(\xi)|\xi|^\sigma\|_{L^2}\to 0,
\end{aligned}$$

quando $\Delta t\to 0$. Analogamente, temos

$$\begin{aligned}
&\|\big(\partial_tK_1(t+\Delta t,\cdot)-\partial_tK_1(t,\cdot)\big)*_x\psi(\cdot)\|_{L^2_x}^2\\
&\leq C\|\left(\sin((t+\Delta t)|\xi|^\sigma)-\sin(t|\xi|^\sigma)\right)\widehat{\psi}(\xi)\|_{L^2}^2\\
&\leq C\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\sin((t+\Delta t)|\xi|^\sigma)-\sin(t|\xi|^\sigma)\Big)^2|\widehat{\psi}(\xi)|^2d\xi\to 0,
\end{aligned}$$

quando $\Delta t\to 0$. O que prova que $u(t,x)\in C^1\big(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^n)\big)$, a prova que também temos $u(t,x)\in C\big(\mathbb{R},\dot{H}^\sigma(\mathbb{R}^n)\big)$ é análoga.

□

Capítulo 2

Existência e Unicidade para uma equação de Evolução Semilinear

2.1 Problema de Cauchy Semilinear

Vamos considerar o problema de Cauchy semilinear

$$\begin{cases} u_{tt} + (-\Delta)^{\sigma} u = |u|^{p}, & t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^{n} \\ u(0,x) = 0, \quad u_t(0,x) = g(x), \end{cases} \tag{2.1}$$

com $p > 1$ e $\sigma > 1$.
Para conhecer mais sobre problemas Semilineares veja [11] e [22].

Observação 2.1.1. *Para o problema de Cauchy* (2.1) *vamos provar existência global e local, em todos os casos estaremos considerando que os dados iniciais estão sendo considerados no sentido das distribuições, ou seja, a solução que procuramos deve satisfazer $u(t,x) \to u(0,x)$ quando $t \to 0$ fracamente. Isso será imediato da representação de Duhamel e dessa que isso vale para o caso linear. No caso $2 < q \leq \frac{2n}{n-2}$, temos também no sentido forte em L^q, isto é, $u(t,x) \to u(0,x)$ em L^q quando $t \to 0$, isso segue também da representação via Duhamel e do Teorema* 1.5.9.

Vamos definir o núcleo $K_1(t,x)$ relativo a parte linear por:

$$K_1(t,x) := \mathcal{F}^{-1}_{\xi \to x}\Big(\frac{\sin(t|\xi|^{\sigma})}{|\xi|^{\sigma}}\Big).$$

No que segue iremos fixar $\tilde{q}(r)$ dado por

$$\frac{1}{\tilde{q}(r)} \doteq \frac{1}{\sigma - 1}\left(\sigma\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{r}\right) \tag{2.2}$$

Quando $r = 1$, faremos $\tilde{q} := \tilde{q}(1)$. Vamos dividir as demonstrações de Existência e Unicidade em dois casos, quando $n \leq 2\sigma$ e quando $n > 2\sigma$ que corresponderão, respectivamente, aos casos $\tilde{q} \leq 2$ e $\tilde{q} > 2$.

No caso $\sigma = 1$ não podemos ter existência global para dados grandes em qualquer espaço $L^q(\mathbb{R}^n)$ veja [30], e esperamos essa mesma situação para $\sigma \geq 1$ qualquer. A partir disso vamos mostrar que a norma $\|g\|_{L^{\frac{n(p-1)}{\sigma(p+1)}}}$ ser pequena é uma condição necessária para se ter existência global para a equação (2.1). Se u é uma solução para (2.1), então

$$\lambda^{h} u(\lambda t, \lambda^{\frac{1}{\sigma}} x), \qquad \text{com} \quad h \doteq \frac{2}{p-1},$$

também é solução da (2.1) para qualquer $\lambda > 0$, com velocidade inicial $\lambda^{h+1} g(\lambda^{\frac{1}{\sigma}} x)$. Logo nós temos

$$\lambda^{h+1} \|g(\lambda^{\frac{1}{\sigma}} \cdot)\|_{L^q} = \lambda^{h+1-\frac{n}{\sigma q}} \|g\|_{L^q}, \tag{2.3}$$

segue que a norma L^q é invariante, se e somente se, $h+1 = \frac{n}{\sigma q}$, assim encontramos $q_c \doteq \frac{n(p-1)}{\sigma(p+1)}$. Suponha que para algum $q \neq q_c$ temos que para dados com norma L^q pequena exista solução global, então a igualdade (2.3) mostra que é possível encontrar solução global para todo dado inicial em L^q, ora, mas já sabemos que isso não é possível. Assim a única chance de se provar existência global é para dados pequenos em L^{q_c}. Isso fornece para quais valores de p é possível obter existência Global, basta notarmos que $q_c \geq 1$ é equivalente a $p \geq p_c(n)$, onde definimos:

$$p_c(n) \doteq 1 + \frac{2\sigma}{[n-\sigma]_+}. \tag{2.4}$$

Dizemos que $p_c(n)$ é o expoente crítico.

2.1.1 Caso $2\sigma \geq n$

Existência e Unicidade Local

Consideremos para $q \geq \tilde{q}$

$$X(T) = \{u \in \mathcal{L}^\infty([0,T], L^{\tilde{q}}(\mathbb{R}^n)) \cap L^q(\mathbb{R}^n)) : \ \|u\|_{X(T)} < \infty\},$$

com a norma

$$\|u\|_{X(T)} = \operatorname*{ess\,sup}_{T \geq t \geq 0} \left(\|u(t,\cdot)\|_{L^q} + \|u(t,\cdot)\|_{L^{\tilde{q}}} \right)$$

Agora para $u \in X(T)$, defina

$$Pu(t,x) \doteq u^{lin}(t,x) + Nu(t,x),$$

onde

$$Nu(t,x) = \int_0^t K_1(t-s,\cdot) *_{(x)} |u(s,\cdot)|^p ds.$$

onde $u^{lin}(t,x) \doteq K_1(t,\cdot) *_{(x)} \psi(\cdot)$.

Lema 2.1.2. *O espaço $X(T)$ é Banach.*

Demonstração. Segue do fato que os espaços L^p são normados e das propriedades do supremo que o espaço $X(T)$ é também normado. A completude também segue imediatamente da completude de $L^{\tilde{q}} \cap L^q$ e de estarmos tomando o supremo essencial em t. □

Lema 2.1.3. *Suponha $\sigma > 1$ e $n \leq 2\sigma$. Se $1 \leq p \leq \frac{q}{2}$ para qualquer $q \geq 2$, existe $1 > T > 0$ talque para cada $u, v \in X(T)$ tem-se que $Nu, Nv \in X(T)$ e valem as seguintes desigualdades*

$$\|Nu\|_{X(T)} \leq CT^{2-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)} \|u\|^p_{X(T)} \tag{2.5}$$

$$\|Nu - Nv\|_{X(T)} \leq CT^{2-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)} \|u-v\|_{X(T)} \left(\|u\|^{p-1}_{X(T)} + \|v\|^{p-1}_{X(T)}\right), \tag{2.6}$$

onde a constante C não depende de $1 > T > 0$.

Demonstração. Usando a desigualdade integral de Minkowski e o Teorema 1.5.7 para os pares $(\tilde{q}, \tilde{q})$ e $(q, 2)$, que são pares admissíveis para aquele Teorema no caso $2\sigma \geq n$, temos

$$\begin{aligned}\|Nu(t,\cdot)\|_{\tilde{q}} &\lesssim \int_0^t \|K_1(t-s,\cdot) * |u(s,\cdot)|^p\|_{\tilde{q}} ds \lesssim \int_0^t (t-s)^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{\tilde{q}}-\frac{1}{\tilde{q}}\right)} \|u(s,\cdot)\|_{p\tilde{q}}^p ds \\ &\lesssim \int_0^t (t-s)^1 ds \|u\|_{X(T)}^p \lesssim T^2 \|u\|_{X(T)}^p.\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\|Nu(t,\cdot)\|_{q} &\lesssim \int_0^t \|K_1(t-s,\cdot) * |u(s,\cdot)|^p\|_{2} ds \lesssim \int_0^t (t-s)^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)} \|u(s,\cdot)\|_{2p}^p ds \\ &\lesssim \int_0^t (t-s)^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)} ds \|u\|_{X(T)}^p \lesssim T^{2-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)} \|u\|_{X(T)}^p.\end{aligned}$$

Note que usamos $\tilde{q} \leq p\tilde{q} \leq q$ e $\tilde{q} \leq 2p \leq q$ que vêm da hipótese $1 \leq p \leq \frac{q}{2}$ e de que nesse caso temos $\tilde{q} \leq 2$. Na última desigualdade usamos também que $2 - \frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}}\right) > 0$, para qualquer $q \geq 2$ no caso $n \leq 2\sigma$.
Para provar a outra desigualdade observe que pelo Teorema do Valor Médio é possível provar a seguinte desigualdade

$$||u|^p - |v|^p| \leq C_0|u-v|\big(|u|^{p-1} + |v|^{p-1}\big),$$

usando isso e em seguida a desigualdade de Hölder temos que

$$\||u|^p - |v|^p\|_{L^r} \leq C_0\|u-v\|_{L^{rp}}\big(\|u\|_{L^{rp}}^{p-1} + \|v\|_{L^{rp}}^{p-1}\big)$$

A partir de agora o argumento segue as mesmas linhas usadas na demonstração da desigualdade anterior.

□

Teorema 2.1.4. *Suponha $\sigma > 1$, $n < 2\sigma$, $1 \leq p \leq \frac{q}{2}$ e $q \geq \tilde{q}$ qualquer. Para $R > 0$, existe $1 > T > 0$ talque para cada $u, v \in X(T)$ com*

$$\|\psi\|_{\tilde{q}} + \|\psi\|_2 < R$$

temos uma única solução fraca $u \in L^\infty\big([0,T], L^q(\mathbb{R}^n) \cap L^{\tilde{q}}(\mathbb{R}^n)\big)$ para (2.1), tal que para $r = q, \tilde{q}$ temos

$$\|u(t,\cdot)\|_r \leq 2C_0 T^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)}\Big(\|\psi\|_q + \|\psi\|_2\Big), \tag{2.7}$$

para todo $T \geq t \geq 0$ e $C_0 \geq \max\{C_{\tilde{q},\tilde{q}}, C_{2,q}\}$ não depende de T, onde $C_{p,q}$ foram definidas no Teorema 1.5.7. Para $p = 1$ temos que T não depende de R e nesse caso a solução existe e é única em todo $L^\infty([0,T], L^q(\mathbb{R}^n) \cap L^{\tilde{q}}(\mathbb{R}^n))$ para cada dado inicial $\psi \in L^{\tilde{q}}(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Segue imediatamente das desigualdades (2.5) e (2.6) e da definição de P que

$$\|Pu - Pv\|_{X(T)} \leq CT^{2-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)}\|u-v\|_{X(T)}\big(\|u\|_{X(T)}^{p-1} + \|v\|_{X(T)}^{p-1}\big), \tag{2.8}$$

e para $T \leq 1$

$$\begin{aligned}\|P(u)\|_{X(T)} \leq& \|K_1(t,\cdot) *_{(x)} \psi(\cdot)\|_{L_x^q} + \|K_1(t,\cdot) *_{(x)} \psi(\cdot)\|_{L_x^{\tilde{q}}} + CT^{2-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)}\|u\|_{X(T)}^p \\ \leq& C_0 T\|\psi\|_{\tilde{q}} + C_0 T^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)}\|\psi\|_2 + CT^{2-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)}\|u\|_{X(T)}^p \\ \leq& C_0 T^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)}\Big(\|\psi\|_2 + \|\psi\|_2\Big) + CT^{2-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)}\|u\|_{X(T)}^p\end{aligned} \tag{2.9}$$

onde $C_0 \geq \max\{C_{\tilde{q},\tilde{q}}, C_{2,q}\}$ não depende de T, onde $C_{p,q}$ foram definidas no Teorema 1.5.7. Temos que

$0 < 1 - \frac{n}{2\sigma} < 1 - \frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)$. Assim é possível tomar $T > 0$ pequeno de modo que $C_0 T^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)} R + CT^{2-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)} R^p < R$. Logo, pela desigualdade (2.9), temos que para $\|\psi\|_{\tilde{q}} + \|\psi\|_2 < R$ o operador P leva $B_{X(T)}[0,R]$ nela mesma, onde estamos denotando por $B_{X(T)}[0,R]$ a bola fechada de centro 0 e raio R em $X(T)$. Agora como $2 - \frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right) > 0$ é possível diminuir $T > 0$, caso nescessário, para termos que $4CT^{2-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)} R^{p-1} < 1$. Logo, pela desigualdade (2.8), concluímos que para esse T

$$\|Pu - Pv\|_{X(T)} \leq \frac{1}{2}\|u - v\|_{X(T)},$$

ou seja P restrito a $B_{X(T)}[0,R]$ é uma contração para $T > 0$ suficientemente pequeno, portanto pelo Teorema do Ponto Fixo A.2.1 temos que existe um único o ponto fixo $P(u) = u \in B_{X(T)}[0,R]$. Como $CT^{2-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)} R^{p-1} < \frac{1}{2}$, temos pela desigualdade (2.9) e pela igualdade $P(u) = u$ que

$$\|u\|_{X(T)} \leq 2C_0 T^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)} \left(\|\psi\|_{\tilde{q}} + \|\psi\|_2\right)$$

Finalmente se tivermos que $4C_0 T^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)} < 1$, então podemos provar a unicidade. Ora se u, v são soluções que satisfazem (2.7), com $\|\psi\|_{\tilde{q}} + \|\psi\|_2 < R$, então temos pela escolha de T que $\|u\|_{X(T)} \leq R$ e $\|u\|_{X(T)} \leq R$, como são soluções temos pelo Princípio de Duhamel que $P(u) = u$ e $P(v) = v$, portanto ambos pontos fixos, mas pela unicidade do Teorema do Ponto Fixo para Contrações, temos que ter $u = v$. E isso finaliza a demonstração do Teorema.

□

Observação 2.1.5. *O Teorema* 2.1.4 *também vale para o caso $2\sigma = n$, mas nesse caso o T também depende de q como é fácil ver acompanhando a demonstração do Teorema.*

Existência e Unicidade Global

Até dizermos o contrário estaremos considerando de agora em diante $2\sigma \geq n > \sigma$, ou ainda $\tilde{q} \leq 2$. Antes de enunciarmos e provarmos o principal Teorema da primeira parte dessa seção vamos fazer uma observação que vem do fato que as estimativas para as equações de evolução lineares obtidas anteriormente são singulares, mas precisamos que sejam não singulares para obter existência e unicidade global para equações semilineares, que é o principal objetivo dessa seção.

Observação 2.1.6. *Se $1 + \frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) \geq 0$ a singularidade em* (1.25) *desaparece. A interseção das linhas*

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\sigma}{n} \qquad \textit{and} \qquad \frac{1-\sigma}{p} - \frac{1}{q} = \sigma\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right)$$

é o ponto $(p,q) = (2, \frac{2n}{n-2\sigma})$. Como estamos supondo $n - 2\sigma \leq 0$ e $g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ temos que para qualquer $p \leq q$ com $(p,q) \in \mathcal{A} \doteq]1,2] \times [\tilde{q}, \infty[$ existe $\bar{r} \in (1,2]$ talque (1.25) *implica em*

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^q} \lesssim \begin{cases} \|g\|_{L^{\bar{r}}} \leq \|g\|_{L^1 \cap L^2}, & t \in [0,1) \\ (1+t)^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|\psi\|_{L^1 \cap L^2}, & t \in [1,\infty). \end{cases} \tag{2.10}$$

Logo podemos escrever

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^q} \leq C(p,q)(1+t)^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|\psi\|_{L^1 \cap L^2}, \qquad t \in [0,\infty). \tag{2.11}$$

onde $C(p,q)$ são constantes que só dependem de p, q, n e σ. Veja a figura 2.1.1 *que ilustra esse caso.*

O principal Teorema da primeira parte dessa seção será provado usando um argumento de ponto fixo, assim vamos precisar antes definir o espaço e o operador adequado além de provarmos alguns lemas que serão

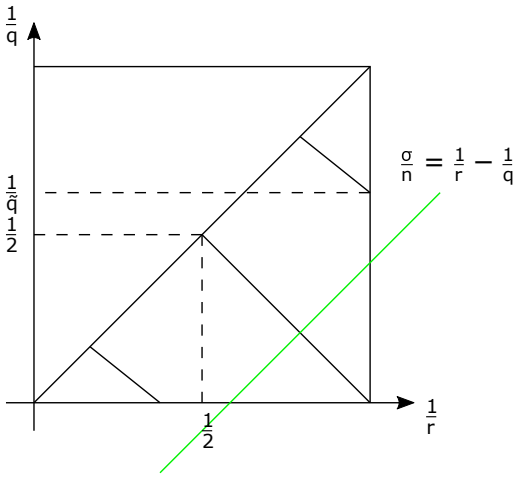


Figura 2.1: $n \leq 2\sigma$

ultilizados. Passamos primeiro a definição do espaço. Consideremos para $\tilde{q} < q$ e $\delta > 0$ pequeno de modo que $1 + \delta \leq \tilde{q}$.

$$X_\delta(T) = \{u \in L^\infty([0,T], L^{\tilde{q}}(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)) : \ \|u\|_{X_\delta(T)} < \infty\},$$

com a norma

$$\|u\|_{X_\delta(T)} = \operatorname*{ess\,sup}_{T \geq t \geq 0} \left((1+t)^{\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{1+\delta} - \frac{1}{\tilde{q}}\right)-1} \|u(t,\cdot)\|_{L^{\tilde{q}}} + (1+t)^{\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{1+\delta} - \frac{1}{q}\right)-1} \|u(t,\cdot)\|_{L^q} \right).$$

Agora, pela Observação 2.1.6 temos que $X_\delta(T)$ é não vazio, basta tomar $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ e notar que $u^{lin}(t,x) \in X_\delta(T)$, onde $u^{lin}(t,x) \doteq K_1(t,\cdot) *_{(x)} \psi(\cdot)$. O método de ponto fixo, ou aproximação sucessiva que usaremos tem como idéia procurar uma solução no espaço $X_\delta(T)$ partindo de $u^{lin}(t,x)$ e iterando um determinado operador.

Lema 2.1.7. *O espaço $X_\delta(T)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. A demonstração é como no Lema 2.1.2. □

Além disso, temos o seguinte Lema.

Lema 2.1.8. *Sejam $\sigma > 1$, $\sigma < n \leq 2\sigma$, $p_c(n) < p < \infty$ e $2p < q$ quaisquer. Nesse caso existe $1 > \bar{\delta} > 0$ talque para cada $u, v \in X_\delta(T)$ com $0 < \delta < \bar{\delta}$ tem-se que $Nu, Nv \in X_\delta(T)$ e valem as seguintes desigualdades*

$$\|Nu\|_{X_\delta(T)} \leq C\|u\|^p_{X_\delta(T)} \tag{2.12}$$

$$\|Nu - Nv\|_{X_\delta(T)} \leq C\|u-v\|_{X_\delta(T)}\left(\|u\|^{p-1}_{X_\delta(T)} + \|v\|^{p-1}_{X_\delta(T)}\right), \tag{2.13}$$

onde a constante C não dependem de $T > 0$.

Demonstração. Vamos começar provando (2.12), usando a desigualdade integral de Minkowski e o Teorema 1.5.7 para $r \geq \tilde{q}$ com $\delta > 0$ e $1 + \delta < \tilde{q}$

$$\|Nu(t,\cdot)\|_{L^r} \lesssim \int_0^t \|K_1(t-s,\cdot) * |u(s,\cdot)|^p\|_{L^r} ds \lesssim \int_0^t (t-s)^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{1+\delta} - \frac{1}{r}\right)} \||u(s,\cdot)|^p\|_{L^{1+\delta}} ds.$$

Além disso, como para $2\sigma \geq n > \sigma$ vale $p_c(n) > 2 \geq \tilde{q}$ a hipótese $\frac{q}{2} > p > p_c(n)$ implica que é possível escolher $1 > \bar{\delta} \doteq \bar{\delta}(p) > 0$ tal que para $\delta \in (0, \bar{\delta})$ temos $\tilde{q} < p(1+\delta) < q$ e $\beta(\delta) \doteq \beta > 1$, onde,

$$\beta \doteq p\left(\frac{n}{\sigma(1+\delta)}\left(1 - \frac{1}{p}\right) - 1\right). \tag{2.14}$$

Como para qualquer $0 < \delta < \bar{\delta}$ temos $\tilde{q} < p(1+\delta) < q$ segue que existe $0 < \theta < 1$ tal que $\frac{1}{p(1+\delta)} = \frac{\theta}{\tilde{q}} + \frac{(1-\theta)}{q}$ e logo pela desigualdade de Hölder vale

$$\begin{aligned} \|u(t,\cdot)\|_{L^{p(1+\delta)}} &\lesssim \|u(t,\cdot)\|^{\theta}_{L^{\tilde{q}}} \|u(t,\cdot)\|^{(1-\theta)}_{L^q} \\ &\lesssim (1+t)^{-\frac{\beta}{p}} \|u\|_{X_\delta(T)}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

Portanto temos que

$$\||u(s,\cdot)|^p\|_{L^{1+\delta}} = \|u(s,\cdot)\|^p_{L^{p(1+\delta)}} \lesssim (1+s)^{-\beta} \|u\|^p_{X_\delta(T)}. \tag{2.16}$$

Como $\beta > 1$ e para $2\sigma \geq n$ temos $\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{1+\delta} - \frac{1}{r}\right) - 1 < 1$ podemos usar o Lema A.4.7 e concluir que:

$$\begin{aligned} \|Nu(t,\cdot)\|_{L^r} &\lesssim \int_0^t (t-s)^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{1+\delta}-\frac{1}{r}\right)} (1+s)^{-\beta} ds \|u\|^p_{X_\delta(T)} \\ &\lesssim (1+t)^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{1+\delta}-\frac{1}{r}\right)} \|u\|^p_{X_\delta(T)}. \end{aligned}$$

Finalmente considere $r = \tilde{q}$ e $r = q$ e obtenha a primeira desigualdade. Note nesse ponto que, como a estimativa é não singular temos que $Nu \in L^\infty\big([0,T], L^{\tilde{q}}(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)\big)$
Agora observe que pelo Teorema do Valor Médio é possível provar a seguinte desigualdade

$$||u|^p - |v|^p| \leq C_0 |u-v| \big(|u|^{p-1} + |v|^{p-1}\big),$$

usando isso e em seguida a desigualdade de Hölder temos que

$$\||u|^p - |v|^p\|_{L^r} \leq C_0 \|u-v\|_{L^{rp}} \big(\|u\|^{p-1}_{L^{rp}} + \|v\|^{p-1}_{L^{rp}}\big)$$

A partir de agora o argumento segue as mesmas linhas usadas na demonstração da desigualdade anterior.

$$\begin{aligned} &\|Nu(t,\cdot) - Nu(t,\cdot)\|_{L^r} \\ &\lesssim \int_0^t (t-s)^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{1+\delta}-\frac{1}{r}\right)} \||u(s,\cdot)|^p - |v(s,\cdot)|^p\|_{1+\delta} ds \\ &\lesssim \int_0^t (t-s)^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{1+\delta}-\frac{1}{r}\right)} \|u(s,\cdot) - v(s,\cdot)\|_{L^{(1+\delta)p}} \big(\|u(s,\cdot)\|^{p-1}_{L^{(1+\delta)p}} + \|v(s,\cdot)\|^{p-1}_{L^{(1+\delta)p}}\big) ds \\ &\lesssim \int_0^t (t-s)^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{1+\delta}-\frac{1}{r}\right)} (1+s)^{-\beta} ds \|u-v\|_{X_\delta(T)} \big(\|u\|^{p-1}_{X_\delta(T)} + \|v\|^{p-1}_{X_\delta(T)}\big). \end{aligned}$$

Note que na última desigualdade foi usada (2.16) para u, v e $u - v$. E com isso finalizamos a demonstração. □

A condição $2\sigma \geq n$ implica $q_c \leq 2$, além disso já sabemoms que a condição $q_c > 1$ é equivalente à condição $p > p_c$, portanto é natural que para se obter existência global no caso $\sigma < n \leq 2\sigma$ e $p_c(n) < p < \infty$ seja necessário que a norma $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ do dado inicial seja pequena. De fato temos o Teorema a seguir.

Teorema 2.1.9. *Sejam $\sigma > 1$, $\sigma < n \leq 2\sigma$, $p_c(n) < p < \infty$ e $2p < q$ quaisquer. Nesse caso existe $\epsilon > 0$ independente de T talque para todo $\psi \in \mathcal{D} \doteq L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ com*

$$\|\psi\|_{\mathcal{D}} \doteq \|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \epsilon$$

temos para $\delta < \bar{\delta}$, com $\bar{\delta}$ escolhido no Lema anterior, uma única solução $u_\delta = u \in L^\infty\big([0,T], L^{\tilde{q}}(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)\big)$ para (2.1) *tal que*

$$\|u(t,\cdot)\|_r \leq 2C_0(1+t)^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{1+\delta}-\frac{1}{r}\right)}\|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)}, \tag{2.17}$$

para todo $T \geq t \geq 0$ onde $\tilde{q} \leq r \leq q$ e C_0 é uma constante maior do que as constantes $C(1+\delta,\tilde{q})$ e $C(1+\delta,q)$ da Observação 2.1.6.

Demonstração. Segue imediatamente da desigualdade (2.13) e da definição de P que

$$\|Pu - Pv\|_{X_\delta(T)} \leq C\|u-v\|_{X_\delta(T)}\big(\|u\|^{p-1}_{X_\delta(T)} + \|v\|^{p-1}_{X_\delta(T)}\big). \tag{2.18}$$

onde C é uma constante que independe de T, donde concluímos que P é contínua em $X_\delta(T)$. Vamos provar que existe $\epsilon > 0$ tal que para todo dado inicial $\|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)} < \epsilon$ a sequência definida por $u_{-1} \equiv 0$ e $u_j = P(u_{j-1})$ $j = 0,1,\ldots$ é de Chauchy em $X_\delta(T)$. Como o espaço é completo, Lema 2.1.7, existe $u \in X_\delta(T)$ tal que $u_j \to u$ em $X_\delta(T)$, da continuidade de P temos que $P(u) = u$ e de acordo com o princípio de Duhamel u será uma solução fraca de (2.1), provando assim a existência. Segue da desigualdade (2.12) e da estimativa (2.10) que existe uma constante $C_0 > 0$ independente de T e ψ tal que

$$\|P(u)\|_{X_\delta(T)} \leq C_0\|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)} + C\|u\|^p_{X_\delta(T)}. \tag{2.19}$$

Como $p > 1$ é possível escolher nosso $\epsilon > 0$ de tal sorte que $C(4C_0\epsilon)^p < C_0\epsilon$, logo tomando $\|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)} < \epsilon$ temos que pela desigualdade (2.19) que a sequência construída acima satisfaz $\|u_j\|_{X_\delta(T)} < 2C_0\epsilon$ para todo $j = 0,1,\ldots$. Além disso temos para esse ϵ que vale também $4C(2C_0\epsilon)^{p-1} < 1$, e daí pela desigualdade (2.18) segue que

$$\|u_{j+1} - u_j\|_{X_\delta(T)} \leq 2^{-1}\|u_j - u_{j-1}\|_{X_\delta(T)}.$$

Portanto u_j é uma sequência de Cauchy. Note que como a solução u assim obtida satisfaz $\|u\|_{X_\delta(T)} \leq 2C_0\epsilon$ e $P(u) = u$ logo temos pela desigualdade (2.19) e escolha de ϵ, uma vez que essa escolha implica $2C(2C_0\epsilon)^{p-1} < 1$, que

$$\|u\|_{X_\delta(T)} \leq 2C_0\|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)} + C\|u\|^{p-1}_{X_\delta(T)}\|u\|_{X_\delta(T)} < C_0\|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{2}\|u\|_{X_\delta(T)}$$

o que prova a desigualdade (2.17) para $r = \tilde{q}, q$, o caso enunciado no Teorema segue usando que existe $0 \leq \theta \leq 1$ tal que $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{\tilde{q}} + \frac{(1-\theta)}{q}$ e portanto usando a desigualdade de Hölder temos

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^r} \quad \leq \quad \|u(t,\cdot)\|^\theta_{L^{\tilde{q}}}\|u(t,\cdot)\|^{(1-\theta)}_{L^q}$$

provando portanto o caso geral enunciado. Suponhamos agora que existam duas soluções $u \neq v$ da equação (2.1), com $\|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)} < \epsilon$ e ϵ escolhido como acima de tal sorte que vale a desigualdade (2.17) para $\tilde{q} \leq r \leq q$. Em particular teremos que $\|u\|_{X_\delta(T)} \leq 4C_0\|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)}$ e $\|v\|_{X_\delta(T)} \leq 4C_0\|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)}$, agora como pelo principio de Duhamel $P(u) = u \neq v = P(v)$, temos, usando a desigualdade (2.18), que

$$1 \leq C\big(\|u\|^{p-1}_{X_\delta(T)} + \|v\|^{p-1}_{X_\delta(T)}\big) \leq 2C\big(4C_0\epsilon\big)^{p-1} < 1,$$

que é um absurdo provando assim a unicidade. □

2.1.2 Caso $2\sigma < n$.

Existência e Unicidade Local.

$$Z(T) = \{u \in \mathcal{L}^\infty([0,T], L^{q_1}(\mathbb{R}^n)) \cap L^{q_2}(\mathbb{R}^n)) : \ \|u\|_{Z(T)} < \infty\},$$

com a norma

$$\|u\|_{Z(T)} = \operatorname*{ess\,sup}_{0\le t\le T}\Big(\|u(t,\cdot)\|_{L^{q_1}} + \|u(t,\cdot)\|_{L^{q_2}}\Big)$$

Lema 2.1.10. *O espaço $Z(T)$ é espaço de Banach.*

Demonstração. A demonstração é analoga a do Lema 2.1.2. □

Lema 2.1.11. *Sejam $\frac{2n}{n+2} \le q_1 \le 2 \le q_2 \le \frac{nq_1}{n-q_1\sigma}$, e $1 \le p \le \frac{q_2}{q_1}$. Nesse caso para $1 > T > 0$ temos que para cada $u, v \in Z(T)$, tem-se $Nu, Nv \in Z(T)$ e valem as seguintes desigualdades*

$$\|Nu\|_{Z(T)} \le CT\|u\|^p_{Z(T)} \tag{2.20}$$

$$\|Nu - Nv\|_{Z(T)} \le CT\|u-v\|_{Z(T)}\big(\|u\|^{p-1}_{Z(T)} + \|v\|^{p-1}_{Z(T)}\big), \tag{2.21}$$

Demonstração. Usando a desigualdade integral de Minkowski e o Teorema 1.5.7 para o par (q_1, r) com $r = q_1$ e $r = q_2$, que são pares admissíveis para àquele Teorema, temos para $0 < T < 1$

$$\begin{aligned}\|Nu(t,\cdot)\|_r &\lesssim \int_0^t \|K_1(t-s,\cdot) * |u(s,\cdot)|^p\|_{q_1} ds \lesssim \int_0^t (t-s)^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{r}\right)}\|u(s,\cdot)\|^p_{pq_1} ds \\ &\lesssim \int_0^t (t-s)^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{r}\right)} ds \|u\|^p_{Z(T)} \lesssim T^{2-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{r}\right)}\|u\|^p_{Z(T)} \lesssim T\|u\|^p_{Z(T)}.\end{aligned}$$

Na terceira desigualdade usamos que $q_1 \le pq_1 \le q_2$ que temos por hipótese. Na última desigualdade usamos também o fato que, nesse caso, temos $2 - \frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{r}\right) \ge 1$ tanto para $r = q_1$ como para $r = q_2$. Para provar a outra desigualdade observe que pelo Teorema do Valor Médio é possível provar a seguinte desigualdade

$$||u|^p - |v|^p| \le C_0|u-v|\big(|u|^{p-1} + |v|^{p-1}\big),$$

usando isso e em seguida a desigualdade de Hölder temos que

$$\||u|^p - |v|^p\|_{L^r} \le C_0\|u-v\|_{L^{rp}}\big(\|u\|^{p-1}_{L^{rp}} + \|v\|^{p-1}_{L^{rp}}\big)$$

A partir de agora o argumento segue as mesmas linhas usadas na demonstração da desigualdade anterior. □

Teorema 2.1.12. *Sejam $\frac{2n}{n+2} \le q_1 \le 2 \le q_2 < \frac{nq_1}{n-q_1\sigma}$, e $1 \le p \le \frac{q_2}{q_1}$. Nesse caso para qualquer $R > 0$, existe $1 > T > 0, T = T(R, q_2) \downarrow 0$ quando $q_2 \uparrow \frac{nq_1}{n-q_1\sigma}$ talque para*

$$\|\psi\|_{q_1} < R$$

temos uma única solução fraca $u \in L^\infty\big([0,T], L^{q_1}(\mathbb{R}^n) \cap L^{q_2}(\mathbb{R}^n)\big)$ para (2.1), tal que para $r = q, \tilde{q}$ temos

$$\|u(t,\cdot)\|_r \le 4C_0T^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_2}\right)}\|\psi\|_{q_1}, \tag{2.22}$$

para todo $T \ge t \ge 0$ e $C_0 \ge \max\{C_{q_1,q_1}, C_{q_1,q_2}\}$ não depende de T, onde $C_{p,q}$ foram definidas em 1.5.7. Para $p = 1$ temos que T não depende de R e nesse caso a solução existe e é única em todo $L^\infty([0,T], L^{q_1}(\mathbb{R}^n) \cap L^{q_2}(\mathbb{R}^n))$ para cada dado inicial $\psi \in L^{q_1}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Segue imediatamente das desigualdades (2.20) e (2.21) e da definição de P que

$$\|Pu - Pv\|_{Z(T)} \le CT\|u-v\|_{Z(T)}\big(\|u\|^{p-1}_{Z(T)} + \|v\|^{p-1}_{Z(T)}\big), \tag{2.23}$$

e para $T \le 1$

$$\begin{aligned}\|P(u)\|_{Z(T)} \leq & \|K_1(t,\cdot) *_{(x)} \psi(\cdot)\|_{L_x^{q_1}} + \|K_1(t,\cdot) *_{(x)} \psi(\cdot)\|_{L_x^{q_2}} + CT\|u\|_{Z(T)}^p \\ \leq & C_0 T\|\psi\|_{q_1} + C_0 T^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_2}\right)}\|\psi\|_{q_1} + CT\|u\|_{Z(T)}^p \\ \leq & 2C_0 T^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_2}\right)}\|\psi\|_{q_1} + CT\|u\|_{Z(T)}^p \end{aligned} \tag{2.24}$$

onde $C_0 \geq \max\{C_{q_1,q_1}, C_{q_1,q_2}\}$ não depende de T, onde $C_{p,q}$ foram definidas no Teorema 1.5.7. Como $\sigma > 1$ é possível tomar $T > 0$ pequeno de modo que $2C_0 T^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_2}\right)} R + CTR^p < R$. Logo, pela desigualdade (2.24), temos que para $\|\psi\|_{q_1} < R$ o operador P leva $B_{Z(T)}[0,R]$ nela mesma, onde estamos denotando por $B_{Z(T)}[0,R]$ a bola fechada de centro 0 e raio R em $Z(T)$. Com a mesma razão é possível diminuir $T > 0$, caso nescessário, para termos que $4CTR^{p-1} < 1$. Logo, pela desigualdade (2.21), concluímos que para esse T

$$\|Pu - Pv\|_{Z(T)} \leq \frac{1}{2}\|u - v\|_{Z(T)},$$

ou seja P restrito a $B_{X(T)}[0,R]$ é uma contração para $T > 0$ suficientemente pequeno, portanto pelo Teorema do Ponto Fixo A.2.1 temos que existe um único ponto fixo $P(u) = u \in B_{Z(T)}[0,R]$. Como $CTR^{p-1} < \frac{1}{2}$, temos pela desigualdade (2.24) e pela igualdade $P(u) = u$ que

$$\|u\|_{X(T)} \leq 4C_0 T^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_2}\right)}\left(\|\psi\|_{q_1} + \|\psi\|_{q_2}\right)$$

Finalmente se tivermos que $8C_0 T^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_2}\right)} < 1$, então podemos provar a unicidade. Ora se u, v são soluções que satisfazem (2.22), com $\|\psi\|_{q_1} + \|\psi\|_{q_2} < R$, então temos pela escolha de T que $\|u\|_{Z(T)} \leq R$ e $\|v\|_{Z(T)} \leq R$, como são soluções temos pelo Princípio de Duhamel que $P(u) = u$ e $P(v) = v$, portanto ambos pontos fixos, mas pela unicidade do Teorema do Ponto Fixo para Contrações, temos que ter $u = v$. E isso finaliza a demonstração do Teorema. □

Em particular temos o Teorema a seguir.

Teorema 2.1.13. *Sejam $2 < 2\sigma < n$, $1 \leq p < \frac{n+2\sigma}{n-2\sigma}$ e $q < \frac{2n}{n-2\sigma}$. Nesse caso para qualquer $R > 0$, existe $1 > T > 0$ talque para*

$$\|\psi\|_2 < R$$

temos uma única solução fraca $u \in L^\infty\big([0,T], L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)\big)$ para (2.1), tal que para $r = 2, q$ temos

$$\|u(t,\cdot)\|_r \leq 4C_0 T^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)}\|\psi\|_2, \tag{2.25}$$

para todo $T \geq t \geq 0$ e $C_0 \geq \max\{C_{2,2}, C_{2,q}\}$ não depende de T, onde $C_{p,q}$ foram definidas no Teorema 1.5.7. Para $p = 1$ temos que T não depende de R e nesse caso a solução existe e é única em todo $L^\infty([0,T], L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n))$ para cada dado inicial $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Quando $1 \leq p < \frac{q}{2}$ com $q < \frac{2n}{n-2\sigma}$ aplique o Teorema 2.1.12 com $q_1 = 2$. Para o caso $1 + \frac{2\sigma}{n} \leq p \leq 1 + \frac{4\sigma}{n-2\sigma}$ argumente como na Proposição 2.1.12, a diferença está na estimativa para $\|Nu(t,\cdot)\|_{L^{\frac{2n}{n-2\sigma}}}$. Nesse caso vamos usar a estimativa linear $L^{r_\epsilon^\sharp} - L^q$, com $r_\epsilon^\sharp = \frac{2n}{n+2\sigma} + \varepsilon \in (1,2)$, e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Aplicando a Proposição 1.3.15 para o par $(q, r_\epsilon^\sharp)$, que é admissível para aquela Proposição no caso $q = 2$ e $q = \frac{2n}{n-2\sigma}$. Logo temos

$$\begin{aligned}\|Nu(t,\cdot)\|_{L^q} \lesssim & \int_0^t (t-s)^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{r_\epsilon^\sharp}-\frac{1}{q}\right)}\||u(s,\cdot)|^p\|_{L^{r_\epsilon^\sharp}} ds \lesssim \int_0^t (t-s)^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{r_\epsilon^\sharp}-\frac{1}{q}\right)}\|u(s,\cdot)\|_{L^{pr_\epsilon^\sharp}}^p ds \\ \lesssim & \int_0^t (t-s)^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{r_\epsilon^\sharp}-\frac{1}{q}\right)} ds \|u\|_{Z(T)}^p \lesssim T^{2-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{r_\epsilon^\sharp}-\frac{1}{q}\right)}\|u\|_{Z(T)}^p,\end{aligned}$$

Para qualquer $u \in Z(T)$, onde estamos usando que $2 \leq pr_\epsilon^\sharp \leq \frac{2n}{n-2\sigma}$ e $2 - \frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{r_\epsilon^\sharp} - \frac{1}{q}\right) > 0$. Portanto como $1 + \frac{2\sigma}{n} \leq \frac{n}{n-2\sigma}$ podemos concatenar os resultados e assim concluímos a proposição.

□

Existência e Unicidade Global

A diferença fundamental entre os casos pode ser percebida na seguinte Observação.

Observação 2.1.14. *Se* $1 + \frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) \geq 0$ *a singularidade em* (1.25) *desaparece. A interseção das linhas*

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\sigma}{n} \qquad \textit{and} \qquad \frac{1-\sigma}{p} - \frac{1}{q} = \sigma\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right)$$

é o ponto $(p, q) = (2, \frac{2n}{n-2\sigma})$. *Se supormos que* $\sqrt{2n} < 2\sigma$, *teremos* $\frac{1}{\tilde{q}} > \frac{n-2\sigma}{2n}$ *e como estamos supondo* $n - 2\sigma > 0$ $g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ *temos que para qualquer* $(p, q) \in \mathcal{A} \doteq]1, 2] \times \left[\tilde{q}, \frac{2n}{n-2\sigma}\right]$ *existe* $\bar{r} \in (1, 2]$ *talque* (1.25) *implica em*

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^q} \lesssim \begin{cases} \|g\|_{L^{\bar{r}}} \leq \|g\|_{L^1\cap L^2}, & t \in [0,1) \\ (1+t)^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|\psi\|_{L^1\cap L^2}, & t \in [1,\infty). \end{cases} \tag{2.26}$$

Assim podemos escrever:

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^q} \leq C(p,q)(1+t)^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|\psi\|_{L^1\cap L^2}, \qquad t \in [0,\infty). \tag{2.27}$$

onde $C(p, q)$ *são constantes que só dependem de* p, q, n *e* σ. *A figura* 2.1.2 *a ilustra o caso* $\sqrt{2n} < 2\sigma$.

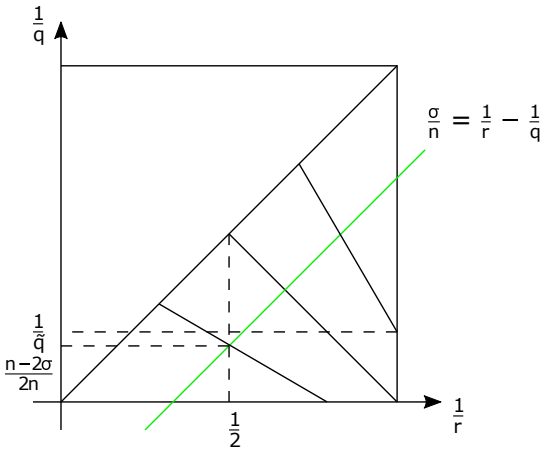


Figura 2.2: $\sqrt{2n} < 2\sigma$

Assim agora o q tem um limitante superior o que acarreta mudanças em nossos resultados.

Lema 2.1.15. *Sejam* $\sigma > 1$, $n > 2\sigma$, $\frac{n(n+6)}{3n+2} \leq 2\sigma$ *e* $\max\{\tilde{q}, p_c(n)\} < p < \frac{n+2\sigma}{n-2\sigma} < q \doteq \frac{2n}{n-2\sigma}$ *quaisquer. Nesse caso existe* $1 > \bar{\delta} > 0$ *talque para cada* $u \in X_\delta(T)$ *com* $0 < \delta < \bar{\delta}$ *tem-se as seguintes desigualdades*

$$\|Nu\|_{X_\delta(T)} \leq C\|u\|^p_{X_\delta(T)} \tag{2.28}$$

$$\|Nu - Nv\|_{X_\delta(T)} \leq C\|u-v\|_{X_\delta(T)}\left(\|u\|^{p-1}_{X_\delta(T)} + \|v\|^{p-1}_{X_\delta(T)}\right), \tag{2.29}$$

onde a constante C *não depende de* $T > 0$.

Demonstração. De acordo com a condição $\frac{n(n+6)}{3n+2} \leq 2\sigma$ temos um intervalo admissível para p: $\tilde{q} < \frac{n+2\sigma}{n-2\sigma}$. Temos também $2\sigma < n$, logo $\tilde{q} < q$, assim considere $\tilde{q} \leq q_0 \leq q$, donde os pares $(1+\delta, q_0)$ e $(r_\epsilon^\sharp, q_0)$ são admissíveis para o Teorema 1.5.7, com $r_\epsilon^\sharp \doteq \frac{2n}{n+2\sigma} + \epsilon$ e $\epsilon > 0$ pequeno, donde

$$\begin{aligned}\|Nu(t,\cdot)\|_{L^{q_0}} &\lesssim \int_0^{t/2} \|K_1(t-s,\cdot) * |u(s,\cdot)|^p\|_{L^{q_0}} ds + \int_{t/2}^t \|K_1(t-s,\cdot) * |u(s,\cdot)|^p\|_{L^{q_0}} ds \\ &\leq \int_0^{t/2} (t-s)^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{1+\delta}-\frac{1}{q_0}\right)} \|u(s,\cdot)\|^p_{L^{p(1+\delta)}} ds + \int_{t/2}^t (t-s)^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{r_\epsilon^\sharp}-\frac{1}{q_0}\right)} \|u(s,\cdot)\|^p_{L^{r_\epsilon^\sharp p}} ds\end{aligned}$$

Agora como $2\sigma < n$, existe $\epsilon > 0$ tal que $r_\epsilon^\sharp = \frac{2n}{n+2\sigma} + \epsilon \in (1,2)$, logo $\tilde{q} < pr_\epsilon^\sharp \leq q$, pois $\tilde{q} < p < \frac{n+2\sigma}{n-2\sigma}$ e tomando $\delta > 0$ pequeno temos também que $\tilde{q} < p(1+\delta) \leq q$. Logo temos:

$$\||u(s,\cdot)|^p\|_{L^{r_\epsilon^\sharp}} = \|u(s,\cdot)\|^p_{L^{pr_\epsilon^\sharp}} \lesssim (1+t)^{p\left(1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{1+\delta}-\frac{1}{pr_\epsilon^\sharp}\right)\right)} \|u\|_X^p.$$

e também

$$\||u(s,\cdot)|^p\|_{L^{1+\delta}} \quad = \quad \|u(s,\cdot)\|^p_{L^{p(1+\delta)}} \lesssim (1+s)^{-\beta} \|u\|^p_{X_\delta(T)}.$$

Além disso, como pela escolha de $r_\epsilon^\sharp$ temos $2 - \frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{r_\epsilon^\sharp} - \frac{1}{q_0}\right) > 0$, logo temos que:

$$\begin{aligned}&\int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{r_\epsilon^\sharp}-\frac{1}{q}\right)} \||u(s,\cdot)|^p\|_{L^{r_\epsilon^\sharp}} ds \\ &\lesssim (1+t)^{p\left(1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{1+\delta}-\frac{1}{pr_\epsilon^\sharp}\right)\right)} \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{r_\epsilon^\sharp}-\frac{1}{q}\right)} ds \|u\|_X^p \\ &\lesssim (1+t)^{p\left(1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{1+\delta}-\frac{1}{pr_\epsilon^\sharp}\right)\right)+2-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{r_\epsilon^\sharp}-\frac{1}{q}\right)} \|u\|_X^p\end{aligned}$$

Como para $\delta > 0$ pequeno temos $\beta > \frac{n+(1+\delta)\sigma}{n-(1+\delta)\sigma}$, podemos concluir que

$$p\left(1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{1+\delta}-\frac{1}{pr_\epsilon^\sharp}\right)\right) + 2 - \frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{r_\epsilon^\sharp}-\frac{1}{q_0}\right) \leq 1 - \frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{1+\delta}-\frac{1}{q_0}\right),$$

Donde concluímos que:

$$\begin{aligned}&\int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{r_\epsilon^\sharp}-\frac{1}{q_0}\right)} \||u(s,\cdot)|^p\|_{L^{r_\epsilon^\sharp}} ds, \\ &\lesssim (1+t)^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{1+\delta}-\frac{1}{q_0}\right)} \|u\|_X^p.\end{aligned}$$

Para a outra parcela nós temos a seguinte estimativa singular a seguir.

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t/2}(t-s)^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{1+\delta}-\frac{1}{q_0}\right)}(1+s)^{-\beta}\|u\|_X^p ds\\
&\lesssim t^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{1+\delta}-\frac{1}{q_0}\right)}\int_0^{t/2}(1+s)^{-\beta}ds\|u\|_X^p\\
&\lesssim t^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{1+\delta}-\frac{1}{q_0}\right)}\|u\|_X^p.
\end{aligned}$$

Para mostrar que a estimativa é não singular, note que pata $|t|\leq 1$ temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{t/2}\|K_1(t-s,\cdot)*|u(s,\cdot)|^p\|_{L^{q_0}}ds &\lesssim \int_0^{t/2}(t-s)^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{r_\epsilon^\sharp}-\frac{1}{q_0}\right)}\||u(s,\cdot)|^p\|_{L^{r_\epsilon^\sharp}}ds\\
&\lesssim \int_0^{t/2}(t-s)^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{r_\epsilon^\sharp}-\frac{1}{q_0}\right)}(1+s)^{-\beta}ds\|u\|_{X_\delta(T)}^p\\
&\lesssim \int_0^{t/2}(t-s)^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{r_\epsilon^\sharp}-\frac{1}{q_0}\right)}ds\|u\|_{X_\delta(T)}^p\\
&\lesssim t^{2-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{r_\epsilon^\sharp}-\frac{1}{q_0}\right)}\|u\|_{X_\delta(T)}^p \lesssim \|u\|_{X_\delta(T)}^p.
\end{aligned}$$

O que finaliza a prova de (2.28). A prova de (2.29) é análoga a de (2.13).

□

Portanto podemos provar o seguinte Teorema.

Teorema 2.1.16. *Sejam $\sigma>1$, $n>2\sigma$, $\frac{n(n+6)}{3n+2}\leq 2\sigma$, $\max\{\tilde{q},p_c(n)\}<p<\frac{n+2\sigma}{n-2\sigma}$ e $q\doteq\frac{2n}{n-2\sigma}$ quaisquer. Nesse caso existe $\epsilon>0$ independente de T talque para todo $\psi\in\mathcal{D}\doteq L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$ com*

$$\|\psi\|_{\mathcal{D}}\doteq\|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}+\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}<\epsilon$$

temos para $\delta<\bar{\delta}$, com $\bar{\delta}$ escolhido no Lema 2.1.15*, uma única solução*

$$u_\delta=u\in L^\infty\big([0,T],L^{\tilde{q}}(\mathbb{R}^n)\cap L^q(\mathbb{R}^n)\big)$$

para (2.1) *tal que*

$$\|u(x,t)\|_r\leq 2C_0(1+t)^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{1+\delta}-\frac{1}{r}\right)}\|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)},\tag{2.30}$$

para todo $T\geq t\geq 0$ onde $\tilde{q}\leq r\leq q$ e C_0 é uma constante maior do que as constantes $C(1+\delta,\tilde{q})$ e $C(1+\delta,q)$ definidas em (2.27)*.*

Demonstração. A demonstração é a mesma feita no Teorema 2.1.9, mudando apenas que aqui usamos (2.28) e (2.29) em vez de (2.12) e (2.13). □

Passamos a considerar o seguinte espaço.

$$Z_{\bar{r}}(T)=\{u\in L^\infty([0,T],L^{\tilde{q}(\bar{r})}(\mathbb{R}^n))\cap L^q(\mathbb{R}^n)):\ \|u\|_{Z_{\bar{r}}(T)}<\infty\},$$

onde $1\leq\bar{r}\leq\frac{2n}{n+2\sigma}$ que, para $\delta>0$ pequeno fixo, é Banach com a norma a seguir.

$$\|u\|_{Z_{\bar{r}}(T)}=\operatorname*{ess\,sup}_{0\leq t\leq T}\Big((1+t)^{\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{\bar{r}+\delta}-\frac{1}{\tilde{q}(\bar{r})}\right)-1}\|u(t,\cdot)\|_{L^{\tilde{q}(\bar{r})}}+(1+t)^{\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{\bar{r}+\delta}-\frac{1}{q}\right)-1}\|u(t,\cdot)\|_{L^q}\Big)$$

onde $\frac{1}{\tilde{q}(\bar{r})} = \frac{1}{\sigma-1}\left(\sigma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{\bar{r}}\right)$ e $q = \frac{2n}{n-2\sigma}$.

Observação 2.1.17. *Note que* $\frac{\tilde{q}(r^\sharp)}{r^\sharp} \leq p_c(n) \leq \frac{n+r^\sharp\sigma}{n-r^\sharp\sigma}$, *para* $r^\sharp = \frac{2n}{n+2\sigma}$, *assim podemos encontrar* $0 < \bar{r}_0 \leq r^\sharp$ *o menor possível tal que* $\frac{\tilde{q}(\bar{r}_0)}{\bar{r}_0} \leq \frac{n+\bar{r}_0\sigma}{n-\bar{r}_0\sigma}$.

Nossa intenção agora é melhorar o Teorema 2.1.16 acima, e retirar a restrição $\sqrt{2n} < 2\sigma$, mas antes façamos uma observação.

Observação 2.1.18. *Se* $1+\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right) \geq 0$ *a singularidade em* (1.25) *desaparece. A interseção das linhas*

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\sigma}{n} \qquad \textit{and} \qquad \frac{1-\sigma}{p} - \frac{1}{q} = \sigma\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\right)$$

é o ponto $(p,q) = (2, \frac{2n}{n-2\sigma})$. $g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ *temos que para qualquer* $(p,q) \in \mathcal{B} \doteq]\bar{r}, 2] \times \left[\tilde{q}(\bar{r}), \frac{2n}{n-2\sigma}\right]$ *com* $\bar{r} \geq \max\{1, \bar{r}_0\}$ *existe* $r \in (1,2]$ *talque* (1.25) *implica em*

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^q} \lesssim \begin{cases} \|g\|_{L^r} \leq \|g\|_{L^1\cap L^2}, & t \in [0,1) \\ (1+t)^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|\psi\|_{L^1\cap L^2}, & t \in [1,\infty). \end{cases} \tag{2.31}$$

Assim podemos escrever:

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^q} \leq C(p,q)(1+t)^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|\psi\|_{L^1\cap L^2}, \qquad t \in [0,\infty). \tag{2.32}$$

onde $C(p,q)$ *são constantes que só dependem de* p, q, n *e* σ. *A figura* 2.1.2 *a ilustra a região* $\mathcal{B}$.

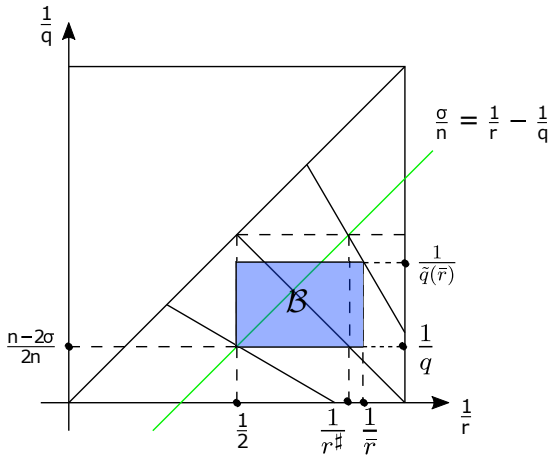


Figura 2.3: Região $\mathcal{B}$.

Lema 2.1.19. *Sejam* $\sigma > 1$, $n > 2\sigma$, $\bar{r}_0$ *da Observação* 2.1.17, *e* $r^\sharp \geq \bar{r} \geq \max\{1, \bar{r}_0\}$ *e* $\frac{\tilde{q}(\bar{r})}{\bar{r}} \leq \frac{n+\bar{r}\sigma}{n-\bar{r}\sigma} < p < \frac{n+2\sigma}{n-2\sigma} < q \doteq \frac{2n}{n-2\sigma}$ *quaisquer. Nesse caso existe* $\bar{\delta} > 0$ *talque para cada* $u \in Z_{\bar{r}}(T)$ *com* $0 < \delta < \bar{\delta}$ *tem-se as seguintes desigualdades*

$$\|Nu\|_{Z_{\bar{r}}(T)} \leq C\|u\|^p_{Z_{\bar{r}}(T)} \tag{2.33}$$

$$\|Nu - Nv\|_{Z_{\bar{r}}(T)} \leq C\|u-v\|_{Z_{\bar{r}}(T)}\left(\|u\|^{p-1}_{Z_{\bar{r}}(T)} + \|v\|^{p-1}_{Z_{\bar{r}}(T)}\right), \tag{2.34}$$

onde a constante C *não depende de* $T > 0$.

Demonstração. Como $r \to \frac{n+\sigma r}{n-\sigma r}$ é crescente e contínua é possível tomar $\bar{\delta} > 0$ pequeno de modo que $\frac{n+\bar{r}\sigma}{n-\bar{r}\sigma} < \frac{n+(\bar{r}+\bar{\delta})\sigma}{n-(\bar{r}+\bar{\delta})\sigma} < p$

Usando a desigualdade integral de Minkowski e o Teorema 1.5.7 para os pares admissíveis $(\bar{r}+\bar{\delta}, q_0)$ com $q_0 = \tilde{q}(\bar{r}), q$ temos:

$$\begin{aligned}\|Nu(t,\cdot)\|_{L^{q_0}} &\lesssim \int_0^{t/2} \|K_1(t-s,\cdot) * |u(s,\cdot)|^p\|_{L^{q_0}} ds + \int_{t/2}^t \|K_1(t-s,\cdot) * |u(s,\cdot)|^p\|_{L^{q_0}} ds \\ &\leq \int_0^{t/2} (t-s)^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{\bar{r}+\bar{\delta}}-\frac{1}{q_0}\right)} \|u(s,\cdot)\|^p_{L^{p(\bar{r}+\bar{\delta})}} ds + \int_{t/2}^t (t-s)^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{r^\sharp}-\frac{1}{q_0}\right)} \|u(s,\cdot)\|^p_{L^{r^\sharp p}} ds\end{aligned}$$

Agora como $2\sigma < n$, existe $\epsilon > 0$ tal que $\bar{r} \leq r^\sharp_\epsilon \doteq \frac{2n}{n+2\sigma} + \epsilon \in (1,2)$, logo $\tilde{q}(\bar{r}) < p\bar{r} \leq pr^\sharp_\epsilon \leq q$, pois $\frac{\tilde{q}(\bar{r})}{\bar{r}} < p < \frac{n+2\sigma}{n-2\sigma}$ e temos também que $\tilde{q}(\bar{r}) < p(\bar{r}+\bar{\delta}) \leq q$. Logo temos:

$$\|u(s,\cdot)\|^p_{L^{pr^\sharp}} \lesssim (1+t)^{p\left(1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{\bar{r}+\delta}-\frac{1}{p(\bar{r}+\bar{\delta})}\right)\right)} \|u\|^p_{Z_{\bar{r}}(T)}.$$

e também

$$\|u(s,\cdot)\|^p_{L^{p(\bar{r}+\bar{\delta})}} \lesssim (1+s)^{-\beta} \|u\|^p_{Z_{\bar{r}}(T)}.$$

onde

$$\beta := p\left(\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{\bar{r}+\bar{\delta}} - \frac{1}{p(\bar{r}+\bar{\delta})}\right) - 1\right)$$

Além disso, como pela escolha de $r^\sharp_\epsilon$ temos $2 - \frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{r^\sharp_\epsilon} - \frac{1}{q_0}\right) > 0$, logo temos que:

$$\begin{aligned}&\int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{r^\sharp_\epsilon}-\frac{1}{q}\right)} \left\| |u(s,\cdot)|^p \right\|_{L^{r^\sharp_\epsilon}} ds \\ &\lesssim (1+t)^{p\left(1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{\bar{r}+\bar{\delta}}-\frac{1}{pr^\sharp_\epsilon}\right)\right)} \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{r^\sharp_\epsilon}-\frac{1}{q}\right)} ds \|u\|^p_{Z_{\bar{r}}(T)} \\ &\lesssim (1+t)^{p\left(1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{\bar{r}+\bar{\delta}}-\frac{1}{pr^\sharp_\epsilon}\right)\right)+2-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{r^\sharp_\epsilon}-\frac{1}{q}\right)} \|u\|^p_{Z_{\bar{r}}(T)}\end{aligned}$$

Como para $\delta > 0$ pequeno temos $\beta > \frac{n+(\bar{r}+\bar{\delta})\sigma}{n-(\bar{r}+\bar{\delta})\sigma}$, podemos concluir que

$$p\left(1 - \frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{\bar{r}+\bar{\delta}} - \frac{1}{pr^\sharp_\epsilon}\right)\right) + 2 - \frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{r^\sharp_\epsilon} - \frac{1}{q_0}\right) \leq 1 - \frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{\bar{r}+\bar{\delta}} - \frac{1}{q_0}\right),$$

Donde concluímos que:

$$\begin{aligned}&\int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{r^\sharp_\epsilon}-\frac{1}{q_0}\right)} \left\| |u(s,\cdot)|^p \right\|_{L^{r^\sharp_\epsilon}} ds, \\ &\lesssim (1+t)^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{\bar{r}+\bar{\delta}}-\frac{1}{q_0}\right)} \|u\|^p_{Z_{\bar{r}}(T)}.\end{aligned}$$

Para a outra parcela nós temos a seguinte estimativa singular a seguir.

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t/2}(t-s)^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{\bar{r}+\delta}-\frac{1}{q_0}\right)}(1+s)^{-\beta}\|u\|^p_{Z_{\bar{r}}(T)}ds\\
&\lesssim t^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{\bar{r}+\delta}-\frac{1}{q_0}\right)}\int_0^{t/2}(1+s)^{-\beta}ds\|u\|^p_{Z_{\bar{r}}(T)}\\
&\lesssim t^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{\bar{r}+\delta}-\frac{1}{q_0}\right)}\|u\|^p_{Z_{\bar{r}}(T)}.
\end{aligned}$$

Para mostrar que a estimativa é não singular, note que pata $|t|\leq 1$ temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^{t/2}\|K_1(t-s,\cdot)*|u(s,\cdot)|^p\|_{L^{q_0}}ds &\lesssim \int_0^{t/2}(t-s)^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{r^\sharp_\epsilon}-\frac{1}{q_0}\right)}\||u(s,\cdot)|^p\|_{L^{r^\sharp_\epsilon}}ds\\
&\lesssim \int_0^{t/2}(t-s)^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{r^\sharp_\epsilon}-\frac{1}{q_0}\right)}(1+s)^{-\beta}ds\|u\|^p_{Z_{\bar{r}}(T)}\\
&\lesssim \int_0^{t/2}(t-s)^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{r^\sharp_\epsilon}-\frac{1}{q_0}\right)}ds\|u\|^p_{Z_{\bar{r}}(T)}\\
&\lesssim t^{2-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{r^\sharp_\epsilon}-\frac{1}{q_0}\right)}\|u\|^p_{Z_{\bar{r}}(T)}\lesssim \|u\|^p_{Z_{\bar{r}}(T)}.
\end{aligned}$$

O que finaliza a prova de (2.33). A prova de (2.34) é análoga a de (2.13).

□

Portanto podemos provar o seguinte Teorema.

Teorema 2.1.20. *Sejam $\sigma>1$, $n>2\sigma$, $\bar{r}_0$ da Observação 2.1.17 e $r^\sharp\geq\bar{r}\geq\bar{r}_0$ e $\frac{\tilde{q}(\bar{r})}{\bar{r}}\leq\frac{n+\bar{r}\sigma}{n-\bar{r}\sigma}<p<\frac{n+2\sigma}{n-2\sigma}<q\doteq\frac{2n}{n-2\sigma}$ quaisquer. Nesse caso existe $\epsilon>0$ independente de T talque para todo $\psi\in\mathcal{D}\doteq L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$ com*

$$\|\psi\|_{\mathcal{D}}\doteq\|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}+\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}<\epsilon$$

temos para $\delta<\bar{\delta}$, com $\bar{\delta}$ escolhido no Lema 2.1.19, uma única solução

$$u_\delta=u\in L^\infty\big([0,T],L^{\tilde{q}(\bar{r})}(\mathbb{R}^n)\cap L^q(\mathbb{R}^n)\big)$$

para (2.1) tal que

$$\|u(\cdot,t)\|_r\leq 2C_0(1+t)^{1-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{\bar{r}+\delta}-\frac{1}{r}\right)}\|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)},\tag{2.35}$$

para todo $T\geq t\geq 0$ onde $\tilde{q}(\bar{r})\leq r\leq q$ e C_0 é uma constante maior do que as constantes $C(\bar{r}+\bar{\delta},\tilde{q}(\bar{r}))$ e $C(\bar{r}+\bar{\delta},q)$ definidas em (2.27).

Demonstração. A demonstração é a mesma feita no Teorema 2.1.9, mudando apenas que aqui usamos (2.33) e (2.34) em vez de (2.12) e (2.13). □

2.1.3 Otimalidade do $p_c(n)$.

Em [16] os autores Lucente e D'ambrosio fornecem uma condição necessária para se ter existência global para o nosso problema e vários outros, quando σ é inteiro positivo.

$$Lu=|u|^p,$$

em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, onde

$$L(D_t, D_x)u = -D_t^2 u(x,t) + \Big(\sum_{i=1}^{n} D_{x_i} u(x,t)\Big)^{\sigma} u.$$

Note que o símbolo de nosso operador é dado por $L(\xi,\eta) = -\xi^2 + |\eta|^{2\sigma}$, com $\xi \in \mathbb{R}$ e $\eta \in \mathbb{R}^n$, logo $L(\lambda^{\delta_1}\xi, \lambda^{\delta_2}\eta) = \lambda^h L(\xi,\eta)$, para todo $\lambda > 0$ com $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 1/\sigma$ e $h = 2$, o que segundo a classificação dada em [16] diz que o operador L é quasi-homogêneo do tipo $(2, 1, 1/\sigma)$. De acordo com o Teorema 2.1 de [16], temos que não existe solução global fraca de $Lu = |u|^p$ para $1 < p \leq \frac{n+\sigma}{n-\sigma}$, em que σ é a ordem do operador L. Agora note que no caso $n \leq 2\sigma$ temos o Teorema 2.1.9 e juntamente com o que foi dito logo acima temos um resultado ótimo sem regularidade para esse caso. No entanto para o caso $2\sigma < n$ temos que pedir também que $p \geq \tilde{q}$, e não descemos mais com o p, pois estamos buscando resultados sem regularidade.
A seguir alguns exemplos em que se aplicam os resultados até aqui obtidos.

Exemplo 1. *Vamos considerar a equação semilinear tipo Plate*

$$u_{tt} + \Delta^2 u = |u|^p.$$

Nós obtemos existência global para dados iniciais pequenos no caso $n = 3, 4$ para $p > \frac{n+2}{n-2} = p_c(n)$ (Teorema 2.1.9), para $n > 5$ não chegamos no crítico, uma estimativa seria $p > 1 + \frac{8}{n}$ (Teorema 2.1.20), com $\bar{r} = r^\sharp$.
Em geral existência global não pode existir em espaços de dimensão $n = 1, 2$ e para o espaço de dimensão $n \geq 3$ e $1 < p \leq \frac{n+2}{n-2}$ como discutido anteriormente.

Exemplo 2. *Considere a equação evolução de ordem 3 a seguir*

$$u_{tt} - \Delta^3 u = |u|^p.$$

Nós obtemos existência global para dados iniciais pequenos no caso $n = 4, 5, 6$ para $p > \frac{n+3}{n-3} = p_c(n)$ (Teorema 2.1.9), e para dimensões $n = 7$ com $p > p_c(n)$ (Teorema 2.1.20), e para $n \geq 8$ não chegamos no $p_c(n)$ uma estimativa seria $p > 1 + \frac{12}{n}$ (Teorema 2.1.20), com $\bar{r} = r^\sharp$.
Em geral existência global não pode existir em espaços de dimensão $n = 1, 2, 3$ e para espaços de dimensão $n \geq 4$ e $1 < p \leq \frac{n+3}{n-3}$ como anteorirmente discutido.

2.2 Discussões Complementares e Problemas em Aberto

Muitas vezes em problemas físicos estamos interessados em estimar a Energia do sistema. Como a energia potencial e cinética. No caso de equação (1.1) podemos considerar a energia a seguir.

$$E_\sigma(u)(t) := \frac{1}{2}\left(\|u_t(t,\cdot)\|_2^2 + \|(-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}} u(t,\cdot)\|_2^2\right).$$

Se supormos $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$ e derivarmos em t temos:

$$E_\sigma'(u)(t) = 0,$$

o que nos diz que temos conservação de energia, ou seja, $E_\sigma(u)(t) = E_\sigma(u)(0)$ para todo $t \geq 0$.
Note disso que temos $\|(-\Delta)^{\sigma/2} u(t,\cdot)\|_2 \lesssim 1$, usando o Teorema 1.5.8 temos para $t > 0$ que $\|u(t,\cdot)\|_2 \lesssim 1 + t$, assim podemos interpolar usando a Proposição A.4.10 para concluir para $\delta < \sigma$ que:

$$\|(-\Delta)^{\delta/2} u(t,\cdot)\|_2 \lesssim (1+t)^{1-\frac{\delta}{\sigma}}. \tag{2.36}$$

Quando pertubarmos essa mesma equação com um termo de ordem inferior, digamos:

$$u_{tt} + (-\Delta)^\sigma u + m^2(-\Delta)^\delta u = 0, \;\; u(0,x) = \phi(x), \;\; u_t(0,x) = \psi(x),$$

devemos redefinir a energia levando em consideração o novo termo, assim teremos:

$$E_{\sigma,\delta}(u)(t) := \frac{1}{2}\left(\|u_t(t,\cdot)\|_2^2 + \|(-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}}u(t,\cdot)\|_2^2 + m^2\|(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}u(t,\cdot)\|_2^2\right)$$

e com a mesma razão podemos concluir conservação de energia nesse caso também, mas nesse caso temos:

$$\|(-\Delta)^{\delta/2}u(t,\cdot)\|_2 \leq C\frac{1}{m^2} \tag{2.37}$$

ou seja, a pertubação com a massa m permitiu garantir um controle desse termo da energia, poderíamos considerar que a massa m depende do tempo e talvez esperar que quando ela aumente com o tempo possamos garantir um controle cada vez melhor com o passar do tempo, por outro lado, no caso que a massa decai poderíamos esperar que o controle esteja entre o obtido em (2.36) quando a massa é nula e o dado em (2.37) onde a massa é constante, veremos tais questões mais precisamente no próximo capítulo.
Agora vamos comentar de alguns problemas que ficaram em aberto, mas que já estão sendo considerados pelo autor.

1. Em [14] os autores consideraram o seguinte problem de Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} + 2\mu(-\Delta)^{\delta}u_t + (-\Delta)^{\sigma}u = |u|^p, \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ (u, u_t)(0,x) = (u_0, u_1)(x), \end{cases} \tag{2.38}$$

   e provaram que para $2\delta \leq \sigma$

$$p_0 \doteq 1 + \frac{2\sigma}{[n-2\delta]_+}, \tag{2.39}$$

   é o expoente crítico para a existência de solução global no tempo com dados pequenos . Claro que (2.39) coincide com (2.4) para $2\delta = \sigma$ e é melhor para $2\delta < \sigma$, i.e., o termo dissipativo $(-\Delta)^{\delta}u_t$ melhora o expoente crítico. O que dizer sobre o Expoente crítico para o caso $2\delta > \sigma$?

2. No Teorema 2.1.16, temos para se obter a existência Global pedimos que

$$\max\{\tilde{q}, p_c(n)\} < p$$

   será que é possível ter existência global sem regularidade para todo $p_c(n) < p$?

3. O que dizer sobre o Expoente crítico para o problema de Cauchy

$$u_{tt} + (-\Delta)^{\sigma}u + m^2(-\Delta)^{\delta}u = |u|^p, \;\; u(0,x) = \phi(x), \;\; u_t(0,x) = \psi(x), \tag{2.40}$$

   com $\sigma \neq \delta$.

Note que na questão (2.40) mesmo o caso $m = 0$ e $\sigma < 1$ não foi respondido aqui. Com relação a esse mesmo problema com $m \neq 0$ em [45] o autor provou estimativas ótimas na antidiagonal para o caso $\sigma = 2$ e $\delta = 0$ e fez aplicações para um problema semilinear. Para $\delta = 0$ e $\sigma = 1$, ou a Equação de Klein-Gordon, em [53] o estudo de seu decaimento foi totalmente estabelecido. Considere o caso $\delta = 0$, e considere o mutliplicador $\frac{\sin(t(m^2+|\xi|^{2\sigma})^{1/2})}{(m^2+|\xi|^{2\sigma})^{1/2}}$. Em frequência baixa temos que esse multiplicador está em M_p^q, com $1 < p \leq q < \infty$, a demonstração desse resultado é análoga a da Proposição 1.2.3, deve-se aplicar o Lema A.4.6 para a função homogênea de grau σ, $f(\eta,\xi) \doteq (|\eta|^{2\sigma} + |\xi|^{2\sigma})^{1/2}$, nos pontos (η_0, ξ), com $|\eta_0| = 1$. Para frequências altas vamos provar que a região onde esperamos estimativa para a equação linear relativa a equação (2.40) deve conter a região onde temos estimativa para a equação (2.1). Mas não podemos dizer nada a priori sobre o decaimento esperado, uma vez que não temos homogeneidade nesse caso. O argumento a seguir foi inteiramente adaptado de Peral [65]. Note que

$$k_t(\xi) \doteq \chi(\xi)\frac{e^{it(m^2+|\xi|^{2\sigma})^{1/2}}}{(m^2+|\xi|^{2\sigma})^{1/2}} = \chi(\xi)\frac{e^{it|\xi|^{\sigma}}}{|\xi|^{\sigma}}\frac{|\xi|^{\sigma}}{(m^2+|\xi|^{2\sigma})^{1/2}}\chi(\xi)e^{it(m^2+|\xi|^{2\sigma})^{1/2}-it|\xi|^{\sigma}}.$$

Agora, como feito em [76], temos que $g(\xi) \doteq \frac{|\xi|^\sigma}{(m^2+|\xi|^{2\sigma})^{1/2}}$ é a transformada de fourier de uma medida finita, portanto pertence a M_1. Afirmamos que

$$m_t(\xi) \doteq e^{it(m^2+|\xi|^{2\sigma})^{1/2}-it|\xi|^\sigma},$$

é também a transformada de fourier de uma medida finita. Usando que

$$(1+t^2)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j t^j,$$

temos que

$$it(m^2+|\xi|^{2\sigma})^{1/2} - it|\xi|^\sigma = it|\xi|^\sigma(\sum_{j=1}^{\infty} c_j \frac{m^j}{|\xi|^{\sigma j}}) = it(c_1 m) + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{m^j}{|\xi|^{(j-1)\sigma}},$$

logo

$$m_t(\xi) = c_t \chi(\xi) e^{it\sum_{j=2}^{\infty} c_j \frac{m^j}{|\xi|^{(j-1)\sigma}}},$$

daí para $r_t(\xi) \doteq m_t(\xi) - c_t$, temos

$$|\partial_\xi^\alpha r_t(\xi)| \leq \frac{1}{(1+|\xi|^\sigma)^{|\alpha|+1}},$$

disso podemos concluir que

$$f_t \doteq \widehat{r_t} \in L^1.$$

Logo $\widehat{m_t} = c_t\delta_0 + f_t$, e isso termina de provar nossa afirmação uma vez que $m_t(\xi)$ é Radial em ξ.
Portanto

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{F}_{\xi\to x}(k_t(\xi)\widehat{\phi}(\xi))\|_{L_x^q} = \|\mathcal{F}_{\xi\to x}(g(\xi)m_t(\xi)m_{\sigma,\sigma}(\xi)\widehat{\phi}(\xi))\|_{L_x^q}\\ &\leq C\|\mathcal{F}_{\xi\to x}(m_t(\xi)m_{\sigma,\sigma}(\xi)\widehat{\phi}(\xi))\|_{L_x^q} \leq C_t\|\mathcal{F}_{\xi\to x}(m_{\sigma,\sigma}(\xi)\widehat{\phi}(\xi))\|_{L_x^q} \leq C_t'\|\phi\|_{L^p}\end{aligned}$$

e isso prova que onde temos estimativa para o multiplicador $m_{\sigma,\sigma}$ temos também para $k_t(\xi)$.

Capítulo 3

Equações de evolução invariantes por escala.

3.1 Velocidade de propagação polinomial

Nessa seção vamos considerar a equação de evolução $u_{tt}+a^2(t)(-\Delta)^\delta u=0$, com velocidade de propagação $a(t)$ polinomial. Vamos usar métodos de funções especiais para obter estimativas L^p-L^q na antidiagonal e também do tipo L^1-L^2, recomenda-se comparar os resultados com aqueles já obtidos quando a é constante. A equação que será tratada a seguir é $u_{tt}+(1+t)^{2\ell}(-\Delta)^\delta u=0$, para $-1<\ell<0$. Quando $\ell=-\frac{2}{3}$ e $\delta=1$ esse modelo têm aplicações em cosmologia, veja as referências [25] e [26]. Quando $\ell>0$, estimativas L^p-L^q na linha dual são estudados em [4], já quando $\ell<-1$, estimativas de energia encontram se em [21]. Vamos considerar o seguinte modelo:

$$u_{tt}+(1+t)^{2\ell}(-\Delta)^\delta u=0,\ \ u(0,x)=u_1(x), u_t(0,x)=u_2(x), \tag{3.1}$$

e vamos admitir que $\ell>-1$ e $\delta>0$, além disso, vamos considerar a energia a seguir.

$$E(u)(t)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\Big(|u_t(t,x)|^2+(1+t)^{2\ell}|(-\Delta)^{\delta/2}u(t,x)|^2\Big)dx. \tag{3.2}$$

Aplicando a transformada parcial de Fourier temos:

$$\widehat{u}_{tt}+(1+t)^{2\ell}|\xi|^{2\delta}\widehat{u}=0,\ \ \widehat{u}(0,\xi)=\widehat{u_1}(\xi),\widehat{u}_t(0,\xi)=\widehat{u_2}(0,\xi). \tag{3.3}$$

Fazendo $\tau=\frac{(1+t)^{\ell+1}|\xi|^\delta}{1+\ell}$ e $\rho=\frac{1}{2(\ell+1)}$ temos para $\widehat{u}(t,\xi)=\tau^\rho w(\tau)$ que w satisfaz a seguinte equação diferencial de Bessel

$$\tau^2w_{\tau\tau}+\tau w_\tau+(\tau^2-\rho^2)w=0.$$

Um sistema fundamental de soluções para as equações de Bessel é bem conhecido e dado pelas funções de Hankel $H^\pm_\rho(\tau)$, portanto fazendo $\bar{w}_\pm(t,\xi)=w_\pm(\tau)=\tau^\rho H^\pm_\rho(\tau)$ temos que a solução de (3.3) para dados em $t_0\geq 0$ pode ser dada por

$$\widehat{u}(t,\xi)=c_1(t_0,\xi)\bar{w}_+(t,\xi)+c_2(t_0,\xi)\bar{w}_-(t,\xi),$$

onde as constantes c_1 e c_2 podem ser obtidas derivando em t e depois resolvendo um sistema, denotando $\partial_t\bar{w}_\pm(t,\xi)=\bar{w}_{\pm,t}(t,\xi)$ temos

$$\begin{aligned}c_1(t_0,\xi)&=\frac{\bar{w}_{-,t}(t_0,\xi)\widehat{u}(t_0,\xi)-\bar{w}_-(t_0,\xi)\widehat{u}_t(t_0,\xi)}{\bar{w}_{-,t}(t_0,\xi)\bar{w}_+(t_0,\xi)-\bar{w}_-(t_0,\xi)\bar{w}_{+,t}(t_0,\xi)}\\ c_2(t_0,\xi)&=\frac{\bar{w}_+(t_0,\xi)\widehat{u}_t(t_0,\xi)-\bar{w}_{+,t}(t_0,\xi)\widehat{u}(t_0,\xi)}{\bar{w}_{-,t}(t_0,\xi)\bar{w}_+(t_0,\xi)-\bar{w}_-(t_0,\xi)\bar{w}_{+,t}(t_0,\xi)}\end{aligned} \tag{3.4}$$

Por outro lado podemos escrever a solução, para funções V_1 e V_2 a serem determinadas, da seguinte forma:

$$\widehat{u}(t,\xi) = V_1(t,t_0,\xi)\widehat{u}(t_0,\xi) + V_2(t,t_0,\xi)\widehat{u}_t(t_0,\xi).$$

Derivando com relação a t e denotando $\partial_t V_i(t,t_0,\xi) = V_{i,t}(t,t_0,\xi)$ para $i=1,2$, temos para $t \geq t_0$

$$\widehat{u}_t(t,\xi) = V_{1,t}(t,t_0,\xi)\widehat{u}(t_0,\xi) + V_{2,t}(t,t_0,\xi)\widehat{u}_t(t_0,\xi),$$

donde temos que $V_i(t_0,t_0,\xi) \equiv \delta_{1,i}$ e $V_{i,t}(t_0,t_0,\xi) \equiv \delta_{2,i}$. Portanto das igualdades (3.4) e das identidades (A.9) dadas no apêndice temos, após voltarmos às variáveis t,ξ em vez de τ, que valem:

$$\begin{aligned}
V_1(t,t_0,\xi) &= \frac{i\pi}{4(\ell+1)}(1+t_0)^{-\rho(\ell+1)}(1+t)^{\rho(\ell+1)}\Psi_{1,\rho-1,1}(t,t_0,\xi),\\
V_2(t,t_0,\xi) &= -\frac{i\pi}{4(\ell+1)}(1+t_0)^{-\rho(\ell+1)}(1+t)^{\rho(\ell+1)}\Psi_{0,\rho,0}(t,t_0,\xi),\\
V_{1,t}(t,t_0,\xi) &= \frac{i\pi}{4(\ell+1)}(1+t_0)^{-\ell-\rho(\ell+1)}(1+t)^{\ell+\rho(\ell+1)}\Psi_{2,\rho-1,0}(t,t_0,\xi),\\
V_{2,t}(t,t_0,\xi) &= -\frac{i\pi}{4(\ell+1)}(1+t_0)^{-\ell-\rho(\ell+1)}(1+t)^{\ell+\rho(\ell+1)}\Psi_{1,\rho,-1}(t,t_0,\xi),
\end{aligned}$$

onde

$$\Psi_{k,\rho,\alpha}(t,t_0,\xi) = ((1+t_0)^{\ell+1}|\xi|^\delta)^k \det\begin{pmatrix} H_\rho^-\left(\frac{(1+t_0)^{\ell+1}|\xi|^\delta}{1+\ell}\right) & H_{\rho+\alpha}^-\left(\frac{(1+t)^{\ell+1}|\xi|^\delta}{1+\ell}\right)\\ H_\rho^+\left(\frac{(1+t_0)^{\ell+1}|\xi|^\delta}{1+\ell}\right) & H_{\rho+\alpha}^+\left(\frac{(1+t)^{\ell+1}|\xi|^\delta}{1+\ell}\right).\end{pmatrix} \tag{3.5}$$

Para estimar a norma de nossos multiplicadores V_i e $V_{i,t}$ vamos usar propriedades das funções de Hankel enunciadas na Proposição A.1.4. Vamos dividir nosso espaço de fase em três Zonas de modo que temos em cada um deles uma estimativa para as funções de Hankel.
Na zona definida por $Z_3 = \{(t,\xi) : |\xi|^\delta \geq N\}$ temos as estimativa:

$$|\Psi_{k,\rho,\alpha}(t,t_0,\xi)| \leq C((1+t_0)^{1+\ell}|\xi|^\delta)^{k-\frac{1}{2}}((1+t)^{(\ell+1)}|\xi|^\delta)^{-\frac{1}{2}}.$$

Na Zona definida por $Z_2 = \{(t,\xi) : (1+t_0)^{1+\ell}|\xi|^\delta \leq N \leq \frac{(1+t)^{\ell+1}|\xi|^\delta}{\ell+1}\}$ temos:

$$|\Psi_{k,\rho,\alpha}(t,t_0,\xi)| \leq C((1+t_0)^{1+\ell}|\xi|^\delta)^{k-|\rho|}((1+t)^{(\ell+1)}|\xi|^\delta)^{-\frac{1}{2}}.$$

Finalmente na zona $Z_1 = \{(t,\xi) : \frac{(1+t)^{\ell+1}|\xi|^\delta}{\ell+1} \leq N\}$ vamos considerar separadamente quando ρ é ou não um inteiro. Vamos assumir primeiro que ρ não é inteiro, logo para $\alpha \in \{-1,0,1\}$, $\rho+\alpha$ também não é inteiro. Como $H_\rho^\pm(\tau) = J_\rho(\tau) \pm iY_\rho(\tau)$, temos

$$\Psi_{k,\rho,\alpha}(t,t_0,\xi) = 2i((1+t_0)^{\ell+1}|\xi|^\delta)^k \det\begin{pmatrix} J_\rho(\frac{(1+t_0)^{\ell+1}|\xi|^\delta}{1+\ell}) & J_{\rho+\alpha}(\frac{(1+t)^{\ell+1}|\xi|^\delta}{1+\ell})\\ Y_\rho(\frac{(1+t_0)^{\ell+1}|\xi|^\delta}{1+\ell}) & Y_{\rho+\alpha}(\frac{(1+t)^{\ell+1}|\xi|^\delta}{1+\ell})\end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Para ρ não inteiro, a função de Weber é determinada pela função de Bessel de primeiro tipo

$$Y_\rho(\tau) = \frac{J_\rho(\tau)\cos(\rho\pi) - J_{-\rho}(\tau)}{\sin(\rho\pi)}.$$

Então fazendo os cancelamentos o determinante em $t_0 = 0$ é

$$C\big(J_\rho(\frac{(1+t_0)^{\ell+1}|\xi|^\delta}{1+\ell}))J_{-(\rho+\alpha)}(\frac{(1+t)^{\ell+1}|\xi|^\delta}{1+\ell}) - J_{-\rho}((1+t_0)^{\ell+1}\frac{|\xi|^\delta}{1+\ell})J_{\rho+\alpha}(\frac{(1+t)^{\ell+1}|\xi|^\delta}{1+\ell})\big),$$

usando que $|J_\rho(\tau)| \leq C\tau^\rho$ nós temos

$$|\Psi_{k,\rho,\alpha}(t,t_0,\xi)| \leq C((1+t_0)^{\ell+1}|\xi|^{\delta})^{k+\rho}((1+t)^{(\ell+1)}|\xi|^{\delta})^{-\rho-\alpha}+C((1+t_0)^{\ell+1}|\xi|^{\delta})^{k-\rho}((1+t)^{(\ell+1)}|\xi|^{\delta})^{\rho+\alpha}.$$

Para nossa aplicação podemos assumir $k \geq |\alpha|$, $\alpha \in \{-1,0,1\}$ e como $\ell+1>0$ concluímos que em Z_1 temos a seguinte estimativa

$$|\Psi_{k,\rho,\alpha}(t,0,\xi)| \leq C(1+t)^{(|\rho|-k)(\ell+1)}.$$

Agora vamos supor que ρ é inteiro, nesse caso $Y_n(\tau) = \frac{2}{\pi}J_n(\tau)\log\tau + A_n(\tau)$, onde $\tau^n A_n(\tau)$ é inteira e $A_n(0)\neq 0$. Além disso, a função $\Lambda_\rho(\tau)=\tau^{-\rho}J_\rho(\tau)$ é inteira em ρ e τ e ainda é não nula para $\tau=0$. Temos

$$\begin{aligned}\Psi_{k,\rho,\alpha}(t,0,\xi) = &-\frac{4i}{\pi}|\xi|^{\delta k}\log((1+t)^{\ell+1})J_\rho(|\xi|^\delta/\ell+1)J_{\rho+\alpha}(\frac{1+t)^{\ell+1}|\xi|^\delta}{\ell+1})\\ &+2i|\xi|^{\delta k}\Big(J_{\rho+\alpha}(|\xi|^\delta/\ell+1)\Lambda_{\rho+\alpha}((\frac{1+t)^{\ell+1}|\xi|^\delta}{\ell+1})-\Lambda_\rho(|\xi|^\delta/\ell+1)J_{\rho+\alpha}(\frac{(1+t)^{\ell+1}|\xi|^\delta}{\ell+1}\Big)\end{aligned}$$

Como $J_n(\tau)=(-1)^nJ_{-n}(\tau)$, para n inteiro, para estimar a primeira parcela acima podemos trocar $J_{\rho+\alpha}$ por $J_{-(\rho+\alpha)}$. Com isso e lembrando que podemos assumir $k\geq|\alpha|$, temos que em Z_1 vale que aprimeira parcela é estimada por

$$C(1+t)^{(\ell+1)(-|\rho|-k)}\log(e+t).$$

Analogamente, e usando que $\Lambda_\rho(\tau)$ é inteira, temos a seguinte estimativa para a segunda parcela na zona Z_1

$$C(1+t)^{(-\rho-\alpha)(\ell+1)}|\xi|^{\delta(k-\alpha)}+C(1+t)^{(\rho+\alpha)(\ell+1)}|\xi|^{\delta(k+\alpha)} \leq C(1+t)^{(\ell+1)(|\rho|-k)}.$$

Portanto em qualquer caso em Z_1 vale a seguinte estimativa $|\Psi_{k,\rho,\alpha}(t,0,\xi)|\leq C(1+t)^{(\ell+1)(|\rho|-k)}$.
Assim com essas estimativas podemos concluir que para $\rho>\frac{1}{2}$ valem:

$$|V_1(t,0,\xi)| \lesssim \begin{cases}(1+t)^{-\frac{\ell}{2}} & \text{em } Z_3,\\ (1+t)^{-\frac{\ell}{2}}|\xi|^{\delta(\frac{3}{2}-\rho)}, & \text{em } Z_2, 2\ell+1\leq 0,\\ (1+t)^{-\frac{\ell}{2}}|\xi|^{\delta(\rho-\frac{1}{2})}, & \text{em } Z_2, 2\ell+1>0,\\ (1+t)^{-(2\ell+1)}, & \text{em } Z_1, 2\ell+1\leq 0,\\ 1, & \text{em } Z_1, 2\ell+1>0.\end{cases} \tag{3.7}$$

$$|V_2(t,0,\xi)| \lesssim \begin{cases}|\xi|^{-\delta}(1+t)^{-\frac{\ell}{2}} & \text{em } Z_3,\\ (1+t)^{-\frac{\ell}{2}}|\xi|^{-\delta(\frac{1}{2}+\rho)}, & \text{em } Z_2,\\ 1+t, & \text{em } Z_1,\end{cases} \tag{3.8}$$

$$|V_{1,t}(t,0,\xi)| \lesssim \begin{cases}|\xi|^{\delta}(1+t)^{\ell/2} & \text{em } Z_3,\\ |\xi|^{\delta(\frac{1}{2}+\rho)}(1+t)^{\ell/2}, & \text{em } Z_2, 2\ell+1\leq 0,\\ |\xi|^{\delta(\frac{5}{2}-\rho)}(1+t)^{\ell/2}, & \text{em } Z_2, 2\ell+1>0,\\ ((1+t)^{-(1+\ell)}+(1+t)^{\ell})|\xi|^{\delta}, & \text{em } Z_1.\end{cases} \tag{3.9}$$

$$|V_{2,t}(t,0,\xi)| \lesssim \begin{cases}(1+t)^{\ell/2}, & \text{em } Z_3,\\ (1+t)^{\ell/2}|\xi|^{\delta(\frac{1}{2}-\rho)}, & \text{em } Z_2,\\ 1, & \text{em } Z_1.\end{cases} \tag{3.10}$$

Também temos, para $t \geq t_\xi$, $|\xi|^\sigma \leq N$:

$$|V_1(t,t_\xi,\xi)|, |V_2(t,t_\xi,\xi)| \lesssim (|\xi|^\delta (1+t)^{\ell+1})^{-\frac{\ell}{2(\ell+1)}}, \text{ em } Z_2; \tag{3.11}$$

$$|V_{1,t}(t,t_\xi,\xi)|, |V_{2,t}(t,t_\xi,\xi)| \lesssim ((1+t)^{\ell+1}|\xi|^\delta)^{\frac{\ell}{2(\ell+1)}}, \text{ em } Z_2. \tag{3.12}$$

Na Proposição a seguir vamos obter um estimativa para a seguinte energia $\|u_t(t,\cdot)\|_2^2 + \|(1+t)^\ell (-\Delta)^{\delta/2} u(t,\cdot)\|_2^2$. Note que derivando em t podemos concluir que

$$\|u_t(t,\cdot)\|_2^2 + \|(1+t)^\ell (-\Delta)^{\delta/2} u(t,\cdot)\|_2^2 \leq \|u_t(0,\cdot)\|_2^2 + \|(-\Delta)^{\delta/2} u(0,\cdot)\|_2^2.$$

Vamos ver que usando as representações da solução obtidas acima podemos obter um decaimento maior para essa energia, ao menos quando o segundo dado é nulo. Além disso vamos obter uma estimativa para $\|u(t,\cdot)\|_2$ que não pode ser obtida simplesmente derivando a energia acima. Compare tal estimativa com a obtida no Teorema 1.5.7.

Teorema 3.1.1. *Seja $u(t,x)$ solução de* (3.1) *com $0 < \ell + 1 < 1$. Nesse caso:*

$$\|(1+t)^\ell (-\Delta)^{\delta/2} u(t,\cdot)\|_2^2 \lesssim \begin{cases} (1+t)^\ell \|u_1\|_{\dot{H}^\delta}^2 + \|u_2\|_2^2, & \ell > -\frac{2}{3} \\ (1+t)^{-2(1+\ell)} \|u_1\|_{\dot{H}^\delta}^2 + \|u_2\|_2^2, & \ell \leq -\frac{2}{3} \end{cases}; \tag{3.13}$$

$$\|u_t(t,\cdot)\|_2^2 \lesssim \begin{cases} (1+t)^{2\ell} \|u_1\|_{\dot{H}^\delta}^2 + \|u_2\|_2^2, & 2\ell+1 > 0, \\ (1+t)^{-2(1+\ell)} \|u_1\|_{\dot{H}^\delta}^2 + \|u_2\|_2^2, & 2\ell+1 \leq 0, \end{cases} \tag{3.14}$$

$$\|u(t,\cdot)\|_2 \lesssim \begin{cases} (1+t)^{-\ell/2} \|u_1\|_2 + (1+t)\|u_2\|_2, & \ell > -\frac{2}{3} \\ (1+t)^{-(2\ell+1)} \|u_1\|_2 + (1+t)\|u_2\|_2, & \ell \leq -\frac{2}{3}. \end{cases} \tag{3.15}$$

para todo $t \geq 0$.

Demonstração. Em Z_3 temos:

$$\begin{aligned} (1+t)^\ell |\xi|^\delta |V_1(t,0,\xi)| &\lesssim (1+t)^{\ell/2} |\xi|^\delta, \\ (1+t)^\ell |\xi|^\delta |V_2(t,0,\xi)| &\lesssim (1+t)^{\ell/2}. \end{aligned}$$

Enquanto que para $|\xi|^\delta \leq N$ e $t \geq t_\xi$, onde $\frac{(1+t_\xi)^{1+\ell}|\xi|^\delta}{\ell+1} = N$, temos:

$$\begin{aligned} (1+t)^\ell |V_1(t,0,\xi)| &\lesssim \begin{cases} (1+t)^{-(1+\ell)}, & \ell \leq -\frac{2}{3}, \\ (1+t)^{\ell/2}, & 0 > \ell > -\frac{2}{3}, \end{cases} \\ (1+t)^\ell |\xi|^\delta |V_2(t,0,\xi)| &\lesssim 1. \end{aligned}$$

Para $|\xi|^\delta \leq N$ e $t \leq t_\xi$ temos

$$\begin{aligned} (1+t)^\ell |V_1(t,0,\xi)| &\lesssim \begin{cases} (1+t)^{-(1+\ell)}, & 2\ell+1 \leq 0 \\ (1+t)^\ell, & 2\ell+1 > 0, \end{cases}, \\ (1+t)^\ell |\xi|^\delta |V_2(t,0,\xi)| &\lesssim 1, \end{aligned}$$

Logo

$$\|(1+t)^\ell (-\Delta)^\delta u(t,\cdot)\|_2^2 \lesssim \begin{cases} (1+t)^\ell \|u_1\|_{\dot{H}^\delta}^2 + \|u_2\|_2^2, & \ell + 1 > \frac{1}{3} \\ (1+t)^{-2(1+\ell)} \|u_1\|_{\dot{H}^\delta}^2 + \|u_2\|_2^2, & \ell + 1 \leq \frac{1}{3} \end{cases};$$

Analogamente prova-se as outras desigualdades.

□

Estimativa $L^1 - L^2$.

Vamos agora obter estimativas $L^1 - L^2$. Compare com as obtidas no caso em que temos coeficientes constantes, Teorema 1.5.7. Note que uma condição para se ter essa estimativa no caso constante é que $2\sigma > n$, e vamos precisar dessa condição na próxima Proposição também. Ela será utilizada para se obter a estimativa na zona Z_3, note que essa é a região de frequências altas. No caso coeficientes constantes é também para frequências altas que ocorre tal restrição, veja a Proposição 1.2.6.

Teorema 3.1.2. *Considere $u(t,x)$ solução de*

$$u_{tt} + (1+t)^{2\ell}(-\Delta)^{\delta}u = 0,\ u(0,x) \equiv 0,\ u_t(0,x) = \psi(x).$$

Se $2\delta > n$, $0 < 1 + \ell < 1$, então

$$\|u(t,\cdot)\|_2 \lesssim \|\psi\|_1 \begin{cases} (1+t)^{-\frac{\ell}{2}}, & n > \delta\big(\frac{\ell+2}{\ell+1}\big) \\ (1+t)^{-\frac{\ell}{2}}(\ln(1+t))^{1/2}, & n = \delta\big(\frac{\ell+2}{\ell+1}\big) \\ (1+t)^{1-\frac{n}{2\delta}(1+\ell)}, & n < \delta\big(\frac{\ell+2}{\ell+1}\big) \end{cases}$$

para qualquer $t > 0$.

Demonstração. Temos que:

$$\Big(\int_{(t,\xi)\in Z_1} |V_2(t,0,\xi)|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} \lesssim (1+t)^{1-\frac{n}{2\delta}(1+\ell)}.$$

Além disso,

$$\Big(\int_{(t,\xi)\in Z_2} |V_2(t,0,\xi)|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} \lesssim \begin{cases} (1+t)^{-\frac{\ell}{2}}\|\psi\|_1, & n > \delta\big(\frac{\ell+2}{\ell+1}\big) \\ (1+t)^{-\frac{\ell}{2}}(\ln(1+t))^{1/2}, & n = \delta\big(\frac{\ell+2}{\ell+1}\big) \\ (1+t)^{1-\frac{n}{2\delta}(1+\ell)}, & n < \delta\big(\frac{\ell+2}{\ell+1}\big) \end{cases}$$

Para $2\delta > n$, temos também

$$\Big(\int_{(t,\xi)\in Z_3} |V_2(t,0,\xi)|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} \lesssim (1+t)^{-\frac{\ell}{2}}.$$

Portanto com essas estimativas podemos provar a Proposição.

□

A Proposição a seguir é o caso em que temos apenas o primeiro dado, assim, vamos precisar de mais regularidade. O mesmo ocorre no caso coeficientes constantes, compare com 1.5.7. Além disso, a mesma consideração feita anteriormente sobre a restrição $2\delta > n$ referente a Proposição anterior se aplica aqui.

Teorema 3.1.3. *Considere $u(t,x)$ solução de*

$$u_{tt} + (1+t)^{2\ell}(-\Delta)^{\delta}u = 0,\ u(0,x) = \phi(x),\ u_t(0,x) \equiv 0.$$

Se $2\delta > n$, $0 < 1 + \ell < 1$, então

$$\|u(t,\cdot)\|_2 \lesssim \begin{cases} (1+t)^{-\frac{\ell}{2}}\big(\|\phi\|_1 + \||D|^\delta\phi\|_1\big), & 2\ell+1>0 \text{ ou } 2\ell+1\le 0 \text{ e } \delta\big(\frac{2+3\ell}{1+\ell}\big)+n>0, \\ (1+t)^{-\frac{\ell}{2}}(\ln(1+t))^{\frac{1}{2}}\|\phi\|_1 + (1+t)^{-\frac{\ell}{2}}\||D|^\delta\phi\|_1, & 2\ell+1\le 0 \text{ e } \delta\big(\frac{2+3\ell}{1+\ell}\big)+n=0, \\ (1+t)^{-(2\ell+1)-\frac{n}{2\delta}(1+\ell)}\|\phi\|_1 + (1+t)^{-\frac{\ell}{2}}\||D|^\delta\phi\|_1, & 2\ell+1\le 0 \text{ e } \delta\big(\frac{2+3\ell}{1+\ell}\big)+n<0 \end{cases} \tag{3.16}$$

para $t \geq 0$.

Demonstração. Em Z_1 temos

$$\Big(\int_{(t,\xi)\in Z_1} |V_1(t,0,\xi)|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} \lesssim \begin{cases} (1+t)^{-(2\ell+1)-\frac{n}{2\delta}(1+\ell)}, & 2\ell+1\le 0 \\ (1+t)^{-\frac{n}{2\delta}(1+\ell)}, & 2\ell+1>0 \end{cases},$$

enquanto que em Z_2,

$$\Big(\int_{(t,\xi)\in Z_2} |V_1(t,0,\xi)|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} \lesssim \begin{cases} (1+t)^{-\frac{\ell}{2}}, & 2\ell+1>0, \\ (1+t)^{-\frac{\ell}{2}}, & \delta\big(\frac{2+3\ell}{1+\ell}\big)+n>0; 2\ell+1\le 0, \\ (1+t)^{-\frac{\ell}{2}}(\ln(1+t))^{1/2}, & \delta\big(\frac{2+3\ell}{1+\ell}\big)+n=0; 2\ell+1\le 0 \\ (1+t)^{-(1+2\ell)-\frac{n}{2\delta}(1+\ell)}, & \delta\big(\frac{2+3\ell}{1+\ell}\big)+n<0; 2\ell+1\le 0, \end{cases} \tag{3.17}$$

Finalmente se $2\delta > n$,

$$\Big(\int_{(t,\xi)\in Z_3} \frac{1}{|\xi|^{2\delta}} |V_1(t,0,\xi)|^2 d\xi\Big)^{\frac{1}{2}} \lesssim (1+t)^{-\frac{\ell}{2}}.$$

Essas estimativas são suficientes para demonstrar a Proposição.

□

Observação 3.1.4. *Note que quando pedimos que os dados tenha regularidade em* L^1 *em vez de* L^2 *podemos melhorar a estimativa para a solução* $\|u(t,\cdot)\|_{L^2}$*, compare as estimativas nas Proposições* 3.1.1, 3.1.2 *e* 3.1.3.

3.2 Invariante por Escala com termo de massa

Nessa seção vamos tratar a equação

$$\begin{cases} u_{tt} + (-\Delta)^\sigma u + \frac{\mu^2}{(1+t)^{2(1-\frac{\delta}{\sigma})}}(-\Delta)^\delta u = 0 \\ u(0,x) = \phi(x), u_t(0,x) = \psi(x) \end{cases} \tag{3.18}$$

com $\mu \neq 0$ exercendo um importante papel no comportamento da solução. A equação tem a propriedade de ser invariante por alguma escala, de fato, se $u(t,x)$ é solução, então

$$u(\lambda^\sigma(1+t), \lambda x)$$

também é solução, para cada $\lambda > 0$. Aplicando a transformada de Fourier, temos

$$\begin{cases} \widehat{u}_{tt} + |\xi|^{2\sigma}\widehat{u} + \frac{\mu^2}{(1+t)^{2(1-\frac{\delta}{\sigma})}}|\xi|^{2\delta}\widehat{u} = 0, \\ \widehat{u}(0,\xi) = \widehat{\phi}(\xi), \widehat{u}_t(0,\xi) = \widehat{\psi}(\xi). \end{cases} \tag{3.19}$$

Vamos considerar $m(t) = \frac{\mu}{(1+t)^{1-\frac{\delta}{\sigma}}}$, temos que $m^{'}(t) < 0$, logo definindo

$$E(u)(t) = \frac{1}{2}\left(\|u_t(t,\cdot)\|_2^2 + \|(-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}}u(t,\cdot)\|_2^2 + m^2(t)\|(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}u(t,\cdot)\|_2^2\right), \tag{3.20}$$

logo derivando em t segue que $E^{'}(u)(t) = m(t)m^{'}(t)\|(-\Delta)^{\frac{\delta}{2}}u(t,\cdot)\|_2^2 \leq 0$, donde para $t \geq 0$ temos:

$$E(u)(t) \leq E(u)(0). \tag{3.21}$$

Note que para estabelecer esse fato só usamos que $m(t) > 0$ e $m^{'}(t) < 0$ para todo t. Podemos também usar a desigualdade de Gronwall, e obter

$$E(u)(0)e^{-2\int_0^t \frac{|m^{'}(\tau)|}{m(\tau)}d\tau} \leq E(u)(t) \leq E(u)(0)e^{2\int_0^t \frac{|m^{'}(\tau)|}{m(\tau)}d\tau}.$$

No caso $m(t) = \frac{\mu}{(1+t)^{1-\frac{\delta}{\sigma}}}$, temos $e^{2\int_0^t \frac{|m^{'}(\tau)|}{m(\tau)}d\tau} = (1+t)^{2(1-\frac{\delta}{\sigma})}$, logo

$$C^{-1}\frac{E(u)(0)}{(1+t)^{2(1-\frac{\delta}{\sigma})}} \leq E(u)(t) \leq C(1+t)^{2(1-\frac{\delta}{\sigma})}E(u)(0).$$

Nos casos especiais em que $\frac{|m^{'}(\tau)|}{m(\tau)}$ é integrável, como por exemplo $m(t) = e^{\frac{1}{t}}$, teremos conservação da energia, ou seja:

$$E(u)(t) \sim E(u)(0).$$

Claro que em toda essa discussão estamos querendo que $E(u)(0) < \infty$ e para isso basta assumir que $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\phi \in \dot{H}^{\sigma}(\mathbb{R}^n) \cap \dot{H}^{\delta}(\mathbb{R}^n)$. Note que pela desigualdade (3.21) podemos concluir que

$$m^2(t)\||D|^{\delta}u(t,\cdot)\|_2 \leq E(u)(0).$$

Queremos saber quando podemos melhorar essa estimativa, veremos que no caso $\delta = 0$ será possível obter um decaimento melhor que irá depender de $\mu > 0$.

3.2.1 Caso $\delta = 0$.

Em Böhme [5] e [7] a autora estuda o comportamento assintótico da solução da equação (3.19) no caso $\sigma = 1$ e $\delta = 0$, para isso ela faz uso dos comportamentos assintóticos conhecidos para as funções especiais, tais como as confluente e hipergeométrica. Veremos que no caso $\sigma > 0$ qualquer e $\delta = 0$, podemos usar as mesmas técnicas e deduzir de maneira análoga o comportamento assintótico nesse caso também. Além disso, quando $2\sigma > n$, onde $n > 1$ é a dimensão, vamos deduzir estimativas do tipo $L^1 - L^2$.

Fazendo $\tau = |\xi|^{\sigma}(1+t)$. Considere $\rho = \frac{1+\sqrt{1-4\mu^2}}{2}$ e $\widehat{u}(t,\xi) = \tau^{\rho}v(\tau)$ e obtemos que

$$\tau v_{\tau\tau} + 2\rho v_{\tau} + \tau v = 0$$

Por fim $z = 2i\tau$ e $w(z) = e^{i\tau}v(\tau)$ temos

$$zw_{zz} + (2\rho - z)w_z - \rho w = 0, \tag{3.22}$$

que descreve uma equação confluente hipergeométrica ou uma equação de Kummer. Suas soluções fundamentais são chamadas funções confluentes hipergeométricas e dependem essencialmente de ρ,

$$\begin{cases} \rho \in (\frac{1}{2}, 1), & \text{quando } \mu^2 < \frac{1}{4} \\ \rho = \frac{1}{2}, & \text{quando } \mu^2 = \frac{1}{4} \\ \Re\rho = \frac{1}{2}, \Im\rho \neq 0, & \text{quando } \mu^2 > \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Temos pelas Proposições A.1.6 e A.1.7, de acordo com 2ρ ser inteiro ou não, que $w_1(z) = \Theta_0(\rho, 2\rho; z)$ e $w_2(z) = z^{1-2\rho}e^z\Theta_0(1-\rho, 2-2\rho; -z)$ são as soluções fundamentais de 3.22, onde

$$\Theta_0(\alpha, \beta; z) \doteq \begin{cases} \Phi(\alpha, \beta; z), & \rho \neq \frac{1}{2} \\ \Psi(\alpha, \beta; z), & \rho = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

onde Φ e Ψ são as funções confluentes hipergeométricas. Logo, nós temos duas soluções fundamentais e_1, e_2 para 3.19:

$$\begin{aligned} e_1(t,\xi) =& \big((1+t)|\xi|^\sigma\big)^\rho e^{-i(1+t)|\xi|^\sigma}\Theta_0(\rho, 2\rho; z), \\ e_2(t,\xi) =& \big((1+t)|\xi|^\sigma\big)^\rho z^{1-2\rho}e^{i(1+t)|\xi|^\sigma}\Theta_0(1-\rho, 2-2\rho; -z). \end{aligned}$$

Derivando com respeito a t, usando que $z = 2i|\xi|^\sigma(1+t)$ e as Proposições A.1.6, A.1.7, temos:

$$\begin{aligned} e_{1,t}(t,\xi) = \partial_t e_1(t,\xi) =& \big((1+t)|\xi|^\sigma\big)^{\rho-1}|\xi|^\sigma e^{-i(1+t)|\xi|^\sigma}\Theta_1(\rho, 2\rho; z), \\ e_{2,t}(t,\xi) = \partial_t e_2(t,\xi) =& \big((1+t)|\xi|^\sigma\big)^{\rho-1}|\xi|^\sigma z^{1-2\rho}e^{i(1+t)|\xi|^\sigma}\Theta_1(1-\rho, 2-2\rho; -z), \end{aligned}$$

onde

$$\Theta_1(\alpha, \beta; z) = \begin{cases} \frac{z}{2}\Phi(\alpha, \beta; z) + (\beta - \alpha)\Phi(\alpha - 1, \beta; z), & \rho \neq \frac{1}{2}, \\ \frac{z}{2}\Phi(\alpha, \beta; z) - \Phi(\alpha - 1, \beta; z), & \rho = \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{3.23}$$

Logo a solução de (3.19) é representada para dados iniciais em t_0 por

$$\widehat{u}(t,\xi) = c_1(t_0,\xi)e_1(t,\xi) + c_2(t_0,\xi)e_2(t,\xi).$$

As constantes são dadas por

$$\begin{aligned} c_1(t_0,\xi) &= \frac{e_{2,t}(t_0,\xi)\widehat{u}(t_0,\xi) - e_2(t_0,\xi)\widehat{u}_t(t_0,\xi)}{e_{2,t}(t_0,\xi)e_1(t_0,\xi) - e_2(t_0,\xi)e_{1,t}(t_0,\xi)}, \\ c_2(t_0,\xi) &= \frac{e_1(t_0,\xi)\widehat{u}_t(t,\xi) - e_{1,t}(t_0,\xi)\widehat{u}(t_0,\xi)}{e_{2,t}(t_0,\xi)e_1(t_0,\xi) - e_2(t_0,\xi)e_{1,t}(t_0,\xi)}. \end{aligned}$$

Vamos escrever a solução de (3.19) como

$$\widehat{u}(t,\xi) = E_{1,0}(t,t_0,\xi)\widehat{u}(t_0,\xi) + E_{2,0}(t,t_0,\xi)\widehat{u}_t(t_0,\xi),$$

onde

$$\begin{aligned} E_{1,0}(t,t_0,\xi) &= \frac{e_{2,t}(t_0,\xi)e_1(t,\xi) - e_{1,t}(t_0,\xi)e_2(t,\xi)}{e_{2,t}(t_0,\xi)e_1(t_0,\xi) - e_2(t_0,\xi)e_{1,t}(t_0,\xi)}, \\ E_{2,0}(t,t_0,\xi) &= \frac{e_1(t_0,\xi)e_2(t,\xi) - e_2(t_0,\xi)e_1(t,\xi)}{e_{2,t}(t_0,\xi)e_1(t_0,\xi) - e_2(t_0,\xi)e_{1,t}(t_0,\xi)}, \end{aligned}$$

e sua derivada em t é dado por

$$\widehat{u}_t(t,\xi) = E_{1,1}(t,t_0,\xi)\widehat{u}(t_0,\xi) + E_{2,1}(t,t_0,\xi)\widehat{u}_t(t_0,\xi),$$

onde $E_{k,1} = \partial_t E_{k,0}$, $k = 1, 2$. A solução fundamental satisfaz $E_{k,l}(t_0,t_0,\xi) = \delta_{k,l+1}$, $k = 1, 2$, $l = 0, 1$. Por A.16 e A.17 temos

$$\begin{aligned}&e_{2,t}(t,\xi)e_1(t,\xi) - e_{1,t}(t,\xi)e_2(t,\xi)\\ =&(2i)^{1-2\rho}|\xi|^\sigma z^{2\rho}e^{-z}(w_1(z)w_2'(z) - w_1'(z)w_2(z)) = C_\rho(2i)^{1-2\rho}|\xi|^\sigma,\end{aligned}$$

onde C_ρ é uma constante não-nula dependendo de ρ.

Lema 3.2.1. *Denotando $z = z(t) = 2i(1+t)|\xi|^\sigma$, $z_0 = z_0(t_0)$ nós temos para $k = 1, 2$, $l = 0, 1$ a representação*

$$E_{k,l}(t, t_0, \xi) = C_\rho(-2i|\xi|^\sigma)^{1-k+l} det G_{k,l}(t, t_0, \xi), \tag{3.24}$$

onde

$$G_{k,l}(t,t_0,\xi) = \begin{pmatrix} z^{\rho-l}e^{-\frac{z}{2}}\Theta_l(\rho, 2\rho; z) & z^{-\rho+1-l}e^{\frac{z}{2}}\Theta_l(1-\rho, 2-2\rho; -z)\\ z_0^{\rho-2+k}e^{-\frac{z_0}{2}}\Theta_{2-k}(\rho, 2\rho; z_0) & z_0^{-\rho-1+k}e^{\frac{z_0}{2}}\Theta_{2-k}(1-\rho, 2-2\rho; -z_0)\end{pmatrix}.$$

Vamos definir as seguintes zonas,

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_1 &= \{(t,\xi) : (1+t)|\xi|^\sigma \le N\};\\ \mathcal{Z}_2 &= \{(t,\xi) : |\xi|^\sigma \le N \le (1+t)|\xi|^\sigma\};\\ \mathcal{Z}_3 &= \{(t,\xi) : N \le (1+t)|\xi|^\sigma\}.\end{aligned}$$

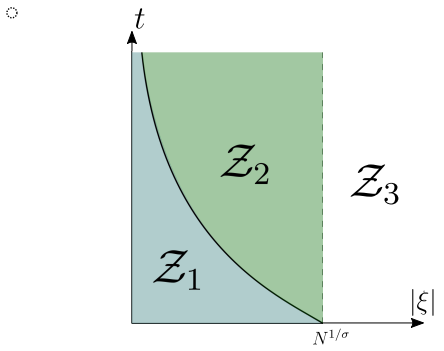


Figura 3.1: Zonas.

Proposição 3.2.2. *Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.*

1. *Para $\rho = \frac{1}{2}$, $l = 0, 1$ e argumento pequeno $|z|$ nós temos*

$$\Theta_l(\alpha, \beta; z) \sim sgn\big(\Gamma(\alpha - l)\big) \ln z,$$

onde, por razões de simplicidade, nós supomos que z é um imaginário puro e, portanto, $\ln z = \ln|z| + i\frac{\pi}{2} sgn\frac{1}{i}z$.

2. *Para $\rho \neq \frac{1}{2}$, $l = 0, 1$ e argumentos pequenos z com $|z| \le C$, nós temos*

$$|\Theta_l(\alpha, \beta; z)| \le C$$

3. *Para $\rho = \frac{1}{2}$, $l = 0, 1$ e argumentos grandes $|z|$ nós temos*

$$\Theta_l(\alpha, \beta; z) = Ca(z),$$

onde $|d_z^m a(z)| \le C_m|z|^{l-\Re\alpha-m}$, m inteiro não-negativo e $C_m = C_m(\alpha, \beta)$.

4. *Para $\rho \neq \frac{1}{2}$, um número não-ímpar $\beta = 2\alpha$, $l = 0, 1$ e argumentos grandes $|z|$ nós temos*

$$\Theta_l(\alpha, \beta; z) = Ce^{\frac{\pi}{2}} \sin\big(\frac{z}{2i}\big)a(z),$$

onde $|d_z^m a(z)| \leq C_m |z|^{l-\Re\alpha-m}$, m inteiro não-negativo, e $C_m = C_m(\alpha)$.

Demonstração. Basta usar a propriedades de Φ e Ψ descritas nas Proposições A.1.6 e A.1.7, respectivamente. □

Proposição 3.2.3. *Para todo $t \leq t_\xi$ vale a estimativa*

$$\big|\ln(-z)\ln(z_0)e^{\frac{z-z_0}{2}} - \ln(z)\ln(z_0)e^{-\frac{z-z_0}{2}}\big| \lesssim 1 + \ln(1+t),$$

onde $z = z(t) = 2i(1+t)|\xi|^\sigma$ e $z_0 = z(0)$.

Demonstração. Pela definição de logarítmo temos:

$$\ln(\pm 2i(1+t)|\xi|^\sigma) = \ln(2(1+t)|\xi|^\sigma) \pm \frac{\pi}{2}i.$$

logo

$$\begin{aligned}
&\Big|\ln(-z)\ln z_0 e^{\frac{z-z_0}{2}} - \ln(z)\ln(-z_0)e^{-\frac{z-z_0}{2}}\Big| \\
\lesssim&\Big|\left(\ln(2(1+t)|\xi|^\sigma)\ln(2|\xi|^\sigma) + \frac{1}{4}\pi^2\right)2\sin(t|\xi|^\sigma)\Big| + \Big|\pi\left(\ln(2(1+t)|\xi|^\sigma) - \ln(2|\xi|^\sigma)\right)\cos(t|\xi|^\sigma)\Big| \\
\lesssim&1 + \ln(1+t) + \Big|\left(\ln(2(1+t)|\xi|^\sigma)\ln(2|\xi|^\sigma)\right)\sin(t|\xi|^\sigma)\Big| \\
\lesssim&1 + \ln(1+t) + \Big|\left(\ln(1+t)\ln(2|\xi|^\sigma) + \big(\ln(2|\xi|^\sigma)\big)^2\right)\sin(t|\xi|^\sigma)\Big|,
\end{aligned}$$

e isso será estimado por $C(1+\ln(1+t))$, que é claro para $|\xi|$ grande, e para $|\xi|$ pequeno segue pois temos

$$\lim_{|\xi|\to 0}(\ln(2|\xi|^\sigma))^r \sin(t|\xi|^\sigma) = 0,$$

para $r = 1, 2$ e $t \geq 0$.

□

Conservação de Energia

Considere a energia a seguir para nosso modelo invariante por escala.

$$E^\mu(u)(t) \doteq \frac{1}{2}\Big(\|u_t(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \|(-\Delta)^{\sigma/2}u(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + p(t)^2\|u(t,\cdot)\|_{L^2}^2\Big),$$

com

$$p(t) = \begin{cases} (1+t)^{-\frac{1}{2}}, & \mu^2 > \frac{1}{4}, \\ (1+t)^{-\frac{1}{2}}(1+\ln(1+t))^{-1}, & \mu^2 = \frac{1}{4}, \\ (1+t)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-4\mu^2}}, & 0 < \mu^2 < \frac{1}{4}. \end{cases} \tag{3.25}$$

Na Tese [5] e em [61] pode-se encontrar a demonstração do seguinte resultado.

Teorema 3.2.4. *A energia $E^\mu(u)(t)$ da solução da Equação* (3.18) *com $\delta = 0$, para $\phi \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ satisfaz*

$$p^2(t)E^\mu(t) \lesssim E^\mu(u)(t) \lesssim E^\mu(u)(0).$$

Observação 3.2.5. *O Teorema* 3.2.4 *diz que quanto maior o μ mais temos um comportamento dissipativo. Por outro lado quando $\mu \to 0$ essa dissipatividade vai deixando de existir. Esse resultado é um indício de que podemos esperar um comportamento dissipativo quando tivermos uma massa $m(t)$ acima do invariante por escala e uma conservação de energia quando tivermos abaixo. Tais resultados serão enunciados mais claramente e provados mais adiante na tese. Porém, antes disso, precisamos saber se podemos esperar para o invariante por escala algo análogo no caso $\delta > 0$. Ou seja, se o paramêtro μ também indica um comportamento dissipativo.*

Estimativas $L^1 - L^2$.

Agora vamos provar uma estimativa $L^1 - L^2$. Mas primeiro lembre-se que na seção 2.2 discutimos que os pontos p, q onde temos limitação para o multiplicador $\chi(\xi)\frac{e^{it(m^2+|\xi|^{2\sigma})^{1/2}}}{(m^2+|\xi|^{2\sigma})^{1/2}}$ são pelo menos aqueles que vale a limitação para $\chi(\xi)\frac{e^{it(|\xi|^{2\sigma})^{1/2}}}{(|\xi|^{2\sigma})^{1/2}}$. Para esse último sabemos que só temos limitação do tipo $L^1 - L^2$, ou seja para $p = 1$ e $q = 2$, quando $2\sigma > n$. Assim essa hipótese é natural para o Teorema que propomos a seguir, veremos que essa hipótese é usada para frequências altas. Veja também a Proposição 1.2.6 que mostra não existir restrição para frequências baixas. Agora defina $b(t)$ para $t \geq 0$, por:

$$b(t) := \begin{cases} \max\{(1+t)^{\frac{1}{2}-\frac{n}{2\sigma}+\frac{\sqrt{1-4\mu^2}}{2}}, \big(\ln(1+t)\big)^{\frac{1}{2}}\}, & 0 < \mu < \frac{1}{2}; n \leq \sigma\big(1+\sqrt{1-4\mu^2}\big), \\ 1 & 0 < \mu < \frac{1}{2}; n > \sigma\big(1+\sqrt{1-4\mu^2}\big), \\ \max\{(1+t)^{\frac{1}{2}-\frac{n}{2\sigma}}, 1+\ln(1+t)\}, & \mu > \frac{1}{2}; n \leq \sigma, \\ 1 & \mu > \frac{1}{2}; n > \sigma, \\ (1+\ln(1+t))\max\{(1+\log(1+t))^{\frac{1}{2}}, (1+t)^{\frac{1}{2}-\frac{n}{2\sigma}}\}, & \mu = \frac{1}{2}; n \leq \sigma, \\ 1+\ln(1+t), & \mu = \frac{1}{2}; n > \sigma \end{cases} \tag{3.26}$$

Logo podemos provar o seguinte Teorema.

Teorema 3.2.6. *Considere $u(t,x)$ solução de* (3.18) *com $\delta = 0$ e com dados iniciais $\phi \in W^{\sigma,1}(\mathbb{R}^n)$ e $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Nesse caso, se $2\sigma > n$ temos que*

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim \||D|^\sigma \phi\|_{L^1} + b(t)(\|\phi\|_{L^1} + \|\psi\|_{L^1}). \tag{3.27}$$

para $t \geq 0$.

Demonstração. Vamos estimar a norma L^∞ dos multiplicadores $E_{k,l}$, $k = 1, 2$ e $l = 0, 1$. Devido ao comportamento diferenciado das soluções fundamentais vamos dividir os casos $\rho \neq \frac{1}{2}$ e $\rho = \frac{1}{2}$. Para o primeiro caso temos que na Zona $\mathcal{Z}_1$, ou seja, para todo $t, t_0 \leq t_\xi$, vale

$$|E_{k,l}(t,t_0,\xi)| \lesssim (1+t)^{\Re\rho-l}(1+t_0)^{-\Re\rho-1+k} + (1+t)^{-\Re\rho+1-l}(1+t_0)^{\Re\rho-2+k}, \tag{3.28}$$

com $\Re\rho = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4\mu^2}$ se $\mu \in (0, \frac{1}{2})$ e $\Re\rho = \frac{1}{2}$ se $\mu > \frac{1}{2}$, respectivamente. Para o caso $\rho = \frac{1}{2}$, temos ainda em $\mathcal{Z}_1$ e pela Proposição 3.2.3 que

$$\big|E_{k,l}(t,t_0,\xi)\big| \approx (1+t)^{\frac{1}{2}-l}(1+t_0)^{-\frac{3}{2}+k} \cdot \big|\ln(-z)\ln z_0 e^{\frac{z-z_0}{2}} - \ln z \ln(z_0) e^{-\frac{z-z_0}{2}}\big|, \tag{3.29}$$

$$\lesssim (1+t)^{\frac{1}{2}-l}(1+t_0)^{-\frac{3}{2}+k}\Big(1+\Big|\ln\big(\frac{1+t}{1+t_0}\big)\Big|\Big). \tag{3.30}$$

Em $\mathcal{Z}_2 \cup \mathcal{Z}_3$ usando a Proposição 3.2.2 e como pela nossa escolha de α e β nós temos $\Re(\alpha) = \Re(\beta - \alpha)$, podemos concluir, para todos $t, t_0 \geq t_\xi$, que

$$|E_{k,l}(t,t_0,\xi)| \lesssim |\xi|^{\sigma(1-k+l)}. \tag{3.31}$$

Pelas desigualdades (3.29) e (3.28), temos para $t \leq t_\xi$ e $k = 1, 2$ que:

$$\Big(\int_{(1+t)|\xi|^\sigma \leq N} |E_{k,0}(t,0,\xi)|^2 d\xi \Big)^{\frac{1}{2}} \lesssim \begin{cases} (1+t)^{\frac{1}{2}-\frac{n}{2\sigma}+\frac{1}{2}\sqrt{1-4\mu^2}}, & 0 < \mu < \frac{1}{2} \\ (1+t)^{\frac{1}{2}-\frac{n}{2\sigma}}(1+\log(1+t)), & \mu = \frac{1}{2} \\ (1+t)^{\frac{1}{2}-\frac{n}{2\sigma}}, & \mu > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Além disso, por (3.31), temos:

$$|E_{2,0}(t,t_0,\xi)| \lesssim |\xi|^{-\sigma},$$
$$||\xi|^{-\sigma} E_{1,0}(t,t_0,\xi)| \lesssim |\xi|^{-\sigma}$$

Como $2\sigma > n$, temos, em $\mathcal{Z}_3$, que $\Big(\int_{|\xi|^\sigma \geq N} |E_{2,0}(t,0,\xi)|^2 d\xi \Big)^{\frac{1}{2}} \lesssim 1$ e $\Big(\int_{|\xi|^\sigma \geq N} ||\xi|^{-\sigma} E_{1,0}(t,0,\xi)|^2 d\xi \Big)^{\frac{1}{2}} \lesssim 1$. Agora resta obter uma estimativa para $t \geq t_\xi$ com $|\xi|^\sigma \leq N$. Para fazer isso note que nesse intervalo de t, temos:

$$\begin{aligned} \widehat{u}(t,\xi) =& \Big(E_{1,0}(t,t_\xi,\xi)E_{1,0}(t_\xi,0,\xi) + E_{2,0}(t,t_\xi,\xi)E_{1,1}(t_\xi,0,\xi) \Big)\widehat{u}(0,\xi) \\ &+ \Big(E_{2,0}(t,t_\xi,\xi)E_{2,1}(t_\xi,0,\xi) + E_{1,0}(t,t_\xi,\xi)E_{2,0}(t_\xi,0,\xi) \Big)\widehat{u}_t(0,\xi). \end{aligned}$$

Agora note que $E_{2,0}(t,t_\xi,\xi)E_{2,1}(t_\xi,0,\xi)$ e $E_{1,0}(t,t_\xi,\xi)E_{2,0}(t_\xi,0,\xi)$ são menores do que:

$$|\xi|^{-\sigma} \begin{cases} (1+t_\xi)^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-4\mu^2}}, & 0 < \mu < \frac{1}{2} \\ (1+t_\xi)^{-\frac{1}{2}}, & \mu > \frac{1}{2} \\ (1+t_\xi)^{-\frac{1}{2}}(1+\log(1+t_\xi)), & \mu = \frac{1}{2} \end{cases}, \tag{3.32}$$

e

$$\begin{cases} (1+t_\xi)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-4\mu^2}}, & 0 < \mu < \frac{1}{2} \\ (1+t_\xi)^{\frac{1}{2}}, & \mu > \frac{1}{2} \\ (1+t_\xi)^{\frac{1}{2}}(1+\log(1+t_\xi)), & \mu = \frac{1}{2} \end{cases}, \tag{3.33}$$

respectivamente. Logo podemos estimar $\Big(\int_{Z_2} |E_{2,0}(t,t_\xi,\xi)E_{2,1}(t_\xi,0,\xi) + E_{1,0}(t,t_\xi,\xi)E_{2,0}(t_\xi,0,\xi)|^2 d\xi \Big)^{\frac{1}{2}}$, por:

$$\begin{cases} (1+t)^{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1-4\mu^2}}{2}-\frac{n}{2\sigma}}, & 0 < \mu < \frac{1}{2}; n < \sigma(1+\sqrt{1-4\mu^2}); \\ \big(\ln(1+t)\big)^{\frac{1}{2}}, & 0 < \mu < \frac{1}{2}; n = \sigma(1+\sqrt{1-4\mu^2}); \\ 1, & 0 < \mu < \frac{1}{2}; n > \sigma(1+\sqrt{1-4\mu^2}); \\ (1+t)^{\frac{1}{2}-\frac{n}{2\sigma}}, & \mu > \frac{1}{2}; n < \sigma; \\ \big(\ln(1+t)\big)^{\frac{1}{2}}, & \mu > \frac{1}{2}; n = \sigma; \\ 1 & \mu > \frac{1}{2}; n > \sigma; \\ (1+t)^{\frac{1}{2}-\frac{n}{2\sigma}}(1+\ln(1+t)), & \mu = \frac{1}{2}; n < \sigma; \\ (1+\ln(1+t))^{\frac{3}{2}}, & \mu = \frac{1}{2}; n = \sigma; \\ 1+\ln(1+t) & \mu = \frac{1}{2}; n > \sigma. \end{cases} \tag{3.34}$$

Analogamente podemos estimar $\Big(\int_{Z_2} |E_{1,0}(t,t_\xi,\xi)E_{1,0}(t_\xi,0,\xi) + E_{2,0}(t,t_\xi,\xi)E_{1,1}(t_\xi,0,\xi)|^2 d\xi \Big)^{\frac{1}{2}}$, e ver que podemos concluir uma estimativa análoga a (3.34). Portanto, as desigualdades obtidas são suficientes para provar o Teorema.

□

Observação 3.2.7. *Note que fazendo, na estimativa obtida no Teorema* 3.2.6, μ *tender a zero, no caso que o primeiro dado é nulo, recuperamos a estimativa que encontramos para o caso de coeficientes constantes . Ou seja, a estimativa* $L^1 - L^2$ *para a solução de* $u_{tt} + (-\Delta)^\sigma u + \frac{\mu^2}{(1+t)}u = 0$ *com* $u(0,x) = 0$, $u_t(0,x) = u_2(x)$ *quando* $\mu \to 0$ *é a estimativa* $L^1 - L^2$ *para a solução de* $u_{tt} + (-\Delta)^\sigma u = 0$, $u(0,x) = 0$, $u_t(0,x) = u_2(x)$.

Estimativas $L^p - L^q$ na linha dual.

Defina $p(t)$ para $t \geq 0$, por:

$$p(t) := \begin{cases} (1+t)^{-\frac{1}{2}}, & \mu^2 > \frac{1}{2}, \\ (1+t)^{-\frac{1}{2}}\big(1+\ln(1+t)\big)^{-1}, & \mu^2 = \frac{1}{2}, \\ (1+t)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-4\mu^2}}, & 0 < \mu^2 < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Podemos então provar o Teorema a seguir. Compare com o Teorema 1.5.5.

Teorema 3.2.8. *O problema de cauchy com dados* $u(0,x) = u_0(x)$, $u_t(0,x) = u_1(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *satisfaz:*

$$\big\|\big(u_t(t,\cdot), |D|^\sigma u(t,\cdot)\big)\big\|_{L^q} \lesssim (1+t)^{-h(\sigma)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\big(|u_0|_{L^{p,\sigma(r+1)}} + \|u_1\|_{L^{p,\sigma r}}\big),$$
$$\big\|p(t)u(t,\cdot)\big\|_{L^q} \lesssim d_{\mu,\sigma}(t)\big(\|u_0\|_{L^{p,\sigma r}} + \|u_1\|_{L^{p,\sigma(r-1)}}\big),$$

para $t \geq 0$, *com* $h(1) = \frac{n-1}{2}$, $h(\sigma) = \frac{n}{\sigma}$ *para* $\sigma \geq 2$, $h(\sigma) = \frac{n}{2}$ *para* $\sigma < 2$ *com* $\sigma \neq 1$ *e*

$$d_{\mu,\sigma}(t) := \begin{cases} \max\left\{(1+t)^{-h(\sigma)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-\frac{1}{2}}, (1+t)^{-n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\right\}, & \mu^2 \geq \frac{1}{4}, \\ \max\left\{(1+t)^{-h(\sigma)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-4\mu^2}}, (1+t)^{-n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\right\}, & \mu^2 < \frac{1}{4}, \end{cases}$$

onde $r = \frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ *com* $1 < p \leq 2$.

Demonstração. Vamos separar o espaço de fases em três partes que correspondem às três zonas Z_1, Z_2 e Z_3. Para fazer isso consideremos uma função $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ tal que $\psi(y) = 1$ para $y \leq \frac{1}{2}$, $\psi(y) = 0$ para $y \geq 2$ e $\psi'(y) \leq 0$. Definimos ψ_j, $j = 1,2,3$, dadas por:

$$\begin{aligned} \psi_1(t,\xi) &:= \psi(|\xi|^\sigma N^{-1})\psi((1+t)|\xi|^\sigma N^{-1}), \\ \psi_2(t,\xi) &:= \psi(|\xi|^\sigma N^{-1})(1-\psi((1+t)|\xi|^\sigma N^{-1})), \\ \psi_3(t,\xi) &:= 1-\psi(|\xi|^\sigma N^{-1}), \end{aligned}$$

tal que $\psi_1(t,\xi) + \psi_2(t,\xi) + \psi_3(t,\xi) = 1$.
Zona $\mathcal{Z}_1$.
Agora vamos escolher $a_{k,l} = a_{k,l}(t,\xi)$, $k = 1,2$, $l = 0,1$, tal que $a_{k,l}(t,\xi)E_{k,l}(t,0,\xi) \in L^\infty(\mathbb{R}^n_\xi)$ uniformemente para todo tempo $t \geq 0$. Então nós temos, com $1 < p \leq 2$, que:

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{F}^1_{\xi\to x}(\psi_1(t,\xi)a_{k,l}(t,\xi)E_{k,l}(t,0,\xi)\widehat{v}(\xi))\|_{L^q_x} \\ \leq &\|\psi_1(t,\xi)a_{k,l}(t,\xi)E_{k,l}(t,0,\xi)\widehat{v}(\xi)\|_{L^p} \\ \leq &\|\psi_1(t,\xi)\|_{L^{\frac{qp}{q-p}}}\|a_{k,l}(t,\xi)E_{k,l}(t,0,\xi)\|_{L^\infty}\|v\|_{L^p} \\ \leq &C(1+t)^{-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|a_{k,l}(t,\xi)E_{k,l}(t,0,\xi)\|_{L^\infty}\|v\|_{L^p}, \end{aligned}$$

onde $v \in \mathcal{S}$. Escolhendo $a_{k,l}(t,\xi) = |\xi|^{\sigma(1-l)}$, temos:

$$\big\||\xi|^{\sigma(1-l)}E_{k,l}(t,0,\xi)\big\|_{L^\infty}\lesssim(1+t)^{\Re\rho-1}.$$

De fato no caso $\rho=\frac{1}{2}$ temos: $\big\||\xi|^{\sigma(1-l)}E_{k,l}(t,0,\xi)\big\|_{L^\infty}\lesssim(1+t)^{-\frac{1}{2}}\big(1+\ln(1+t)\big)$. Logo para $\rho\neq\frac{1}{2}$ temos:

$$\|\mathcal{F}^{-1}\big(\psi_1(t,\xi)\widehat{u}_t(t,\xi)\big)\|_{L^q}\lesssim(1+t)^{-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-1+\Re\rho}\big(\|u_1\|_{L^p}+\|u_2\|_{L^p}\big),$$
$$\|\mathcal{F}^{-1}\big(\psi_1(t,\xi)|\xi|^\sigma\widehat{u}(t,\xi)\big)\|_{L^q}\lesssim(1+t)^{-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-1+\Re\rho}\big(\|u_0\|_{L^p}+\|u_1\|_{L^p}\big),$$

com $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Enquanto para $\rho=\frac{1}{2}$ temos:

$$\|\mathcal{F}^{-1}\big(\psi_1(t,\xi)\widehat{u}_t(t,\xi)\big)\|_{L^q}\lesssim(1+t)^{-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-\frac{1}{2}}\big(1+\ln(1+t)\big)\big(\|u_1\|_{L^p}+\|u_2\|_{L^p}\big),$$
$$\|\mathcal{F}^{-1}\big(\psi_1(t,\xi)|\xi|^\sigma\widehat{u}(t,\xi)\big)\|_{L^q}\lesssim(1+t)^{-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-\frac{1}{2}}\big(1+\ln(1+t)\big)\big(\|u_0\|_{L^p}+\|u_1\|_{L^p}\big).$$

Em qualquer caso, temos:

$$\|\mathcal{F}^{-1}\big(\psi_1(t,\xi)\widehat{u}_t(t,\xi)\big)\|_{L^q}\lesssim(1+t)^{-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\big(\|u_1\|_{L^p}+\|u_2\|_{L^p}\big),$$
$$\|\mathcal{F}^{-1}\big(\psi_1(t,\xi)|\xi|^\sigma\widehat{u}(t,\xi)\big)\|_{L^q}\lesssim(1+t)^{-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\big(\|u_0\|_{L^p}+\|u_1\|_{L^p}\big).$$

Analogamente escolhendo $a_{k,0}(t,\xi)=p(t)$, temos:

$$\big\|p(t)E_{k,0}(t,0,\cdot)\big\|_{L^\infty}\lesssim 1.$$

Logo temos:

$$\|\mathcal{F}^1_{\xi\to x}(\psi_1(t,\xi)p(t)E_{k,l}(t,0,\xi)\widehat{v}(\xi))\|_{L^q_x}\lesssim(1+t)^{-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\big(\|u_0\|_{L^p}+\|u_1\|_{L^p}\big),$$

onde $1<p\leq 2$ e $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Zona Z_3

Para tratar essa zona vamos considerar uma partição diádica da unidade adequada: Considere uma funçao positiva $\phi=\phi(y)\in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$, com suporte no intervalo $[\frac{1}{2},2]$. Defina $\phi_j(\xi):=\phi\big(2^{-j}\frac{|\xi|^\sigma}{N}\big)$, $j\in\mathbb{Z}$. Como $\phi_3(t,\xi)\phi_j(\xi)=0$ para $j<0$, temos:

$$\psi_3(t,\xi)a_{k,l}(t,\xi)E_{k,l}(t,\xi)=(1-\psi(|\xi|^\sigma N^{-1}))(\phi_0(\xi)+\phi_1(\xi))+\sum_{j=2}^{\infty}\phi_j(\xi))a_{k,l}(t,\xi)E_{k,l}(t,\xi).\quad(3.35)$$

Assim, vamos considerar a integral oscilatória:

$$\mathcal{F}^{-1}\big(\phi_j(\xi)|\xi|^{-r\sigma}a_{k,l}(t,\xi)E_{k,l}(t,0,\xi)\big),$$

com $r\in\mathbb{R}$ e $a_{k,l}(t,\xi)$ a serem determinados depois. Vamos denotar:

$$
\begin{aligned}
b_1^-(z) &:= z^{\rho-l}\Theta_l\big(\rho, 2\rho; z\big),\\
b_2^-(z) &:= z^{-\rho-l+k}\Theta_{2-k}\big(1-\rho, 2-2\rho; -z\big),\\
b_1^+(z) &:= z^{1-\rho-l}\Theta_l\big(1-\rho, 2-2\rho; -z\big),\\
b_2^+(z) &:= z^{\rho-2+k}\Theta_{2-k}\big(\rho, 2\rho; z\big).
\end{aligned}
$$

Logo:

$$
\begin{aligned}
\det G_{k,l}(t,0,\xi) &= \sin\big((1+t)|\xi|^\sigma\big)\sin\big(-|\xi|^\sigma\big)\Big(b_1^-((1+t)|\xi|^\sigma)b_2^-(|\xi|^\sigma) + b_1^+((1+t)|\xi|^\sigma)b_2^+(|\xi|^\sigma)\Big),\\
\det G_{k,l}(t,0,\xi) &= e^{-it|\xi|^\sigma}b_1^-((1+t)|\xi|^\sigma)b_2^-(|\xi|^\sigma) - e^{it|\xi|^\sigma}b_1^+((1+t)|\xi|^\sigma)b_2^+(|\xi|^\sigma),
\end{aligned}
$$

para $\rho \neq \frac{1}{2}$ e $\rho = \frac{1}{2}$, respectivamente, com $k = 1, 2$, $l = 0, 1$. As funções $b_i^\pm$, $i = 1, 2$, satisfazem

$$
|d_z^m b_i^\pm(z)| \leq C_m|z|^{-m},
$$

com $m = 0, 1, \ldots$, e $C_m = C_m(\mu)$ para $|z|$ grande. Para $a_{k,l}(t,\xi)$ vamos usar a potência $|\xi|^{-\sigma(1-k+l)}$ por isso a partir de agora é suficiente estudar a seguinte integral oscilatória

$$
\mathcal{F}^{-1}\Big(\phi_j(\xi)e^{\pm it|\xi|^\sigma}|\xi|^{-r\sigma}b_1((1+t)|\xi|^\sigma)b_2(|\xi|^\sigma)\Big), \tag{3.36}
$$

onde as funções b_i , $i = 1, 2$ satisfazem $|d_z^m b_i(z)| \leq C_m|z|^{-m}$, $m = 0, 1, \ldots$.
Estimativa $L^1 - L^\infty$. Substituindo $\xi = 2^j N\eta$, $j \geq 0$, temos usando o Lema de Littman que:

$$
\begin{aligned}
&\big\|\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(\phi_j(\xi)e^{\pm it|\xi|^\sigma}|\xi|^{-r\sigma}b_1((1+t)|\xi|^\sigma)b_2(|\xi|^\sigma)\Big)\big\|_{L^\infty_x}\\
=&C2^{j(n-r\sigma)}\big\|\mathcal{F}^{-1}_{\eta\to x}\Big(\phi(|\eta|^\sigma)e^{\pm it(2^jN|\eta|)^\sigma}|\eta|^{-r\sigma}b_1(2^{j\sigma}N^\sigma(1+t)|\eta|^\sigma)b_2(2^{j\sigma}N^\sigma|\xi|^\sigma)\Big)\big\|_{L^\infty_x}\\
\leq&C2^{j(n-r\sigma)}(1+(2^jN)^\sigma t)^{-\frac{\varrho}{2}}\sum_{|\alpha|\leq M}\|\partial^\alpha\phi(|\eta|^\sigma)|\eta|^{-r\sigma}b_1(2^{j\sigma}N^\sigma(1+t)|\eta|^\sigma)b_2(2^{j\sigma}N^\sigma|\xi|^\sigma)\|_{L^\infty}\\
\leq&C2^{j(n-r\sigma)}(1+(2^jN)^\sigma t)^{-\frac{\varrho}{2}}\sum_{|\alpha+\beta|\leq M}\sup_{\frac{1}{2}\leq|\eta|^\sigma\leq 2}|\eta|^{-r\sigma}|\eta|^{-\sigma(|\alpha|+|\beta|)} \leq C2^{j(n-r\sigma)}(1+t)^{-\frac{\varrho}{2}},
\end{aligned}
$$

onde ϱ vale n quando $\sigma \neq 1$ e $n-1$ no caso $\sigma = 1$. A constante M de fato depende de σ e n.
Estimativa $L^2 - L^2$.

$$
\begin{aligned}
&\|\phi_j(\xi)e^{\pm it|\xi|^\sigma}|\xi|^{-r\sigma}b_1((1+t)|\xi|^\sigma)b_2(|\xi|^\sigma)\|_{L^\infty}\\
\lesssim&\sup_{\frac{1}{2}\leq|\xi|^\sigma\leq 2}\phi(|\eta|)((2^jN)^\sigma|\eta|^\sigma)^{-r}|b_1(2^jN(1+t)|\eta|^\sigma)||b_2(2^jN|\eta|^\sigma)|\\
\lesssim&2^{-jr\sigma},
\end{aligned}
$$

para $j \geq 0$.
Estimativa $L^p - L^q$. Usando as duas estimativas anteriores podemos usar interpolação de Riesz-Thorin para obter:

$$\begin{aligned}&\big\|\mathcal{F}^{-1}\Big(\phi_j(\xi)|\xi|^{-r\sigma}|\xi|^{-\sigma(1-k+l)}E_{k,l}(t,0,\xi)\mathcal{F}(v)\Big)\big\|_{L^q}\\ \lesssim& 2^{j\Big(n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-r\sigma\Big)}(1+t)^{-\frac{\varrho}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|v\|_{L^p}.\end{aligned}$$

Assim se assumirmos $r \geq \frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$, temos que

$$\big\|\mathcal{F}^{-1}\Big(\psi_3(t,\xi)|\xi|^{-r\sigma}|\xi|^{-\sigma(1-k+l)}E_{k,l}(t,0,\xi)\mathcal{F}(v)\Big)\big\|_{L^q} \lesssim (1+t)^{-\frac{\varrho}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|v\|_{L^p}.$$

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}^{-1}\Big(\psi_3(t,\xi)\widehat{u}_t(t,\cdot)\Big)\|_{L^q} &\lesssim (1+t)^{-\frac{\varrho}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\Big(\|u_0\|_{L^{p,\sigma(r+1)}}+\|u_1\|_{L^{p,r\sigma}}\Big)\\ \|\mathcal{F}^{-1}\Big(\psi_3(t,\xi)|\xi|^{\sigma}\widehat{u}(t,\cdot)\Big)\|_{L^q} &\lesssim (1+t)^{-\frac{\varrho}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\Big(\|u_0\|_{L^{p,\sigma(r+1)}}+\|u_1\|_{L^{p,r\sigma}}\Big)\end{aligned}$$

onde $r=\frac{n}{\sigma}\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big)$.
Agora para estimar o potencial $p(t)u(t,x)$, vamos escolher $a_{k,0}=p(t)$, logo.

$$\big\|\mathcal{F}^{-1}\Big(\psi_3(t,\xi)p(t)\widehat{u}(t,\cdot)\Big)\big\|_{L^q} \lesssim p(t)(1+t)^{-\frac{\varrho}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\Big(\|u_0\|_{L^{p,\sigma r}}+\|u_1\|_{L^{p,(r-1)\sigma}}\Big).$$

Zona Z_2
Assim como nas outras zonas estudaremos uma integral oscilatória com a frequência localizada em nossa zona.

$$\mathcal{F}^{-1}\Big(\psi_2(t,\xi)a_{k,l}(t,\xi)E_{k,l}(t,0,\xi)\mathcal{F}(v)(\xi)\Big). \tag{3.37}$$

Vamos introduzir uma decomposição diádica adequada, considere $\phi_j(t,\xi):=\phi\Big(2^{-j}\frac{(1+t)|\xi|^\sigma}{N}\Big)$, $j\in\mathbb{Z}$, com ϕ a função introduzida no estudo da zona $\mathcal{Z}_3$. Assim $\psi_2(t,\xi)\phi_j(t,\xi)=0$ para $j<0$, logo:

$$\begin{aligned}\psi_2(t,\xi) =&\psi(|\xi|^\sigma N^{-1})(1-\psi((1+t)|\xi|^\sigma N^{-1}))\sum_{j=0}^{\infty}\phi_j(t,\xi)\\ =&\psi(|\xi|^\sigma N^{-1})(1-\psi((1+t)|\xi|^\sigma N^{-1}))(\phi_0(t,\xi)+\phi_1(t,\xi))+\psi(|\xi|^\sigma N^{-1})\sum_{j=2}^{\infty}\phi_j(t,\xi).\end{aligned}$$

Vamos então investigar o multiplicador de Fourier para cada $j\geq 0$ separadamente. Temos a seguinte representação para $\rho\neq\frac{1}{2}$ e $\rho=\frac{1}{2}$ respectivamente:

$$\begin{aligned}\det G_{k,l}(t,0,\xi)&=\sin\big((1+t)|\xi|^\sigma\big)\Big(b_1^-((1+t)|\xi|^\sigma)b_2^-(|\xi|^\sigma)+b_1^+((1+t)|\xi|^\sigma)b_2^+(|\xi|^\sigma)\Big),\\ \det G_{k,l}(t,0,\xi)&=e^{-it|\xi|^\sigma}b_1^-((1+t)|\xi|^\sigma)b_2^-(|\xi|^\sigma)-e^{it|\xi|^\sigma}b_1^+((1+t)|\xi|^\sigma)b_2^+(|\xi|^\sigma),\end{aligned}$$

com $k=1,2$, $l=0,1$. Além disso

$$|d_z^m b_1^{\pm}(z)|\leq C_m|z|^{-m},$$

com $m = 0, 1, \ldots$, e $C_m = C_m(\mu)$ para $|z|$ grande enquanto para $|z|$ pequeno temos

$$|d_z^m b_2^{\pm}(z)| \leq C_m |z|^{-\Re\rho - 1 + k - m}, \text{ quando } \rho \neq \frac{1}{2}.$$

Escolha $a_{k,l}(t,\xi) = |\xi|^{\sigma(1-l)}$. Logo estamos interessados na seguinte integral oscilatória

$$\mathcal{F}^{-1}\Big(e^{\pm it|\xi|^\sigma}\phi_j(t,\xi)|\xi|^{\sigma(2-k-r)}b_1^{\pm}((1+t)|\xi|^\sigma)\psi(|\xi|^\sigma N^{-1})b_2^{\pm}(|\xi|^\sigma)\Big).$$

Primeiramente vamos estudar a seguinte integral oscilatória.

$$\mathcal{F}^{-1}\Big(e^{\pm it|\xi|^\sigma}\phi_j(t,\xi)b_1^{\pm}((1+t)|\xi|^\sigma)\psi(|\xi|^\sigma N^{-1})|\xi|^{\sigma(1-r-\Re\rho)}\Big)$$

Estimativa $L^1 - L^\infty$.
Note que

$$\begin{aligned}&\Big\|\mathcal{F}^{-1}\Big(e^{\pm it|\xi|^\sigma}\phi_j(t,\xi)b_1^{\pm}((1+t)|\xi|^\sigma)\psi(|\xi|^\sigma N^{-1})|\xi|^{\sigma(1-r-\Re\rho)}\Big)\Big\|_{L^\infty},\\ =&(1+t)^{-1+\Re\rho+r}\Big\|\mathcal{F}^{-1}\Big(e^{\pm it|\xi|^\sigma}\phi_j(t,\xi)b_1^{\pm}((1+t)|\xi|^\sigma)\psi(|\xi|^\sigma N^{-1})\Big((1+t)|\xi|^\sigma\Big)^{(1-r-\Re\rho)}\Big)\Big\|_{L^\infty}.\end{aligned}$$

Fazendo $c(z) := b_1^{\pm}(z)z^{(1-r-\Re\rho)}$, temos $\big|d_z^m c(z)\big| \leq C_m|z|^{1-\Re\rho-m-r\sigma}$, $m = 1, 2, \ldots$. Assim fazendo a substituição $(1+t)^{\frac{1}{\sigma}}\xi = \big(2^j N\big)^{\frac{1}{\sigma}}\eta$ e usando o Lema de Littmann, temos:

$$\begin{aligned}&\Big\|\mathcal{F}^{-1}\Big(e^{\pm it|\xi|^\sigma}\phi_j(t,\xi)c\big((1+t)|\xi|^\sigma\big)\Big)\Big\|_{L^\infty}\\ \lesssim&2^{j\frac{n}{\sigma}}(1+t)^{-\frac{n}{\sigma}}(1+2^jN)^{-h(\sigma)}\sum_{|\alpha|\leq M}\Big\|D^\alpha\phi(|\eta|^\sigma)c(2^jN|\eta|^\sigma)\Big\|_{L^\infty}\\ \lesssim&2^{j(\frac{n}{\sigma}-h(\sigma))}(1+t)^{-\frac{n}{\sigma}}\sum_{|\alpha|\leq M}\sup_{\frac{1}{2}\leq|\eta|^\sigma\leq 2}(2^jN|\eta|^\sigma)^{-|\alpha|+1-\Re\rho-r}(2^jN)^{|\alpha|}\\ \lesssim&2^{j(\frac{n}{\sigma}-h(\sigma)+1-\Re\rho-r)}(1+t)^{-\frac{n}{\sigma}},\end{aligned}$$

onde M é uma constante adequada. Portanto:

$$\begin{aligned}&\Big\|\mathcal{F}^{-1}\Big(e^{\pm it|\xi|^\sigma}\phi_j(t,\xi)c\big((1+t)|\xi|^\sigma\big)\mathcal{F}(v)\Big)\Big\|_{L^\infty}\\ \lesssim&2^{j(\frac{n}{\sigma}-h(\sigma)+1-\Re\rho-r)}(1+t)^{-\frac{n}{\sigma}}\|v\|_{L^1}.\end{aligned}$$

Estimativa $L^2 - L^2$.
Claramente temos

$$\Big\|e^{\pm it|\xi|^\sigma}\phi_j(t,\xi)c\big((1+t)|\xi|^\sigma\big)\Big\|_{L^\infty} \lesssim \sup_{\frac{1}{2}\leq|\eta|^\sigma\leq 2}\phi(|\eta|^\sigma)|c(2^jN|\eta|^\sigma)| \lesssim 2^{j(1-\Re\rho-r)}.$$

Portanto

$$\Big\|\mathcal{F}^{-1}\Big(e^{\pm it|\xi|^\sigma}\phi_j(t,\xi)c\big((1+t)|\xi|^\sigma\big)\mathcal{F}(v)\Big)\Big\|_{L^2}\lesssim 2^{j(1-\Re\rho-r)}\|v\|_{L^2}.$$

Estimativa L^p-L^q.
Para $j\geq 0$, $1<p\leq 2$ e $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ e interpolando com Riesz-Thorin, temos:

$$\begin{aligned}&\Big\|\mathcal{F}^{-1}\Big(e^{\pm it|\xi|^\sigma}\phi_j(t,\xi)c\big((1+t)|\xi|^\sigma\big)\mathcal{F}(v)\Big)\Big\|_{L^q},\\ \lesssim& 2^{j\left((\frac{n}{\sigma}-h(\sigma))\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)+(1-\Re\rho-r)\right)}(1+t)^{-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|v\|_{L^p}.\end{aligned}$$

Tome $r=(\frac{n}{\sigma}-h(\sigma))\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big)+1-\Re\rho$, logo $r>0$. Agora note que

$$\Big|\partial^\alpha\psi(N^{-1}|\xi|^\sigma)|\xi|^{\sigma(1-k+\Re\rho)}b_2^\pm(|\xi|^\sigma)\Big|\leq C_\alpha|\xi|^{-|\alpha|}.$$

Logo por Mikhlin-Hörmander $\psi(N^{-1}|\xi|^\sigma)|\xi|^{\sigma(1-k+\Re\rho)}b_2^\pm(|\xi|^\sigma)\in M_p$ para $1<p<\infty$. Além disso, como $\psi(N^{-1}|\xi|^\sigma)|\xi|^{\sigma(2-k-r)}b_2^\pm(|\xi|^\sigma)\leq C\psi(N^{-1}|\xi|^\sigma)|\xi|^{\sigma(1-r-\Re\rho)}$ podemos finalmente concluir que:

$$\Big\|\mathcal{F}^{-1}\Big(e^{\pm it|\xi|^\sigma}\phi_j(t,\xi)|\xi|^{\sigma(2-k-r)}b_1^\pm((1+t)|\xi|^\sigma)\psi(|\xi|^\sigma N^{-1})b_2^\pm(|\xi|^\sigma)\mathcal{F}(v)\Big)\Big\|_{L^q}\lesssim(1+t)^{-h(\sigma)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|v\|_{L^p}.$$

Portanto temos:

$$\begin{aligned}\big\|\mathcal{F}^{-1}\Big(\psi_2(t,\xi)\widehat{u}_t(t,\cdot)\Big)\big\|_{L^q}&\lesssim(1+t)^{-h(\sigma)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\Big(\|u_0\|_{L^p}+\|u_1\|_{L^p}\Big),\\ \big\|\mathcal{F}^{-1}\Big(\psi_2(t,\xi)|\xi|^\sigma\widehat{u}(t,\cdot)\Big)\big\|_{L^q}&\lesssim(1+t)^{-h(\sigma)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\Big(\|u_0\|_{L^p}+\|u_1\|_{L^p}\Big).\end{aligned}$$

Agora vamos estimar o termo potêncial. Tome $a_{k,0}(t,\xi)=p(t)$, então para estudar

$$p(t)E_{k,0}(t,0,\xi)=Cp(t)|\xi|^{\sigma(1-k)}\det G_{k,0}(t,0,\xi),$$

é suficiente estudar

$$e^{\pm it|\xi|^\sigma}b_\rho((1+t)|\xi|^\sigma),$$

onde

$$|d^m_{(1+t)|\xi|^\sigma}b_\rho((1+t)|\xi|^\sigma)|\leq C_m\begin{cases}((1+t)|\xi|^\sigma)^{-m-\Re\rho}, & \text{se } \rho\neq\frac{1}{2},\\ ((1+t)|\xi|^\sigma)^{-m-\frac{1}{2}}\frac{|\ln|\xi|^\sigma|}{1+\ln(1+t)}, & \text{se } \rho=\frac{1}{2},\end{cases}$$

para $m=0,1,\ldots$. Logo na Zona Z_2 temos:

$$\Big|\frac{\ln|\xi|^\sigma}{1+\ln(1+t)}\Big|\leq\Big|\frac{\ln|\xi|^\sigma}{1+\ln N|\xi|^{-\sigma}}\Big|\leq C,$$

para $|\xi|^\sigma\leq N$.
Vamos considerar a integral oscilatória:

$$\mathcal{F}^{-1}\Big(e^{\pm it|\xi|^\sigma}\phi_j(t,\xi)\psi(N^{-1}|\xi|^\sigma)((1+t)|\xi|^\sigma)^{-\Re\rho-r}\Big).$$

Usando o Lema de Littmann de maneira análoga ao que foi feita anteriormente, concluímos que:

$$\begin{aligned}
&\Big\|\mathcal{F}^{-1}\Big(e^{\pm it|\xi|^\sigma}\phi_j(t,\xi)\psi(N^{-1}|\xi|^\sigma)((1+t)|\xi|^\sigma)^{-\Re\rho-r}\Big)\Big\|_{L^\infty}\lesssim(1+t)^{-\frac{n}{\sigma}}2^{j\Big(\frac{n}{\sigma}-h(\sigma)-\Re\rho-r\Big)},\\
&\Big\|e^{\pm it|\xi|^\sigma}\phi_j(t,\xi)\psi(N^{-1}|\xi|^\sigma)((1+t)|\xi|^\sigma)^{-\Re\rho-r}\Big\|_{L^\infty}\lesssim 2^{j\Big(-\Re\rho-r\Big)}.
\end{aligned}$$

Portanto nós temos:

$$\begin{aligned}
&\Big\|\mathcal{F}^{-1}\Big(e^{\pm it|\xi|^\sigma}\phi_j(t,\xi)\psi(N^{-1}|\xi|^\sigma)((1+t)|\xi|^\sigma)^{-\Re\rho-r}\mathcal{F}(v)\Big)\Big\|_{L^\infty}\lesssim(1+t)^{-\frac{n}{\sigma}}2^{j\Big(\frac{n}{\sigma}-h(\sigma)-\Re\rho-r\Big)}\|v\|_{L^1},\\
&\Big\|\mathcal{F}^{-1}\Big(e^{\pm it|\xi|^\sigma}\phi_j(t,\xi)\psi(N^{-1}|\xi|^\sigma)((1+t)|\xi|^\sigma)^{-\Re\rho-r}\mathcal{F}(v)\Big)\Big\|_{L^2}\lesssim 2^{j\Big(-\Re\rho-r\Big)}\|v\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Logo por Riesz-Thorin temos para $1<p\leq 2$ com $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, que:

$$\begin{aligned}
&\Big\|\mathcal{F}^{-1}\Big(e^{\pm it|\xi|^\sigma}\phi_j(t,\xi)\psi(N^{-1}|\xi|^\sigma)((1+t)|\xi|^\sigma)^{-\Re\rho-r}\mathcal{F}(v)\Big)\Big\|_{L^q}\\
&\lesssim(1+t)^{-\frac{n}{\sigma}\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big)}2^{j\Big(\Big(\frac{n}{\sigma}-h(\sigma)\Big)\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big)-\Re\rho-r\Big)}\|v\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

Note que

$$\Big|\partial_\xi^\alpha\psi(N^{-1}|\xi|^\sigma)\frac{b_\rho((1+t)|\xi|^\sigma)}{\big((1+t)|\xi|^\sigma\big)^{-\Re\rho}}\Big|\leq C_\alpha|\xi|^{-|\alpha|}.$$

Logo, por Mikhlin-Hörmander, temos

$$\psi(N^{-1}|\xi|^\sigma)\frac{b_\rho((1+t)|\xi|^\sigma)}{\big((1+t)|\xi|^\sigma\big)^{-\Re\rho}}\in M_p,$$

onde $1<p<\infty$. Note também que $\phi_j(t,\xi)\psi(N^{-1}|\xi|^\sigma)b_\rho((1+t)|\xi|^\sigma)|\xi|^{-\sigma r}\leq C\phi_j(t,\xi)\psi(N^{-1}|\xi|^\sigma)\big((1+t)|\xi|^\sigma\big)^{-\Re\rho}|\xi|^{-\sigma r}$, logo

$$\begin{aligned}
&\Big\|\mathcal{F}^{-1}\Big(e^{\pm it|\xi|^\sigma}\phi_j(t,\xi)\psi(N^{-1}|\xi|^\sigma)p(t)E_{k,0}(t,0,\xi)|\xi|^{-\sigma r}\mathcal{F}(v)\Big)\Big\|_{L^q}\\
\lesssim&(1+t)^{r-\frac{n}{\sigma}\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big)}2^{j\Big(\Big(\frac{n}{\sigma}-h(\sigma)\Big)\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big)-\Re\rho-r\Big)}\|v\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

Assim tomamos $r:=\max\{0,\big(\frac{n}{\sigma}-h(\sigma)\big)\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big)-\Re\rho\}$, temos:

$$\big\|\mathcal{F}^{-1}\Big(\psi_2(t,\xi)p(t)\widehat{u}(t,\cdot)\Big)\big\|_{L^q}\lesssim(1+t)^{\max\{-h(\sigma)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-\Re\rho,-n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\}}\Big(\|u_0\|_{L^p}+\|u_1\|_{L^p}\Big),$$

para $1<p\leq 2$ com $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Finalizando a demonstração.

□

3.2.2 Caso $2\delta = \sigma$.

No caso $\delta > 0$ vamos começar quando $2\delta = \sigma$, pois esse caso assim como o caso $\delta = 0$ pode fornecer uma análise por funções especiais. Nesse caso após uma mudança de variáveis teremos nossa equação descrita por uma equação de onda do tipo Coulomb, tal equação é importante para entender fenômenos físicos, pois descreve o comportamento da carga de partículas carregadas em um potêncial de Coulomb, para saber mais a respeito veja [43].

Estimativa de Energia.

Fazendo $\tau = |\xi|^\sigma(1+t)$ e $w(\tau) \doteq \widehat{u}(t,\xi)$, temos que w satisfaz

$$w_{\tau\tau} + \Big(1 + \frac{\mu^2}{\tau^{2(1-\delta/\sigma)}}\Big)w = 0$$

com dados iniciais $w(|\xi|^\sigma) = \widehat{\phi}(\xi)$, $w_\tau(|\xi|^\sigma) = |\xi|^{-\sigma}\widehat{\psi}(\xi)$.
No caso $2\delta = \sigma$ temos:

$$w_{\tau\tau} + \Big(1 + \frac{\mu^2}{\tau}\Big)w = 0$$

E com isso temos uma equação da onda do tipo Coulomb, veja [1]. Assim, como discutido em A.19, temos as soluções fundamentais:

$$w_1(\tau) = F_0(-\frac{\mu^2}{2}, \tau)$$
$$w_2(\tau) = G_0(-\frac{\mu^2}{2}, \tau)$$

Logo as soluções fundamentais de

$$\widehat{u}_{tt} + |\xi|^{2\sigma}\widehat{u} + \frac{\mu^2}{1+t}|\xi|^\sigma\widehat{u} = 0$$

são dadas por

$$f_1(t,\xi) := \widehat{u}_1(t,\xi) = F_0(-\frac{\mu^2}{2}, (1+t)|\xi|^\sigma)$$
$$f_2(t,\xi) := \widehat{u}_2(t,\xi) = G_0(-\frac{\mu^2}{2}, (1+t)|\xi|^\sigma)$$

Assim tomando a derivada temos por A.19 que:

$$f_{1,t}(t,\xi) := \partial_t\widehat{u}_1(t,\xi) = |\xi|^\sigma d_\tau F_0(-\frac{\mu^2}{2}, (1+t)|\xi|^\sigma)$$
$$f_{2,t}(t,\xi) := \partial_t\widehat{u}_2(t,\xi) = |\xi|^\sigma d_\tau G_0(-\frac{\mu^2}{2}, (1+t)|\xi|^\sigma)$$

Logo para uma condição inicial t_0, temos:

$$\widehat{u}(t,\xi) = c_1(t_0,\xi)f_1(t,\xi) + c_2(t_0,\xi)f_2(t,\xi)$$

assim derivando em t podemos encontrar as constantes:

$$c_1(t_0,\xi) = \frac{f_{2,t}(t_0,\xi)\widehat{u}(t_0,\xi) - f_2(t_0,\xi)\widehat{u}_t(t_0,\xi)}{f_{2,t}(t_0,\xi)f_1(t_0,\xi) - f_2(t_0,\xi)f_{1,t}(t_0,\xi)},$$
$$c_2(t_0,\xi) = \frac{f_1(t_0,\xi)\widehat{u}_t(t,\xi) - f_{1,t}(t_0,\xi)\widehat{u}(t_0,\xi)}{f_{2,t}(t_0,\xi)f_1(t_0,\xi) - f_2(t_0,\xi)f_{1,t}(t_0,\xi)}.$$

Portanto podemos escrever

$$\widehat{u}(t,\xi) = F_{1,0}(t,t_0,\xi)\widehat{u}(t_0,\xi) + F_{2,0}(t,t_0,\xi)\widehat{u}_t(t_0,\xi), \tag{3.38}$$

onde

$$F_{1,0}(t,t_0,\xi) = \frac{f_{2,t}(t_0,\xi)f_1(t,\xi) - f_2(t,\xi)f_{1,t}(t_0,\xi)}{f_{2,t}(t_0,\xi)f_1(t_0,\xi) - f_2(t_0,\xi)f_{1,t}(t_0,\xi)},$$
$$F_{2,0}(t,t_0,\xi) = \frac{f_1(t_0,\xi)f_2(t,\xi) - f_2(t_0,\xi)f_1(t,\xi)}{f_{2,t}(t_0,\xi)f_1(t_0,\xi) - f_{1,t}(t_0,\xi)f_2(t_0,\xi)}.$$

com $t, t_0 \geq 0$. Então derivando em relação a t temos

$$\widehat{u}_t(t,\xi) = F_{1,1}(t,t_0,\xi)\widehat{u}(t_0,\xi) + F_{2,1}(t,t_0,\xi)\widehat{u}_t(t_0,\xi), \tag{3.39}$$

onde $F_{k,1} := \partial_t F_{k,0}$, $k = 1,2$, Essas soluções fundamentais satisfazem $F_{k,l}(t_0,t_0,\xi) = \delta_{k,l+1}$, $k = 1,2$, $l = 0,1$. Assim:

$$F_{1,1}(t,t_0,\xi) = \frac{f_{2,t}(t_0,\xi)f_{1,t}(t,\xi) - f_{2,t}(t,\xi)f_{1,t}(t_0,\xi)}{f_{2,t}(t_0,\xi)f_1(t_0,\xi) - f_2(t_0,\xi)f_{1,t}(t_0,\xi)},$$
$$F_{2,1}(t,t_0,\xi) = \frac{f_1(t_0,\xi)f_{2,t}(t,\xi) - f_2(t_0,\xi)f_{1,t}(t,\xi)}{f_{2,t}(t_0,\xi)f_1(t_0,\xi) - f_{1,t}(t_0,\xi)f_2(t_0,\xi)}.$$

Calculando o Wronskiano temos pela relação A.21.

$$f_{2,t}(t,\xi)f_1(t,\xi) - f_{1,t}(t,\xi)f_2(t,\xi) = |\xi|^\sigma$$

Agora usando A.1.8 para $l = 0$ e (A.22), temos para $(1+t)|\xi|^\sigma \leq N$ e $(1+t_0)|\xi|^\sigma \leq N$ que:

$$\begin{aligned}
|F_{1,0}(t,t_0,\xi)| &\lesssim \frac{1+t}{1+t_0};\\
|F_{2,0}(t,t_0,\xi)| &\lesssim 1+t;\\
|F_{1,1}(t,t_0,\xi)| &\lesssim \frac{1}{1+t_0};\\
|F_{2,1}(t,t_0,\xi)| &\lesssim 1.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Agora usando A.1.9 para $l = 0$ e (A.23) temos para $(1+t)|\xi|^\sigma \geq N$ e $(1+t_0)|\xi|^\sigma \geq N$ que:

$$
\begin{aligned}
|F_{1,0}(t,t_0,\xi)| &\lesssim 1;\\
|F_{2,0}(t,t_0,\xi)| &\lesssim \frac{1}{|\xi|^\sigma};\\
|F_{1,1}(t,t_0,\xi)| &\lesssim |\xi|^\sigma;\\
|F_{2,1}(t,t_0,\xi)| &\lesssim 1.
\end{aligned} \tag{3.41}
$$

Usando as estimativas 3.40 temos para $(1+t)|\xi|^\sigma \leq N$ ou $|\xi|^\sigma \geq N$ que:

$$
|\widehat{u}_t(t,\xi)|^2 + |\xi|^{2\sigma}|\widehat{u}(t,\xi)|^2 + \frac{\mu^2}{(1+t)}|\xi|^\sigma|\widehat{u}(t,\xi)|^2 \leq C(1+\mu^2)\left(|\widehat{\phi}(\xi)|^2 + |\widehat{\psi}(\xi)|^2\right). \tag{3.42}
$$

Agora usando as estimativas 3.41 temos para $|\xi|^\sigma \leq N$, $(1+t)|\xi|^\sigma \geq N$ e $(1+t_\xi)|\xi|^\sigma = N$ que:

$$
\begin{aligned}
|\widehat{u}_t(t,\xi)|^2 &\leq C\left(|\xi|^{2\sigma}|\widehat{u}(t_\xi,\xi)|^2 + |\widehat{u}_t(t_\xi,\xi)|^2\right)\\
|\xi|^{2\sigma}|\widehat{u}(t,\xi)|^2 &\leq C\left(|\xi|^{2\sigma}|\widehat{u}(t_\xi,\xi)|^2 + |\widehat{u}_t(t_\xi,\xi)|^2\right)\\
\frac{\mu^2}{1+t}|\xi|^\sigma|\widehat{u}(t,\xi)|^2 \leq \frac{\mu^2}{1+t_\xi}|\xi|^\sigma|\widehat{u}(t,\xi)|^2 &\leq C\mu^2\left(\frac{|\xi|^{2\sigma}}{|\xi|^\sigma(1+t_\xi)}|\widehat{u}(t_\xi,\xi)|^2 + \frac{1}{(1+t_\xi)|\xi|^\sigma}|\widehat{u}_t(t_\xi,\xi)|^2\right)
\end{aligned}
$$

Portanto de acordo com as estimativas obtidas nas regiões, podemos concluir que:

$$
\|u_t(t,\cdot)\|_2^2 + \||D|^\sigma u(t,\cdot)\|_2^2 + \frac{\mu^2}{1+t}\||D|^{\frac{\sigma}{2}}u(t,\cdot)\|_2^2 \leq C_\mu\|\psi(\cdot)\|_2^2 + \|\phi(\cdot)\|_2^2 \tag{3.43}
$$

o que não é melhor do que já temos simplesmente derivando a energia e usando a desigualdade de Gronwall. Porén, adiante vamos usar as estimativas para os multiplicadores que foram obtidas acima para determinar estimativa $L^1 - L^2$ e $L^2 - L^2$.

Proposição 3.2.9. *Seja $u(t,x)$ solução de* 3.18 *com $2\delta = \sigma$. Nesse caso se $\phi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então*

$$
\|u(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim (1+t)(\|\phi\|_{L^2} + \|\psi\|_{L^2}). \tag{3.44}
$$

Se $2\sigma > n$, $|D|^\sigma\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\psi \in L^1$, então

$$
\|u(t,\cdot)\|_{L^2} \lesssim \||D|^\sigma\phi\|_1 + (1+t)^{1-\frac{n}{2\sigma}}(\|\phi\|_{L^2} + \|\psi\|_{L^1}) \tag{3.45}
$$

para $t \geq 0$.

Demonstração. Usando as estimativas:

$$
|F_{k,l}(t,t_0,\xi))| \lesssim \begin{cases}(1+t)^{1-l}, & (t,\xi),(t_0,\xi) \in Z_1\\ |\xi|^{\sigma(1-k+l)}, & (t,\xi),(t_0,\xi) \in Z_2 \cup Z_3\end{cases} \tag{3.46}
$$

onde $k = 1,2$ e $l = 0,1$, que foram obtidas anteriormente, podemos concluir que:

$$
\|F_{k,l}(t,0,\cdot)\|_{L^2(Z_1)} \lesssim (1+t)^{1-l-\frac{n}{2\sigma}}.
$$

Agora note que para $(t,\xi) \in Z_2$ temos:

$$
\begin{aligned}
\widehat{u}(t,\xi) =&\Big(F_{1,0}(t,t_\xi,\xi)F_{1,0}(t_\xi,0,\xi) + F_{2,0}(t,t_\xi,\xi)F_{1,1}(t_\xi,0,\xi)\Big)\widehat{u}(0,\xi)\\
&+\Big(F_{2,0}(t,t_\xi,\xi)F_{2,1}(t_\xi,0,\xi) + F_{1,0}(t,t_\xi,\xi)F_{2,0}(t_\xi,0,\xi)\Big)\widehat{u}_t(0,\xi)
\end{aligned}
$$

donde das estimativas (3.46), temos:

$$|F_{1,0}(t,t_\xi,\xi)F_{1,0}(t_\xi,0,\xi)+F_{2,0}(t,t_\xi,\xi)F_{1,1}(t_\xi,0,\xi)|\lesssim(1+t_\xi)+|\xi|^{-\sigma},$$
$$|F_{2,0}(t,t_\xi,\xi)F_{2,1}(t_\xi,0,\xi)+F_{1,0}(t,t_\xi,\xi)F_{2,0}(t_\xi,0,\xi)|\lesssim|\xi|^{-\sigma}+(1+t_\xi)$$

Além disso temos

$$\big\|F_{1,0}(t,t.,\cdot)F_{1,0}(t.,0,\cdot)+F_{2,0}(t,t.,\cdot)F_{1,1}(t.,0,\cdot)\big\|_{L^2\left(Z_2\right)}\lesssim\max\{1,(1+t)^{1-\frac{n}{2\sigma}}\},$$
$$\big\|F_{2,0}(t,t.,\cdot)F_{2,1}(t.,0,\cdot)+F_{1,0}(t,t.,\cdot)F_{2,0}(t.,0,\cdot)\big\|_{L^2\left(Z_2\right)}\lesssim\max\{1,(1+t)^{1-\frac{n}{2\sigma}}\}.$$

Finalmente como $2\sigma>n$ temos:

$$\||\cdot|^{\sigma(k-2)}F_{k,0}(t,0,\cdot)\|_{L^2(Z_3)}\lesssim 1.$$

Portanto dessas estimativas concluímos a estimativa L^1-L^2. A demonstração da estimativa L^2-L^2 é análoga.

□

Representação da solução via funções confluentes hipergeométricas.

Vamos obter uma representação para a os multiplicadores $F_{k,l}$ em termos de funções hipergeométricas confluentes. O objetvo é obter estimativas na a antidiagonal e diagonal, para isso precisamos de estimativas das derivadas dos núcleos $F_{k,l}$ em diferentes zonas e de comportamentos oscilatórios dos mesmos, que não são explicitos quando olhamos como solução da equação de onda do tipo Coulomb.
Consideremos agora uma representação da equação por meio de uma equação hipergeométrica confluente. Faça $z=2i\tau=2i(1+t)|\xi|^\sigma$ e note que $W(z)=e^{i\tau}\tau^{-1}w(\tau)=e^{i(1+t)|\xi|^\sigma}((1+t)|\xi|^\sigma)^{-1}\widehat{u}(t,\xi)$, satisfaz:

$$zW_{zz}+(2-z)W_z-(1+i\frac{\mu^2}{2})W=0. \tag{3.47}$$

Logo, estamos no caso logarítimo e por essa razão as soluções fundamentais são dadas por $\Psi(1+i\frac{\mu^2}{2},2,z)$ e $e^z\Psi(1-i\frac{\mu^2}{2},2,-z)$. Logo as soluções fundamentais de $\widehat{u}_{tt}+(|\xi|^{2\sigma}+\frac{\mu^2}{1+t}|\xi|^\sigma)\widehat{u}$ podem ser dadas por:

$$f_1(t,\xi):=(1+t)|\xi|^\sigma e^{-i(1+t)|\xi|^\sigma}\Psi(1+i\frac{\mu^2}{2},2;z)$$
$$f_2(t,\xi):=(1+t)|\xi|^\sigma e^{i(1+t)|\xi|^\sigma}\Psi(1-i\frac{\mu^2}{2},2;-z).$$

Derivanto em t temos

$$f_{1,t}(t,\xi):=\partial_t f_1(t,\xi)=|\xi|^\sigma e^{-i(1+t)|\xi|^\sigma}\Psi_1(1+\frac{i\mu^2}{2},2;z)$$
$$f_{2,t}(t,\xi):=\partial_t f_2(t,\xi)=|\xi|^\sigma e^{i(1+t)|\xi|^\sigma}\Psi_1(1-\frac{i\mu^2}{2},2;-z),$$

onde

$$\Psi_1(\alpha,\beta;z):=(\frac{z}{2}+\alpha-1)\Psi(\alpha,\beta;z)-\Psi(\alpha-1,\beta;z). \tag{3.48}$$

Para facilitar a escrita vamos usar a notação $\Psi(\alpha,\beta;z)=\Psi_0(\alpha,\beta;z)$. Se escrevermos

$$\widehat{u}(t,\xi) = F_{1,0}(t,t_0,\xi)\widehat{u}(t_0,\xi) + F_{2,0}(t,t_0,\xi)\widehat{u}_t(t_0,\xi)$$
$$\widehat{u}_t(t,\xi) = F_{1,1}(t,t_0,\xi)\widehat{u}(t_0,\xi) + F_{2,1}(t,t_0,\xi)\widehat{u}_t(t_0,\xi),$$

onde $\partial_t F_{k,0}(t,t_0,\xi) = F_{k,1}(t,t_0,\xi)$, para $k = 1,2$, teremos o seguinte Lema.

Lema 3.2.10. *Denotando $z = z(t) = 2i(1+t)|\xi|^\sigma$, temos para $k = 1,2$ e $l = 0,1$ que*

$$F_{k,l}(t,t_0,\xi) = e^{-\pi(i+\frac{\mu^2}{2})}(-2i|\xi|^\sigma)^{1-k+l}\det G_{k,l}(t,t_0,\xi), \tag{3.49}$$

onde

$$G_{k,l}(t,t_0,\xi) = \begin{pmatrix} z^{1-l}e^{-\frac{z}{2}}\Psi_l(1+i\frac{\mu^2}{2},2,z) & z^{1-l}e^{\frac{z}{2}}\Psi_l(1-i\frac{\mu^2}{2},2,-z) \\ z_0^{-1+k}e^{-\frac{z_0}{2}}\Psi_{2-k}(1+i\frac{\mu^2}{2},2,z_0) & z_0^{-1+k}e^{\frac{z_0}{2}}\Psi_{2-k}(1-i\frac{\mu^2}{2},2,-z_0) \end{pmatrix}. \tag{3.50}$$

Demonstração. Para demonstrar o Lema, deve-se utilizar duas identidades, a primeira:

$$F_{k,l}(t,t_0,\xi) = \frac{f_{2,t}(t_0,\xi)f_1(t,\xi) - f_{1,t}(t_0,\xi)f_2(t,\xi)}{f_{2,t}(t_0,\xi)f_1(t_0,\xi) - f_{1,t}(t_0,\xi)f_2(t_0,\xi)}$$

e depois, por (A.17), a segunda:

$$f_{2,t}(t,\xi)f_1(t,\xi) - f_{1,t}(t,\xi)f_2(t,\xi) = \frac{-ie^{\pi(i+\frac{\mu^2}{2})}}{2}|\xi|^\sigma. \tag{3.51}$$

□

Proposição 3.2.11. *Sejam $\alpha,\beta \in \mathcal{C}$.*

1. *Para $|z| \geq K$ grande, temos*

$$|d_z^m\Psi_l(\alpha,\beta;z)| \leq C_m|z|^{l-\Re\alpha-m},$$

onde m é um inteiro não negativo e $C_m = C_m(\alpha,\beta)$.

2. *Para $|z| \leq K$ pequeno, temos*

$$\Psi_0(\alpha,2;z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}z^{-1} + \mathcal{O}_\alpha(\ln z),$$
$$\Psi_1(\alpha,2;z) = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)} + \big(\frac{z}{2}+\alpha-1\big)\mathcal{O}_\alpha(\ln z) + \mathcal{O}_{\alpha-1}(\ln z),$$
$$|d_z^m\Psi_j(\alpha,2;z)| \leq C_m|z|^{-1-m},$$

onde $C_m = C_m(\alpha,\beta)$, $j = 0,1$, o sub-índice em $\mathcal{O}_\alpha(\ln z)$ indica que a função depende de α, e tem a ordem de $\ln z$ quando $|z| \to 0$, mais ainda, temos nesse caso, que $\mathcal{O}_\alpha(\ln z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\big(\ln z + \psi(\alpha) - \psi(1) - \psi(2)\big) + \mathcal{O}_\alpha(z\ln z)$.

Demonstração. Segue das Propriedades listadas no Apêndice. □

Agora vamos estimar a norma dos multiplicadores $F_{k,l}(t,t_0,\xi)$. Denote $\alpha := 1 + i\frac{\mu^2}{2}$, e escreva:

$$F_{k,l}(t,t_0,\xi) = C|\xi|^{\sigma(1-k+l)}z^{1-l}z_0^{k-1}\Big(e^{\frac{z_0-z}{2}}\Psi_l(\alpha,2,z)\Psi_{2-k}(2-\alpha,2,-z_0) - e^{\frac{z-z_0}{2}}\Psi_l(2-\alpha,2,-z)\Psi_{2-k}(\alpha,2,z_0)\Big),$$

onde $z = 2i(1+t)|\xi|^\sigma$ e $z_0 = 2i(1+t_0)|\xi|^\sigma$, logo, para $(1+t)|\xi|^\sigma \leq N$ temos, lembrando da seguinte relação funcional de simetria para a função Γ,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)},$$

para $z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, com $d_\alpha := \psi(\alpha) - \psi(1) - \psi(2)$, temos:

$$\begin{aligned}
&|F_{2,0}(t,t_0,\xi)| \lesssim (1+t)|\xi|^\sigma \\
&\Big|\Big(e^{\frac{z_0-z}{2}}\big(\frac{z^{-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\ln(z)+d_{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)} + \mathcal{O}_\alpha(z\ln(z))\big)\big(\frac{-z_0^{-1}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{\ln(-z_0)+d_{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \mathcal{O}_{2-\alpha}(-z_0\ln(-z_0))\big)\Big) \\
&-\Big(e^{\frac{z-z_0}{2}}\big(\frac{-z^{-1}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{\ln(-z)+d_{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \mathcal{O}_{2-\alpha}(-z\ln(-z))\big)\big(\frac{z_0^{-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\ln(z_0)+d_{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)} + \mathcal{O}_\alpha(z_0\ln(z_0))\big)\Big)\Big| \\
&\lesssim (1+t)|\xi|^\sigma\Big(|\sin(t|\xi|^\sigma)z_0^{-1}z^{-1}| + |e^{\frac{z-z_0}{2}}\ln(-z)\ln z_0 - e^{-\frac{z-z_0}{2}}\ln(z)\ln(-z_0)| + |z|^{-1}\big(\Im\big(e^{\frac{z-z_0}{2}}\ln(z_0)\big)\big)| + 1\Big),
\end{aligned}$$

logo pela Proposição 3.2.3, temos:

$$|F_{2,0}(t,t_0,\xi)| \lesssim (1+t).$$

Analogamente,

$$|F_{1,0}(t,t_0,\xi)| \leq C_\mu 1 + t,$$

$$\begin{aligned}
|F_{1,1}(t,t_0,\xi)| \leq & C_\mu|\xi|^\sigma\Big(\sin t|\xi|^\sigma + (\frac{|z|}{2}+\alpha-1)(\frac{|z_0|}{2}+\alpha-1)\big(|e^{\frac{z_0-z}{2}}\ln z_0 \ln -z - e^{\frac{z-z_0}{2}}\ln z \ln -z_0| \\
& + |\ln z||z_0 \ln z_0|\big) + 1\Big) \leq C_\mu',
\end{aligned}$$

$$|F_{2,1}(t,t_0,\xi)| \leq C_\mu.$$

Enquanto que para $|\xi|^\sigma(1+t) \geq N$ temos:

$$\begin{aligned}
&|F_{1,0}(t,t_0,\xi)| \leq C_\mu, \\
&|F_{2,0}(t,t_0,\xi)| \leq C_\mu\frac{1}{|\xi|^\sigma}, \\
&|F_{1,1}(t,t_0,\xi)| \leq C_\mu|\xi|^\sigma, \\
&|F_{2,1}(t,t_0,\xi)| \leq C_\mu.
\end{aligned}$$

Note que estas estimativas são análogas as que foram obtidas usando as estimativas para as soluções fundamentais da equação de Coulomb.

Estimativa $L^p - L^q$ na linha dual.

O Teorema a seguir fornece uma estimativa na linha dual da equação $u_{tt}+(-\Delta)^\sigma u+\mu^2(1+t)^{-1}(-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}}u = 0$ com dados de Cauchy em $\mathcal{S}$. Entendo o problema como uma pertubação de $u_{tt} + (-\Delta)^\sigma u = 0$ podemos

comparar as estimativas obtidas com as do Teorema 1.5.6. Nota-se que temos a mesma estimativa para a energia.

Teorema 3.2.12. *Seja $u(t,x)$ solução de* (3.18) *com $2\delta = \sigma$ e dados $u(0,x) = u_0(x), u_t(0,x) \in \mathcal{S}$, então, para $t \geq 0$, temos*

$$\left\|(u_t(t,\cdot), (-\Delta)^{\sigma/2}u(t,\cdot))\right\|_{L^q} \lesssim (1+t)^{h(\sigma)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\Big(\|u_0\|_{L^{p,\sigma(r+1)}} + \|u_1\|_{L^{p,r\sigma}}\Big), \tag{3.52}$$

onde $h(1) = -\frac{n-1}{2}$, $h(\sigma) = -\frac{n}{\sigma}$ para $\sigma \geq 2$ e $h(\sigma) = -\frac{n}{2}$ para $\sigma < 2$ e $r = \frac{n}{\sigma}\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\Big)$. Além disso, temos

$$\|(1+t)^{-1/2}(-\Delta)^{\sigma/4}u(t,\cdot)\|_{L^q} \lesssim d(t)\Big(\|u_0\|_{L^{p,\sigma(r+\frac{1}{2})}} + \|u_1\|_{L^{p,\sigma(r-\frac{1}{2})}}\Big) \tag{3.53}$$

onde

$$d(t) = \begin{cases} (1+t)^{-\frac{1}{2}-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}, & \sigma = 1 \text{ e } (n+1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}) > 1 \\ (1+t)^{-g(\sigma)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}, & \text{caso contrário ,} \end{cases} \tag{3.54}$$

onde $g(\sigma) = n-1$ quando $\sigma = 1$, $\frac{n}{\sigma}$ no caso $2 \leq \sigma$ e $\frac{n}{2}$ quando $\sigma < 2$ e $\sigma \neq 1$.

Demonstração. Vamos separar o espaço de fases em três partes que correspondem às três zonas Z_1, Z_2 e Z_3. Para fazer isso consideremos uma função $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ tal que $\psi(y) = 1$ para $y \leq \frac{1}{2}$, $\psi(y) = 0$ para $y \geq 2$ e $\psi^{'}(y) \leq 0$. Definimos ψ_j, $j = 1,2,3$, dadas por:

$$\begin{aligned}
\psi_1(y) &:= \psi(|\xi|^\sigma N^{-1})\psi((1+t)|\xi|^\sigma N^{-1}), \\
\psi_2(y) &:= \psi(|\xi|^\sigma N^{-1})(1 - \psi((1+t)|\xi|^\sigma N^{-1})), \\
\psi_3(y) &:= 1 - \psi(|\xi|^\sigma N^{-1})
\end{aligned}$$

tal que $\psi_1(y) + \psi_2(y) + \psi_3(y) = 1$. Agora vamos escolher $a_{k,l} = a_{k,l}(t,\xi)$, $k = 1,2$, $l = 0,1$, tal que $a_{k,l}(t,\xi)F_{k,l}(t,o,\xi) \in L^\infty(\mathbb{R}^n_\xi)$ uniformemente para todo tempo $t \geq 0$. Então nós temos, com $1 < p \leq 2$, que:
Zona $\mathcal{Z}_1$.

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{F}^1_{\xi\to x}(\psi_1(t,\xi)a_{k,l}(t,\xi)F_{k,l}(t,0,\xi)\widehat{v}(\xi))\|_{L^q_x} \\
\leq &\|\psi_1(t,\xi)a_{k,l}(t,\xi)F_{k,l}(t,0,\xi)\widehat{v}(\xi)\|_{L^p} \\
\leq &\|\psi_1(t,\xi)\|_{L^{\frac{qp}{q-p}}}\|a_{k,l}(t,\xi)F_{k,l}(t,0,\xi)\|_{L^\infty}\|v\|_{L^p} \\
\leq &C(1+t)^{-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|a_{k,l}(t,\xi)F_{k,l}(t,0,\xi)\|_{L^\infty}\|v\|_{L^p},
\end{aligned}$$

onde $v \in \mathcal{S}$. Escolhendo $a_{k,l}(t,\xi) = |\xi|^{\sigma(1-l)}$, temos:

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}^{-1}\big(\psi_1(t,\xi)\widehat{u}_t(t,\xi)\big)\|_{L^q} &\lesssim (1+t)^{-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\big(\|u_1\|_{L^p} + \|u_2\|_{L^p}\big) \\
\|\mathcal{F}^{-1}\big(\psi_1(t,\xi)|\xi|^\sigma\widehat{u}(t,\xi)\big)\|_{L^q} &\lesssim (1+t)^{-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\big(\|u_0\|_{L^p} + \|u_1\|_{L^p}\big)
\end{aligned}$$

com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Analogamente escolhendo $a_{k,l}(t,\xi) = (1+t)^{-\frac{1}{2}}|\xi|^{\frac{\sigma}{2}}$, temos:

$$
\begin{aligned}
&\|\mathcal{F}^1_{\xi\to x}(\psi_1(t,\xi)(1+t)^{-\frac{1}{2}}|\xi|^{\frac{\sigma}{2}}F_{k,l}(t,0,\xi)\widehat{v}(\xi))\|_{L^q_x}\\
=&(1+t)^{-\frac{1}{2}}\|\mathcal{F}^1_{\xi\to x}(|\xi|^{(-n+\epsilon)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\psi_1(t,\xi)|\xi|^{\sigma(k-1)}F_{k,l}(t,0,\xi)|\xi|^{(n-\epsilon)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)+\sigma(3/2-k)}\widehat{v}(\xi))\|_{L^q_x}\\
\leq&(1+t)^{-\frac{1}{2}}\||\xi|^{(-n+\epsilon)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\psi_1(t,\xi)\|_{L^{\frac{qp}{q-p}}}\||\xi|^{\sigma(1-k)}F_{k,l}(t,0,\xi)\|_{L^\infty}\|v\|_{L^{p,(n-\epsilon)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)+\sigma(3/2-k)}}\\
\leq&C(1+t)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-\frac{\epsilon}{\sigma}}\|v\|_{L^{p,(n-\epsilon)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)+\sigma(3/2-k)}},
\end{aligned}
$$

onde $\epsilon>0$ é arbitrário. Logo

$$
\|\mathcal{F}^{-1}\big(\psi_1(t,\xi)(1+t)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}|\xi|^{\frac{\sigma}{2}}\widehat{u}(t,\xi)\big)\|_{L^q}\lesssim(1+t)^{-\frac{1}{2}-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\Big(\|u_0\|_{L^p}+\|u_1\|_{L^{p,(n-\epsilon)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-\frac{\sigma}{2}}}\Big),
$$

Zona $\mathcal{Z}_3$.
Para tratar essa zona vamos onsiderar uma partição diádica da unidade adequada: Considere uma funçao positiva $\phi=\phi(y)\in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$, com suporte no intervalo $[\frac{1}{2},2]$. Defina $\phi_j(\xi):=\phi\big(2^{-j}\frac{|\xi|^\sigma}{N}\big)$, $j\in\mathbb{Z}$. Como $\phi_3(t,\xi)\phi_j(\xi)=0$ para $j<0$, temos:

$$
\psi_3(t,\xi)a_{k,l}(t,\xi)F_{k,l}(t,\xi)=(1-\psi(|\xi|^\sigma N^{-1}))(\phi_0(\xi)+\phi_1(\xi))+\sum_{j=2}^{\infty}\phi_j(\xi))a_{k,l}(t,\xi)F_{k,l}(t,\xi). \tag{3.55}
$$

Assim, vamos considerar a integral oscilatória:

$$
\mathcal{F}^{-1}\big(\phi_j(\xi)|\xi|^{-r}a_{k,l}(t,\xi)F_{k,l}(t,0,\xi)\big),
$$

com $r\in\mathbb{R}$ e $a_{k,l}(t,\xi)$ a serem determinados depois. Vamos denotar:

$$
\begin{aligned}
b_1^\pm(z)&:=z^{1-l}\Psi_l\big(1\mp i\frac{\mu^2}{2},2;\mp z\big),\\
b_2^\pm(z)&:=z^{-l+k}\Psi_{2-k}\big(1\pm i\frac{\mu^2}{2},2;\pm z\big).
\end{aligned}
$$

Logo:

$$
\det G_{k,l}(t,0,\xi)=e^{-it|\xi|^\sigma}b_1^-((1+t)|\xi|^\sigma)b_2^-(|\xi|^\sigma)-e^{it|\xi|^\sigma}b_1^+((1+t)|\xi|^\sigma)b_2^+(|\xi|^\sigma)
$$

com $k=1,2$, $l=0,1$. As funções $b_i^\pm$, $i=1,2$, satisfazem

$$
|d_z^m b_i^\pm(z)|\leq C_m|z|^{-m}
$$

$m=0,1,\ldots$, e $C_m=C_m(\mu)$ para $|z|$ grande. Para $a_{k,l}(t,\xi)$ vamos usar a potência $|\xi|^{-\sigma(1-k+l)}$ por isso a partir de agora é suficiente estudar a seguinte integral oscilatória

$$
\mathcal{F}^{-1}\Big(\phi_j(\xi)e^{\pm it|\xi|^\sigma}|\xi|^{-r\sigma}b_1((1+t)|\xi|^\sigma)b_2(|\xi|^\sigma)\Big) \tag{3.56}
$$

onde as funções b_i , $i=1,2$ satisfazem $|d_z^m b_i(z)|\leq C_m|z|^{-m}$, $m=0,1,\ldots$.
Estimativa L^1-L^∞. Substituindo $\xi=2^jN\eta$, $j\geq0$, temos usando o Lema de Littman que:

$$
\begin{aligned}
&\big\|\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}\Big(\phi_j(\xi)e^{\pm it|\xi|^\sigma}|\xi|^{-r\sigma}b_1((1+t)|\xi|^\sigma)b_2(|\xi|^\sigma)\Big)\big\|_{L^\infty_x}\\
=&C2^{j(n-r\sigma)}\big\|\mathcal{F}^{-1}_{\eta\to x}\Big(\phi(|\eta|^\sigma)e^{\pm it(2^jN|\eta|)^\sigma}|\eta|^{-r\sigma}b_1(2^{j\sigma}N^\sigma(1+t)|\eta|^\sigma)b_2(2^{j\sigma}N^\sigma|\xi|^\sigma)\Big)\big\|_{L^\infty_x}\\
\leq&C2^{j(n-r\sigma)}(1+(2^jN)^\sigma t)^{-\frac{\varrho}{2}}\sum_{|\alpha|\leq M}\|\partial^\alpha\phi(|\eta|^\sigma)|\eta|^{-r\sigma}b_1(2^{j\sigma}N^\sigma(1+t)|\eta|^\sigma)b_2(2^{j\sigma}N^\sigma|\xi|^\sigma)\|_{L^\infty}\\
\leq&C2^{j(n-r\sigma)}(1+(2^jN)^\sigma t)^{-\frac{\varrho}{2}}\sum_{|\alpha+\beta|\leq M}\sup_{\frac{1}{2}\leq|\eta|^\sigma\leq 2}|\eta|^{-r\sigma}|\eta|^{-\sigma(|\alpha|+|\beta|)}\leq C2^{j(n-r\sigma)}(1+t)^{-\frac{\varrho}{2}}
\end{aligned}
$$

onde ϱ vale n quando $\sigma\neq 1$ e $n-1$ no caso $\sigma=1$. A constante M de fato depende de σ e n.
Estimativa L^2-L^2.

$$
\begin{aligned}
&\|\phi_j(\xi)e^{\pm it|\xi|^\sigma}|\xi|^{-r\sigma}b_1((1+t)|\xi|^\sigma)b_2(|\xi|^\sigma)\|_{L^\infty}\\
\lesssim&\sup_{\frac{1}{2}\leq|\xi|^\sigma\leq 2}\phi(|\eta|)((2^jN)^\sigma|\eta|^\sigma)^{-r}|b_1(2^jN(1+t)|\eta|^\sigma)||b_2(2^jN|\eta|^\sigma)|\\
\lesssim&2^{-jr\sigma}
\end{aligned}
$$

para $j\geq 0$.
Estimativa L^p-L^q. Usando as duas estimativas anteriores podemos usar interpolação de Riesz-Thorin para obter:

$$
\begin{aligned}
&\big\|\mathcal{F}^{-1}\Big(\phi_j(\xi)|\xi|^{-r\sigma}|\xi|^{-\sigma(1-k+l)}E_{k,l}(t,0,\xi)\mathcal{F}(v)\Big)\big\|_{L^q}\\
\lesssim&2^{j\left(n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-r\sigma\right)}(1+t)^{-\frac{\varrho}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|v\|_{L^p}
\end{aligned}
$$

assim se assumirmos $r\geq\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$, temos que

$$
\big\|\mathcal{F}^{-1}\Big(\psi_3(t,\xi)|\xi|^{-r\sigma}|\xi|^{-\sigma(1-k+l)}E_{k,l}(t,0,\xi)\mathcal{F}(v)\Big)\big\|_{L^q}\lesssim(1+t)^{-\frac{\varrho}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|v\|_{L^p}.
$$

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{F}^{-1}\Big(\psi_3(t,\xi)\widehat{u}_t(t,\cdot)\Big)\|_{L^q}&\lesssim(1+t)^{-\frac{\varrho}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\Big(\|u_0\|_{L^{p,\sigma(r+1)}}+\|u_1\|_{L^{p,r\sigma}}\Big)\\
\|\mathcal{F}^{-1}\Big(\psi_3(t,\xi)|\xi|^\sigma\widehat{u}(t,\cdot)\Big)\|_{L^q}&\lesssim(1+t)^{-\frac{\varrho}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\Big(\|u_0\|_{L^{p,\sigma(r+1)}}+\|u_1\|_{L^{p,r\sigma}}\Big)
\end{aligned}
$$

onde $r=\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$.
Agora para estimar o potencial $(1+t)^{-1/2}(-\Delta)^{\frac{\sigma}{2}}u(t,x)$, vamos escolher $a_{k,0}(t,\xi)=(1+t)^{-1/2}|\xi|^{\sigma/2}$, logo.

$$
\|\mathcal{F}^{-1}\Big(\psi_3(t,\xi)(1+t)^{-1/2}|\xi|^{\sigma/2}\widehat{u}(t,\cdot)\Big)\|_{L^q}\lesssim(1+t)^{-\frac{1}{2}-\frac{\varrho}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\Big(\|u_0\|_{L^{p,\sigma(r+\frac{1}{2})}}+\|u_1\|_{L^{p,(r-\frac{1}{2})\sigma}}\Big)
$$

Zona $\mathcal{Z}_2$.
Assim como nas outras zonas estudaremos uma integral oscilatória com a frequência localizada em nossa zona.

$$
\mathcal{F}^{-1}\Big(\psi_2(t,\xi)a_{k,l}(t,\xi)F_{k,l}(t,0,\xi)\mathcal{F}(v)(\xi)\Big). \tag{3.57}
$$

Vamos introduzir uma decomposição diádica adequada, considere $\phi_j(t,\xi) := \phi\Big(2^{-j\frac{(1+t)|\xi|^\sigma}{N}}\Big)$, $j \in \mathbb{Z}$, com ϕ a função introduzida no estudo da zona $\mathcal{Z}_3$. Assim $\psi_2(t,\xi)\phi_j(t,\xi) = 0$ para $j < 0$, logo:

$$\begin{aligned}\psi_2(t,\xi) =&\psi(|\xi|^\sigma N^{-1})(1-\psi((1+t)|\xi|^\sigma N^{-1}))\sum_{j=0}^{\infty}\phi_j(t,\xi)\\ =&\psi(|\xi|^\sigma N^{-1})(1-\psi((1+t)|\xi|^\sigma N^{-1}))(\phi_0(t,\xi)+\phi_1(t,\xi))+\psi(|\xi|^\sigma N^{-1})\sum_{j=2}^{\infty}\phi_j(t,\xi).\end{aligned}$$

Vamos então investigar o multiplicador de Fourier para cada $j \geq 0$ separadamente. Sabemos que

$$\det M_{k,l}(t,0,\xi) = e^{-it|\xi|^\sigma}b_1^-((1+t)|\xi|^\sigma)b_2^-(|\xi|^\sigma) - e^{it|\xi|^\sigma}b_1^+((1+t)|\xi|^\sigma)b_2^+(|\xi|^\sigma)$$

com $k = 1,2$, $l = 0,1$. Além disso

$$|d_z^m b_1^\pm(z)| \leq C_m|z|^{-m}$$

$m = 0,1,\ldots$, e $C_m = C_m(\mu)$ para $|z|$ grande e

$$|d_z^m b_2^\pm(z_0)| \leq C_m|z_0|^{k-2-m}.$$

Vamos escolher $a_{k,l}(t,\xi) = |\xi|^{\sigma(1-l)}$. Note que

$$\begin{aligned}&\big\|\mathcal{F}^{-1}\big(e^{\pm it|\xi|^\sigma}\phi_j(t,\xi)|\xi|^{-\sigma r}\psi(|\xi|^\sigma N^{-1})b_1^\pm((1+t)|\xi|^\sigma)\big)\big\|_{L^\infty}\\ =&(1+t)^r\big\|\mathcal{F}^{-1}\big(e^{\pm it|\xi|^\sigma}\phi_j(t,\xi)((1+t)|\xi|^\sigma)^{-r}b_1^\pm((1+t)|\xi|^\sigma)\big)\big\|_{L^\infty}\\ =&(1+t)^r\big\|\mathcal{F}^{-1}\big(e^{\pm it|\xi|^\sigma}\phi_j(t,\xi)c_{l,k}((1+t)|\xi|^\sigma)\big)\big\|_{L^\infty}\end{aligned}$$

onde $c_{l,k}$ satisfaz $|d_z^m c_{l,k}(z)| \leq C_m|z|^{-r-m}$. Fazendo a substituição $(1+t)^{\frac{1}{\sigma}}\xi = (2^jN)^{\frac{1}{\sigma}}\eta$, e usando o Lema de Littman temos

$$\begin{aligned}&\big\|\mathcal{F}^{-1}\big(e^{\pm it|\xi|^\sigma}\phi_j(t,\xi)c_{l,k}((1+t)|\xi|^\sigma)\big)\big\|_{L^\infty}\\ =&2^{\frac{jn}{\sigma}}(1+t)^{-\frac{n}{\sigma}}\big\|\mathcal{F}^{-1}\big(e^{\pm i\frac{2^jNt}{1+t}|\eta|^\sigma}\phi(|\eta|^\sigma)c_{l,k}((2^jN|\eta|^\sigma)\big)\big\|_{L^\infty}\\ \lesssim&2^{\frac{jn}{\sigma}}(1+t)^{-\frac{n}{\sigma}}(1+2^jN)^{-\varrho/2}\sum_{|\beta|\leq M}\big\|D^\beta\phi(|\eta|^\sigma)c_{k,l}(2^jN|\eta|^\sigma)\big\|_{L^\infty}\\ \lesssim&2^{j\left(\frac{n}{\sigma}-\frac{\varrho}{2}\right)}(1+t)^{-\frac{n}{\sigma}}\sum_{|\beta|\leq M}\sup_{\frac{1}{2}\leq|\eta|^\sigma\leq 2}(2^jN)^M(2^jN|\xi|^\sigma)^{-r-M}\\ \lesssim&2^{j\left(\frac{n}{\sigma}-\frac{\varrho}{2}-r\right)}(1+t)^{-\frac{n}{\sigma}},\end{aligned}$$

onde M é uma constante adequada proveniente do Lema de Littman. Provamos assim a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}&\big\|\mathcal{F}^{-1}\big(e^{\pm it|\xi|^\sigma}\phi_j(t,\xi)\psi(|\xi|^\sigma N^{-1})b_1^\pm((1+t)|\xi|^\sigma)\mathcal{F}(v)\big)\big\|_{L^\infty}\\ \lesssim&2^{j\left(\frac{n}{\sigma}-\frac{\varrho}{2}-r\right)}(1+t)^{r-\frac{n}{\sigma}}\|v\|_{L^1}.\end{aligned} \tag{3.58}$$

Agora vamos fazer a estimativa $L^2 - L^2$. Temos que:

$$\big\|e^{\pm it|\xi|^\sigma}\phi_j(t,\xi)c_{l,k}((1+t)|\xi|^\sigma)\big\|_{L^\infty}\lesssim \sup_{\frac{1}{2}\leq|\eta|^\sigma\leq 2}\phi(|\eta|^\sigma)\big|c_{l,k}(2^jN|\eta|^\sigma)\big|\lesssim 2^{-jr}.$$

Provando assim que

$$\big\|\mathcal{F}^{-1}\big(e^{\pm it|\xi|^\sigma}\phi_j(t,\xi)\psi(|\xi|^\sigma N^{-1})b_1^\pm((1+t)|\xi|^\sigma)\mathcal{F}(v)\big)\big\|_{L^2}\lesssim (1+t)^r2^{-jr}\|v\|_{L^2}. \tag{3.59}$$

Assim, interpolando (3.58) e (3.59), temos para todo $j\geq 0$ e para $1<p\leq 2$ e $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$$\begin{aligned}&\big\|\mathcal{F}^{-1}\big(e^{\pm it|\xi|^\sigma}\phi_j(t,\xi)\psi(|\xi|^\sigma N^{-1})b_1^\pm((1+t)|\xi|^\sigma)\mathcal{F}(v)\big)\big\|_{L^q}\\ \lesssim&(1+t)^{r-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}2^{j\left(\left(\frac{n}{\sigma}-\frac{\varrho}{2}\right)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-r\right)}\|v\|_{L^p}.\end{aligned}$$

Agora note que para $|\xi|\neq 0$ temos

$$|\partial^\alpha\frac{\psi(|\xi|^\sigma N^{-1})b_2^\pm(|\xi|^\sigma)}{|\xi|^{\sigma(k-2)}}|\leq C_m|\xi|^{-|\alpha|}, \tag{3.60}$$

logo pelo Teorema de Miklhin-Hörmander, segue que $\frac{b_2^\pm(|\xi|^\sigma)}{|\xi|^{\sigma(k-2)}}\in M_p$ para $1<p<\infty$. Portanto, podemos concluir que

$$\begin{aligned}&\big\|\mathcal{F}^{-1}\big(e^{\pm it|\xi|^\sigma}\phi_j(t,\xi)b_1^\pm((1+t)|\xi|^\sigma)\psi(|\xi|^\sigma N^{-1})b_2^\pm(|\xi|^\sigma)\mathcal{F}(v)\big)\big\|_{L^q}\\ \lesssim&\big\|\mathcal{F}^{-1}\big(e^{\pm it|\xi|^\sigma}\phi_j(t,\xi)\psi(|\xi|^\sigma N^{-1})b_1^\pm((1+t)|\xi|^\sigma)\mathcal{F}(v)\big)\big\|_{L^q}\\ \lesssim&(1+t)^{r-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}2^{j\left(\left(\frac{n}{\sigma}-\frac{\varrho}{2}\right)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-r\right)}\|v\|_{L^p}\end{aligned}$$

No caso $\sigma=1$ tomamos $0<r=\frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$ logo

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}^{-1}\big(\psi_2(t,\xi)\widehat{u}_t(t,\xi)\big)\|_{L^q}&\lesssim(1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\Big(\|u_0\|_{L^p}+\|u_1\|_{L^p}\Big),\\ \|\mathcal{F}^{-1}\big(\psi_2(t,\xi)|\xi|^\sigma\widehat{u}(t,\xi)\big)\|_{L^q}&\lesssim(1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\Big(\|u_0\|_{L^p}+\|u_1\|_{L^p}\Big).\end{aligned}$$

e no caso $\sigma\neq 1$, tomamos $r=0$, logo

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}^{-1}\big(\psi_2(t,\xi)\widehat{u}_t(t,\xi)\big)\|_{L^q}&\lesssim(1+t)^{-\frac{\varrho}{\sigma}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\Big(\|u_0\|_{L^p}+\|u_1\|_{L^p}\Big),\\ \|\mathcal{F}^{-1}\big(\psi_2(t,\xi)|\xi|^\sigma\widehat{u}(t,\xi)\big)\|_{L^q}&\lesssim(1+t)^{-\frac{\varrho}{\sigma}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\Big(\|u_0\|_{L^p}+\|u_1\|_{L^p}\Big).\end{aligned}$$

Para o termo potêncial tomamos $a_{k,0}(t,\xi)=(1+t)^{-\frac{1}{2}}|\xi|^{\frac{\sigma}{2}}$, logo

$$\begin{aligned}&\big\|\mathcal{F}^{-1}\big(e^{\pm it|\xi|^\sigma}\phi_j(t,\xi)(1+t)^{-\frac{1}{2}}|\xi|^{-\sigma(r+\frac{1}{2})}\psi(|\xi|^\sigma N^{-1})b_1^\pm((1+t)|\xi|^\sigma)\big)\big\|_{L^\infty}\\ =&(1+t)^r\big\|\mathcal{F}^{-1}\big(e^{\pm it|\xi|^\sigma}\phi_j(t,\xi)((1+t)|\xi|^\sigma)^{-r-\frac{1}{2}}b_1^\pm((1+t)|\xi|^\sigma)\big)\big\|_{L^\infty}\\ =&(1+t)^r\big\|\mathcal{F}^{-1}\big(e^{\pm it|\xi|^\sigma}\phi_j(t,\xi)g_k((1+t)|\xi|^\sigma)\big)\big\|_{L^\infty},\end{aligned}$$

onde $|d_z^m g_k(z)| \leq |z|^{-r-\frac{1}{2}-m}$. Assim temos para todo $j \geq 0$ e para $1 < p \leq 2$ e $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ que

$$\begin{aligned}&\big\|\mathcal{F}^{-1}\big(e^{\pm it|\xi|^\sigma}\phi_j(t,\xi)\psi(|\xi|^\sigma N^{-1})b_1^{\pm}((1+t)|\xi|^\sigma)\mathcal{F}(v)\big)\big\|_{L^q}\\ \lesssim&(1+t)^{r-\frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}2^{j\left(\left(\frac{n}{\sigma}-\frac{\varrho}{2}\right)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-r-\frac{1}{2}\right)}\|v\|_{L^p}.\end{aligned}$$

Portanto no caso $\sigma=1$ e $(n+1)\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big)>1$ tomamos $0<r=\frac{n+1}{2}\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big)$ logo

$$\|\mathcal{F}^{-1}\big(\psi_2(t,\xi)(1+t)^{-1/2}|\xi|^{\sigma/2}\widehat{u}(t,\xi)\big)\|_{L^q}\lesssim(1+t)^{-\frac{1}{2}-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\Big(\|u_0\|_{L^p}+\|u_1\|_{L^p}\Big),$$

enquanto no caso $\sigma=1$ e $(n+1)\Big(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\Big)\leq 1$ ou $\sigma\neq 1$, tomamos $r=0$, logo

$$\|\mathcal{F}^{-1}\big(\psi_2(t,\xi)(1+t)^{-1/2}|\xi|^{\sigma/2}\widehat{u}(t,\xi)\big)\|_{L^q}\lesssim(1+t)^{-\frac{\varrho}{\sigma}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\Big(\|u_0\|_{L^p}+\|u_1\|_{L^p}\Big),$$

o que finaliza a demonstração.

□

Capítulo 4

Equações de Evolução com coeficientes variáveis.

Nesse capítulo iremos tratar de equações de evolução com coeficientes variáveis mais gerais. Nesse caso, iremos fazer somente estimativas de Energia. O método usado é o "Procedimento de Diagonalização"que por sua vez é inspirado no método de aproximação WKB. Esse método recebeu o nome dos físicos Gregor Wentzel , Hendrik Anthony Kramers e Léon Brillouin, que o desenvolveram em 1926. O método WKB é um caso especial de análise de múltiplas escalas veja [41]. Primeiramente vamos provar a Proposição 4.2.1, que ilustra o Procedimento de Diagonalização e depois apresentar o método de fato para o aplicá-lo em outros casos. O Procedimento de Diagonalização pode ser encontrado em [34].

4.1 Velocidade de propagação com tendência decrescente

Para $a(t) > 0$ considere a equação de evolução linear a seguir:

$$u_{tt} + a^2(t)(-\Delta)^\delta u = 0,\ u(0,x) = \phi(x),\ u_t(0,x) = \psi(x). \tag{4.1}$$

Defina a Energia da solução u da equação linear acima por $E_0(u)(t) = \frac{1}{2}\big(\|u_t(t,\cdot)\|_2^2 + a^2(t)\|(-\Delta)^\delta u(t,\cdot)\|_2^2\big)$, derivando essa energia em t, podemos concluir que $\frac{d}{dt}E_0(u)(t) = a(t)a^{'}(t)\|(-\Delta)^\delta u(t,\cdot)\|_2^2$, assim se a é decrescente podemos concluir, usando o lema de Gronwall, que $a^2(t)E_0(u)(0) \leq E_0(u)(t) \leq E(u)(0)$. Vamos considerar uma situação um pouco mais geral e provar a mesma estimativa.

Hipótese 4.1.1. *Consideremos que $0 < a(t) = \lambda(t)\nu(t) \in C^2(\mathbb{R}_+)$ que satisfaz as condições a seguir para $j = 1, 2$.*

1. $\infty > c_1 > \nu(t) > c_0 > 0$;
2. $\lambda(t)$ *é decrescente, i.é,* $\lambda^{'}(t) \leq 0$;
3. $\nu(t) \in C^2(\mathbb{R}_+)$, $|\frac{d^j}{dt^j}\nu(t)| \leq C\frac{1}{(1+t)^j}$;
4. $\lambda \in C^2(\mathbb{R}_+)$, $|\frac{d^j}{dt^j}\lambda(t)| \leq C\frac{\lambda(t)}{(1+t)^j}$.

Observação 4.1.1. *Da hipótese, podemos concluir que $|\frac{d^j}{dt^j}a(t)| \lesssim \frac{a(t)}{(1+t)^j}$ para $j = 1, 2$.*

Hipótese 4.1.2. *Existe $0 < \epsilon < 1$ talque $(1+t)^{1-\epsilon}\lambda(t)$ é uma função crescente.*

Exemplo 3. *Considere $-1 < \ell < 0$, temos $a(t) = c(1+t)^\ell$ e $\nu(t) \equiv 1$.*

Consideremos a microenergia $U(t,\xi) := (a(t)|\xi|^\delta \widehat{u}(t,\xi), D_t\widehat{u}(t,\xi))$, onde $\widehat{u}(t,\xi)$ é a transformada de fourier na variável x da solução $u(t,x)$ da equação (4.1). Note que por Plancherel $E_0(u)(t) = \frac{1}{2}\|U(t,\cdot)\|_2^2$. Além disso $D_tU(t,\xi) = A(t,\xi)U(t,\xi)$, onde

$$A(t,\xi) := \begin{pmatrix} \frac{D_ta(t)}{a(t)} & |\xi|^\delta a(t) \\ |\xi|^\delta a(t) & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Considerando N uma matriz dois por dois que diagonaliza a matriz A acima, e definindo U_1 por $NU_1 = U$, temos que $D_tU_1 = A_1U_1$, onde $A_1 = D_1 + R_1$, D_1 é a parte diagonal de A_1 enquanto R_1 é sua parte antidiagonal e A_1 é dada por:

$$A_1 := \begin{pmatrix} -|\xi|^\delta a(t) + \frac{D_ta(t)}{2a(t)} & \frac{D_ta(t)}{2a(t)} \\ \frac{D_ta(t)}{2a(t)} & |\xi|^\delta a(t) + \frac{D_ta(t)}{2a(t)} \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

Considere $N_1 = N_1(t,\xi)$ talque $[D_1, N_1] := D_1N_1 - N_1D_1 = -R_1$ e com as entradas da diagonal igual a um para qualquer (t,ξ). Temos que $N_1 = I - \frac{1}{2|\xi|^\delta a(t)}R_1\mathcal{J}$, onde $\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Como, por hipótese, temos $|\frac{D_ta(t)}{2(a(t))^2|\xi|^\delta}| \leq C\frac{1}{|\xi|^\delta\lambda(t)(1+t)}$, segue que no conjunto

$$H = \{(t,\xi) : |\xi|^\delta\lambda(t)(1+t) \geq n\},$$

para $n > 0$ suficientemente grande fixo, podemos garantir que N_1 é invertível. Além disso, por hipótese, a é $C^2(\mathbb{R}^n)$, donde N_1 é diferenciável. Logo nesse conjunto se definirmos U_2 por $N_1U_2 = U_1$ temos que $D_tU_2 = \big(D_1 + N_1^{-1}(R_1\tilde{N}_1 - D_tN_1)\big)U_2$, onde $\tilde{N}_1$ é a parte antidiagonal de N_1. Defina D_2 como sendo a parte diagonal de $D_1 + N_1^{-1}(R_1\tilde{N}_1 - D_tN_1)$ e R_2 sua parte andiagonal. Colocando $d = d(\xi,t) = -2|\xi|^\delta a(t)$ e $\mu = \mu(\xi,t) = \frac{|r_1|^2}{d^2}$, onde $r_1 = \frac{D_ta(t)}{2a(t)}$, temos $D_2+R_2 = D_1+\frac{1}{1-\mu}\Big(I-\frac{R_1}{d}\mathcal{J}\Big)\big(\frac{1}{d}R_1^2\mathcal{J}-D_t\big(\frac{1}{d}R_1\mathcal{J}\big)\big)$, e a partir daqui realizando os cáculos temos que $D_2 = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} \bar{\phi} & 0 \\ 0 & \phi \end{pmatrix}$ e $R_2 = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} 0 & \bar{r_2} \\ r_2 & 0 \end{pmatrix}$, onde $\bar{\phi}$ denota o conjugado complexo de ϕ com $\phi = \phi(t,\xi) = \frac{\partial_ta(t)}{2a(t)} - \frac{\partial_t(1-\mu)}{2(1-\mu)} + i\Im\phi(t,\xi)$ e $\Im\phi$ denota a parte imaginária de ϕ que não será importante para as estimativas que queremos. Temos também que $r_2 = r_2(t,\xi) = \frac{1}{1-\mu}\big(\mu\frac{\partial_ta(t)}{2a(t)} + i\partial_t\frac{\partial_ta(t)}{2a(t)d}\big)$. Agora iremos provar que para $(t,\xi),(s,\xi) \in H$ temos $|U(t,\xi)|^2 \approx \frac{a(t)}{a(s)}|U(s,\xi)|^2$. Considere $\mathcal{E}(t,s,\xi)$ matriz de solução fundamental de $D_t - D_2 - R_2 = 0$ e $E(t,s,\xi)$ matriz de solução fundamental de $D_t - D_2 = 0$. Assim, $E(t,s,\xi) = \begin{pmatrix} e^{\int_s^t \bar{\phi}(\tau,\xi)d\tau} & 0 \\ 0 & e^{\int_s^t \phi(\tau,\xi)d\tau} \end{pmatrix}$, e definindo $Q(t,s,\xi)$ por $\mathcal{E} = EQ$, temos $Q(s,s,\xi) = I$ e $D_tQ(t,s,\xi) = E^{-1}(t,s,\xi)R_2(t,\xi)E(t,s,\xi) = e^{2i\int_s^t \Im\phi(\tau,\xi)d\tau}R_2(t,\xi)$. Usando a representação por Matrizantes podemos concluir que $|Q(t,s,\xi)| \leq e^{\int_s^t \|R_2(\tau,\xi)\|d\tau}$, e como o traço de $e^{2i\int_s^t \Im\phi(\tau,\xi)d\tau}R_2(t,\xi)$ é zero podemos concluir da fórmula de Liouville que $Q(t,s,\xi)$ é inversível e $\det Q(t,s,\xi) \equiv 1$, donde temos $\|Q^{-1}(t,s,\xi)\| = \|Q(t,s,\xi)\|$. Portanto, como $|E(t,s,\xi)| = \frac{a^{1/2}(t)}{a^{1/2}(s)}\frac{(1-\mu(s,\xi))^{1/2}}{(1-\mu(t,\xi))^{1/2}}$, temos:

$$e^{-\int_s^t \|R_2(\tau,\xi)\|d\tau}\frac{a^{1/2}(t)}{a^{1/2}(s)}\frac{(1-\mu(s,\xi))^{1/2}}{(1-\mu(t,\xi))^{1/2}} \leq \|\mathcal{E}(t,s,\xi)\| \leq \frac{a^{1/2}(t)}{a^{1/2}(s)}\frac{(1-\mu(s,\xi))^{1/2}}{(1-\mu(t,\xi))^{1/2}}e^{\int_s^t \|R_2(\tau,\xi)\|d\tau}. \tag{4.4}$$

Agora note que em H, $|\mu(t,\xi)| \leq \frac{1}{4n^2}$, donde para n grande fixado, $\frac{(1-\mu(s,\xi))^{1/2}}{(1-\mu(t,\xi))^{1/2}} \approx 1$. Agora vamos provar que em H, $\int_s^t \|R_2(\tau,\xi)\|d\tau < \infty$.
Precisamos estimar $\int_s^t |r_2(\tau,\xi)|d\tau$, temos da Observação 4.1.1 que $|r_2(\tau,\xi)| \leq C\frac{1}{(1+\tau)^2a(\tau)|\xi|^\delta}$. Agora pela Hipótese (4.1.2) temos $\int_s^t \frac{1}{(1+\tau)^2a(\tau)|\xi|^\delta}d\tau \leq \frac{1}{(1+s)^{1-\epsilon}a(s)|\xi|^\delta}\int_s^t \frac{1}{(1+\tau)^{1+\epsilon}}d\tau = \frac{1}{(1+s)a(s)|\xi|^\delta} < \infty$ para $(s,\xi) \in H$. Portanto usando a equivalência (4.4) e que em H vale $|U(t,\xi)| \approx |U_2(t,\xi)|$ temos que:

$$U(t,\xi)|^2 \approx \frac{a(t)}{a(s)}|U(s,\xi)|^2. \tag{4.5}$$

Agora vamos considerar a região $P = \{(t,\xi) : |\xi|^\delta a(t)(1+t) \leq n\}$ e obter uma estimativa usando o Lema de Gronwall. Considere a solução fundamental $F(t,s,\xi) = \begin{pmatrix} F_{1,1}(t,s,\xi) & F_{1,2}(t,s,\xi) \\ F_{2,1}(t,s,\xi) & F_{2,2}(t,s,\xi) \end{pmatrix}$ de $D_t - A = 0$. Segue que para $k = 1,2$, $\partial_t F_{1,k}(t,s,\xi) = \frac{\partial_t a(t)}{a(t)} F_{1,k}(t,s,\xi) + i|\xi|^\delta a(t) F_{2,k}(t,s,\xi)$ e $\partial_t F_{2,k}(t,s,\xi) = i|\xi|^\delta a(t) F_{1,k}(t,s,\xi)$. Logo

$$F_{1,k}(t,s,\xi) = -a(t)\int_s^t |\xi|^\delta \int_s^r |\xi|^\delta a(\tau) F_{1,k}(\tau,s,\xi) d\tau dr + a(t) i \int_s^t |\xi|^\delta \delta_{2,k} dr + \frac{a(t)}{a(s)}\delta_{1,k}, \tag{4.6}$$

donde usando o Lema de Gronwall temos que para $(t,\xi) \in P$, $|F_{1,k}(t,s,\xi)| \leq C e^{\int_s^t a(\tau)|\xi|^\delta d\tau}$, e ainda da hipótese (4.1.2) temos $\int_s^t a(\tau)|\xi|^\delta d\tau \leq a(t)(1+t)^{1-\epsilon}|\xi|^\delta \int_s^t (1+t)^{\epsilon-1} d\tau = a(t)(1+t)|\xi|^\delta \leq n$, o que finaliza a prova de que $|F_{1,k}(t,s,\xi)| \lesssim 1$. Usando isso, podemos concluir também que $|F_{2,k}(t,s,\xi)| \lesssim 1$, $k = 1,2$. Portanto $|U(t,\xi)| \leq |U(s,\xi)|$ para quaisquer $t, s \geq 0$ e $\xi \neq 0$. Integrando em ξ e usando plancherel obtemos que $E_0(u)(t) \leq C E_0(u)(0)$. Concluímos assim a demonstração da Proposição a seguir.

Proposição 4.1.2. *Se $a(t)$ satisfaz as Hipóteses* 4.1.1 *e* 4.1.2*, então a solução $u(t,x)$ da equação* (4.1)*, com dados $\phi \in \dot{H}^\delta(\mathbb{R}^n)$ e $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, satisfaz:*

$$E_0(u)(t) \leq C E_0(u)(0),$$

para todo $t \geq 0$, onde C é uma constante universal independent dos dados e de t.

4.2 Diagonalização

Nessa seção iremos estabelecer as técnicas, notações e idéias que serão usadas para tratar os casos com coeficientes dependentes do tempo, é muito importante a compreensão dessa seção para entender o restante da tese. As principais referências para essa seção são a tese da Böhme e o paper de Hirosawa [34].

Preliminares

Vamos estabelecer algumas notações e idéias, para isso vamos considerar uma família em $(\xi,t) \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ de funções Matriciais ou vetoriais, com $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$, dadas por

$$\Phi(t,\xi) = \begin{pmatrix} \phi_{1,1}(t,\xi) & 0 \\ 0 & \phi_{2,2}(t,\xi) \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

$$\mathcal{R}(t,\xi) = \begin{pmatrix} 0 & R_{1,2}(t,\xi) \\ R_{2,1}(t,\xi) & 0 \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

Vamos nos referir às famílias $\{\Phi(t,\xi)\}_{(t,\xi)\in\mathcal{S}}$ e $\{\mathcal{R}(t,\xi)\}_{(t,\xi)\in\mathcal{S}}$ simplesmente como funções matriciais ou matrizes. Diremos que essas matrizes são especiais quando tiverem a seguinte forma

$$\Phi = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} \overline{\phi}_1(t,\xi) & 0 \\ 0 & \phi_1(t,\xi) \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

$$\mathcal{R} = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} 0 & \overline{r}_1(t,\xi) \\ r_1(t,\xi) & 0 \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

Vamos, de agora em diante, denotar por $\mathcal{E}(t,s,\xi)$, com $(t,\xi),(s,\xi) \in \mathcal{S}$ a solução fundamental da equação, ou família de equações, dada por

$$\begin{cases} D_t\mathcal{E}(t,s,\xi) = (\Phi(t,\xi) + \mathcal{R}(t,\xi)))\mathcal{E}(t,s,\xi) \\ \mathcal{E}(s,s,\xi) = I \end{cases} \tag{4.11}$$

onde I é fixada como a matriz identidade dois por dois, e denotaremos por $E(t,s,\xi)$ a solução fundamental do problema homogêneo associado, isto é,

$$\begin{cases} D_tE(t,s,\xi) = \Phi(t,\xi)E(t,s,\xi) \\ E(s,s,\xi) = I \end{cases} \tag{4.12}$$

Agora podemos enunciar e provar a Proposição 4.2.1 que será muito útil.

Proposição 4.2.1. *Sejam $\mathcal{E}(t,s,\xi)$ e $E(t,s,\xi)$ definidas em algum $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, respectivamente, por* (4.11) *e* (4.12)*, então*

$$\|E(t,s,\xi)\|e^{-\int_s^t \|\overline{\mathcal{R}}(r,\xi)\|dr} \leq \|\mathcal{E}(t,s,\xi)\| \leq \|E(t,s,\xi)\|e^{\int_s^t \|\overline{\mathcal{R}}(r,\xi)\|dr},$$

onde $\overline{\mathcal{R}}(t,s,\xi) \doteq E^{-1}(t,s,\xi)\mathcal{R}(t,\xi)E(t,s,\xi)$. Além disso, se tivermos que Φ é especial, ou seja, tem a forma (4.9)*, então*

$$\|E(t,s,\xi)\|e^{-\int_s^t \|\mathcal{R}(r,\xi)\|dr} \leq \|\mathcal{E}(t,s,\xi)\| \leq \|E(t,s,\xi)\|e^{\int_s^t \|\mathcal{R}(r,\xi)\|dr},$$

para $(t,\xi),(s,\xi) \in \mathcal{S}$.

Demonstração. Note que se $\mathcal{E}(t,s,\xi) = E(t,s,\xi)Q(t,s,\xi)$, então $Q(s,s,\xi) = I$ e

$$D_tQ(t,s,\xi) = \overline{\mathcal{R}}(t,s,\xi)Q(t,s,\xi)$$

Podemos usar a representação por matrizantes, Teorema A.4.8, para obter que

$$Q(t,s,\xi) = I + \sum_{j=1}^{\infty} \int_s^t i\overline{\mathcal{R}}(t_1,s,\xi)\ldots\int_s^{t_{j-1}} i\overline{\mathcal{R}}(t_j,s,\xi)dt_j\ldots dt_1.$$

Logo pela proposição A.4.9 temos;

$$\|Q(t,s,\xi)\| \leq e^{\int_s^t \|\overline{\mathcal{R}}(r,s,\xi)\|dr}$$

Agora se $\mathcal{R}$ for antidiagonal temos, além disso pela fórmula de Liouville, que

$$\det Q(t,s,\xi) = e^{i\int_s^t tr\mathcal{R}(r,\xi)dr} = 1.$$

Logo Q é inversível e, finalmente, por Cramer temos

$$\|Q(t,s,\xi)^{-1}\| = \|Q(t,s,\xi)\| \leq e^{\int_s^t \|\overline{\mathcal{R}}(r,\xi)\|dr}.$$

Portanto

$$\|\mathcal{E}(t,s,\xi)\| \approx \|E(t,s,\xi)\|e^{\pm\int_s^t \|\overline{\mathcal{R}}(r,\xi)\|dr}. \tag{4.13}$$

Se Φ é especial, um cáculo simples mostra que $\|\mathcal{R}\| \approx \|\overline{\mathcal{R}}\|$.

□

Observação 4.2.2. *Nota-se da demonstração da Proposição* 4.2.1 *acima que mesmo $\mathcal{R}$ não sendo antidiagonal ainda podemos garantir a estimativa superior, ou seja, continuamos tendo que $\|\mathcal{E}(t,s,\xi)\| \leq \|E(t,s,\xi)\|e^{\int_s^t \|\overline{\mathcal{R}}(r,\xi)\|dr}$ e isso será importante quando estudarmos o Operador de Möller.*

Procedimento de Diagonalização

Em princípio o procedimento a seguir é abstrato, e permite obter funções Φ_k e $\mathcal{R}_k$ a partir de funções Φ e $\mathcal{R}$ dadas, mas veremos que ele tem importante aplicação. No que segue iremos considerar que as matrizes Φ e $\mathcal{R}$ são especiais, ou seja, têm a forma (4.9) e (4.10), respectivamente. Definiremos recursivamente para inteiros positivos $j = 1, \ldots, k-1$, onde $k \geq 2$ é um certo inteiro positivos, as funções vetoriais

$$
\begin{aligned}
&\Phi_1 \doteq \Phi, \mathcal{R}_1 := \mathcal{R} \text{ e } d_1 = d_1(t,\xi) \doteq (\Phi_1)_{1,1}(t,\xi) - (\Phi_1)_{2,2}(t,\xi);\\
&N_j = N_j(t,\xi) \doteq I + \frac{1}{d_j}\mathcal{R}_j\mathcal{J};\\
&Q_{j+1} = Q_{j+1}(t,\xi) \doteq D_t - N_j^{-1}(D_t - \Phi_j - \mathcal{R}_j)N_j;\\
&\Phi_{j+1} = \Phi_{j+1}(t,\xi) \doteq \operatorname{diag} Q_{j+1}(t,\xi);\\
&\mathcal{R}_{j+1} = \mathcal{R}_{j+1}(t,\xi) \doteq Q_{j+1}(t,\xi) - \Phi_{j+1}(t,\xi);\\
&d_{j+1} = d_{j+1}(t,\xi) \doteq (\Phi_{j+1})_{1,1}(t,\xi) - (\Phi_{j+1})_{2,2}(t,\xi).
\end{aligned}
$$

onde

$$
\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.
$$

Observe que estamos supondo, obviamente, que N_j^{-1}, $j = 1, \ldots, k-1$, existem e junto com as N_j são diferênciáveis em t.

Definição Quando as funções N_j^{-1}, $j = 1, \ldots, k-1$ existem e junto com as N_j são diferênciáveis em algum aberto $\mathcal{Z} \subset [0,\infty) \times \mathbb{R}^n$, o qual nos referiremos genericamente como Zona, e tivermos também que exista $d > 0$ tal que $\det N_j(t,\xi) > d$ para todo $(t,\xi) \in \mathcal{Z}$, $j = 1, \cdots, k$, diremos que vale a **Hipótese de Diagonalização até** k **em** $\mathcal{Z}$ ou simplesmente diremos que vale **HD**$_k(\mathcal{Z})$.

O procedimento definido acima, mantêm a forma da Matriz original, como mostra a Proposição a 4.2.3.

Proposição 4.2.3. *Assuma que exista algum $\mathcal{Z}$ tal que N_j^{-1} existam e juntamente com N_j, N_j^{-1} são suficientemente diferênciáveis para $j = 1, \ldots, k-1$, $k \geq 2$. Então, em $\mathcal{Z}$, as seguintes representações são válidas:*

- $\Phi_{j+1} = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} \overline{\phi}_{j+1} & 0 \\ 0 & \phi_{j+1} \end{pmatrix}$,

com

$$
\Re\{\phi_{j+1}\} = \Re\{\phi_j\} + \frac{\partial_t \mu_j}{2(1-\mu_j)}, \tag{4.14}
$$

$$
\Im\{\phi_{j+1}\} = \Im\{\phi_j\} + \frac{1}{1-\mu_j}(d_j\mu_j + \Im\{\frac{r_j}{d_j}\partial_t\frac{\overline{r_j}}{d_j}\}) \tag{4.15}
$$

e $d_{j+1} = -2\Im\{\phi_{j+1}\}$ toma valores reias;

- $\mathcal{R}_{j+1} = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} 0 & \overline{r}_{j+1} \\ r_{j+1} & 0 \end{pmatrix}$,

com

$$
r_{j+1} = \frac{1}{1-\mu_j}(\mu_j r_j + i\partial_t\frac{r_j}{d_j}), \tag{4.16}
$$

onde $\mu_j = \mu_j(t,\xi) := 1 - \det N_j(t,\xi)$ toma valores reais.

Demonstração. Vamos encontrar uma expressão explicíta para Φ_2 e $\mathcal{R}_2$. Primeiramente, por Cramer, temos que $N_1^{-1} = \frac{1}{1-\mu_1}(I - \frac{1}{d_j}\mathcal{R}_j\mathcal{J})$, onde $\mu_1 := 1 - \det N_1$. Além disso, como $\Phi_1 N_1 = N_1\Phi_1 - \mathcal{R}_1$, temos $N_1^{-1}(\Phi_1 + \mathcal{R}_1)N_1 = \Phi_1 + N_1^{-1}(\mathcal{R}_1(N_1 - I))$. Portanto:

$$N_1^{-1}(\Phi_1 + \mathcal{R}_1)N_1 = \frac{1}{1-\mu_1}\begin{pmatrix} i\mu_1\phi_1 - i\overline{\phi_1} - 2d_1\mu_1 & 0 \\ 0 & i\mu_1\overline{\phi_1} - i\phi_1 + 2d_1\mu_1 \end{pmatrix} + \frac{\mu_1}{1-\mu_1}\mathcal{R}_1.$$

Também temos que:

$$N_1^{-1}(D_t N_1) = \frac{1}{1-\mu_1}\begin{pmatrix} i\frac{\overline{r_1}}{d_1}\partial\frac{r_1}{d_1} & 0 \\ 0 & i\frac{r_1}{d_1}\partial_t\frac{\overline{r_1}}{d_1} \end{pmatrix} + \frac{1}{1-\mu_1}\begin{pmatrix} 0 & \partial_t\frac{\overline{r_1}}{d_1} \\ -\partial_t\frac{r_1}{d_1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo

$$\begin{aligned}
(\Phi_2)_{11} &= \frac{1}{1-\mu_1}\Big(- i\overline{\phi_1} - 2d_1\mu_1 + i\mu_1\phi_1 - i\frac{\overline{r_1}}{d_1}\partial_t\frac{r_1}{d_1}\Big) \\
(\Phi_2)_{22} &= \frac{1}{1-\mu_1}\Big(- i\phi_1 + 2d_1\mu_1 + i\mu_1\overline{\phi_1} - i\frac{r_1}{d_1}\partial_t\frac{\overline{r_1}}{d_1}\Big), \\
(\mathcal{R}_2)_{12} &= \frac{1}{1-\mu_1}\Big(- i\mu_1\overline{r_1} - \partial_t\frac{\overline{r_1}}{d_1}\Big), \\
(\mathcal{R}_2)_{21} &= \frac{1}{1-\mu_1}\Big(- i\mu_1 r_1 + \partial_t\frac{r_1}{d_1}\Big).
\end{aligned}$$

Vemos que $i(\mathcal{R}_2)_{12} = \overline{\frac{1}{1-\mu_1}(\mu_1 r_1 + i\partial_t\frac{r_1}{d_1})}$ e também que $i(\mathcal{R}_2)_{21} = \overline{i(\mathcal{R}_2)_{12}}$. Agora note que:

$$\frac{\overline{r_1}}{d_1}\partial_t\frac{r_1}{d_1} = \overline{\frac{r_1}{d_1}\partial_t\frac{\overline{r_1}}{d_1}}, \text{ onde } \Re\frac{\overline{r_1}}{d_1}\partial_t\frac{r_1}{d_1} = \Re\frac{r_1}{d_1}\partial_t\frac{\overline{r_1}}{d_1} = \frac{1}{2}\partial_t\mu_1.$$

Assim definindo $\phi_2 := i(\Phi_2)_{22}$ temos a identidade:

$$\begin{aligned}
i(\Phi_2)_{11} =& \frac{\overline{\phi_1}}{1-\mu_1} - \frac{\phi_1\mu_1}{1-\mu_1} - \frac{i2d_1\mu_1}{1-\mu_1} + \frac{1}{1-\mu_1}\Big(\frac{\partial_t\mu_1}{2} - i\Im\frac{r_1}{d_1}\partial_t\frac{\overline{r_1}}{d_1}\Big) \\
& \overline{\phi_1} + \frac{\partial_t\mu_1}{2(1-\mu_1)} - \frac{1}{i}\Big(\mu_1 d_1 + \Im\frac{r_1}{d_1}\partial_t\frac{\overline{r_1}}{d_1}\Big) = \overline{i(\Phi_2)_{22}} = \overline{\phi_2}.
\end{aligned}$$

Logo $\Re\phi_2 = \Re\phi_1 + \frac{\partial_t\mu_1}{2(1-\mu_1)}$ e $\Im\phi_2 = \Im\phi_1 + \frac{1}{1-\mu_1}\Big(d_1\mu_1 + \Im\frac{r_1}{d_1}\partial_t\frac{\overline{r_1}}{d_1}\Big)$.
e esse argumento demonstra a Proposição, basta usar indução. □

Consequências da Diagonalização.

Quando possível diagonalizar veremos agora que a representação da solução após a diagonalização nos permite comparar o comportamento assintótico da solução fundamental de um sistema com a solução fundamental correspondente a parte homogênea desse sistema.

Corolário 4.2.4. *Assuma que exista algum $\mathcal{Z}$ tal que N_j^{-1} existam e juntamente com N_j, N_j^{-1} são suficientemente diferênciáveis para $j = 1, \ldots, k-1$, $k \geq 2$. Nesse caso temos que vale **HD**$_k(\mathcal{Z})$ se, e somente se existe $c < 1$ tal que, para $j = 1 \ldots k-1$, tenhamos:*

$$\frac{|r_j|^2}{d_j^2} < c \text{ em } \mathcal{Z}. \tag{4.17}$$

Demonstração. Imediato da definição e da Proposição 4.2.3. □

Corolário 4.2.5. *Se vale* **HD**$_k(\mathcal{Z})$*, então as* N_j *e* N_j^{-1} *são uniformemente limitadas em* $\mathcal{Z}$*.*

Demonstração. Segue do corolário 4.2.4. □

Nesse ponto alertamos que a idéia em aplicações futuras é procurar alguma Zona em que vale a desigualdade (4.17), para que possamos diagonalizar o sistema.

Corolário 4.2.6. *Suponha que vale* **HD**$_k(\mathcal{Z})$ *e que* $\mathcal{R}_k(r,\xi)$ *é integrável em* r *uniformemente em* ξ*, isto é:*

$$\int_s^t \|\mathcal{R}_k(r,\xi)\|dr < C < \infty \tag{4.18}$$

para todo $(t,\xi),(s,\xi) \in \mathcal{Z}$*.*
Então temos

$$\|\mathcal{E}_k(t,s,\xi)\| \approx \|E_1(t,s,\xi)\|$$

para todo (t,ξ) *e* (s,ξ) *em* $\mathcal{Z}$*, onde* $\mathcal{E}_k(t,s,\xi)$ *é a solução fudamental da equação*

$$\begin{cases} D_t\mathcal{E}_k = (\Phi_k + \mathcal{R}_k))\mathcal{E}_k \\ \mathcal{E}_k(s,s,\xi) = I \end{cases} \tag{4.19}$$

Demonstração. Para $j = 1,\dots,k$ seja E_j a solução fundamental do problema homogêneo associado a (4.19), ou seja:

$$\begin{cases} D_tE_j(t,s,\xi) = \Phi_j(t,\xi)E_j(t,s,\xi), \\ E_j(s,s,\xi) = I. \end{cases}$$

Dada a forma diagonal de Φ_j temos que

$$E_j(t,s,\xi) = \begin{pmatrix} e^{\int_s^t \overline{\phi}_j(r,\xi)dr} & 0 \\ 0 & e^{\int_s^t \phi_j(r,\xi)dr} \end{pmatrix},$$

logo, por 4.2.3, temos para $j > 1$:

$$\|E_j(t,\xi)\| \approx e^{\int_s^t \Re\{\phi_j(r,\xi)\}dr} = e^{\int_s^t \Re\{\phi_{j-1}\}(r,\xi)dr} e^{-\int_s^t \frac{\partial_t(1-\mu_{j-1}(r,\xi))}{2(1-\mu_{j-1}(r,\xi))}dr}.$$

Logo

$$\|E_j(t,s,\xi)\| \approx \|E_{j-1}(t,s,\xi)\| \frac{\sqrt{|1-\mu_{j-1}(s,\xi)|}}{\sqrt{|1-\mu_{j-1}(t,\xi)|}}$$

Portanto

$$\|E_j(t,s,\xi)\| \approx \|E_{j-1}(t,s,\xi)\|$$

Donde, transitivamente, temos

$$\|E_k(t,s,\xi)\| \approx \|E_1(t,s,\xi)\| \tag{4.20}$$

para todo (t,ξ), (s,ξ) em $\mathcal{Z}$.
Mas, por outro lado, como pela Proposição 4.2.3 $\mathcal{R}_k$ tem a forma especial, temos pela Proposição 4.2.1 e desigualade (4.13) que

$$\|\mathcal{E}_k(t,s,\xi)\| \approx \|E_k(t,s,\xi)\| e^{\pm\int_s^t \|\mathcal{R}_k(r,\xi)\|dr}.$$

Agora use a hipótese (4.24) e a relação obtida (4.20), e com isso finalize a demonstração do Corolário.

□

Quando aplicarmos os métodos desenvolvidos nessa seção estaremos considerando o que chamaremos de micro-energia do sistema, e veremos que sua natureza matemática é um vetor dois por um e não uma matriz fundamental, então vamos fazer uma simples conexão com a matriz fundamental que estamos falando até esse momento. Consideremos que $U_1 = U_1(t,\xi) = (u_1(t,\xi), u_2(t,\xi))^T$ resolve

$$D_t U_1 = (\Phi_1 + \mathcal{R}_1)U_1 \tag{4.21}$$

Podemos provar, por indução, que após $k \geq 1$ passos do procedimento acima nós obtemos o sistema

$$D_t U_k = (\Phi_k + \mathcal{R}_k)U_k \tag{4.22}$$

onde $U_k := N_{k-1}^{-1} \dots N_1^{-1} U_1$.
Sabemos que

$$U_k(t,\xi) = \mathcal{E}_k(t,s,\xi)U_k(s,\xi)$$

Logo

$$\begin{aligned} U_1(t,\xi) =& N_1(t,\xi)\dots N_{k-1}(t,\xi)U_k(t,\xi) \\ =& N_1(t,\xi)\dots N_{k-1}(t,\xi)\mathcal{E}_k(t,s,\xi)U_k(s,\xi) \\ =& N_1(t,\xi)\dots N_{k-1}(t,\xi)\mathcal{E}_k(t,s,\xi)N_{k-1}^{-1}(s,\xi)\dots N_1^{-1}(s,\xi)U_1(s,\xi) \end{aligned} \tag{4.23}$$

Portanto nas mesmas hipóteses do corolário (4.2.6) deduzimos o resultado a seguir que será muito útil futuramente.

Corolário 4.2.7. *Suponha que vale* $\mathbf{HD}_k(\mathcal{Z})$ *e que* $\mathcal{R}_k(r,\xi)$ *é integrável em* r *uniformemente em* ξ*, isto é:*

$$\int_s^t \|\mathcal{R}_k(r,\xi)\|dr < C < \infty \tag{4.24}$$

para todo $(t,\xi),(s,\xi) \in \mathcal{Z}$.
Então temos

$$|U_1(t,\xi)| \approx e^{\int_s^t \Re\{\phi_1(r,\xi)\}dr}|U_1(s,\xi)|$$

com (t,ξ) *e* (s,ξ) *em* $\mathcal{Z}$.

Demonstração. Basta usa a identidade (4.23) e aplicar os corolário 4.2.5 e 4.2.6 observando que $\|E_1(t,s,\xi)\| \approx e^{\int_s^t \Re\{\phi_1(r,\xi)\}dr}$ e a simetria entre s e t. □

4.3 Operador de Möller

O operador de Möller têm importante aplicação como veremos, ele relaciona estados iniciais de um operador de evolução pertubado com os estados iniciais de seu correspondente operador livre, sem pertubação, de modo que o comportamento assintótico desses coincida, a existência desse operador nem sempre é possível e mesmo quando existe em geral não é invertível. Para conhecer mais sobre a teoria veja o livro de Roach [69].
Seja $\mathcal{E}(t,\xi) \doteq \mathcal{E}(t,0,\xi)$ o operador de evolução relativo da (4.11), onde estamos supondo que $\Phi(t,\xi)$ tem a forma de (4.9) e $\mathcal{R}(t,\xi)$ qualquer matriz dois por dois, anti-diagonal ou não, e seja $\mathcal{E}_0(t,\xi) \doteq E(t,0,\xi)$ o operador de evolução associado ao respectivo problema homogêneo 4.12, e ainda:

$$U(t,\xi) \doteq \mathcal{E}(t,\xi)U(0,\xi), V(t,\xi) \doteq \mathcal{E}_0(t,\xi)V(0,\xi),$$

onde $U(0,\xi) \doteq (u_0(\xi), u_1(\xi))^T$ e $V(0,\xi) \doteq (v_0(\xi), v_1(\xi))^T$ são dados iniciais em algum subespaço $\mathcal{H} \subset L^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$. Suponha que o operador $\mathcal{E}_0(t,\xi)$ é uma isometria para todo t e o operador $U(0,\xi) \in \mathcal{H} \to \mathcal{E}(t,\xi)U(0,\xi) \in \mathcal{H}$ é limitado para cada t. Consideremos a diferença:

$$\|V(t,\cdot)-U(t,\cdot)\|_{\mathcal{H}} = \|\mathcal{E}_0(t,\cdot)V(0,\cdot)-\mathcal{E}(t,\cdot)U(0,\cdot)\|_{\mathcal{H}} \tag{4.25}$$
$$= \|V(0,\cdot)-\mathcal{E}_0(t,\cdot)^{-1}\mathcal{E}(t,\cdot)U(0,\cdot)\|_{\mathcal{H}}. \tag{4.26}$$

Definiremos o operador de onda W_+ quando existe por

$$W_+ \doteq \lim_{t\to\infty} \mathcal{E}_0(t,\xi)^{-1}\mathcal{E}(t,\xi).$$

Onde o limite é dado na norma de operador. Se pudermos provar que o operador $U(0,\xi)\in\mathcal{H}\to W_+U(0,\xi)\in\mathcal{H}$ realmente existe, então os dados iniciais relacionados da forma $V(0,\xi)=W_+U(0,\xi)$, fornece que o limite quando $t\to\infty$ de (4.25) vai a zero. Veja a figura 4.3.

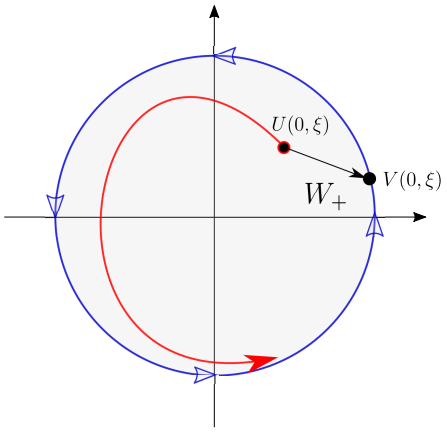


Figura 4.1: Operador de möller

Vamos considerar aqui que $\mathcal{Z}$ é definida de tal modo que se $(s,\xi)\in\mathcal{Z}$, então $(t,\xi)\in\mathcal{Z}$ para todo $t\geq s$. Isso define uma função $\xi\mapsto t_\xi$ por $t_\xi\doteq\inf\{s>0:(s,\xi)\in\mathcal{Z}\}$.
Para $\mathcal{R}_1\in L^\infty L^1(\mathcal{Z})$, de acordo com a demonstração da Proposição 4.2.1 podemos escrever:

$$\mathcal{E}(t,\xi)=\begin{cases}\mathcal{E}(t,0,\xi) & \text{, se } t_\xi\geq t;\\ E(t,t_\xi,\xi)Q(t,t_\xi,\xi)\mathcal{E}(t_\xi,0,\xi) & \text{, se } t>t_\xi.\end{cases}$$

Proposição 4.3.1. *Se $\mathcal{R}_1\in L^\infty_\xi L^1_t(\mathcal{Z})$ e $\xi\mapsto t_\xi$ é decrescente em $|\xi|\in\mathbb{R}^n$, e contínua em alguma bola centrada na origem, então o operador $W_+(\xi)$ existe no conjunto*

$$\mathcal{M}\doteq\bigcup_{c>0}\{U(\xi)=(u_0(\xi),u_1(\xi))^T : dist(\operatorname{supp}u_i(\xi),0)\geq c, i=0,1\}.$$

Além disso para $W_+(\xi)U(\xi)=V(\xi)$ com $U,V\in\mathcal{M}$ temos

$$\|U(t,\cdot)-V(t,\cdot)\|_{\mathcal{H}}\lesssim\|U(\cdot)\|_{\mathcal{H}}\sup\{\int_t^\infty\|\mathcal{R}(\tau,\eta)\|d\tau:(t,\eta)\in\mathcal{Z}_{hip}\}.$$

Se, além disso, tivermos $\|\mathcal{E}_0(t,\xi)^{-1}\mathcal{E}(t,\xi)\|\leq C<\infty$ uniformemente em (t,ξ), então o operador $W_+(\xi)$ existe no fecho $\overline{\mathcal{M}}$.

Demonstração. Temos para $t>t_\xi$ que

$$\mathcal{E}_0(t,\xi)^{-1}\mathcal{E}(t,\xi)=E(0,t,\xi)\Big(E(t,t_\xi,\xi)Q(t,t_\xi,\xi)\mathcal{E}(t_\xi,0,\xi)\Big).$$

Logo

$$\mathcal{E}_0(t,\xi)^{-1}\mathcal{E}(t,\xi) = E(0,t_\xi,\xi)Q(t,t_\xi,\xi)\mathcal{E}(t_\xi,0,\xi)$$

Agora para $s,t \geq t_\xi$, consideremos a diferênça

$$Q(t,t_\xi,\xi) - Q(s,t_\xi,\xi) = \sum_{j=1}^{\infty}\int_s^t i\overline{\mathcal{R}}(t_1,t_\xi,\xi)\int_{t_\xi}^{t_1} i\overline{\mathcal{R}}(t_1,t_\xi,\xi)\ldots\int_{t_\xi}^{t_{j-1}} i\overline{\mathcal{R}}(t_j,t_\xi,\xi)dt_j\ldots dt_1.$$

Logo pela Proposição A.4.9 temos,

$$\begin{aligned}\|Q(t,t_\xi,\xi) - Q(s,t_\xi,\xi)\| &\leq \sum_{j=1}^{\infty}\int_s^t \|\overline{\mathcal{R}_1}(t_1,t_\xi,\xi)\|\frac{1}{(j-1)!}\Big(\int_{t_\xi}^{t_1}\|\overline{\mathcal{R}_1}(t_1,t_\xi,\xi)\|dt_2\Big)^{j-1}dt_1\\ &\leq \int_s^t \|\mathcal{R}_1(t_1,\xi)\|\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(j-1)!}\Big(\int_{t_\xi}^{\infty}\|\mathcal{R}_1(t_1,\xi)\|dt_2\Big)^{j-1}dt_1\\ &\leq \int_s^t \|\mathcal{R}_1(t_1,\xi)\|e^{\int_{t_\xi}^{\infty}\|\mathcal{R}_1(t_2,\xi)\|dt_2}dt_1. \qquad (4.27)\end{aligned}$$

Finalmente para $c>0$ pequeno seja $T=\inf\{t_\xi : |\xi| = c\} > 0$, se $s,t > T$, por (4.27), $Q(t,t_\xi,\xi)$ é cauchy uniformemente em $|\xi| > c$. Logo o limite a seguir existe

$$\lim_{t\to\infty} Q(t,t_\xi,\xi) = Q(\infty,t_\xi,\xi)$$

uniformemente em $|\xi| \geq c$. Portanto o limite

$$\lim_{t\to\infty}\mathcal{E}_0(t,\xi)^{-1}\mathcal{E}(t,\xi) = E(0,t_\xi,\xi)Q(\infty,t_\xi,\xi)\mathcal{E}(t_\xi,0,\xi)$$

existe uniformemente em $|\xi| \geq c$. Para finalizar note que $W_+U(\xi) = V(\xi)$ implica

$$\begin{aligned}&\|U(t,\cdot) - V(t,\cdot)\|_{\mathcal{H}} = \|\mathcal{E}(t,\cdot)U(\cdot) - \mathcal{E}_0(t,\cdot)V(\cdot)\|_{\mathcal{H}}\\ =&\|\mathcal{E}_0^{-1}(t,\xi)\mathcal{E}(t,\xi)U(\xi) - W_+U(\xi)\|_{\mathcal{H}}\\ =&\|E(0,t_{(\cdot)},\cdot)(Q(t,t_{(\cdot)},\cdot) - Q(\infty,t_{(\cdot)},\cdot))\mathcal{E}(t_{(\cdot)},0,\cdot)U(\cdot)\|_{\mathcal{H}}\\ \lesssim&\|Q(t,t_{(\cdot)},\cdot) - Q(\infty,t_{(\cdot)},\cdot)\|_{\mathcal{H}}\|U(\cdot)\|_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

Isso juntamente com (4.27) finaliza a demonstração da primeira parte. Se tivermos também que $\|\mathcal{E}_0(t,\xi)^{-1}\mathcal{E}(t,\xi)\| \leq C < \infty$, então

$$\|\mathcal{E}_0(t,\cdot)^{-1}\mathcal{E}(t,\cdot)V(\cdot)\|_{\mathcal{H}} \leq C\|V(\cdot)\|_{\mathcal{H}}$$

portanto pelo Teorema de Banach-Steinhauss A.4.3 concluímos a demonstração Proposição.

□

4.4 Potêncial efetivo e não-efetivo.

Nessa seção os resultados de Böhme [5], [8], [6] feitos para o caso $\sigma = 1$ e $\delta = 0$ estaremos estendendo para o caso $0 \leq \delta < \sigma$. Vamos mostrar que sob hipóteses na massa que a forcem a se comportar acima do invariante por escala, vamor ter comportamento dissipativo no caso $\delta = 0$ e conservação no caso $\delta > 0$. Estamos interessados no estudo da equação

$$\begin{cases} u_{tt} + (-\Delta)^{\sigma} u + m(t)^2 (-\Delta)^{\delta} u = 0 \\ u(0,x) = \phi(x), u_t(0,x) = \psi(x). \end{cases} \tag{4.28}$$

onde $m(t)$ é uma função estritamente positiva. Consideremos a Energia como dada a seguir.

$$E^{KG}(u)(t) = \frac{1}{2}\Big(\|u_t(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \|(-\Delta)^{\sigma/2} u(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + m(t)\|(-\Delta)^{\delta/4} u(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \Big) \tag{4.29}$$

Böhme [5] provou que no caso $\sigma = 1$ e $\delta = 0$ com condições adequadas em $m(t)$, a saber $m(t)(1+t) \to \infty$ temos

$$m(t) E^{KG}(u)(0) \lesssim E^{KG}(u)(t) \lesssim E^{KG}(u)(0)$$

para todo t. Deduzindo como Corolário que

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^2} = \mathcal{O}\Big(m(t)^{-\frac{1}{2}} \Big)$$

quando $t \to 0$. Note que essa estimativa é melhor do que se obtém no caso que a massa m nula, o que mostra um efeito dissipativo, inclusive melhor do que $\mathcal{O}\Big(m(t)^{-1}\Big)$, que é o que se tem de modo geral quando simplesmente temos que $m(t)$ é decrescente.
Usaremos a notação

$$\langle \xi \rangle_{m(t)} \doteq \left(|\xi|^{2\sigma} + |\xi|^{2\delta} m(t)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Aplicando a transformada de Fourier com relação a variável espacial x, temos

$$\begin{cases} \widehat{u}_{tt}(t,\xi) + |\xi|^{2\sigma} \widehat{u}(t,\xi) + m(t)^2 |\xi|^{2\delta} \widehat{u}(t,\xi) = 0 \\ \widehat{u}(0,\xi) = \widehat{\phi}(\xi), \;\; \widehat{u}_t(0,\xi) = \widehat{\psi}(\xi). \end{cases} \tag{4.30}$$

Considerando a micro-energia $U(t,\xi) = \Big(\langle \xi \rangle_{m(t)} \widehat{u}, D_t \widehat{u} \Big)^T$, temos que

$$D_t U(t,\xi) = (\Phi_0 + \mathcal{R}_0) U(t,\xi),$$

onde

$$\Phi_0 = \Phi_0(t,\xi) := \begin{pmatrix} 0 & \langle \xi \rangle_{m(t)} \\ \langle \xi \rangle_{m(t)} & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_0(t,\xi) := \begin{pmatrix} \frac{D_t \langle \xi \rangle_{m(t)}}{\langle \xi \rangle_{m(t)}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Considere U_1 definido a seguir.

$$N_0 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, U_1 := N_0^{-1} U.$$

Então N_0 é a matriz que diagonaliza o sistema logo U_1 satisfaz:

$$D_t U_1 = (\Phi_1 + \mathcal{R}_1) U_1,$$

onde Φ_1 e $\mathcal{R}_1$ têm as estruturas de (4.9) e (4.10) respectivamente, com

$$\phi_1 = \phi_1(t,\xi) \doteq \frac{\partial_t\langle\xi\rangle_{m(t)}}{2\langle\xi\rangle_{m(t)}} + i\langle\xi\rangle_{m(t)},$$
$$r_1 = r_1(t,\xi) \doteq \frac{\partial_t\langle\xi\rangle_{m(t)}}{2\langle\xi\rangle_{m(t)}}.$$

Se considerarmos a Energia dada por $E_{KG}(u)(t) \doteq \frac{1}{2}\|U(t,\cdot)\|^2_{L^2}$, ou seja:

$$E_{KG}(u)(t) = \frac{1}{2}\Big(\|u_t(t,\cdot)\|^2_{L^2} + \|(-\Delta)^{\sigma/2}u(t,\cdot)\|^2_{L^2} + m(t)^2\|(-\Delta)^{\delta/2}u(t,\cdot)\|^2_{L^2}\Big) \tag{4.31}$$

e supondo m suave e decrescente teremos, $\frac{d}{dt}E_{KG}(u)(t) \leq 0$, portanto poderemos concluir que a energia é limitada, em particular:

$$m(t)^2\|(-\Delta)^{\delta/2}u(t,\cdot)\|^2_{L^2} \leq E_{KG}(u)(0). \tag{4.32}$$

Mas agora vamos buscar hipóteses que nos garantam melhorar essa estimativa considerando a Energia definida anteriormente, ou seja $E^{KG}(u)(t)$.

4.4.1 Massa crescente

Vamos considerar para a equação:

$$\begin{cases} u_{tt} + (-\Delta)^{\sigma}u + m(t)^2(-\Delta)^{\delta}u = 0 \\ u(0,x) = \phi(x), u_t(0,x) = \psi(x). \end{cases} \tag{4.33}$$

a energia $E^{KG}(u)(t) := \frac{1}{2}\big(\|u_t(t,\cdot)\|^2_2 + \|(-\Delta)^{\sigma/2}u(t,\cdot)\|^2_2 + m(t)\|(-\Delta)^{\delta/2}u(t,\cdot)\|^2_2\big)$. Vamos provar conservação generalizada dessa energia. Para isso, vamos, inicialmente, fazer algumas considerações.

Consideremos as seguintes hipóteses sobre a massa $m(t)$:

Hipótese 4.4.1. *$m(t) = \lambda(t)\nu(t)$ com $\lambda(t), \nu(t) \in C^2(\mathbb{R}_+)$, satisfazendo*

1. *$0 < \lambda(t)$ crescente, $0 < c_0 \leq \nu(t) \leq c_1 < \infty$, com $c_0 \leq c_1$ constantes;*
2. $$\frac{\partial_t^j\lambda(t)}{\lambda(t)} < C_j\frac{1}{(1+t)^j},$$
$$\partial_t^j\nu(t) \leq C_j\frac{1}{(1+t)^j}$$

   para $j = 1, 2$.

Observação 4.4.1. *Note que com essa hipótese temos $\frac{\partial_t^j m(t)}{m(t)} \leq C_j\frac{1}{(1+t)^j}$.*

Exemplo 4. *Considere para $0 \leq \omega$ e $\gamma \in \mathbb{R}$,*

$$m(t) = (1+t)^{\omega}\ln^{\gamma}(e+t).$$

Definamos as zonas hiperbólica e pseudo-diferencial como:

$$\mathcal{Z}_{hip} = \{(t,\xi) : \langle\xi\rangle_{\lambda(t)}(1+t) \geq N\},$$

$$\mathcal{Z}_{pd} = \{(t,\xi) : \langle\xi\rangle_{\lambda(t)}(1+t) \leq N\}.$$

Zona hiperbólica

Note que $d_1 = -2(\langle\xi\rangle_{m(t)})$, logo na Zona hiperbólica:

$$\frac{|r_1|}{|d_1|} \lesssim \frac{|\partial_t\langle\xi\rangle_{m(t)}|}{4(\langle\xi\rangle_{m(t)})^2} \lesssim \frac{m^2(t)|\xi|^{2\delta}}{(\langle\xi\rangle_{m(t)})^2}\frac{c_0}{\langle\xi\rangle_{m(t)}(1+t)} \lesssim \frac{1}{N}.$$

Logo, para N suficientemente grande, a matriz inversa N_1^{-1} existe e juntamente com N_1 é diferenciável. Assim vale a hipótese de diagonalização até 2. Além disso na Zona hiperbólica temos:

$$|r_2| \lesssim \frac{|r_1|^3}{|d_1|^2} + |\partial_t\frac{r_1}{d_1}| \lesssim \frac{1}{(\langle\xi\rangle_{m(t)}(1+t))^2(1+t)} + |\partial_t\frac{\partial_t\langle\xi\rangle_{m(t)}}{(\langle\xi\rangle_{m(t)})^2}|.$$

O segundo termo é estimado por

$$|\partial_t\frac{\partial_t\langle\xi\rangle_{m(t)}}{(\langle\xi\rangle_{m(t)})^2}| \lesssim |\frac{\partial_t^2\langle\xi\rangle_{m(t)}}{(\langle\xi\rangle_{m(t)})^2}| + |\frac{\partial_t\langle\xi\rangle_{m(t)}m(t)m^{'}(t)|\xi|^{2\delta}}{(\langle\xi\rangle_{m(t)})^4}| \lesssim \frac{1}{\langle\xi\rangle_{m(t)}(1+t)^2}$$

Portanto

$$|r_2(t,\xi)| \lesssim \frac{m^{\frac{1}{2}}(t)}{\langle\xi\rangle_{m(t)}(1+t)^2}$$

$$|r_2(t,\xi)| \lesssim \frac{1}{\langle\xi\rangle_{m(t)}(1+t)^2}$$

Logo por hipótese de $\lambda(t)$ ser crescente temos que para $(s,\xi) \in \mathcal{Z}_{hip}$:

$$\int_s^t |r_2(\tau,\xi)|d\tau \lesssim \int_s^t \frac{1}{\langle\xi\rangle_{m(\tau)}(1+\tau)^2}d\tau$$
$$\lesssim \frac{1}{\langle\xi\rangle_{\lambda(s)}}\int_s^t \frac{1}{(1+\tau)^2}d\tau \lesssim \frac{1}{\langle\xi\rangle_{\lambda(s)}(1+s)} < \infty.$$

Portanto na Zona hiperbólica temos que $r_2 \in L^\infty_\xi L^1_t(\mathcal{Z}_{hip})$, logo pelo Corolário 4.2.7 temos que

$$|U(t,\xi)| \approx \Big(\frac{\langle\xi\rangle_{m(t)}}{\langle\xi\rangle_{m(s)}}\Big)^{\frac{1}{2}}|U(s,\xi)|,$$

para $(t,\xi),(s,\xi) \in \mathcal{Z}_{hip}$.

Zona Pseudodiferêncial

Vamos considerar $V(t,\xi) := (h(t)\widehat{u}(t,\xi), \widehat{u}_t(t,\xi))^T$ com $h(t) = \frac{N}{1+t}$. Logo:

$$D_tV(t,\xi) = A(t,\xi)V(t,\xi)$$

com

$$A(t,\xi) = A = \begin{pmatrix} \frac{D_th(t)}{h(t)} & h(t) \\ \frac{\langle\xi\rangle^2_{m(t)}}{h(t)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Consideremos $E = E(t,s,\xi)$ a solução fundamental da equação acima, ou seja:

$$D_tE(t,s,\xi) = A(t,\xi)E(t,s,\xi)$$
$$E(s,s,\xi) = I.$$

com $t, s \geq 0$. Logo para $k = 1, 2$,

$$\partial_t E_{1k}(t,s,\xi) = \frac{\partial_t h(t)}{h(t)} E_{1k}(t,s,\xi) + ih(t)E_{2k}(t,s,\xi), \tag{4.34}$$
$$\partial_t E_{2k}(t,s,\xi) = i\frac{\langle\xi\rangle^2_{m(t)}}{h(t)} E_{1k}(t,s,\xi).$$

usando fator integrante, temos:

$$E_{1,k}(t,s,\xi) = \frac{h(t)}{h(s)}\big(i\int_s^t h(s)E_{2,k}(\tau,s,\xi)d\tau + \delta_{1,k}\big)$$
$$E_{2,k}(t,s,\xi) = \int_s^\tau i\frac{\langle\xi\rangle^2_{m(r)}}{h(r)} E_{1,k}(r,s,\xi)dr + \delta_{2,k}.$$

Logo

$$E_{1,k}(t,s,\xi) = \frac{h(t)}{h(s)}\Big(\int_s^t ih(s)\int_s^\tau i\frac{\langle\xi\rangle^2_{m(r)}}{h(r)} E_{1,k}(r,s,\xi)dr d\tau + ih(s)\int_s^t \delta_{2,k}d\tau + \delta_{1,k}\Big)$$

Usando Fubini e que $\langle\xi\rangle_{\lambda(t)}(1+t) \leq N$, temos

$$|E_{1,k}(t,s,\xi)| \leq C\int_s^t \langle\xi\rangle_{m(r)}|E_{1,k}(r,s,\xi)|dr + h(t)\int_s^t \delta_{2,k}d\tau + \frac{h(t)}{h(s)}\delta_{1,k},$$

onde C é uma constante. Logo pela desigualdade de Gronwall e por $\lambda(t)$ ser crescente temos que na Zona pseudo-diferêncial:

$$|E_{1k}(t,s,\xi)| \lesssim e^{\int_s^t \langle\xi\rangle_{m(r)}dr} \lesssim e^{\langle\xi\rangle_{\lambda(t)}\int_s^t dr} \lesssim 1,$$

para $k = 1, 2$. Donde temos também que $E_{2,k}(t,s,\xi) \lesssim 1$ na Zona pseudo-diferêncial para $k = 1, 2$. Portanto provamos que

$$|V(t,\xi)| \leq C|V(0,\xi)|. \tag{4.35}$$

Agora podemos enunciar o resultado principal do caso efetivo com $m(t)$ crescente. Veja também [20] para resultados de estimativas de Energia com massa crescente e velocidade de propagação dependente do tempo.

Teorema 4.4.2. *Seja $m(t)$ satisfazendo a Hipótese* 4.4.1*, então a solução do problema de Cauchy* (4.28) *com dados $\phi \in H^\sigma(\mathbb{R}^n)$ e $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, satisfaz:*

$$\|(-\Delta)^{\delta/2}u(t,\cdot)\|_{L^2} = \mathcal{O}\big(m(t)^{-\frac{1}{2}}\big)$$

para todo tempo $t \geq 0$. Mais precisamente:

$$m(t)\|(-\Delta)^{\delta/2}u(t,\cdot)\|_2^2 \leq C\big(\|\psi\|_2^2 + \|\phi\|_{H^\sigma}^2\big).$$

Além disso, a solução também satisfaz:

$$\|u_t(t,\cdot)\|_2^2 \leq Cm(t)\big(\|\psi\|_2^2 + \|\phi\|_{H^\sigma}^2\big)$$

para $t \geq 0$.

Demonstração. Vamos primeiramente fazer uma analise de nossas Zonas. Podemos subdividir a zona hiperbólica em duas partes, a primeira dada por

$$Z_\infty = \{(t,\xi) : t \geq 0, |\xi|^{2\sigma} + \lambda^2(0)|\xi|^{2\delta} \geq N^2\}.$$

A razão desse ser um subconjunto da zona hiperbólica vem de $\lambda(t)(1+t)$ ser crescente. Pela mesma razão, para cada ξ, com $|\xi|^{2\sigma} + \lambda^2(0)|\xi|^{2\delta} \leq N^2$ existe um único tempo t_ξ ta lque $\langle\xi\rangle_{\lambda(t_\xi)}(1+t) = N$.
Assim, pela hipótese nos dados iniciais, provamos que para $(t,\xi) \in Z_\infty$

$$|U(t,\xi)|^2 \leq C\frac{\langle\xi\rangle_{m(t)}}{\langle\xi\rangle_{m(0)}}|U(0,\xi)|^2.$$

Além disso, para $|\xi|^{2\sigma} + \lambda^2(0)|\xi|^{2\delta} \leq N^2$ e $t \geq t_\xi$ temos

$$|U(t,\xi)|^2 \leq C\frac{\langle\xi\rangle_{m(t)}}{\langle\xi\rangle_{m(t_\xi)}}|U(t_\xi,\xi)|^2 \leq C\frac{\langle\xi\rangle_{m(t_\xi)}}{\langle\xi\rangle_{m(0)}}|V(0,\xi)|^2 \tag{4.36}$$

Para $t \leq t_\xi$, $(t,\xi) \in Z_{pd}$, temos $|U(t,\xi)|^2 \leq |V(t,\xi)|^2 \leq C|V(0,\xi)|^2 \leq C\frac{\langle\xi\rangle_{m(t)}}{\langle\xi\rangle_{m(0)}}|V(0,\xi)|^2$,
assim em qualquer caso temos

$$\|\widehat{u}_t(t,\cdot)\|_2^2 + \||\xi|^\sigma\widehat{u}(t,\cdot)\|_2^2 + m^2(t)\||\xi|^\delta\widehat{u}(t,\cdot)\|_2^2 \leq C\frac{\langle\xi\rangle_{m(t)}}{\langle\xi\rangle_{m(0)}}\big(\|\widehat{\psi}\|_2^2 + |(1+|\xi|^2)^{\frac{\sigma}{2}}\widehat{\phi}\|_2^2\big).$$

Agora, no caso $|\xi|^{\delta-\sigma}m(t) \leq 1$ temos que $\langle\xi\rangle_{m(t)} \approx |\xi|^\sigma$, enquanto no caso $|\xi|^{\delta-\sigma}m(t) \geq 1$ temos que $\langle\xi\rangle_{m(t)} \approx |\xi|^\delta m(t)$. Em qualquer caso temos $\frac{\langle\xi\rangle_{m(t)}}{\langle\xi\rangle_{m(0)}} \leq m(t)$.
Portanto segue que

$$\begin{aligned}\|\widehat{u}_t(t,\cdot)\|_2^2 &\leq Cm(t)\big(\|\widehat{\psi}\|_2^2 + |(1+|\xi|^2)^{\frac{\sigma}{2}}\widehat{\phi}\|_2^2\big)\\ m(t)\||\xi|^\delta\widehat{u}(t,\cdot)\|_2^2 &\leq C\big(\|\widehat{\psi}\|_2^2 + |(1+|\xi|^2)^{\frac{\sigma}{2}}\widehat{\phi}\|_2^2\big).\end{aligned}$$

Isso é termina a demonstração do Teorema.

□

4.4.2 Massa decrescente

Vamos dividir o estudo no caso $\delta = 0$ e $\delta > 0$, a razão é que para no caso $\delta = 0$ temos um efeito de dissipação, enquanto que no caso $\delta > 0$ temos conservação.

Caso $\delta = 0$

Hipótese 4.4.2. *Consideremos* $m(t) = \lambda(t)\nu(t) > 0$ *com* $\lambda(t), \nu(t) \in C^M(\mathbb{R}_+)$, *para algum* $M \geq 2$ *satisfazendo*

1. $\partial_t\lambda(t) \leq 0$;
2. *existem constantes* ν_0, ν_1 *tais que* $0 < \nu_0 < \nu(t) < \nu_1$;

3. *Para algum* $M \geq 2$, $m \in C^M(0,\infty)$ *e:*

$$\frac{|\partial_t^j \lambda(t)|}{\lambda(t)} < C_j \frac{1}{(1+t)^j},$$

$$|\partial_t^j \nu(t)| < C_j \frac{1}{(1+t)^j},$$

para $j = 1, \ldots, M$.

Hipótese 4.4.3. *Consideremos a seguinte hipótese de integrabilidade*

$$\int_0^t \frac{1}{(\lambda(\tau)(1+\tau))^{M-1}(1+\tau)} d\tau < \infty,$$

para algum $M \geq 2$.

Observação 4.4.3. *Da hipótese* 4.4.2 *é importante notar que decorre para* $j = 1, \ldots, M$ *a desigualdade*

$$|\partial_t^j m(t)| \leq c_j \frac{m(t)}{(1+t)^j},$$

para constantes adequadas $c_j's$.

Temos o seguinte exemplo quando $M \geq 2$.

Exemplo 5. *Considere para* $0 < \omega < 1$, $\nu(t) \equiv 1$ *e*

$$\lambda(t) = (1+t)^{-\omega}.$$

note que a hipótese de integrabilidade 4.4.3 é satisfeita também para o seguinte exemplo, quando $M \geq 3$.

Exemplo 6. *Da ordem* $\log$ *acima do scale-invariante,* $\nu(t) \equiv 1$ *e*

$$\lambda(t) = \frac{\ln(e+t)}{1+t}.$$

agora vamos ver um exemplo com oscilações.

Exemplo 7. *Considere* $m(t) = \nu(t)\lambda(t)$ *com*

$$\lambda(t) = \frac{(\ln(e+t))^\alpha}{1+t},$$

e

$$\nu(t) = c\ln(e+t)$$

onde $c > 0$ *e* $\alpha > 1$ *são constantes.*

Definamos as zonas hiperbólica e pseudo-diferencial como:

$$\mathcal{Z}_{hip} = \{(t,\xi) : \langle\xi\rangle_{\lambda(t)}(1+t) \geq N\},$$

$$\mathcal{Z}_{pd} = \{(t,\xi) : \langle\xi\rangle_{\lambda(t)}(1+t) \leq N\}.$$

com N suficientemente grande a ser escolhido.
Devido ao segundo ítem da Hipótese 4.4.2 e de $\delta = 0$ podemos deduzir que a zona pseudo-diferencial deve ser compacta, reduzindo nossa análise à zona hiperbólica. Ora, na zona pseudo temos:

$$\infty > C := \int_0^\infty \frac{1}{\big(\lambda(\tau)(1+\tau)\big)^{M-1}(1+\tau)}d\tau \geq \int_0^{t_\xi} \frac{1}{\big(\langle\xi\rangle_{\lambda(\tau)}(1+\tau)\big)^{M-1}(1+\tau)}d\tau$$
$$\geq \frac{1}{N^{M-1}}\int_0^{t_\xi}\frac{1}{1+\tau}d\tau \geq \frac{1}{N^{M-1}}\log(1+t_\xi).$$

Isso conclui que t_ξ é limitado unifomemente na zona pseudo. Como nessa zona temos $|\xi|$ também limitado, temos como afirmado que a zona pseudo é compacta.

Zona Hiperbólica

Definição 4.4.1. *Diremos que uma função $f(t,\xi)$ está em $\mathcal{S}^K\{q,r\}$ com $K \leq M$, $q \leq 0$ e $r \geq 0$ quando para cada $l = 0,\dots,K$ existir uma constante C_l tal que:*

$$|\partial_t^l f(t,\xi)| \leq C_l(\langle\xi\rangle_{\lambda(t)})^q \frac{1}{(1+t)^{r+l}},$$

para todo $(t,\xi) \in \mathcal{Z}_{hip}$

Proposição 4.4.4. .

1. *Se $f \in \mathcal{S}^K\{q,r\}$, então $\partial_t^l f \in \mathcal{S}^{K-l}\{q,r+l\}$, onde $l \leq K$;*
2. *Se $f_1 \in \mathcal{S}^{K_1}\{q_1,r_1\}$ e $f_2 \in \mathcal{S}^{K_2}\{q_2,r_2\}$, então $f_1 f_2 \in \mathcal{S}^{\min\{K_1,K_2\}}\{q_1+q_2, r_1+r_2\}$;*
3. *Se $f \in \mathcal{S}^K\{q,r\}$, então $f \in \mathcal{S}^K\{q+\sigma, r-\sigma\}$ para todo σ satisfazendo $q+\sigma \leq 0$ e $r-\sigma \geq 0$.*

Demonstração. A demonstração segue direto da definição e de $\langle\xi\rangle_{m(t)} \approx \langle\xi\rangle_{\lambda(t)}$ com especial atenção para o último ítem que pode ser demonstrado usando que estamos trabalhando na zona hiperbólica. □

Lema 4.4.5. *Suponha que $m = m(t)$ satisfaz a Hipótese 4.4.2. Então para N suficientemente grande temos que em $\mathcal{Z}_{hip}$ valem*

$$\mu_j \in \mathcal{S}^{M-j}\{-2j, 2j\},$$

N_j^{-1} existe e $N_j, N_j^{-1} \in \mathcal{S}^{M-j}\{0,0\}$ para $j = 1,\dots,M-1$ e

$$(Im\varphi_j)^{-1} \in \mathcal{S}^{M-j}\{-1,0\}, r_j \in \mathcal{S}^{M-j}\{-j+1, j\},$$

para $j = 1,\dots,M$.

Demonstração. Vamos fazer algumas afirmações e demonstrá-las por indução.

Afirmação: $\langle\xi\rangle_{m(t)}^{-1} \in \mathcal{S}^M\{-1,0\}$.

Temos pela hipótese 4.4.2 que para $j \geq 1$

$$|d_t^j m(t)| \lesssim C_j m(t)\frac{1}{(1+t)^j},$$

Logo

$$|\partial_t\langle\xi\rangle_{m(t)}^{-1}| = |\frac{m(t)m^{'}(t)|\xi|^{2\delta}}{\langle\xi\rangle_{m(t)}^3}| \leq \langle\xi\rangle_{m(t)}^{-1}\frac{1}{1+t}.$$

Agora suponha por hipótese de indução que para alguma $k \geq 1$ temos:

$$|\partial_t^k\langle\xi\rangle_{m(t)}^{-1}| \lesssim \langle\xi\rangle_{m(t)}^{-1}\frac{1}{(1+t)^k}.$$

Como

$$\partial_t^{k+1}\langle\xi\rangle_{m(t)}^{-1} =$$
$$= \frac{-1}{2}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\partial_t^i\langle\xi\rangle_{m(t)}^{-1}\sum_{j=0}^{k-i}\binom{k-i}{j}\partial_t^{j+1}m^2(t)|\xi|^{2\delta}\sum_{l=0}^{k-i-j}\binom{k-i-j}{l}\partial_t^l\langle\xi\rangle_{m(t)}^{-1}\partial_t^{k-i-j-l}\langle\xi\rangle_{m(t)}^{-1},$$

e ainda

$$|\partial_t^{j+1}m^2(t)| \lesssim m^2(t)\frac{1}{(1+t)^{j+1}},$$

temos

$$|\partial_t^{k+1}\langle\xi\rangle_{m(t)}^{-1}| \lesssim \langle\xi\rangle_{m(t)}^{-1}\frac{1}{(1+t)^{1+k}}.$$

Afirmação: $r_1 \in \mathcal{S}^{M-1}\{0,1\}$. Como $r_1(t,\xi) = \frac{\partial_t m^2(t)|\xi|^{2\delta}}{4\langle\xi\rangle_{m(t)}}$ temos:

$$\begin{aligned}|\partial_t^k r_1(t,\xi)| &\leq \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}|\partial_t^{i+1}m^2(t)||\xi|^{2\delta}\sum_{j=0}^{k-i}\binom{k-i}{j}|\partial_t^j\langle\xi\rangle_{m(t)}^{-1}||\partial_t^{k-i-j}\langle\xi\rangle_{m(t)}^{-1}|\\ &\lesssim \frac{m^2(t)|\xi|^{2\delta}}{\langle\xi\rangle_{m(t)}^2(1+t)^{k+1}}.\end{aligned}$$

O que finaliza a prova da afirmação. Logo temos também que $\mu_1 \in \mathcal{S}^{M-1}\{-2,2\}$, daí $|\mu_1(t,\xi)| \lesssim \frac{1}{(\langle\xi\rangle_{m(t)}(1+t))^2} \lesssim \frac{1}{N^2}$. Assim para N suficientemente grande temos que N_1^{-1} existe. Além disso N_1, $N_1^{-1} \in \mathcal{S}^{M-1}\{0,0\}$, pois $\frac{1}{1-\mu_1} \in \mathcal{S}^{M-1}\{0,0\}$. Com isso finalizamos a prova do Lema para $j=1$.
Agora suponha, por hipótese de indução, que o Lema vale para algum $j \geq 1$.

Afirmação: $(1-\mu_j)^{-1} \in \mathcal{S}^{M-j}\{0,0\}$. Provemos essa afirmação por indução no número de derivadas.

Note que $|(1-\mu_j)^{-1}| \lesssim 1$ e também $\partial_t(1-\mu_j)^{-1} = (1-\mu_j)^{-1}\frac{\partial_t\mu_j}{1-\mu_j}$. Suponha que para $k \geq 0$, temos:

$$|\partial_t^k(1-\mu_j)^{-1}| \lesssim \frac{1}{(1+t)^k}.$$

Segue que

$$\begin{aligned}|\partial_t^{k+1}(1-\mu_j)^{-1}| &\leq \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}|\partial_t^i(1-\mu_j)^{-1}|\sum_{l=0}^{k-i}\binom{k-i}{l}|\partial_t^{l+1}\mu_j||\partial_t^{k-i-l}(1-\mu_j)^{-1}|\\ &\lesssim \frac{1}{(1+t)^{k+1}}.\end{aligned}$$

Pela Proposição (4.2.3) temos que:

$$\Im\phi_{j+1} = \Im\phi_j\Big(1 + (\Im\phi_j)^{-1}\frac{1}{1-\mu_j}\Big(d_j\mu_j + \Im\{\frac{r_j}{d_j}\partial_t\frac{\overline{r}_j}{d_j}\}\Big)\Big).$$

Logo, por indução, $(\Im\phi_{j+1})^{-1} = (\Im\phi_j)^{-1}(1+\beta_j)^{-1} \in \mathcal{S}^{M-(j+1)}\{-1,0\}$, pois $(1+\beta_j)^{-1} \in \mathcal{S}^{M-(j+1)}\{0,0\}$ que, por sua vez, é devido ao fato $\beta_j \in \mathcal{S}^{M-(j+1)}\{-2j,2j\}$, que , por fim, decorre da hipótese de indução juntamente com a Proposição (4.4.4).

Pela mesma Proposição também temos que $r_{j+1} \in \mathcal{S}^{M-(j+1)}\{-j, j+1\}$. Portanto, $\mu_{j+1} \in \mathcal{S}^{M-(j+1)}\{-2(j+1), 2(j+1)\}$, donde na Zona hiperbólica temos que $|\mu_{j+1}| \lesssim \frac{1}{N^2} < \frac{1}{2}$ para N suficientemente grande. Concluindo o Lema observando que nesse caso existe a matriz inversa N_{j+1}^{-1}.

□

Teorema 4.4.6. *Seja $m(t)$ satisfazendo a Hipótese* 4.4.2, *com $k \geq 2$, então a solução do problema de Cauchy* (4.28) *com dados $(-\Delta)^{\sigma/2}\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ satisfaz a estimativa de energia*

$$m(t)E^{KG}(u)(0) \lesssim E^{KG}(u)(t) \lesssim E^{KG}(u)(0)$$

para todo tempo t.

Demonstração. Pelo Lema 4.4.5 temos que N_j e N_j^{-1} existem e são diferênciáveis para $j = 1, \dots, M-1$ e $\frac{|r_j|}{2|Im\varphi_j|} \lesssim \frac{1}{N^{2j}}$, logo pelo Corolário 4.2.4 temos que vale $\mathbf{HD}_M(\mathcal{Z}_{hip})$ para N suficientemente grande. Temos também pelo Lema 4.4.5 que para $(t,\xi), (s,\xi) \in \mathcal{Z}_{hip}$:

$$\int_s^t |r_M|(\tau,\xi)d\tau \lesssim \int_s^t \frac{1}{(\langle\xi\rangle_{m(\tau)}(1+\tau))^{M-1}(1+\tau)}d\tau.$$

Temos também, para $(s,\xi) \in \mathcal{Z}_{hip}$, $M \geq 2$ e Hipótese 4.4.3 que

$$\int_s^t \frac{1}{(\langle\xi\rangle_{m(\tau)}(1+\tau))^{M-1}(1+\tau)}d\tau \lesssim \int_s^t \frac{1}{(m(\tau)(1+\tau))^{M-1}(1+\tau)}d\tau \leq C < \infty$$

Portanto pelo Corolário 4.2.6, para qualquer (t,ξ) temos que

$$|U(t,\xi)|^2 \approx \frac{\langle\xi\rangle_{m(t)}}{\langle\xi\rangle_{m(0)}}|U(0,\xi)|^2 \tag{4.37}$$

Considere $U_0(t,\xi) = \Big(\big(|\xi|^{2\sigma} + m(t)\big)^{\frac{1}{2}}\widehat{u}(t,\xi), D_t\widehat{u}(t,\xi)\Big)$. Logo por (4.37) temos:

$$\begin{aligned} m(t)|\widehat{u}(t,\xi)|^2 \leq & \frac{\langle\xi\rangle_{m(t)}}{\langle\xi\rangle_{m(0)}}\frac{m(t)}{\langle\xi\rangle_{m(t)}^2}\Big(|\widehat{u}_t(0,\xi)|^2 + \langle\xi\rangle_{m(0)}^2|\widehat{u}(0,\xi)|^2\Big) \\ \leq & |\widehat{u}_t(0,\xi)|^2 + \langle\xi\rangle_{m(0)}^2|\widehat{u}(0,\xi)|^2. \end{aligned}$$

Logo, como m é decrescente podemos concluir que $\big|U_0(t,\xi)\big|^2 \leq \big|U_0(0,\xi)\big|^2$. Como $\frac{\langle\xi\rangle_{m(t)}}{\langle\xi\rangle_{m(0)}} \geq Cm(t)$, temos também, por (4.37), que

$$m(t)^{\frac{1}{2}}|U_0(0,\xi)| \approx m(t)^{\frac{1}{2}}|U(0,\xi)| \lesssim |U(t,\xi)| \lesssim |U_0(t,\xi)|.$$

Portanto $m(t)^{\frac{1}{2}}|U_0(0,\xi)| \lesssim |U_0(t,\xi)|$, o que finaliza a demonstração.

□

Corolário 4.4.7. *Seja $m(t)$ satisfazendo a Hipótese* 4.4.2, *com $k \geq 2$, então a solução do problema de Cauchy* 4.28 *com dados $(-\Delta)^{\sigma/2}\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ satisfaz:*

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^2} = \mathcal{O}\big(m(t)^{-\frac{1}{2}}\big)$$

para todo tempo t.

Demonstração. Segue direto do Teorema 4.4.6. □

Caso $\delta > 0$

Consideremos as seguintes hipóteses:

Hipótese 4.4.4. *Considere que* $m(t) = \lambda(t)\nu(t) > 0$ *com* $\lambda(t), \nu(t) \in C^2(0,\infty)$ *que:*

- $\partial_t \lambda(t) \leq 0$;
- *Existam constantes* $\nu_0, \nu_1 > 0$ *tai que* $\nu_0 \leq \nu(t) \leq \nu_1$;
- *Para* $j = 1, 2$*:*

$$\partial_t^j \lambda(t) \leq C_j \lambda(t)(1+t)^{-j},$$
$$\partial_t^j \nu(t) \leq C_j (1+t)^{-1}.$$

- *Exitem uma constante* $0 < \omega < 1$ *tal que* $\lambda(t)(1+t)^{\omega}$ *é crescente.*

Definamos as zonas hiperbólica e zona pseudo-diferencial como:

$$\mathcal{Z}_{hip} = \{(t,\xi) : \langle \xi \rangle_{\lambda(t)}(1+t)) \geq N\}$$
$$\mathcal{Z}_{pd} = \{(t,\xi) : \langle \xi \rangle_{\lambda(t)}(1+t) \leq N\}.$$

Para algum N convenientemente escolhido na etapa de diagonalização na zona hiperbólica.

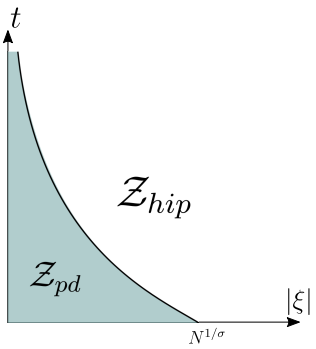


Figura 4.2: Zonas.

Exemplo 8. *Polinomialmente acima do scale-invariant. Considere para* $0 < \gamma < 1 - \frac{\delta}{\sigma}$*:*

$$m(t) = \frac{1}{(1+t)^{\gamma}}.$$

Zona hiperbólica

Note que $d_1 = -2(\langle \xi \rangle_{m(t)})$, logo na Zona hiperbólica:

$$\frac{|r_1|}{|d_1|} \lesssim \frac{|\partial_t \langle \xi \rangle_{m(t)}|}{4(\langle \xi \rangle_{m(t)})^2} \lesssim \frac{m^2(t)|\xi|^{2\delta}}{(\langle \xi \rangle_{m(t)})^2} \frac{c_0}{\langle \xi \rangle_{m(t)}(1+t)} \lesssim \frac{1}{N}.$$

Logo, para N suficientemente grande, a matriz inversa N_1^{-1} existe e juntamente com N_1 é diferênciável. Assim vale a hipótese de diagonalização até 2. Além disso na Zona hiperbólica temos:

$$|r_2| \lesssim \frac{|r_1|^3}{|d_1|^2} + |\partial_t \frac{r_1}{d_1}| \lesssim \frac{1}{(\langle \xi \rangle_{m(t)}(1+t))^2(1+t)} + |\partial_t \frac{\partial_t \langle \xi \rangle_{m(t)}}{(\langle \xi \rangle_{m(t)})^2}|.$$

O segundo termo é estimado por

$$|\partial_t \frac{\partial_t \langle\xi\rangle_{m(t)}}{(\langle\xi\rangle_{m(t)})^2}| \lesssim |\frac{\partial_t^2 \langle\xi\rangle_{m(t)}}{(\langle\xi\rangle_{m(t)})^2}| + |\frac{\partial_t \langle\xi\rangle_{m(t)} m(t) m'(t)|\xi|^{2\delta}}{(\langle\xi\rangle_{m(t)})^4}| \lesssim \frac{1}{\langle\xi\rangle_{m(t)}(1+t)^2}$$

Portanto

$$|r_2(t,\xi)| \lesssim \frac{1}{\langle\xi\rangle_{m(t)}(1+t)^2}$$

Logo por hipótese temos que para $(s,\xi) \in \mathcal{Z}_{hip}$:

$$\begin{aligned}
\int_s^t |r_2(\tau,\xi)|d\tau &\lesssim \int_s^t \frac{1}{\langle\xi\rangle_{m(\tau)}(1+\tau)^2} d\tau \\
&\lesssim \frac{1}{\langle\xi\rangle_{\lambda(s)}(1+s)^{\omega}} \int_s^t \frac{1}{(1+\tau)^{2-\omega}} d\tau \\
&\lesssim \frac{1}{\langle\xi\rangle_{\lambda(s)}(1+s)} < \infty
\end{aligned}$$

Portanto na Zona hiperbólica temos que $r_2 \in L^{\infty}_{\xi} L^1_t(\mathcal{Z}_{hip})$, logo pelo Corolário 4.2.7 temos que

$$|U(t,\xi)| \approx \Big(\frac{\langle\xi\rangle_{m(t)}}{\langle\xi\rangle_{m(s)}}\Big)^{\frac{1}{2}} |U(s,\xi)|,$$

para $(t,\xi),(s,\xi) \in \mathcal{Z}_{hip}$.

Zona Pseudodiferêncial

Agora como temos

$$D_t U(t,\xi) = (\Phi_0 + \mathcal{R}_0)U(t,\xi).$$

consideremos $E = E(t,s,\xi)$ a solução fundamental da equação acima
Vamos considerar a notação

$$E(t,s,\xi) = \begin{pmatrix} E_{11}(t,s,\xi) & E_{12}(t,s,\xi) \\ E_{21}(t,s,\xi) & E_{22}(t,s,\xi) \end{pmatrix},$$

a solução fundamental, ou seja, que satisfaz: $\partial_t E(t,s,\xi) = \Phi_0(t,\xi) + \mathcal{R}_0(t,\xi)E(t,s,\xi)$, com $E(s,s,\xi) = I$.
Logo para $k = 1, 2$,

$$\begin{aligned}
\partial_t E_{1k}(t,s,\xi) &= \frac{\partial_t \langle\xi\rangle_{m(t)}}{\langle\xi\rangle_{m(t)}} E_{1k}(t,s,\xi) + i\langle\xi\rangle_{m(t)} E_{2k}(t,s,\xi), \qquad (4.38) \\
\partial_t E_{2k}(t,s,\xi) &= i\langle\xi\rangle_{m(t)} E_{1k}(t,s,\xi).
\end{aligned}$$

Logo para a primeira igualdade (4.38), temos após multiplicar ambos os membros pelo fator integrante $\Big(\frac{\langle\xi\rangle_{m(t)}}{\langle\xi\rangle_{m(s)}}\Big)^{-1}$ que;

$$\begin{aligned}
E_{1k}(t,s,\xi) &= \langle\xi\rangle_{m(t)} \int_s^t i E_{2k}(\tau,s,\xi)d\tau + \left(\frac{\langle\xi\rangle_{m(t)}}{\langle\xi\rangle_{m(s)}}\right)\delta_{1k}, \\
E_{2k}(t,s,\xi) &= \int_s^t \langle\xi\rangle_{m(r)} E_{1k}(r,s,\xi)dr + \delta_{2k}.
\end{aligned}$$

Agora substituindo uma equação na outra note que usando fubini, que $\langle\xi\rangle_{\lambda(t)}$ é decrescente em t e que $\langle\xi\rangle_{\lambda(t)}(1+t) \leq N$ temos:

$$|E_{1k}(t,s,\xi)| \leq \int_s^t \langle\xi\rangle_{\lambda(r)}|E_{1k}(r,s,\xi)|dr + \langle\xi\rangle_{\lambda(t)}(t-s)\delta_{2,k} + \frac{\langle\xi\rangle_{m(t)}}{\langle\xi\rangle_{m(s)}}\delta_{1,k}.$$

Como $\lambda(t)(1+t)^\omega$ é crescente, podemos concluir, usando Gronwall, que $|E_{1,k}(t,s,\xi)| \lesssim 1$ na zona pseudo, e logo também temos o mesmo para $E_{2,k}(t,s,\xi)$.
Agora podemos enunciar o resultado principal.

Teorema 4.4.8. *Seja $m(t)$ satisfazendo a Hipótese 4.4.4, e tal que exista $0 < \alpha \leq 1-\frac{\delta}{\sigma}$ tal que $m(t)(1+t)^\alpha \leq C_0$ para uma constante $C_0 < \infty$, então a solução do problema de Cauchy (4.28) com dados $(-\Delta)^{\sigma/2}\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $(-\Delta)^{\delta/2}\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, satisfaz:*

$$cE_{KG}(u)(0) \leq E_{KG}(u)(t) \leq CE_{KG}(u)(0)$$

para todo tempo t.

Demonstração. Note que a desigualdade superior é imediata do que provamos acima, resta provar a desigualdade inferior. Para isso vamos fazer uma argumento parecido com o Espalhamento. Para isso vamos passar a considerar duas zonas, Z_a e Z_b, dadas respectivamente por $\{(t,\xi) \in R_+ \times \mathbb{R}^n : |\xi|^\sigma(1+t)^{\alpha(\frac{\sigma}{\sigma-\delta})} \leq N\}$ e $\{(t,\xi) \in R_+ \times \mathbb{R}^n : |\xi|^\sigma(1+t)^{\alpha(\frac{\sigma}{\sigma-\delta})} \geq N\}$, com N escolhido anteriormente. A curva comum a essas duas regiões será denotada por t_ξ a partir de agora. Note que $Z_b \subset \mathcal{Z}_{hip}$, pois, por hipótese, $\alpha \leq 1-\frac{\delta}{\sigma}$. Além disso em Z_b temos:

$$C \geq \frac{\langle\xi\rangle_{m(t)}}{\langle\xi\rangle_{m(t_\xi)}} \geq \frac{|\xi|^\sigma(1+t_\xi)^{\alpha(\frac{\sigma}{\sigma-\delta})}}{\sqrt{|\xi|^{2\sigma}(1+t_\xi)^{2\alpha(\frac{\sigma}{\sigma-\delta})} + m^2(t_\xi)(1+t_\xi)^{2\alpha}(|\xi|^\sigma(1+t_\xi)^{\alpha(\frac{\sigma}{\sigma-\delta})})^{\frac{2\delta}{\sigma}}}} \geq \frac{N}{\sqrt{N^2+C_0^2N^2}}.$$

Portanto $\|\mathcal{E}(t,t_\xi,\xi)\| \approx 1$ para $t \geq t_\xi$. Como também já provamos que $\|\mathcal{E}(t,t_\xi,\xi)\| \lesssim 1$ para $t \leq t_\xi$, definindo

$$\widehat{\mathcal{E}}(t,0,\xi) = \begin{cases} \mathcal{E}(t,t_\xi,\xi), & t \geq t_\xi, \\ I, & 0 \leq t \leq t_\xi, \end{cases} \tag{4.39}$$

temos $\|\widehat{\mathcal{E}}(t,0,\xi)\| \approx 1$ e $\|\widehat{\mathcal{E}}^{-1}(t,0,\xi)\| \approx 1$ para todo $(t,\xi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$. Agora defina para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$, $W_+(\xi) := s - \lim_{t\to\infty} \widehat{\mathcal{E}}^{-1}(t,0,\xi)\mathcal{E}(t,0,\xi)$. Note que como operador

$$(u(\xi),v(\xi))^T \in L^2 \times L^2 \to \widehat{\mathcal{E}}^{-1}(t,0,\xi)\mathcal{E}(t,0,\xi)(u(\xi),v(\xi))^T \in L^2 \times L^2,$$

satisfaz $\|\widehat{\mathcal{E}}^{-1}(t,0,\xi)\mathcal{E}(t,0,\xi)\|_{L^2\times L^2} \leq C$ uniformemente em $t \geq 0$. Além disso, para $|\xi| \geq c$, onde $c > 0$ é uma constante arbitrária, temos $W_+(\xi) = \mathcal{E}(t_\xi,0,\xi)$. Desse último segue que o limite existe em um subconjunto denso de $L^2 \times L^2$ que é o conjunto $D \times D$, onde D é o conjunto das funções em L^2 com suporte em $|\xi| \geq c$. Portanto pelo teorema de Banach-Steinhaus, temos que $W_+(\xi)$ existe em $L^2 \times L^2$. Agora que sabemos da existência de $W_+(\xi)$ em L^2 vamos proceder da mesma forma para o operador $T(t,\xi) := \mathcal{E}(t,0,\xi) - \widehat{\mathcal{E}}(t,0,\xi)W_+(\xi)$, note que $T(t,\xi) \to 0$ quando $t \to \infty$ para $|\xi| \geq c$. Além disso, $\|T(t,\xi)\|_{\mathcal{L}(L^2\times L^2)} \leq C < \infty$ uniformemente em $t \geq 0$. Logo

$$\|\mathcal{E}(t,0,\xi)U(0,\xi) - \widehat{\mathcal{E}}(t,0,\xi)W_+(\xi)U(0,\xi)\|_{L^2\times L^2} \to 0, \tag{4.40}$$

quando $t \to \infty$. Portanto, como já mostramos que

$$\|\mathcal{E}(t,0,\xi)W_+(\xi)U(0,\xi)\|_{L^2\times L^2} \approx \|W_+(\xi)U(0,\xi)\|_{L^2\times L^2},$$

concluímos de (4.40) a demonstração do Teorema. □

Observação 4.4.9. *Note que a hipótese* $m(t)(1+t)^\alpha \leq C < \infty$ *impede que consideremos* $m(t) = \frac{1}{\ln(e+t))}$ *por exemplo.*

Para o caso $\delta = 0$, podemos obter o seguinte resultado.

Corolário 4.4.10. *Seja* $m(t)$ *satisfazendo a Hipótese* 4.4.2 *com* $M \geq 2$, $m(t)(1+t)^\alpha \leq C < \infty$ *para alguma constante* $0 < \alpha < 1$ *e* $\delta = 0$, *então a solução do problema de Cauchy* (4.28) *com dados* $(-\Delta)^{\sigma/2}\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *e* $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *satisfaz a estimativa de energia*

$$E^{KG}(u)(0) \lesssim E^{KG}(u)(t) \lesssim E^{KG}(u)(0),$$

para todo tempo t.

Demonstração. A demonstração segue direto dos Teoremas 4.4.6 e 4.4.8. □

4.5 Espalhamento

Nessa seção vamos provar que quando a massa decai suficientemente rápido temos que o comportamento da solução do problema pertubado com o termo $m^2(t)(-\Delta)^{\delta/2}u$, se comporta assintóticamente como o problema sem a massa ou com massa nula, nesse caso temos aquilo que chamamos de Espalhamento ou Scattering. Para isso vamos relembrar nossa equação.

$$\begin{cases} u_{tt} + (-\Delta)^\sigma u + m(t)^2(-\Delta)^\delta u = 0 \\ u(0,x) = \phi(x), u_t(0,x) = \psi(x). \end{cases} \tag{4.41}$$

Nossas hipóteses aqui serão:

Hipótese 4.5.1. *Suponha que* $m(t) > 0$, $m(t) \in C(\mathbb{R}^+)$ *satisfaz*

$$|m(t)| \lesssim \frac{1}{(1+t)^{1-\frac{\delta}{\sigma}}}.$$

Hipótese 4.5.2. *Suponha que* $m(t) \in C(\mathbb{R}^+)$ *satisfaz*

$$(1+t)^{1-\frac{2\delta}{\sigma}}|m(t)|^2 \in L^1.$$

Exemplo 9. *Se* $\infty > \omega > 1 - \frac{\delta}{\sigma}$, *tome:*

$$m(t) = \frac{1}{(1+t)^\omega}.$$

mas, por causa da hipótese 4.5.2, não podemos ter o exemplo abaixo

$$m(t) = \frac{1}{(e+t)^{1-\frac{\delta}{\sigma}}(\ln(e+t))^\alpha},$$

com $\alpha \leq \frac{1}{2}$.
Vamos fazer a seguinte escolha de zonas

$$\mathcal{Z}_{hip}(N) := \{(t,\xi) : (1+t)|\xi|^\sigma \geq N\},$$
$$\mathcal{Z}_{pd}(N) := \{(t,\xi) : (1+t)|\xi|^\sigma \leq N\}.$$

Zona pseudo-diferencial

Vamos definir a micro-energia U por

$$U = \big(h(t,\xi)\widehat{u}, D_t\widehat{u}\big)^T, \;\; h(t,\xi) = \Big(|\xi|^{2\sigma} + |\xi|^{2\delta}\frac{N^2}{(1+t)^{2(1-\frac{\delta}{\sigma})}}\Big)^{1/2}.$$

Consideraremos o sistema de primeira ordem

$$D_tU(t,\xi) = \mathcal{A}(t,\xi)U := \begin{pmatrix} \frac{D_th(t,\xi)}{h(t,\xi)} & h(t,\xi) \\ \frac{|\xi|^{2\sigma}+|\xi|^{2\delta}m(t)^2}{h(t,\xi)} & 0 \end{pmatrix} U. \tag{4.42}$$

Podemos obter uma representação integral por meio da solução fundamental $E = E(t,s,\xi)$ para (4.42), i.e., a solução para

$$D_tE = \mathcal{A}(t,\xi)E\,, \quad E(s,s,\xi) = I.$$

Se colocarmos $E = (E_{ij})_{i,j=1,2}$, então podemos escrever para $j = 1,2$ as seguintes equações integrais:

$$E_{1j}(t,s,\xi) = h(t,\xi)\Big(\frac{\delta_{1j}}{h(s,\xi)} + \int_s^t iE_{2j}(\tau,s,\xi)d\tau\Big), \tag{4.43}$$

$$E_{2j}(t,s,\xi) = \delta_{2j} + i\int_s^t \frac{|\xi|^{2\delta}m(\tau)^2 + |\xi|^{2\sigma}}{h(\tau,\xi)}E_{1j}(\tau,s,\xi)d\tau. \tag{4.44}$$

Substituindo (4.43) em (4.44) e após usar fubini temos

$$E_{2j}(t,s,\xi) \tag{4.45}$$

$$=\delta_{2j} + \delta_{1j}i\int_s^t \frac{|\xi|^{2\delta}m(\tau)^2 + |\xi|^{2\sigma}}{h(s,\xi)}d\tau - \int_s^t E_{2j}(\tau,s,\xi)\Big(\int_\tau^t |\xi|^{2\delta}m(r)^2 + |\xi|^{2\sigma}dr\Big)d\tau \tag{4.46}$$

Além disso para $(t,\xi) \in Z_{pd}$ temos:

$$\begin{aligned}\int_s^t \frac{|\xi|^{2\delta}m(\tau)^2 + |\xi|^{2\sigma}}{h(s,\xi)}d\tau &\le |\xi|^\sigma(t-s) + \int_s^t (|\xi|^\sigma)^{\frac{\delta}{\sigma}}(1+\tau)^{1-\frac{\delta}{\delta}}m(\tau)^2d\tau \\ &\le N + \int_s^t m^2(\tau)(1+\tau)^{1-\frac{2\delta}{\sigma}}d\tau,\end{aligned}$$

e também

$$\int_\tau^t |\xi|^{2\sigma} + |\xi|^{2\delta}m(r)^2dr \le |\xi|^\sigma|\xi|^\sigma t + \int_s^t (1+r)^{-\frac{2\delta}{\sigma}}m(r)^2dr$$

e ainda

$$\begin{aligned}\int_s^t \int_\tau^t (|\xi|^{2\delta} m(r)^2 + |\xi|^{2\sigma}) dr d\tau &= \int_s^t (|\xi|^{2\delta} m(r)^2 + |\xi|^{2\sigma}) \int_s^r d\tau dr \leq \\ &\leq \int_s^t (|\xi|^{2\delta} m(r)^2 + |\xi|^{2\sigma}) r dr \leq \\ &\leq |\xi|^{2\sigma} t^2 + \int_s^t m(r)^2 (|\xi|^\sigma)^{\frac{2\delta}{\sigma}} (1+r) dr \\ &\leq N^2 + \int_s^t m(r)^2 (1+r)^{1-\frac{2\delta}{\sigma}} dr,\end{aligned}$$

logo pela Hipótese 4.5.2 e o Lema A.4.2 (Volterra) temos que na zona pseudo

$$|E_{2j}(t,s,\xi)| \lesssim 1$$

e logo também temos

$$|E_{1j}(t,s,\xi)| \lesssim 1$$

Como $U(t,\xi) = E(t,s,\xi)U(s,\xi)$, temos para todo $t \leq t_\xi$ que

$$|U(t,\xi)| \lesssim |U(0,\xi)| \tag{4.47}$$

Agora consideremos o seguinte problema de cauchy para t_0 fixo, e $t = t_0 - s$ e $\widehat{u}(t,\xi) = \bar{u}(s,\xi)$, i.e.

$$\bar{u}_{ss} + |\xi|^{2\sigma}\bar{u} + m(t_0 - s)^2 |\xi|^{2\delta}\bar{u} = 0$$

com dados iniciais em $s = 0$ e tempos $0 \leq s \leq t_0$ com $t_0 \leq t_\xi$.
Fazendo o estudo de modo análogo ao que foi feito acima teremos uma equação similar a equação (4.45). Mas vamos provar que nesse caso $\frac{\bar{E}_{2,j}}{(1+t_0)^{1-\frac{\delta}{\sigma}}} \leq C$, com C independente de t_0. Mas para isso é necessário provar que

$$\int_s^t \frac{|\xi|^{2\delta}\bar{m}(\tau)^2 + |\xi|^{2\sigma}}{\bar{h}(s,\xi)(1+t_0)^{1-\frac{\delta}{\sigma}}} d\tau$$

é limitada na zona pseudo independentemente de t_0, onde $\bar{m}(\tau) := m(t_0 - \tau)$ e $\bar{h}(s,\xi) := h(t_0 - s, \xi)$. Mas

$$\int_s^t \frac{|\xi|^{2\delta}\bar{m}(\tau)^2 + |\xi|^{2\sigma}}{\bar{h}(s,\xi)(1+t_0)^{1-\frac{\delta}{\sigma}}} d\tau \leq N + |\xi|^\delta \int_s^t \frac{m(t_0-\tau)^2 (1+t_0-s)^{1-\frac{\delta}{\sigma}}}{(1+t_0)^{1-\frac{\delta}{\sigma}}} d\tau \leq$$

$$\leq N + N^{\frac{\delta}{\sigma}} \int_s^t m(t_0-\tau)^2 (1+t_0-\tau)^{1-\frac{\delta}{\sigma}} d\tau + N^{\frac{\delta}{\sigma}} \int_s^t m(t_0-\tau)^2 \Big(\frac{\tau - s}{1+t_0}\Big)^{1-\frac{\delta}{\sigma}} d\tau$$

é limitado devido a hipótese 4.5.2 e de $\frac{\tau - s}{1+t_0} \leq 1$.
Portanto concluímos que

$$\frac{1}{(1+t)^{1-\frac{\delta}{\sigma}}}|U(0,\xi)| \lesssim |U(t,\xi)| \tag{4.48}$$

para $t \leq t_\xi$.

Zona hiperbólica, $2\delta \leq \sigma$.

Note que na zona hiperbólica temos $h(t,\xi) \approx |\xi|^\sigma$, pois,

$$1 \leq \frac{h(t,\xi)}{|\xi|^\sigma} = \left(1+\left(|\xi|^\sigma(1+t)\right)^{-2(1-\frac{\delta}{\sigma})}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(1+\left(N\right)^{-2(1-\frac{\delta}{\sigma})}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Isso nos motiva definir a micro-energia como:

$$U_W = (|\xi|^\sigma \widehat{u}, D_t\widehat{u})^T.$$

que nos permite obter o seguinte sistema

$$D_t U_W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} |\xi|^\sigma U_W + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ |\xi|^{2\delta} m(t)^2 & 0 \end{pmatrix} (|\xi|)^{-\sigma} U_W. \tag{4.49}$$

Seja $N_0 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ a matriz que diagonaliza a parte principal acima. Definindo $N_0 U_1 = U_W$, então nós temos o sistema $(D_t - \Phi_0 - \mathcal{R}_0)U_1 = 0$, onde

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} -|\xi|^\sigma & 0 \\ 0 & |\xi|^\sigma \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_0 = \frac{m(t)^2|\xi|^{2\delta}}{2|\xi|^\sigma}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.50}$$

Defina

$$\Phi_1 = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} -i(|\xi|^\sigma + \frac{m(t)^2|\xi|^{2\delta}}{2|\xi|^\sigma}) & 0 \\ 0 & i(|\xi|^\sigma + \frac{m(t)^2|\xi|^{2\delta}}{2|\xi|^\sigma}) \end{pmatrix}$$

e

$$\mathcal{R}_1 = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} 0 & -i\frac{m(t)^2|\xi|^{2\delta}}{2|\xi|^\sigma} \\ i\frac{m(t)^2|\xi|^{2\delta}}{2|\xi|^\sigma} & 0 \end{pmatrix}.$$

Então, na zona hiperbólica, obtemos, desde que $2\delta < \sigma$, a estimativa a seguir:

$$\|\mathcal{R}_1(t,\xi)\| \leq \frac{|\xi|^{2\delta}m(t)^2}{|\xi|^\sigma} = \frac{m(t)^2}{(|\xi|^\sigma)^{1-\frac{2\delta}{\sigma}}} \lesssim (1+t)^{1-\frac{2\delta}{\sigma}} m(t)^2,$$

Aliado a estrutura da matriz Φ_1 a estimativa (4.13) juntamente com a hipótese 4.5.2 fornece:

$$|U_W(t,\xi)| \approx |U_W(s,\xi)| \tag{4.51}$$

na zona hiperbólica.
Agora, se considerarmos

$$H(t,\xi) := \begin{pmatrix} \frac{h(t,\xi)}{|\xi|^\sigma} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.52}$$

Então a matriz inversa H^{-1} existe e $\|H(t,\xi)\|, \|H^{-1}(t,\xi)\| \approx C$ para todo $(t,\xi) \in Z_{hip}$, ou ainda, $t \geq t_{|\xi|}$.

Como $U = HU_W$, temos, por (4.51), que na zona hiperbólica:

$$|U(t,\xi)| \approx |U_W(t,\xi)| \approx |U_W(s,\xi)| \approx |U(s,\xi)|. \tag{4.53}$$

Conservação de Energia

Defina

$$E^W(u)(t) \doteq \frac{1}{2}\Big(\|u_t(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \||D|^\sigma u(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{(1+t)^{2(1-\frac{\delta}{\sigma})}}\||D|^\delta u(t,\cdot)\|_{L^2}^2\Big) \tag{4.54}$$

Teorema 4.5.1. *Suponha que m satisfaz as hipóteses* 4.5.1 *e* 4.5.2 *e $2\delta \leq \sigma$. Então a energia para a solução do problema de Cauchy* (4.41) *satisfaz:*

$$\frac{1}{(1+t)^{2(1-\frac{\delta}{\sigma})}}E^W(u)(0) \lesssim E^W(u)(t) \lesssim E^W(u)(0)$$

para todo tempo t.

Demonstração. Segue imediato de (4.47), (4.48) e de (4.53) que

$$\frac{1}{(1+t)^{1-\frac{\delta}{\sigma}}}|U(0,\xi)| \lesssim |U(t,\xi)| \lesssim |U(0,\xi)|,$$

agora depois de tomar o quadrado de ambos os lados e integrar em ξ temos a afirmação do Teorema.

□

Zona hiperbólica, $2\delta > \sigma$.

Agora queremos aplicar o procedimento de diagonalização. Precisaremos da seguinte hipótese.

Hipótese 4.5.3. *Assuma $m \in C^1(\mathbb{R}^+)$ com $\frac{|m'(t)|}{m(t)} \lesssim \frac{1}{1+t}$.*

Considere

$$\Phi_1 = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} -i(|\xi|^\sigma + \frac{m(t)^2|\xi|^{2\delta}}{2|\xi|^\sigma}) & 0 \\ 0 & i(|\xi|^\sigma + \frac{m(t)^2|\xi|^{2\delta}}{2|\xi|^\sigma}) \end{pmatrix},$$

e

$$\mathcal{R}_1 = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} 0 & -i\frac{m(t)^2|\xi|^{2\delta}}{2|\xi|^\sigma} \\ i\frac{m(t)^2|\xi|^{2\delta}}{2|\xi|^\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

Para N suficientemente grande a **hipótese de diagonalização até** 1 é satisfeita, pois, sendo

$$d_1 = -2i(|\xi|^\sigma + \frac{m(t)^2|\xi|^{2\delta}}{2|\xi|^\sigma})$$

e

$$r_1 = \frac{m(t)^2|\xi|^{2\delta}}{2|\xi|^\sigma}i$$

temos, pela hipótese 4.5.1, que

$$\frac{|r_1|}{|d_1|} \leq \frac{m^2(t)}{|\xi|^{2\sigma(1-\frac{\delta}{\sigma})}} \lesssim \frac{1}{N^{2\sigma(1-\frac{\delta}{\sigma})}}$$

Agora vamos estimar o resto $\mathcal{R}_2$, temos que:

$$|r_2| \lesssim \frac{|r_1|^3}{|d_1|^2} + |\partial_t \frac{r_1}{d_1}|. \tag{4.55}$$

Agora vamos analisar cada parcela separadamente, começando da segunda.

$$\partial_t \frac{r_1}{d_1} = \frac{\partial_t r_1}{d_1} - \frac{r_1}{d_1}\frac{\partial_t d_1}{d_1} = \frac{-m^2(t)|\xi|^{2\delta}}{2|\xi|^{2\sigma} + m^2(t)|\xi|^{2\delta}}\rho_1(t) - \frac{1}{2}\left[\frac{m^2(t)|\xi|^{2\delta}}{2|\xi|^{2\sigma} + m^2(t)|\xi|^{2\delta}}\right]^2 \rho_1(t)$$

onde $\rho_1(t) = \frac{m^{'}(t)}{m(t)}$.
Logo usando a Hipótese 4.5.3 temos que:

$$\partial_t \frac{|r_1|}{|d_1|} \lesssim \frac{m^2(t)}{|\xi|^{\sigma(1-\frac{\delta}{\sigma})2}(1+t)}$$

Portanto usando a Hipótese 4.5.2 temos que, na zona hiperbólica, $\partial_t \frac{|r_1|}{|d_1|}$ é integrável em t uniformemente em ξ.
Agora passemos para a primeira parcela da desigualdade (4.55).
Como $|d_2| \geq |\xi|^\sigma$, temos

$$\frac{|r_1|^3}{|d_1|^2} \lesssim \frac{m^6(t)}{|\xi|^{\sigma(5-\frac{6\delta}{\sigma})}},$$

nesse ponto vamos assumir que $\delta \leq \frac{5\sigma}{6}$. Então na zona hiperbólica temos:

$$\frac{|r_1|^3}{|d_1|^2} \lesssim m^6(t)(1+t)^{5-\frac{6\delta}{\sigma}} \lesssim m^4(t)(1+t)^{4(1-\frac{\delta}{\sigma})} m^2(t)(1+t)^{1-\frac{2\delta}{\sigma}}$$

Logo das hipóteses 4.5.1 e 4.5.2, concluímos que $\frac{|r_1|^3}{|d_1|^2}$ é integrável e t uniformemente em $|\xi|$ na zona hiperbólica.
Note que diagonalizando mais uma vez com a devida hipótese, concluímos a conservação de energia no caso $\frac{\sigma}{2} < \delta \leq \frac{5\sigma}{6}$. A essa altura podemos nos perguntar se com mais uma diagonalização podemos chegar com δ ainda mais próximo de σ. Vamos, para isso, fazer as hipóteses nescessárias a diagonalização.

Hipótese 4.5.4. *Seja $M \geq 2$ um inteiro positivo tal que $\frac{(2\cdot 3^{M-1}-1)}{2\cdot 3^{M-1}}\sigma \geq \delta$, e suponha que vale*

$$m \in C^M(\mathbb{R}^+)$$

$$\frac{|m^{(l)}(t)|}{m(t)} \lesssim \frac{1}{(1+t)^l} \tag{4.56}$$

para $l = 1, \ldots, M$.

4.5.1 Classe de Símbolos

Definição 4.5.1. *Diremos que uma função $f(t,\xi)$ está em $\mathcal{T}^K\{q,r,s\}$ com $K \leq M$, $q \geq 0$, $r \leq 0$ e $s \geq 0$ quando para cada $l = 0, \ldots, K$ existir uma constante C_l tal que:*

$$|\partial_t^l f(t,\xi)| \leq C_l\Big(\frac{m^2(t)}{|\xi|^{\sigma(1-\frac{2\delta}{\sigma})}}\Big)^q (|\xi|^\sigma)^r \frac{1}{(1+t)^{s+l}},$$

para todo $(t,\xi)\in\mathcal{Z}_{hip}$.

Proposição 4.5.2. *Na Zona hiperbólica e com as hipóteses* 4.5.2 *e* 4.5.1 *em* m*, temos:*

1. *Se* $f\in\mathcal{T}^K\{q,r,s\}$*, então* $\partial_t^l f\in\mathcal{T}^{K-l}\{q,r,s+l\}$*, onde* $l\leq K$.
2. *Se* $f_1\in\mathcal{T}^{K_1}\{q_1,r_1,s_1\}$ *e* $f_2\in\mathcal{S}^{K_2}\{q_2,r_2,s_2\}$*, então* $f_1f_2\in\mathcal{S}^{\min\{K_1,K_2\}}\{q_1+q_2,r_1+r_2,s_1+s_2\}$,
3. *Se* $f\in\mathcal{T}^K\{q,r,s\}$*, então* $f\in\mathcal{T}^K\{q-\varsigma,r+\varsigma,s\}$ *para todo* $\varsigma\geq 0$ *satisfazendo* $q-\varsigma\geq 0$ *e* $r+\varsigma\leq 0$.
4. *Se* $f\in\mathcal{T}^K\{q,r,s\}$*, então* $f\in\mathcal{T}^K\{q,r+\varsigma,s-\varsigma\}$ *para todo* $\varsigma\geq 0$ *com* $r+\varsigma\leq 0$ *e* $s-\varsigma\geq 0$.
5. *Se* $f\in\mathcal{T}^0\{1,-1,0\}$*, então* $f\in L^\infty_\xi L^1_t(\mathcal{Z}_{hip})$

Demonstração. Os doi primeiros itens seguem direto da definição, para o terceiro e quarto deve-se usar que estamos trabalhando na zona hiperbólica e a Hipótese 4.5.1, e além disso, o último, deve-se usar a Hipótese 4.5.2. □

Lema 4.5.3. *Suponha que* m *satisfaz as Hipóteses* 4.5.1, 4.5.2 *e* 4.5.4. *Então para* $(t,\xi)\in\mathcal{Z}_{hip}(N)$ *com* N *suficientemente grande temos:*

$$\mu_j\in\mathcal{T}^{M-j}\{2\cdot 3^{j-1},-2\cdot 3^{j-1},0\}+\mathcal{T}^{M-j}\{1,-2,1\}$$

N_j^{-1} *existe e* $N_j,N_j^{-1}\in\mathcal{T}^{M-j}\{0,0,0\}$ *para* $j=1,\dots,M-1$ *e*

$$(\Im\phi_j)^{-1}\in\mathcal{T}^{M-j}\{0,-1,0\},$$

$$r_j\in\mathcal{T}^{M-j}\{3^{j-1},-(3^{j-1}-1),0\}+\mathcal{T}^{M-j}\{1,-1,1\},$$

para $j=1,\dots,M$.

Demonstração. Note que

$$\partial_t\frac{1}{|\xi|^\sigma+\frac{m^2(t)|\xi|^{2\delta}}{2|\xi|^\sigma}}=-1\frac{\frac{\partial_t(m^2(t))|\xi|^{2\delta}}{2|\xi|^\sigma}}{(|\xi|^\sigma+\frac{m^2(t)|\xi|^{2\delta}}{2|\xi|^\sigma})^2}$$

Logo pela hipótese 4.5.4 obtemos que:

$$|\partial_t(\Im\phi_1)^{-1}|=|\partial_t\frac{1}{|\xi|^\sigma+\frac{m^2(t)|\xi|^{2\delta}}{2|\xi|^\sigma}}|\lesssim|\xi|^{-\sigma}\frac{1}{1+t}$$

Logo $|\partial_t(\Im\phi_1)^{-1}|\lesssim|\xi|^{-\sigma}\frac{1}{1+t}$, agora assuma que $|\partial_t^k(\Im\phi_1)^{-1}|\lesssim|\xi|^{-\sigma}\frac{1}{(1+t)^k}$ para $k\geq 1$. Assim, por hipótese de indução e como na zona hiperbólica $\frac{m^2(t)}{|\xi|^{2\sigma(1-\frac{\delta}{\sigma})}}\lesssim 1$, temos

$$\begin{aligned}&|\partial_t^{k+1}\frac{1}{|\xi|^\sigma+\frac{m^2(t)|\xi|^{2\delta}}{2|\xi|^\sigma}}|\leq\\&\leq|\sum_{i=0}^k\binom{k}{i}\partial_t^{i+1}m^2(t)\frac{|\xi|^{2\delta}}{|\xi|^\sigma}\sum_{j=0}^{k-i}\binom{k-i}{j}\partial_t^j(\Im\phi_1)^{-1}\partial_t^{k-i-j}(\Im\phi_1)^{-1}|\lesssim|\xi|^{-\sigma}\frac{1}{(1+t)^{k+1}}\end{aligned}$$

Isso finaliza, por indução, a prova que $(\Im\phi_1)^{-1}\in\mathcal{T}^{M-1}\{0,-1,0\}$. Claramente temos que $r_1\in\mathcal{T}^{M-1}\{1,0,0\}$. Portanto pela Proposição 4.5.2 temos que

$$\mu_1\in\mathcal{T}^{M-1}\{2,-2,0\},$$

donde, pela hipótese 4.5.1, na Zona hiperbólica temos que $|\mu_1| \lesssim \left(\frac{m^2(t)}{|\xi|^{2\sigma(1-\frac{\delta}{\sigma})}}\right)^2 \lesssim \frac{1}{N^{4(1-\frac{\delta}{\sigma})}}$, assim para N suficientemente grande, existe N_1^{-1}.
Assumimos que a conclusão do lema é verdadeira para $j \geq 1$. Logo temos que $\mu_j \in \mathcal{T}^{M-j}\{2\cdot 3^{j-1}, -2\cdot 3^{j-1}, 0\} + \mathcal{T}^{M-j}\{1,-2,1\}$, assim $\mu_j = f_1 + f_2$, com $f_1 \in \mathcal{T}^{M-j}\{2\cdot 3^{j-1}, -2\cdot 3^{j-1}, 0\}$ e $f_2 \in \mathcal{T}^{M-j}\{1,-2,1\}$. Vamos provar que, $(1-\mu_j)^{-1} \in \mathcal{T}^{M-j}\{0,0,0\}$. Como

$$\begin{aligned}|\mu_j| \lesssim& \Big(\frac{m^2(t)}{|\xi|^{\sigma(1-\frac{2\delta}{\sigma})}}\Big)^{2\cdot 3^{j-1}}(|\xi|^{\sigma})^{-2\cdot 3^{j-1}} + \Big(\frac{m^2(t)}{|\xi|^{\sigma(1-\frac{2\delta}{\sigma})}}\Big)(|\xi|^{\sigma})^{-2}\frac{1}{1+t}\\ \lesssim& \Big(\frac{m^2(t)}{|\xi|^{2\sigma(1-\frac{\delta}{\sigma})}}\Big)^{2\cdot 3^{j-1}} + \Big(\frac{m^2(t)}{|\xi|^{2\sigma(1-\frac{\delta}{\sigma})}}\Big)\frac{1}{N} \lesssim \frac{1}{N^{2\sigma(1-\frac{\delta}{\sigma})}N}\end{aligned}$$

temos que para N suficientemente grande $|\mu_j| < \frac{1}{2}$. Logo $(1-\mu_j)^{-1} \lesssim 1$, além disso, como $\partial_t(1-\mu_j)^{-1} = (1-\mu_j)^{-1}\frac{\partial_t\mu_j}{1-\mu_j} = (1-\mu_j)^{-2}\partial_t f_1 + (1-\mu_j)^{-2}\partial_t f_2$ temos $|\partial_t(1-\mu_j)^{-1}| \lesssim \frac{1}{1+t}$. Agora suponha, por hipótese de indução, que para $k \geq 1$ temos $\partial_t^k(1-\mu_j)^{-1} \lesssim \frac{1}{(1+t)^k}$. Logo

$$\begin{aligned}|\partial_t^{k+1}(1-\mu_j)^{-1}| &\lesssim \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}|\partial_t^i(1-\mu_j)^{-1}|\sum_{l=0}^{k-i}\binom{k-i}{l}|\partial_t^{l+1}\mu_j||\partial_t^{k-i-l}(1-\mu_j)^{-1}|\\ &\lesssim \frac{1}{(1+t)^{k+1}}.\end{aligned}$$

Agora pela Proposição 4.2.3 temos

$$(\Im\phi_{j+1})^{-1} = (\Im\phi_j)^{-1}(1+\beta_j)^{-1}$$

onde $\beta_j := (\Im\phi_j)^{-1}\frac{1}{1-\mu_j}\Big(d_j\mu_j + \Im\{\frac{r_j}{d_j}\partial_t\frac{\overline{r}_j}{d_j}\}\Big)$
Usando a Proposição 4.5.2 e a hipótese de indução temos :

$\rightarrow$ $(\Im\phi_j)^{-1} \in \mathcal{T}^{M-j}\{0,-1,0\}$;

$\rightarrow$ $d_j\mu_j \in \mathcal{T}^{M-j}\{2\cdot 3^{j-1}, -2\cdot 3^{j-1}+1, 0\} + \mathcal{T}^{M-j}\{3^{j-1}+1, -(3^{j-1}+1), 1\} + \mathcal{T}^{M-j}\{2,-3,2\}$;

$\rightarrow$ $\Im\{\frac{r_j}{d_j}\partial_t\frac{\overline{r}_j}{d_j}\} \in \mathcal{T}^{M-j}\{3^{j-1}, -3^{j-1}, 1\}$.

Logo $\beta_j \in \mathcal{T}^{M-j}\{0,0,0\}$. Da mesma forma que foi provado $(1-\mu_j)^{-1} \in \mathcal{T}^{M-j}\{0,0,0\}$ temos que $(1+\beta_j)^{-1} \in \mathcal{T}^{M-j}\{0,0,0\}$. Portanto $(\Im\phi_{j+1})^{-1} \in \mathcal{T}^{M-(j+1)}\{0,-1,0\}$. Agora note que:

$\rightarrow$ $\mu_j r_j \in \mathcal{T}^{M-j}\{2\cdot 3^{j-1}+3^{j-1}, -2\cdot 3^{j-1} - (3^{j-1}-1), 0\} + \mathcal{T}^{M-1}\{1,-1,1\}$;

$\rightarrow$ $\partial_t\frac{r_j}{d_j} \in \mathcal{T}^{M-j}\{3^j, -3^j, 1\} + \mathcal{T}^{M-j}\{1,-2,2\}$.

Portanto $r_{j+1} \in \mathcal{T}^{M-(j+1)}\{3^j, -(3^j-1), 0\} + \mathcal{T}^{M-(j+1)}\{1,-1,1\}$. Finalmente isto implica que $\mu_{j+1} \in \mathcal{T}^{M-(j+1)}\{2\cdot 3^j, -2\cdot 3^j, 0\} + \mathcal{T}^{M-(j+1)}\{1,-2,1\}$, donde $|\mu_{j+1}| \leq \frac{1}{N^{2\sigma(1-\frac{\delta}{\sigma})}} \leq \frac{1}{2}$ para N suficientemente grande, o que assegura a existência da matriz inversa N_{j+1}^{-1}.

□

Conservação de Energia

Pelo Lema 4.5.3 temos que N_j e N_j^{-1} existem e são diferênciáveis para $j = 1,\ldots,M-1$ e $\frac{r_j}{2Im\phi_j} \in \mathcal{T}^{M-j}\{1,-1,0\}$, logo $\frac{|r_j|}{2|Im\phi_j|} \leq C_j\frac{1}{N^2}$ em $\mathcal{Z}_{hip}(N)$, portanto pelo Corolário 4.2.4 temos que vale $\mathbf{HD}_M(\mathcal{Z}_{hip})$

para N suficientemente grande, além disso, como, pela escolha de M vale $(2\cdot 3^{M-1}-1)-\frac{2\cdot 3^{M-1}\delta}{\sigma}\geq 0$, temos em $\mathcal{Z}_{hip}(N)$:

$$|r_M| \lesssim \Big(\frac{m^2(t)}{|\xi|^{\sigma(1-\frac{2\delta}{\sigma})}}\Big)^{3^{M-1}}(|\xi|^\sigma)^{-(3^{M-1}-1)} + \Big(\frac{m^2(t)}{|\xi|^{\sigma(1-\frac{2\delta}{\sigma})}}\Big)(|\xi|^\sigma)^{-1}\frac{1}{1+t} \tag{4.57}$$

$$\lesssim \frac{(m^2(t))^{3^{M-1}}}{|\xi|^{\sigma((2\cdot 3^{M-1}-1)-\frac{2\cdot 3^{M-1}\delta}{\sigma})}} + \frac{m^2(t)}{|\xi|^{\sigma(2-\frac{2\delta}{\sigma})}}\frac{1}{1+t} \tag{4.58}$$

$$\lesssim (m(t))^{2\cdot 3^{M-1}}(1+t)^{((2\cdot 3^{M-1}-1)-\frac{2\cdot 3^{M-1}\delta}{\sigma})} + m^2(t)(1+t)^{1-\frac{2\delta}{\sigma}}. \tag{4.59}$$

$$\tag{4.60}$$

E ainda

$$\begin{aligned}(m(t))^{2\cdot 3^{M-1}}(1+t)^{((2\cdot 3^{M-1}-1)-\frac{2\cdot 3^{M-1}\delta}{\sigma})} &\lesssim (m(t)(1+t)^{1-\frac{\delta}{\sigma}})^{2(\cdot 3^{M-1}-1)}m^2(t)(1+t)^{1-\frac{2\delta}{\sigma}}\\ &\lesssim m^2(t)(1+t)^{1-\frac{2\delta}{\sigma}}.\end{aligned}$$

Ou seja $r_M \in L^\infty_\xi L^1_t(\mathcal{Z}_{hip})$. Logo pelo Corolário 4.2.6 temos que $|U_W(t,\xi)| \approx |U_W(s,\xi)|$ em $\mathcal{Z}_{hip}(N)$. Portanto, nessa mesma região, temos

$$|U(t,\xi)| \approx |U(s,\xi)|. \tag{4.61}$$

Teorema 4.5.4. *Suponha que m satisfaz as Hipóteses* 4.5.1, 4.5.2 *e* 4.5.4. *Então a energia para a solução do problema de Cauchy* (4.41) *satisfaz:*

$$\frac{1}{(1+t)^{2(1-\frac{\delta}{\sigma})}}E^W(u)(0) \lesssim E^W(u)(t) \lesssim E^W(u)(0)$$

para todo tempo t.

Demonstração. Segue imediato de (4.47), (4.48) e de (4.61) que

$$\frac{1}{(1+t)^{1-\frac{\delta}{\sigma}}}|U(0,\xi)| \lesssim |U(t,\xi)| \lesssim |U(0,\xi)|,$$

agora depois de tomar o quadrado de ambos os lados e integrar em ξ temos a afirmação do Teorema.

□

4.5.2 Estados de Espalhamento

A teoria de espalhamento será usada para comparar o comportamento assintótico do problema (4.62) com o problema pertubado (4.63), dados a seguir.

$$\begin{cases} v_{tt} + (-\Delta)^\sigma v = 0 \\ v(0,x) = v_0(x), v_t(0,x) = v_1(x), \end{cases} \tag{4.62}$$

e

$$\begin{cases} u_{tt} + (-\Delta)^\sigma u + m(t)^2(-\Delta)^\delta u = 0 \\ u(0,x) = u_0(x), u_t(0,x) = u_1(x). \end{cases} \tag{4.63}$$

Suponha que v resolve o problema (4.62) com dados v_0, v_1 e considere u a solução do problema (4.63) com dados u_0 e u_1.

Aplicando a transformada de Fourier e considerando as respectivas energias temos.

$$\begin{cases} V(t,\xi) := (|\xi|^{\sigma}\widehat{v}(t,\xi), D_t\widehat{v}(t,\xi))^T, \\ V(0) := (\widehat{v}_0(\xi), \widehat{v}_1(\xi))^T, \end{cases} \tag{4.64}$$

que satisfaz $V(t,\xi) = E_w(t,s,\xi)V(s,\xi)$ para todo tempo $s,t \geq 0$, onde

$$\begin{cases} D_t E_w = AE_w; \\ E_w(s,s,\xi) = I, \end{cases} \tag{4.65}$$

e para

$$A := \begin{pmatrix} 0 & |\xi|^{\sigma} \\ |\xi|^{\sigma} & 0 \end{pmatrix}.$$

E ainda

$$\begin{cases} U(t,\xi) := (h(t,\xi)\widehat{u}(t,\xi), D_t\widehat{u}(t,\xi))^T, \\ U(0) := (\widehat{u}_0(\xi), \widehat{u}_1(\xi))^T, \end{cases} \tag{4.66}$$

lembrando que $h(t,\xi) = \left(|\xi|^{2\sigma} + |\xi|^{2\delta}\frac{N^2}{(1+t)^{2(1-\frac{\delta}{\sigma})}}\right)^{\frac{1}{2}}$ e $U(t,\xi)$ satisfaz $U(t,\xi) = \mathcal{E}(t,s,\xi)U(s,\xi)$ para $s,t \geq 0$, onde

$$\begin{cases} D_t\mathcal{E} = \mathcal{A}(t,\xi)\mathcal{E}; \\ \mathcal{E}(s,s,\xi) = I, \end{cases} \tag{4.67}$$

e lembrando também que:

$$\mathcal{A}(t,\xi) = \begin{pmatrix} \frac{D_t h(t,\xi)}{h(t,\xi)} & h(t,\xi) \\ \frac{|\xi|^{2\sigma}+|\xi|^{2\delta}m(t)^2}{h(t,\xi)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Defina os respectivos operadores de evolução $\mathcal{E}_w(t,\xi) := E_w(t,0,\xi)$ e $\mathcal{E}(t,\xi) := \mathcal{E}(t,0,\xi)$. Nessa seção queremos provar a existência do operador de Möller.

Caso $2\delta \leq \sigma$

O objetivo da Observação 4.5.5 a seguir é trocar as energias $U(t,\xi)$ e $V(t,\xi)$, por outras, a saber $U_1(t,\xi)$ e $V_1(t,\xi)$, respectivamente, de modo que o sistemas associado tenha uma matriz diagonal mais um resto integrável, e assim possamos aplicar a Proposição 4.3.1.

Observação 4.5.5. *Fazendo $H(t,\xi)N_0U_1(t,\xi) = U(t,\xi)$ temos $D_tU_1 = (\Phi_0 + \mathcal{R}_0)U_1$ com Φ_0 e $\mathcal{R}_0$ dadas em* (4.50)*, e $H(t,\xi)$ dada em* (4.52)*. Definindo implicitamente $N_0V_1(t,\xi) := V(t,\xi)$ temos $D_tV_1 = \Phi_0V_1$. Assim denote as soluções fundamentais de $D_t - (\Phi_0 + \mathcal{R}_0) = 0$ e de $D_t - \Phi_0 = 0$, respectivamente por $\mathcal{E}_1(t,s,\xi)$ e $E_1(t,s,\xi)$, como*

$$\|\mathcal{R}_0(t,\xi)\| \lesssim m^2(t)(1+t)^{1-\frac{2\delta}{\sigma}}$$

em $\mathcal{Z}_{hip}$, temos o Teorema a seguir.

Teorema 4.5.6. *Suponha que m satisfaz as hipóteses* 4.5.1 *e* 4.5.2*, além disso considere que $2\delta \leq \sigma$. Então existe um operador*

$$W_+ = W_+(D) : L^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$$

tal que, se os dados iniciais dos problemas de cauchy (4.62) *e* (4.63) *estão relacionados por*

$$(|D|_x^\sigma v_0, v_1)^T = W_+(D)(h(0,D)u_0, u_1)^T,$$

então para as respectivas soluções dos problemas de cauchy (4.62) *e* (4.63) *temos*

$$\|(|D|_x^\sigma v(t,\cdot), v_t(t,\cdot)) - (h(t,D)u(t,\cdot), u_t(t,\cdot))\|_{L^2\times L^2} \to 0,$$

quando $t \to \infty$. *Além disso no conjunto denso em* $L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{L} := \bigcup_{c>0}\{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : dist(\widehat{u}, 0) \geq c\}$$

temos

$$\|(|D|_x^\sigma v(t,\cdot), v_t(t,\cdot)) - (h(t,D)u(t,\cdot), u_t(t,\cdot))\|_{\mathcal{L}\times\mathcal{L}} \lesssim \int_t^\infty m^2(\tau)(1+\tau)^{1-\frac{2\delta}{\sigma}} d\tau \|(h(0,D)u_0, u_1)\|_{\mathcal{L}\times\mathcal{L}}$$

Demonstração. De acordo com a notação na Observação 4.5.5 acima podemos concluir que

$$\mathcal{E}(t,\xi) = \begin{cases} \mathcal{E}(t,\xi) & \text{, se } t_\xi \geq t; \\ H(t,\xi)N_0\mathcal{E}_1(t,t_\xi,\xi)N_0^{-1}H(t_\xi,\xi)^{-1}\mathcal{E}(t_\xi,\xi) & \text{, se } t > t_\xi. \end{cases}$$

e

$$\mathcal{E}_w(t,\xi) = N_0 E_1(t,0,\xi)N_0^{-1}.$$

Logo para $t \geq t_\xi$ temos

$$\mathcal{E}_w^{-1}(t,\xi)\mathcal{E}(t,\xi) = N_0 E_1^{-1}(t,0,\xi)N_0^{-1}H(t,\xi)N_0\mathcal{E}_1(t,t_\xi,\xi)N_0^{-1}H(t_\xi,\xi)^{-1}E(t_\xi,0,\xi).$$

Como $\|\mathcal{R}_0(t,\xi)\| \lesssim m^2(t)(1+t)^{1-\frac{2\delta}{\sigma}}$ em $\mathcal{Z}_{hip}$, e usando a hipótese 4.5.2 temos pela Proposição 4.3.1 que o limite seguinte existe uniformemente para $|\xi| \geq c > 0$,

$$\lim_{t\to\infty} E_1^{-1}(t,0,\xi)\mathcal{E}_1(t,t_\xi,\xi),$$

Além disso, $N_0^{-1}H(t,\xi)N_0 \to I$ quando $t \to \infty$ uniforme para $|\xi| \geq c > 0$. Portanto tomando as entradas do vetor de dados iniciais no conjunto

$$\mathcal{M} := \bigcup_{c>0}\{\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) : dist(\widehat{u}, 0) \geq c\}$$

temos que o seguinte limite existe uniformemente em $|\xi| \geq c$

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{E}_w^{-1}(t,\xi)\mathcal{E}(t,\xi) \tag{4.68}$$

e portanto em $L(\mathcal{M}\times\mathcal{M}, L^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n))$. Como $\mathcal{M}\times\mathcal{M}$ é subespaço denso em $L^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\|\mathcal{E}_w^{-1}(t,\xi)\mathcal{E}(t,\xi)\| \lesssim 1$ uniformemente para (t,ξ), temos pela Proposição 4.3.1 que o operador de Möller W_+ existe como operador em $L(L^2\times L^2, L^2\times L^2)$.
Finalmente considere o operador $W_+(D) : L^2\times L^2 \to L^2\times L^2$ definido pelo seguinte diagrama comutativo.

$$\begin{array}{ccc} L^2\times L^2 & \xrightarrow{W_+(D)} & L^2\times L^2 \\ {\scriptstyle \mathcal{F}\times\mathcal{F}}\downarrow & \circlearrowright & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{F}\times\mathcal{F}} \\ L^2\times L^2 & \xrightarrow[W_+]{} & L^2\times L^2 \end{array} \tag{4.69}$$

Como a transformada de Fourier é bijeção o operador $W_+(D)$ está bem definido e como ela é também uma isometria em L^2 provamos o Teorema a partir da Proposição 4.3.1.

□

O Operador $W_+(D)$ não é invertível, isso segue do fato de que W_+ não é inversível.

4.5.3 Conservação Generalizada de Energia

No caso $2\delta > \sigma$ vamos ter uma conservação generalizada de energia que é uma situação mais fraca que o Espalhamento.

Caso $2\delta > \sigma$

Vamos ilustrar as idéias com o caso quando temos a hipótese 4.5.4 com $M = 2$. Após aplicar o procedimento de Diagonalização obtemos $N_1(t,\xi)$, $\Phi_2(t,\xi)$ e $\mathcal{R}_2(t,\xi)$ e considere a solução fundamental $\mathcal{E}_2(t,s,\xi)$:

$$\begin{cases} D_t\mathcal{E}_2 = (\Phi_2 + \mathcal{R}_2)\,\mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_2(s,s,\xi) = I, \end{cases}$$

Considere também a matriz diagonal $\Phi_2^d(t,\xi)$ dada por

$$\Phi_2^d(t,\xi) = \Phi_2(t,\xi) - \mathcal{D}_2(t,\xi) \tag{4.70}$$

onde

$$\mathcal{D}_2(t,\xi) = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} \frac{\partial_t\mu_1}{2(1-\mu_1)} & 0 \\ 0 & \frac{\partial_t\mu_1}{2(1-\mu_1)} \end{pmatrix} \tag{4.71}$$

e considere também a matriz $\mathcal{R}_2^d(t,\xi) = \mathcal{R}_2(t,\xi) + \mathcal{D}_2(t,\xi)$. Assim temos

$$\begin{cases} D_t\mathcal{E}_2 = \left(\Phi_2^d + \mathcal{R}_2^d\right)\mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_2(s,s,\xi) = I. \end{cases}$$

Pelo Lema 4.5.3 temos que

$$\partial_t\mu_1 \in \mathcal{T}^1\{2,-2,0\} + \mathcal{T}^1\{1,-2,1\},$$

e pela Proposição 4.5.2 temos que $\partial_t\mu_1 \in \mathcal{T}^1\{1,-1,0\}$. Logo $\mathcal{R}_2^d(t,\xi) \in L^1_t L^\infty_\xi\left(\mathcal{Z}_{hip}\right)$. Considere $\tilde{\mathcal{E}}_{W,2}(t,s,\xi)$ a solução fundamental

$$\begin{cases} D_t\tilde{\mathcal{E}}_{W,2} = \Phi_2^d\tilde{\mathcal{E}}_{W,2} \\ \tilde{\mathcal{E}}_{W,2}(s,s,\xi) = I. \end{cases}$$

Além disso considere $N_0\tilde{\mathcal{E}}_{W,2}N_0^{-1} = \mathcal{E}_{W,2}$ Vamos considerar finalmente os seguintes operadores:

$$\mathcal{E}_2(t,\xi) = \begin{cases} \mathcal{E}(t,\xi) & \text{, se } t_\xi \geq t; \\ H(t,\xi)N_0N_1(t,\xi)\mathcal{E}_2(t,t_\xi,\xi)N_1^{-1}(t_\xi,\xi)N_0^{-1}H(t_\xi,\xi)^{-1}\mathcal{E}(t_\xi,\xi) & \text{, se } t > t_\xi. \end{cases}$$

e ainda para $t \geq t_\xi$,

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}_{W,2}^{-1}(t,\xi)\mathcal{E}_2(t,\xi) \\ =&N_0\tilde{\mathcal{E}}_{W,2}^{-1}(t,\xi)N_0^{-1}H(t,\xi)N_0N_1(t,\xi)\mathcal{E}_2(t,t_\xi,\xi)N_1^{-1}(t_\xi,\xi)N_0^{-1}H(t_\xi,\xi)^{-1}\mathcal{E}(t_\xi,\xi) \end{aligned}$$

Logo temos pela Proposição (4.3.1) que o limite seguinte existe uniformemente para $|\xi| \geq c > 0$,

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{\mathcal{E}}^{-1}_{W,2}(t,\xi)\mathcal{E}_2(t,\xi),$$

Além disso, $N_0^{-1}H(t,\xi)N_0N_1(t,\xi) \to I$ quando $t \to \infty$ uniforme para $|\xi| \geq c > 0$. Portanto tomando as entradas do vetor de dados iniciais no conjunto

$$\mathcal{M} := \bigcup_{c>0} \{\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) : dist(\widehat{u}, 0) \geq c\}$$

temos que o seguinte limite existe uniformemente em $|\xi| \geq c$

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{E}^{-1}_{W,2}(t,\xi)\mathcal{E}_2(t,\xi) \tag{4.72}$$

O restante da demonstração segue analogo a do Teorema 4.5.6. A diferença fundamental desses dois casos é que embora o operador $\mathcal{E}_{W,2}(t,\xi)$ seja uma isometria em L^2 e com o argumento acima provamos a conservação de energia generalizada $E^W(u)(t) \sim 1$ (energia definida em (4.54)), mas não provamos que o operador de Möller $W_+(D)$ associa dados inicias do problema (4.63) com algum problema conhecido.

Teorema 4.5.7. *Suponha que m satisfaz as hipóteses* 4.5.1, 4.5.3 *e* 4.5.4 *para algum $M \geq 2$. Então para quaisquer dados iniciais $u_1 \in L^2$, $|D|^\delta u_0 \in L^2$ e $|D|^\sigma u_0 \in L^2$ temos*

$$E^W(u)(t) \sim E^W(u)(0),$$

para todo $t \geq 0$.

Demonstração. De acordo com a hipótese do Teorema e pelo Lema 4.5.3 podemos diagonalizar M vezes e obter as matrizes $N_1(t,\xi), \ldots, N_{M-1}(t,\xi)$, $\Phi_M(t,\xi)$ e $\mathcal{R}_M(t,\xi)$. Temos também a solução fundamental $\mathcal{E}_M(t,s,\xi)$ satisfazendo:

$$\begin{cases} D_t\mathcal{E}_M = (\Phi_M + \mathcal{R}_M)\,\mathcal{E}_M \\ \mathcal{E}_M(s,s,\xi) = I \end{cases} \tag{4.73}$$

Defina

$$\mathcal{D}_j(t,\xi) = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} (\mathcal{D}_j)_{1,1} & 0 \\ 0 & (\mathcal{D}_j)_{2,2} \end{pmatrix}, \tag{4.74}$$

onde $(\mathcal{D}_j)_{1,1} = (\mathcal{D}_j)_{2,2} = \sum_{j=1}^{M-1} \frac{\partial_t\mu_j}{2(1-\mu_j)}$. Além disso, considere

$$\Phi^d_M(t,\xi) = \Phi_M(t,\xi) - \mathcal{D}_M(t,\xi),$$

e,

$$\mathcal{R}^d_M(t,\xi) = \mathcal{R}_M(t,\xi) + \mathcal{D}_M(t,\xi)$$

logo

$$\begin{cases} D_t\mathcal{E}_M = \left(\Phi^d_M + \mathcal{R}^d_M\right)\mathcal{E}_M \\ \mathcal{E}_M(s,s,\xi) = I, \end{cases} \tag{4.75}$$

Além disso, pelo Lema 4.5.3, podemos concluir que para $1 \leq j \leq M-1$,

$$\frac{\partial_t\mu_j}{2(1-\mu_j)} \in \mathcal{I}^{M-(j+1)}\{2,-2,0\} + \mathcal{I}^{M-(j+1)}\{1,-2,1\}.$$

Logo $\mathcal{D}_j(t,\xi) \in L^1_t L^\infty_\xi(\mathcal{Z}_{hip})$. Além disso, considere a solução fundamental $\tilde{\mathcal{E}}^W_M(t,s,\xi)$ de

$$\begin{cases} D_t\tilde{\mathcal{E}}_M^W = \left(\Phi_M^d + \mathcal{R}_M^d\right)\tilde{\mathcal{E}}_M^W \\ \tilde{\mathcal{E}}_M^W(s,s,\xi) = I, \end{cases} \tag{4.76}$$

Por final considere $N_0\tilde{\mathcal{E}}_M^W(t,s,\xi)N_0^{-1} :=: \mathcal{E}_M^W(t,s,\xi)$, aí temos que o operador $\mathcal{E}_M^W(t,\xi) := \mathcal{E}_M^W(t,0,\xi)$ é uma isometria em $L^2 \times L^2$. Assim como em (4.57), temos que o resto $\mathcal{R}_M$ é integrável em $\mathcal{Z}_{hip}$ e como $\mathcal{D}_M$ é também integrável, então $\mathcal{R}_M^d$ é também integrável. O restante da demonstração é analogo ao que já foi feito antes.

□

4.6 Invariante por escala.

Vamos tratar nessa seção de alguns casos restantes do Invariante por escala, porém vamos estudar somente a Energia cinética $\|u_t(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \|(-\Delta)^{\sigma/2}u(t,\cdot)\|_{L^2}^2$. Vamos usar métodos de diagonalização e é essa a razão de não tratar esse caso no Capítulo 3.

Caso $2\delta > \sigma$

Vimos que no caso $2\delta = \sigma$, não podemos melhorar a estimativa da energia $E(u)(t)$ por cima, mas ainda não é claro que a energia decai, vamos ver agora que no caso $2\delta > \sigma$ essa energia fica limitada ao menos por $\|\psi\|_2^2 + \|(-\Delta)^{\delta/2}\phi\|_2^2$, ou seja, não decai para zero.
Considerando $W(\tau) = \left(w(\tau), w_\tau(\tau)\right)^T$, temos que

$$D_\tau W = \mathcal{A}W$$

onde $\mathcal{A}$ é dada por

$$\mathcal{A} \doteq \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i\left(1 + \frac{\mu^2}{\tau^{2(1-\frac{\delta}{\sigma})}}\right) & 0 \end{pmatrix}$$

Temos também que para $W = \mathcal{N}W_0$, onde

$$\mathcal{N} \doteq \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

temos $D_tW_0 = \mathcal{N}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{N}W_0$, e $\mathcal{N}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{N} = \Phi_1 + \mathcal{R}_1$, com

$$\Phi_1 = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} i(1 + \frac{\mu^2}{2\tau^{2(1-\frac{\delta}{\sigma})}}) & 0 \\ 0 & -i(1 + \frac{\mu^2}{2\tau^{2(1-\frac{\delta}{\sigma})}}) \end{pmatrix}$$

e

$$\mathcal{R}_1 = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} 0 & -i\frac{\mu^2}{2\tau^{2(1-\frac{\delta}{\sigma})}} \\ i\frac{\mu^2}{2\tau^{2(1-\frac{\delta}{\sigma})}} & 0 \end{pmatrix}$$

Consideremos as zonas $Z_{hip} = \{\tau \geq N\}$ e $Z_{pd} = \{\tau \leq N\}$. Temos que Φ_1 e $\mathcal{R}_1$ têm as formas especiais 4.9 e 4.10, respectivamente. Logo, pela Proposição 4.2.1 temos que em Z_{pd} vale

$$|W(\tau)| \approx |W(N)|$$

note que, nesse caso, estamos usando também que a solução fundamental relativa a parte homogênea tem norma constante igual a 1, pois a diagonal de $i\Phi_1$ é imaginária pura. Além disso, usamos que para $2\delta > \sigma$ o resto é integrável na zona Z_{pd}. Para fazer as estimativas na zona hiperbólica vamos usar o procedimento de diagonalização. Note que

$$\frac{r_1}{d_1} = i\frac{\mu^2}{2(2\tau^{2(1-\frac{\delta}{\sigma})} + \mu^2)},$$

logo

$$\partial_t \frac{r_1}{d_1} = -i\frac{2\mu^2(1-\frac{\delta}{\sigma})\tau^{1-\frac{2\delta}{\sigma}}}{(2\tau^{2(1-\frac{\delta}{\sigma})} + \mu^2)^2},$$

Como $|r_2| \lesssim \frac{|r_1|^3}{|d_1|^2} + |\partial_t \frac{r_1}{d_1}|$, temos:

$$|r_2(\tau)| \lesssim \frac{1}{\tau^{6(1-\frac{\delta}{\sigma})}} + \frac{1}{\tau^{3-\frac{2\delta}{\sigma}}},$$

portanto se $\frac{6\delta}{5} < \sigma$, temos que r_2 é integrável em Z_{hip}. Portanto, nesse caso, ou seja $2\delta > \sigma$ e $\frac{6\delta}{5} < \sigma$ temos, pelo Corolário 4.2.7 que para $\tau \geq N$ vale:

$$|W(\tau)| \approx |W(N)|$$

Portanto temos que

$$|\widehat{u}(t,\xi)|^2 + \frac{1}{|\xi|^{2\sigma}}|\widehat{u}_t(t,\xi)|^2 \sim |\widehat{\phi}(\xi)|^2 + \frac{1}{|\xi|^{2\sigma}}|\widehat{\psi}(\xi)|^2$$

Logo:

$$\||D|^\sigma u(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \|u_t(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \sim \||D|^\sigma \phi(\cdot)\|_{L^2}^2 + \|\psi(\cdot)\|_{L^2}^2$$

Definição 4.6.1. *Diremos que uma função $f(\tau)$ está em $\mathcal{I}^k\{r,s\}$, com $r,s>0$ se para $0 \leq l \leq k$ existe C_l tal que*

$$|\partial_\tau^l f(\tau)| \leq C_l \frac{1}{\tau^{r-s\frac{\delta}{\sigma}+l}}.$$

para $\tau \geq N$.

Proposição 4.6.1. *Temos*

1. *Se $f_1 \in \mathcal{I}^k\{r_1,s_1\}$, $f_2 \in \mathcal{I}^k\{r_2,s_2\}$, então $f_1 \cdot f_2 \in \mathcal{I}^k\{r_1+r_2, s_1+s_2\}$;*
2. *Se $f \in \mathcal{I}^k\{r,s\}$, $\partial_\tau^m f \in \mathcal{I}^{k-m}\{r,s\}$, para $0 \leq m \leq k$;*
3. *Se $f \in \mathcal{I}^k\{s+1,s\}$, então $f \in L^1(N,\infty)$;*
4. *Se $f \in \mathcal{I}^k\{r,s\}$, então $f \in \mathcal{I}^k\{r-t,s-t\}$, para $r>t$ e $s>t$.*

Demonstração. A demonstração segue imediatamente da definição, para o último ítem é importante que estejamos considerando $\tau \geq N$. □

Lema 4.6.2. *Temos que para cada $M>1$ fixo:*

$$\mu_j \in \mathcal{I}^{M-j}\{4\cdot 3^{j-1}, 4\cdot 3^{j-1}\} + \mathcal{I}^{M-j}\{3,2\},$$

N_j^{-1} existe e $N_j, N_j^{-1} \in \mathcal{I}^{M-j}\{0,0\}$ para $j=1,\dots,M-1$ e

$$\begin{aligned}(Im\varphi_j)^{-1} &\in \mathcal{I}^{M-j}\{0,0\},\\ r_j &\in \mathcal{I}^{M-j}\{2\cdot 3^{j-1}, 2\cdot 3^{j-1}\} + \mathcal{I}^{M-j}\{3,2\}.\end{aligned}$$

para $j=1,\dots,M$.

Demonstração. Vamos demonstrar por indução. Primeiramente

$$(Im\varphi_1)^{-1} \in \mathcal{I}^{M-1}\{0,0\}, \tag{4.77}$$

para isso note que

$$\partial_t^k (Im\varphi_1)^{-1} = \partial_t^{k-1}\partial_t (Im\varphi_1)^{-1} = 4\mu^2(1-\frac{\delta}{\sigma})\partial_t^{k-1}\frac{1}{\tau^{3-\frac{2\delta}{\sigma}}}$$

logo temos

$$|\partial_t^k (Im\varphi_1)^{-1}| \lesssim \frac{1}{\tau^{2-\frac{2\delta}{\sigma}+k}}.$$

Analogamente, é fácil provar que

$$r_1 \in \mathcal{I}^{M-1}\{2,2\} + \mathcal{I}^{M-1}\{3,2\}.$$

Logo usando a Proposição 4.6.1 temos:

$$\mu_1 = \frac{|r_1|^2}{d_1^2} = (-2Im\varphi_1)^{-2}|r_1|^2 \in \mathcal{I}^{M-1}\{2,2\} + \mathcal{I}^{M-1}\{3,2\}.$$

Agora suponha, por hipótese de indução, que para algum $j_0 < M$ temos que

$$\begin{aligned}(Im\varphi_j)^{-1} &\in \mathcal{I}^{M-j}\{0,0\},\\ r_j &\in \mathcal{I}^{M-j}\{2\cdot 3^{j-1}, 2\cdot 3^{j-1}\} + \mathcal{I}^{M-j}\{3,2\}.\end{aligned}$$

vale para todo j, com $M > j_0 \geq j \geq 1$.

Afirmação: $(1-\mu_j)^{-1} \in \mathcal{I}^{M-j}\{0,0\}$, para todo j, com $M > j_0 \geq j \geq 1$.

Provemos essa afirmação por indução no número de derivadas. Note que $|(1-\mu_j)^{-1}| \lesssim 1$ e também $\partial_t(1-\mu_j)^{-1} = (1-\mu_j)^{-1}\frac{\partial_t\mu_j}{1-\mu_j}$. Suponha que temos para algum k com $0 \leq k < M-j$:

$$|\partial_\tau^l (1-\mu_j)^{-1}| \lesssim \frac{1}{\tau^l},$$

vale para todo $0 \leq l \leq k$. Segue que

$$\begin{aligned}|\partial_\tau^{k+1}(1-\mu_j)^{-1}| &\leq \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}|\partial_\tau^i(1-\mu_j)^{-1}|\sum_{l=0}^{k-i}\binom{k-i}{l}|\partial_\tau^{l+1}\mu_j||\partial_\tau^{k-i-l}(1-\mu_j)^{-1}|\\ &\lesssim \frac{1}{\tau^{k+1}},\end{aligned}$$

note que estamos supondo $\mu_j \in \mathcal{I}^{M-j}\{0,0\}$, e que temos $k+1 \leq M-j$. Note também que $\mathcal{I}^{M-j}\{3,2\} \subset \mathcal{I}^{M-j}\{0,0\}$. Agora, pela Proposição (4.2.3) temos que:

$$(\Im\phi_{j+1})^{-1} = (\Im\phi_j)^{-1}(1+\beta_j)^{-1}$$

onde $\beta_j := (\Im\phi_j)^{-1}\frac{1}{1-\mu_j}\Big(d_j\mu_j + \Im\{\frac{r_j}{d_j}\partial_t\frac{\overline{r}_j}{d_j}\}\Big)$
Usando a Proposição 4.6.1 e a hipótese de indução temos :

$\rightarrow$ $(\Im\phi_j)^{-1} \in \mathcal{I}^{M-j}\{0,0\}$;

$\rightarrow$ $d_j\mu_j \in \mathcal{I}^{M-j}\{4\cdot 3^{j-1}, 4\cdot 3^{j-1}\} + \mathcal{I}^{M-j}\{3,2\}$;

$\rightarrow\ \Im\{\frac{r_j}{d_j}\partial_t\frac{\overline{r}_j}{d_j}\} \in \mathcal{I}^{M-(j+1)}\{4\cdot 3^{j-1}, 4\cdot 3^{j-1}\}.$

Logo $\beta_j \in \mathcal{I}^{M-(j+1)}\{0,0\}$, assim da mesma forma que foi provado que $(1-\mu_j)^{-1} \in \mathcal{I}^{M-j}\{0,0\}$ podemos provar que $(1+\beta_j)^{-1} \in \mathcal{I}^{M-(j+1)}\{0,0\}$. Portanto $(\Im\phi_{j+1})^{-1} \in \mathcal{I}^{M-(j+1)}\{0,0\}$. Agora note que:

$\rightarrow\ \mu_j r_j \in \mathcal{I}^{M-j}\{6\cdot 3^{j-1}, 6\cdot 3^{j-1}\} + \mathcal{I}^{M-j}\{3,2\};$

$\rightarrow\ \partial_t\frac{r_j}{d_j} \in \mathcal{I}^{M-(j+1)}\{2\cdot 3^{j}, 2\cdot 3^{j}\} + \mathcal{I}^{M-(j+1)}\{3,2\}.$

Portanto $r_{j+1} \in \mathcal{I}^{M-(j+1)}\{2\cdot 3^j, 2\cdot 3^j\} + \mathcal{I}^{M-(j+1)}\{3,2\}$. Finalmente isto implica que $\mu_{j+1} \in \mathcal{I}^{M-(j+1)}\{4\cdot 3^j, 4\cdot 3^j\} + \mathcal{I}^{M-(j+1)}\{3,2\}$, donde $|\mu_{j+1}| \lesssim \frac{1}{N} \leq \frac{1}{2}$ para N suficientemente grande, o que assegura a existência da matriz inversa N_{j+1}^{-1}.

□

Vamos definir a Energia como sendo:

$$E^S(u)(t) := \|u_t(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \||D|^\sigma u(t,\cdot)\|_{L^2}^2$$

Teorema 4.6.3. *Considere $2\delta > \sigma$ e seja $2 \leq M$ tal que $\frac{\delta}{\sigma} < \frac{2\cdot 3^{M-2}-1}{2\cdot 3^{M-2}}$, então*

$$E^S(u)(t) \sim E^S(u)(0).$$

Demonstração. Basta aplicar o Lema 4.6.2 com $j = M-1$, logo temos

$$r_{M-1} \in \mathcal{I}^1\{2\cdot 3^{M-2}, 2\cdot 3^{M-2}\} + \mathcal{I}^1\{3,2\},$$

donde

$$|r_{M-1}(\tau)| \lesssim \frac{1}{\tau^{2\cdot 3^{M-2}-2\cdot 3^{M-2}\frac{\delta}{\sigma}}} + \frac{1}{\tau^{3-\frac{2\delta}{\sigma}}}$$

Como $\frac{\delta}{\sigma} < \frac{2\cdot 3^{M-2}-1}{2\cdot 3^{M-2}}$, concluímos que r_{M-1} é integrável no intervalo $[N,\infty)$. Como também r_1 é integrável em $[0,N]$, temos pelo Corolário 4.2.7 que

$$|w(\tau)| \sim |w(N)| \sim |w(0)|,$$

logo

$$|\widehat{u}(t,\xi)|^2 + \frac{1}{|\xi|^{2\sigma}}|\widehat{u}_t(t,\xi)|^2 \sim |\widehat{\phi}(\xi)|^2 + \frac{1}{|\xi|^{2\sigma}}|\widehat{\psi}(\xi)|^2$$

e agora basta multiplicar por $|\xi|^{2\sigma}$ e depois integrar em ξ.

□

Observação 4.6.4. *O Teorema 4.6.3 mostra que a pertubação do problema $u_{tt} + (-\Delta)^\sigma u = 0$ pelo potencial $\frac{\mu^2}{(1+t)^{2(1-\frac{\delta}{\sigma})}}(-\Delta)^\delta u$ não influência demasiado no comportamento da Energia $\|u_t(t,\cdot)\|_{L^2}^2 + \||D|^\sigma u(t,\cdot)\|_{L^2}^2$, que para o caso $\mu = 0$ permanece constante. Ou seja, concluímos nesse caso, que esse termo de ordem inferior tem uma baixa influência na energia do sistema.*

Caso $2\delta < \sigma$

Considerando $W(\tau) = \big(w(\tau), w_\tau(\tau)\big)^T$, temos que

$$D_\tau W = \mathcal{A}W$$

onde $\mathcal{A}$ é dada por

$$\mathcal{A} \doteq \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i\Big(1+\frac{\mu^2}{\tau^{2(1-\frac{\delta}{\sigma})}}\Big) & 0 \end{pmatrix}$$

Temos também que para $W = \mathcal{N}W_0$, onde

$$\mathcal{N} \doteq \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

temos $D_t W_0 = \mathcal{N}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{N}W_0$, e $\mathcal{N}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{N} = \Phi_1 + \mathcal{R}_1$, com

$$\Phi_1 = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} i(1+\frac{\mu^2}{2\tau^{2(1-\frac{\delta}{\sigma})}}) & 0 \\ 0 & -i(1+\frac{\mu^2}{2\tau^{2(1-\frac{\delta}{\sigma})}}) \end{pmatrix}$$

e

$$\mathcal{R}_1 = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} 0 & -i\frac{\mu^2}{2\tau^{2(1-\frac{\delta}{\sigma})}} \\ i\frac{\mu^2}{2\tau^{2(1-\frac{\delta}{\sigma})}} & 0 \end{pmatrix}$$

Consideremos as zonas $Z_{hip} = \{\tau \geq N\}$ e $Z_{pd} = \{\tau \leq N\}$. Temos que Φ_1 e $\mathcal{R}_1$ têm as formas especiais 4.9 e 4.10, respectivamente. Logo, pela Proposição 4.2.1 temos que em Z_{hip} vale

$$|W(\tau)| \approx |W(N)|$$

note que, nesse caso, estamos usando também que a solução fundamental relativa a parte homogênea tem normal constante igual a 1, pois a diagonal de $i\Phi_1$ é imaginária pura. Além disso, usamos que para $2\delta < \sigma$ o resto é integrável na zona Z_{hip}. Qual o comportamento na zona pseudo devemos esperar. Veremos no Teorema 4.4.8, que para o caso $\delta > 0$ temos:

$$c\big(E^S(u)(0)+\||D|^\delta u(0,\cdot)\|_{L^2}^2\big) \leq E^S(u)(t)+\frac{\mu^2}{(1+t)^{2(1-\frac{\delta}{\sigma})}}\||D|^\delta u(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \leq C\big(E^S(u)(0)+\||D|^\delta u(0,\cdot)\|_{L^2}^2\big),$$

enquanto no caso $\delta = 0$ pelo Corolário 4.4.10, temos:

$$c\big(E^S(u)(0)+\|u(0,\cdot)\|_{L^2}^2\big) \leq E^S(u)(t)+\frac{\mu^2}{(1+t)}\|u(t,\cdot)\|_{L^2}^2 \leq C\big(E^S(u)(0)+\|u(0,\cdot)\|_{L^2}^2\big).$$

4.7 Problemas em aberto e discussões complementares.

No Teorema 4.5.7 temos que quanto mais queremos aproximar δ de σ para obter a conservação de energia, mais controle nas oscilações precisamos assumir na massa, devido a Hipótese 4.5.4. Por outro lado, quando $2\delta \leq \sigma$ não precisamos assumir qualquer controle nas oscilações e obtemos até mesmo Espalhamento. Para comprender melhor esse fenômeno, note que quando $\delta = \sigma$ (que não foi considerado nessa Tese), é conhecido que muitas oscilações criam ressonância e fazem com que a energia vá exponencialmente rápido para o infinito, veja [13]. Assim é necessário um certo controle das oscilações para que se tenha conservação de Energia veja [34]. A hipótese 4.5.1 mostra que quanto mais próximo δ de σ mais temos possíbilidade da massa oscilar sem que ao mesmo tempo diminua sua amplitude suficientemente rápido para que não se tenha ressonância, por isso fez-se necessário assumir algum controle das ocilações no caso $2\delta > \sigma$. O que permanece em aberto é saber se essas condições podem ser relaxadas, haja vista que precisamos de muitas ocilações quanto mais próximos δ e σ estão, mas no limite que seria o caso $\delta = \sigma$ só precisamos do controle até duas derivadas, veja [34] e suas referências.
Agora vamos propor mais algumas questões que não foram tratadas nessa tese.

- **Estimativas $L^p - L^q$.** Em [5] a autora demonstrou para o caso $\sigma = 1$ e $\delta = 0$ estimativas $L^p - L^q$ com coeficientes variáveis com p e q expoentes conjugados entre si, assim é natural perguntar que tipo de estimativa do tipo $L^p - L^q$ podemos obter no caso σ e δ quaisquer?

- **Semilinear.** Quando a massa é crescente o Teorema 4.4.2 mostra que temos decaimento da Energia Potencial considerada, esse tipo de estimativa torna natural perguntar sobre existência de solução global, com dados iniciais pequenos, para o seguinte problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} + (-\Delta)^{\sigma} u + m^2(t)(-\Delta)^{\delta} u = |u|^p \\ u(0,x) = \phi(x), u_t(0,x) = \psi(x), \end{cases} \tag{4.78}$$

  para $p > p_c$, onde p_c é um índice crítico a ser determinado. Espera-se que o índice crítico dependa da massa, quais condições sobre a massa nos permitem obter o índice crítico?

Apêndice A

Apêndice

A.1 Teoria de Funções especiais.

A.1.1 A função de Bessel.

Seja a função de Bessel J_m dada pela série a seguir

$$J_m(z) = (\frac{1}{2}z)^m \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\frac{1}{4}z^2)^k}{k!\Gamma(m+k+1)}, \tag{A.1}$$

para $m > -\frac{1}{2}$, pode ser dada por.

$$J_m(r) = \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^m}{\Gamma\left(\frac{2m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{1} e^{irs}\left(1-s^2\right)^{\frac{2m-1}{2}} ds. \tag{A.2}$$

onde Γ denota a função Gamma.

Proposição A.1.1. *Para cada $k \geq 0$ inteiro;*

$$\left|\frac{d^k}{dr^k} J_m(r)\right| \leq C_k r^{-\left(\frac{1}{2}+k\right)} \tag{A.3}$$

onde C_k é constante dependendo apenas de k.

Demonstração. Veja em Stein [78]. □

Considere a esfera unitária $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ e a transformada de fourier da medida de superfície sobre $\mathbb{S}^{n-1}$ é dada como a seguir.

$$\widehat{d\sigma}(\xi) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-ix\xi} d\sigma(x) \tag{A.4}$$

Proposição A.1.2. *Temos a seguinte identidade*

$$\widehat{d\sigma}(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} |\xi|^{-\frac{2-n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(|\xi|). \tag{A.5}$$

$\xi \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Veja em Stein [78]. □

Para uma função f radial em $L^1(\mathbb{R}^n)$ uma simples mudança de variáveis para coordenadas polares mais a Proposição A.1.2 fornece a seguinte representação para a transformada de fourier de f:

$$\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \int_0^\infty f(r) r^{n-1} \left(r|\xi|\right)^{\frac{2-n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(r|\xi|) dr. \tag{A.6}$$

A seguir vamos enunciar o importante Lema de Van der Corput.

Lema A.1.3. *Se $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ e $\phi \in C^2(\mathbb{R})$ tal que $|\phi''(r)| \geq \lambda > 0$ para todo $r \in \operatorname{supp}\psi$, então*

$$\Big| \int e^{i\phi(r)} \psi(r) dr \Big| \leq C\lambda^{-\frac{1}{2}} \left(\|\psi\|_{L^\infty} + \|\psi'\|_{L^1} \right) \tag{A.7}$$

onde C é uma constante positiva não nula.

Demonstração. Veja em Stein [78]. □

A.1.2 Função de Weber e Hankel

Para valores $\nu \notin \mathbb{Z}$ defina por continuação analítica a função de Weber, ou função de Bessel de segundo tipo, por

$$\mathcal{Y}_\nu(z) := \frac{J_\nu(z)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)}, \tag{A.8}$$

para valores inteiros define-se $\mathbb{Y}_\nu(z)$ usando a seguinte relação:

$$\begin{aligned} 2\big(\gamma + \log\frac{z}{2}\big)\mathcal{J}_\nu - \pi\mathcal{Y}_\nu = &\sum_{r=0}^{\nu-1} \frac{(\nu-r-1)!}{r!}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{\nu-2r} \\ &+ \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{\psi(r+\nu+1) - \psi(r+1) + 2\gamma}{r!(\nu+r)!}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{\nu+2r}. \end{aligned}$$

Finalmente, defina a função de Hankel, ou função de Bessel de terceiro tipo por: $\mathcal{H}_\nu^\pm(z) = \mathcal{J}_\nu(z) \pm i\mathcal{Y}_\nu(z)$. Para essa função temos as seguinte relações:

$$\mathcal{H}_{\nu-1}^\pm(z) + \mathcal{H}_{\nu+1}^\pm(z) = \frac{2\nu}{z}\mathcal{H}_\nu^\pm(z), \tag{A.9}$$

$$\mathcal{H}_{\nu-1}^\pm(z) - \mathcal{H}_{\nu+1}^\pm(z) = 2\Big(\mathcal{H}_\nu^\pm\Big)'(z), \tag{A.10}$$

$$\nu\mathcal{H}_\nu^\pm(z) + z\Big(\mathcal{H}_\nu^\pm\Big)'(z) = z\mathcal{H}_{\nu-1}^\pm(z), \tag{A.11}$$

$$\nu\mathcal{H}_\nu^\pm(z) - z\Big(\mathcal{H}_\nu^\pm\Big)'(z) = z\mathcal{H}_{\nu+1}^\pm(z). \tag{A.12}$$

Além disso, como em [90], temos as identidades do Wronskiano.

$$\mathcal{W}\Big(\mathcal{J}_\nu(z), \mathcal{Y}_\nu(z)\Big) = \frac{2}{\pi z},$$

e portanto também temos

$$\mathcal{W}\Big(\mathcal{H}_\nu^+(z), \mathcal{H}_\nu^-(z)\Big) = -2i\mathcal{W}\Big(\mathcal{J}_\nu(z), \mathcal{Y}_\nu(z)\Big) = \frac{-4i}{\pi z},$$

onde $\mathcal{W}\Big(f(z), g(z)\Big) = f'(z)g(z) - f(z)g'(z)$.
Finalmente, temos a seguinte Proposição.

Proposição A.1.4. *Para $\tau > 0$ temos as seguintes propriedades:*

- *Para $\tau \geq N$, $N > 0$ constante, $\left|\mathcal{H}_\rho^{\pm}(\tau)\right| \leq C|\tau|^{-\frac{1}{2}}$;*
- *Para $0 < \tau < c < 1$:*

$$\left|\mathcal{H}_\rho^{\pm}(\tau)\right| \leq \begin{cases} \tau^{-|\rho|} & \text{quando } \rho \neq 0, \\ -\log\tau & \text{quando } \rho = 0. \end{cases}$$

- *Para $n \in \mathbb{Z}$ a função de Weber $\mathcal{Y}_\nu(\tau)$ satisfaz*

$$\mathcal{Y}_n(\tau) = \frac{2}{\pi}\mathcal{J}_n(\tau)\log\tau + A_n(\tau), \tag{A.13}$$

  onde $\tau^n A_n(\tau)$ é inteira e $A_n(0) \neq 0$. Nós também temos $\mathcal{J}_{-n}(\tau) = (-1)^n\mathcal{J}_n(\tau)$.

- *A função $\Lambda_\nu(\tau) := \tau^{-n}\mathcal{J}_\nu(\tau)$ é inteira em ν e τ, além disso $\Lambda_\nu(0) \neq 0$.*

Demonstração. Veja em [90]. □

A.1.3 Equações hipergeométricas Confluentes

Para consultar os resultados apresentados aqui veja [60].

$$zw_{zz} + (\beta - z)w_z - \alpha w = 0 \tag{A.14}$$

com α e β parâmetros complexos. A equação têm singularidade regular em 0 singularidade irregular no infinito. As soluções fundamentais de A.14 são dadas por $w_{\Phi,1}(z) = \Phi(\alpha,\beta;z)$ e $w_{\Phi,2}(z) = z^{1-\beta}\Phi(1+\alpha-\beta, 2-\beta; z)$, no caso de que β é não inteiro. Se $\Re\beta > \Re\alpha > 0$, temos a seguinte representação integral.

$$\frac{\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta)}\Phi(\alpha,\beta;z) = \int_0^1 e^{zt}t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-\alpha-1}dt, \tag{A.15}$$

onde $\Gamma(\cdot)$ é a função Gamma. As funções $w_{\Phi,1}(z)$ e $w_{\Phi,2}(z)$ satisfazem

$$w_{\Phi,1}(z)w_{\Phi,2}^{'}(z) - w_{\Phi,1}^{'}(z)w_{\Phi,2}(z) = (1-\beta)z^{-\beta}e^z. \tag{A.16}$$

Além disso temos as seguintes propriedades de Φ

Proposição A.1.5. *Valem as seguinte propriedades para Φ:*

1. *Φ é função inteira em z;*
2. *Transfomação de Kummer $\Phi(\alpha,\beta;z) = e^z\Phi(\beta-\alpha,\beta;-z)$*
3. *A derivada $d_z\Phi$ satisfaz :*

$$(\beta-\alpha)\Phi(\alpha-1,\beta;z) = (\beta-\alpha-z)\Phi(\alpha,\beta;z) + zd_z\Phi(\alpha,\beta;z);$$

4. *Para $|z| \leq N$ pequeno $|\Phi(\alpha,\beta;z)| \leq C$.*

Para $|z|$ grande é útil representar a função de Kummer Φ em termos da função de Bessel J_ν para $\nu \in \mathbb{R}$. Da mesma forma que em [5] vamos usar a proposição a seguir.

Proposição A.1.6. *Para $\alpha = \nu + \frac{1}{2}$, $\beta = 2\nu + 1$ com $\nu \notin \mathbb{Z}$ e $z = 2i\tau$ nós temos*

$$\Phi(\alpha,\beta;z) = \Gamma(1+\nu)e^{i\tau}\left(\frac{1}{2}\tau\right)^{-\nu}J_\nu(\tau),$$

onde J_ν denota a função de Bessel. Além disso, para τ grande nós temos

$$J_\nu(\tau) \sim \sin(\tau) a_\nu(\tau),$$

$|d_\tau^m a_\nu(\tau)| \leq C_m |\tau|^{-\frac{1}{2}-m}$, $m = 0, 1, \ldots$, *e* $C_m = C_m(\nu)$.

Para β inteiro as soluções $w_{\Phi,1}(z)$ e $w_{\Phi,2}(z)$ são linearmente dependentes. Então a equação de Kummer A.14 é chamada de o caso logarítimo. Para esses problemas as soluções fundamentais são dadas por $\Psi_{\Phi,1}(z) = \Psi(\alpha, \beta; z)$ e $\Psi_{\Phi,2}(z) = e^z \Psi(\beta - \alpha, \beta; -z)$. Para $\Re\beta > \Re\alpha > 0$ a função $\Psi(\alpha, \beta; z)$ corresponde a representação integral

$$\Gamma(\alpha)\Psi(\alpha, \beta; z) = \int_0^t e^{-zt} t^{\alpha-1} (1+t)^{\beta-\alpha-1} dt.$$

e temos

$$w_{\Psi,1}(z) w'_{\Psi,2}(z) - w'_{\Psi,1}(z) w_{\Psi,2}(z) = e^{\epsilon\pi i(\beta-\alpha)} z^{-\beta} e^z, \tag{A.17}$$

onde $\epsilon = sgn(\Im z)$.
Quando $\beta = 1, 2, \ldots,$ e $\alpha \neq 0, -1, -2, \ldots$ temos a seguinte representação em série.

$$\begin{aligned}\Psi(\alpha, n+1; z) =& \frac{(-1)^{n+1}}{n!\Gamma(\alpha-n)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{k!(n+1)_k} z^k \big(\ln z + \psi(\alpha+k) - \psi(1+k) - \psi(n+k+1) \big) \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)!(1-\alpha+k)_{n-k}}{(n-k)!} z^{-k}.\end{aligned}$$

onde $\psi(\alpha) = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$.

Proposição A.1.7. *Temos as seguintes propriedades de para Ψ:*

1. *Ψ é holomorfa em $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$;*
2. *a derivada $d_z\Psi$ satisfaz:*

$$\Psi(\alpha - 1, \beta; z) = (\alpha - \beta + z)\Psi(\alpha, \beta; z) - z d_z \Psi(\alpha, \beta; z);$$

3. $d_z\Psi(\alpha, \beta; z) = -\alpha\Psi(1+\alpha, 1+\beta; z)$;
4. *Para $|z|$ pequeno temos:*

$$\begin{aligned}\Psi(\alpha, 1; z) &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}(\ln z - \psi(\alpha) + 2\gamma) + \mathcal{O}(z \ln z) \sim \textit{sign}(\Gamma(\alpha)) \ln z, \\ \Psi(\alpha, 2; z) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} z^{-1} + \mathcal{O}(\ln z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} z^{-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \big(\ln z + \psi(\alpha) - \psi(1) - \psi(2) \big) + \mathcal{O}_\alpha(z \ln z),\end{aligned}$$

   onde γ é a constante de Euler e $\ln z$ denota o logarítmo complexo.

5. *Para $|z|$ grande, vale o seguinte limitante.*

$$|\Psi(\alpha, \beta; z)| \leq C_{\alpha\beta} |z|^{-\Re(\alpha)}.$$

A.1.4 Equações de onda do tipo Coulomb

A equação de tipo Coulomb a seguir que é usada em física para descrever o comportamento da carga de uma partícula em um potencial de Coulomb. Vamos fazer uma exposição rápida do tema, e apresentar os resultados que nos interessam.

$$\frac{d^2}{d\tau^2}w + \left(1 - \frac{2\eta}{\tau} - \frac{l(l+1)}{\tau^2}\right)w = 0 \tag{A.18}$$

com $\eta \in \mathbb{R}$ e $l = 0, 1, 2, \ldots$. A equação tem uma singularidade regular em $\tau = 0$ com índice $l + 1$ e $-l$ e uma singularidade irregular de rank 1 em $\tau = \infty$.
A solução Geral é dada por:

$$w(\tau) = C_1(l, \eta)F_l(\eta, \tau) + C_2(l, \eta)G_l(\eta, \tau), \tag{A.19}$$

onde $C_1(l, \eta)$ e $C_2(l, \eta)$ são constantes em relação a τ. A função $F_l(\eta, \tau)$ é a chamada função de Onda tipo Coulomb Regular e $G_l(\eta, \tau)$ é a função de Onda tipo Coulomb Irregular ou Logarítma.
onde

$$\begin{aligned} F_l(\eta, \tau) &= \tau^{l+1}e^{\mp i\tau}\Phi\left(l + 1 \mp i\eta, 2l + 2, \pm 2i\tau\right) \\ G_l(\eta, \tau) &= iF_l(\eta, \tau) + H_l^-(\eta, \tau). \end{aligned}$$

$F_l(\eta, \tau)$ e $G_l(\eta, \tau)$ são analíticas reais em $0 < \tau < \infty$ e $H_l^-(\eta, \tau)$ é dada por:

$$H_l^-(\eta, \tau) = e^{-i\theta_l(\eta,\tau)}(2i\tau)^{l+1-i\eta}\Psi(l + 1 - i\eta, 2l + 2, 2i\tau). \tag{A.20}$$

onde $\theta_l(\eta, \tau) = \tau - \eta\ln(2\tau) - \frac{1}{2}l\pi + \arg\left(\Gamma(l + 1 + i\eta)\right)$.
Além disso temos a relação do Wronskiano a seguir:

$$d_\tau F_l \cdot G_l - F_l \cdot d_\tau G_l = 1 \tag{A.21}$$

Relações de Recorrência
Para $l = 1, 2, \ldots$, seja

$$\begin{aligned} R_l &= \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{l^2}}, \\ S_l &= \frac{l}{\tau} + \frac{\eta}{l}. \end{aligned}$$

Então com X_l denotando $F_l(\eta, \tau)$, $G_l(\eta, \tau)$ ou $H_l^-(\eta, \tau)$ temos para $l \geq 1$:

1. $X_l^{'} = R_l X_{l-1} - S_l X_l$,
2. $X_{l-1}^{'} = S_l X_{l-1} - R_l X_l$.

Comportamento para τ pequeno.

Proposição A.1.8. *Para $\tau \to 0$, temos para $l = 0, 1, \ldots$, que:*

$$\begin{aligned} F_l(\eta, \tau) &\sim \tau^{l+1}; \\ F_l^{'}(\eta, \tau) &\sim (l + 1)\tau^l; \\ G_l(\eta, \tau) &\sim \frac{\tau^{-l}}{2l + 1}. \end{aligned}$$

E para $l = 1, 2, \ldots$, temos que:

$$G_l^{'}(\eta, \tau) \sim -\frac{l\tau^{-l-1}}{2l + 1}.$$

Demonstração. Veja as referências em [60]. □

Usando as relações de recorrência juntamente com a Proposição A.1.8, podemos também deduzir para $\tau \to 0$ que:

$$|G_0^{'}(\eta, \tau)| \sim \tau^{-1} \tag{A.22}$$

Comportamento para τ grande.

Proposição A.1.9. *Para $\tau \to \infty$, temos:*

$$\begin{aligned} F_l(\eta, \tau) &= \sin(\theta_l(\eta, \tau)) + o(1); \\ G_l(\eta, \tau) &= \cos(\theta_l(\eta, \tau)) + o(1); \\ H_l^{-}(\eta, \tau) &= \exp(-i\theta_l(\eta, \tau)). \end{aligned}$$

Demonstração. Veja as referências em [60]. □

Usando as relações de recorrência, temos para τ grande que:

$$|F_0^{'}(\eta, \tau)| \lesssim 1 \tag{A.23}$$

$$|G_0^{'}(\eta, \tau)| \lesssim 1 \tag{A.24}$$

A.2 Resultados de Análise Funcional

Teorema A.2.1. *[Ponto fixo para Contrações] Seja (X, d) um espaço métrico completo e $f : X \to X$ uma contração com respeito a métrica d, ou seja:*

$$d(f(x), f(y)) < \alpha d(x, y),$$

para quaisquer $x, y \in X$ e $\alpha < 1$ é uma constante. Nesse caso f possui um ponto fixo, e este é único em X.

Demonstração. Veja em Brezis [10]. □

Teorema A.2.2. *Se $1 \leq q < \frac{n}{m}$, então $W^{m,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^n)$, com $\frac{1}{r} \geq \frac{1}{q} - \frac{m}{n}$, mas $W^{m,q}(\mathbb{R}^n)$ não é subespaço de $L^s(\mathbb{R}^n)$ para $\frac{1}{s} < \frac{1}{q} - \frac{m}{n}$.*

Demonstração. Veja em Tartar [85] ou Brezis [10]. □

A.3 Fourier Multipliers

Nessa seção vamos apresentar algumas definições e resultados da teoria de Fourier Multipliers que podem ser encontrados em [35].

Definição A.3.1. *Definiremos o espaço M_p^q de todas as distribuições temperadas m tais que o operador:*

$$m(D)f := \mathcal{F}^{-1}[m(\xi)\mathcal{F}(f)],$$

satifaz $\|m(D)f\|_{L^q} \leq C\|f\|_{L^p}$ para toda $f \in \mathcal{S}$. Cada elemento de M_p^q chamaremos de multiplicador, quando $p = q$ denotaremos tal espaço simplesmente por M_p. Definiremos uma norma em M_p^q por

$$\|m\|_{M_p^q} := \sup\{\|m(D)f\|_q : f \in \mathcal{S}, \|f\|_p = 1\}. \tag{A.25}$$

Teorema A.3.1. *[Teorema de interpolação de Riesz-Thorin] Assuma que* $p_0 \neq p_1$, $q_0 \neq q_1$ *e que*

$$T : L^{p_0} \to L^{q_0}$$

com norma M_0, *e que*

$$T : L_{p_1} \to L_{q_1}$$

com norma M_1. *Então*

$$T : L^p \to L^q$$

é limitado com norma $M \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$, *desde que* $0 < \theta < 1$ *e*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Demonstração. Veja em [77] ou [3]. □

Lema A.3.2. *Assuma que* $p_0 \neq p_1$, $q_0 \neq q_1$, $0 < \theta < 1$ *e*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Nesse caso temos que $\|f\|_{M_p^q} \leq \|f\|_{M_{p_0}^{q_0}}^{1-\theta} \|f\|_{M_{p_1}^{q_1}}^{\theta}$.

Demonstração. Imediato de A.3.1. □

Teorema A.3.3. *Para* $1 \leq p \leq 2$, *temos para* $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ *que*

$$\|\mathcal{F}(\phi)\|_q \leq \|\phi\|_p.$$

Demonstração. Basta aplicar A.3.1 após demonstrar que vale para os casos especias $p = 1$ e $q = \infty$ com $p = q = 2$. □

Teorema A.3.4. *Valem as seguintes afirmações*

(1) $M_p \subset M_2$, *com a inclusão contínua;*

(2) $M_p = M_{p'}$ *com igualdade de normas;*

(3) $M_2 = L^\infty$ *com as mesmas normas;*

(4) M_p *éuma algebra de Banach;*

(5) $e^{i|\xi|^2}$ *não está em* M_p^q *para* $p > 2$;

Demonstração. Veja em [35]. □

Teorema A.3.5. *Seja* g *uma função mensurável tal que, com* $1 < b < \infty$, *nós temos para alguma constante* C

$$|\{\xi; |g(\xi)| \geq s\}| \leq \frac{C}{s^b}. \tag{A.26}$$

Se

$$1 < p \leq 2 \leq q < \infty, \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{b}, \tag{A.27}$$

então $g \in M_p^q$.

Demonstração. Veja em [35]. □

Teorema A.3.6. *Suponha que $m(x)$ é de classe C^k no complementar da origem de $\mathbb{R}^n$, onde k é um inteiro $> \frac{n}{2}$. Assuma também que para todo α multi-índice de dimensão n com $|\alpha| \leq k$ temos*

$$\Big|\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^{\alpha} m(x)\Big| \leq B|x|^{-|\alpha|},$$

então $m \in M_p$, $1 < p < \infty$, além disso $\|m\|_{M_p} \leq C(n,p)B$, onde $C(n,p)$ é uma constante que depende somente da dimensão e de p.

Demonstração. Veja em [76]. □

A.4 Espaços de Besov

Seja $\phi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ com $supp\phi \subset \{\xi : 2^{-1} \leq |\xi| \leq 2\}$ $\phi_k(\xi) := \phi(2^{-k}\xi)$ para $k \geq 1$ e $\phi_0(\xi) := 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(\xi)$. Defina a decomposição de Littlewood-Paley ou simplesmente decomposição diádica por:

$$\Delta_k = \mathcal{F}^{-1}\phi_k\mathcal{F}.$$

Definição A.4.1. *Para $1 \leq p, q \leq \infty$ e $-\infty < s < \infty$, defina*

$$B^s_{p,q} := \{f \in \mathcal{S}(R^n) : \|f\|_{B^s_{p,q}} < \infty\}, \text{onde}$$
$$\|f\|_{B^s_{p,q}} := \Big(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{skq}\|\Delta_k f\|_p^q\Big)^{\frac{1}{q}}, \text{para } q < \infty$$
$$\|f\|_{B^s_{p,\infty}} := \sup\{2^{sk}\|\Delta_k f\|_p : k \geq 0\}$$

Lema A.4.1. *Seja $m \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ e assuma que*

$$\|\mathcal{F}^{-1}(m\phi_k\mathcal{F}f)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

onde C independe de $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$ com $1 < p \leq 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então existe A independente de m tal que

$$\|\mathcal{F}^{-1}(m\mathcal{F}f)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq AC\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Demonstração. Veja em [66]. □

Lema A.4.2. *Considere a equação integral de Volterra*

$$f(t,p) = f(0,p) + \int_0^t K(t,\tau,p)f(\tau,p)d\tau$$

com o núcleo $k = k(t,\tau,p)$ e o valor inicial $f(0,p)$ dependentes do parâmetro $p \in P \subset \mathbb{R}^n$. Assuma que $f(0,p) \in L^{\infty}(P)$, $k \in L^{\infty}(\mathbb{R}^2_+)$ e $\int_0^t |k(t,\tau,p)|d\tau \in L^{\infty}(R_+ \times P)$. Nessas condições, existem um única solução $f(t,p) \in L^{\infty}(R_+ \times P)$.

Teorema A.4.3. ***[Teorema de Banach-Steinhaus]*** *Sejam A e B espaços de Banach e suponha que $\{F_n\}$ é uma família de operadores lineares limitados de A em B. Então F_n converge pontualmente para um operador linear limitado F de A em B se, e somente se :*

- *A sequência das normas dos $\|F_n\|$ operadores é limitada;*
- *A sequência $F_n x$ converge para Fx para todo $x \in M$, onde M é um subconjunto denso de A.*

Ferramentas úteis

Lema A.4.4 (Lema de Gronwall)**.** *Sejam f, g e h funções contínuas não-negativas definidas no intervalo $[a,b]$. Além disso, suponha que g é deferênciável em (a,b) com derivada contínua não negativa. Se para todo $t \in [a,b]$*

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t h(r)f(r)dr,$$

então

$$f(t) \leq g(t)e^{\int_a^t h(r)dr}$$

para todo $t \in [a,b]$.

Demonstração. Veja em [12]. □

Considere o sistema linear homogêneo de equações diferênciais ordinárias

$$D_t U = A(t)U \tag{A.28}$$

$t \in \mathbb{R}_+$.

Lema A.4.5 (Fórmula de Liouville)**.** *Suponha que $E = E(t,s)$ é a função a valores vetorias (matrizes) do sistema* (A.28) *em $\mathbb{R}_+$. Então*

$$\det E(t,s) = detE(s,s)e^{i\int_s^t trA(r)dr}$$

para $0 \leq s,t$.

Demonstração. Veja em [12]. □

Lema A.4.6. *Suponha que $f : \mathbb{R}^n \setminus 0 \to \mathbb{C}$ é homogênea de grau m, isto é $f(\lambda\xi) = \lambda^m f(\xi)$ para $\lambda \neq 0$, e consideremos também que f é C^k para algum $k \geq 0$. Nesse caso, para todo multi-índice α, com $|\alpha| \leq k$, temos que para $\xi \neq 0$:*

$$\left|\partial^\alpha f(\xi)\right| \leq C_\alpha |\xi|^{m-|\alpha|}$$

Demonstração. Note que como f é contínua, ela tem um máximo C na esfera unitária, logo $|f(\xi)| = |\xi|^m |f(\frac{\xi}{|\xi|})| \leq C|\xi|^m$. Portanto o lema estará demonstrado se provarmos que $\partial^\alpha f$ é homogênea de grau $m - |\alpha|$. Como $f(\lambda\xi) = \lambda^m f(\xi)$, derivando em ξ temos $\lambda^{|\alpha|}\partial^\alpha f(\lambda\xi) = \lambda^m \partial^\alpha f(\xi)$, logo $\partial^\alpha f(\lambda\xi) = \lambda^{m-|\alpha|}\partial^\alpha f(\xi)$. □

Lema A.4.7. *Seja $\alpha < 1 < \beta$. Nesse caso temos que*

$$\int_0^t (t-s)^{-\alpha}(1+s)^{-\beta}ds \lesssim (1+t)^{-\alpha}.$$

Demonstração. Veja em [14]. □

Teorema A.4.8. *Seja $A(t) \in L^1_{loc}\big(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{n\times n}\big)$. Então a solução fundamental $\mathcal{E}(t,s)$ de*

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{E}(t,s) = A(t)\mathcal{E}(t,s) \\ \mathcal{E}(s,s) = I \end{cases}$$

é dado pela fórmula de Peano-Baker

$$\mathcal{E}(t,s) = I + \sum_{k=1}^{\infty} \int_s^t A(t_1) \int_s^{t_1} A(t_2) \dots \int_s^{t_{k-1}} A(t_k)dt_k \dots dt_1.$$

Demonstração. Veja Yagdjian [93]. □

Proposição A.4.9. *Assuma $r \in L^1_{loc}(\mathbb{R},)$, então*

$$\Big|\sum_{k=1}^{\infty}\int_s^t r(t_1)\int_s^{t_1} r(t_2)\dots\int_s^{t_{k-1}} r(t_k)dt_k\dots dt_1\Big| \leq \frac{1}{k!}\Big(\int_s^t |r(\tau)|d\tau\Big)^k,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Veja Yagdjian [93]. □

Proposição A.4.10. *Sejam $1 < p, p_0, p_1 < \infty$ e $\sigma \in [0, \sigma_1)$. Nesse caso temos a desigualdade fracionária de Gagliardo-Nirenberg a seguir:*

$$\|u\|_{\dot{H}^{\sigma,p}} \lesssim \|u\|^{1-\theta}_{L^{p_0}}\|u\|^{\theta}_{\dot{H}^{\sigma_1,p_1}},$$

onde

$$\theta = \theta_{\sigma,\sigma_1}(p,p_0,p_1) = \frac{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}+\frac{\sigma}{n}}{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}+\frac{\sigma_1}{n}} \text{ and } \frac{\sigma}{\sigma_1} \leq \theta \leq 1.$$

Bibliografia

[1] M. Abramowitz; I.A. Stegun, Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical table, Dover New York. **2172**, (1965).

[2] Arnold, Anton and Kim, JinMyong and Yao, Xiaohua, Estimates for a class of oscillatory integrals and decay rates for wave-type equations. Journal of mathematical analysis and applications. Elsevier. **394**, n.1, (2012), 139–151.

[3] J. Bergh, J.Löfström, Interpolation spaces, an introduction. Bull. Amer. Math. Soc. 84 (1978), no. 1, 110–113.

[4] T. Bao Ngoc Bui. Semi-linear waves with time-dependent speed and dissipation. Ph.D. Thesis, TU Bergakademie Freiberg. (2013) 154pp.

[5] C. Böhme, Decay rates and scattering states for wave models with time-dependent potential, Ph.D. Thesis, TU Bergakademie Freiberg, 2011, 143pp.

[6] C. Böhme; F. Hirosawa, Generalized energy conservation for Klein-Gordon type equations, Osaka Journal of Mathematics. Osaka University and Osaka City University, Departments of Mathematics, Vol. 49, n.2, (2012), 297–323.

[7] C. Böhme, M. Reissig, A scale-invariant Klein-Gordon model with time-dependent potential, Ann. Univ. Ferrara. **58**, n.2 (2012), 229–250.

[8] C. Böhme, M. Reissig, Energy bounds for Klein-Gordon equations with time-dependent potential, Ann. Univ. Ferrara. **59** (2013), 31–55.

[9] P. Brenner, On $L^p - L^{p'}$ estimates for the wave-equation, Mathematische Zeitschrift **145** (1975), 251-254.

[10] H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. (2010).

[11] T. Cazenave; A. Haraux, Introduction to semilinear evolution equations, Oxford University Press on Demand.**13**, (1998).

[12] Earl A. Coddington; Robert Carlson, Linear Ordinary Differential Equations. (1997).

[13] F. Colombini, Energy estimates at infinity for hyperbolic equations with oscillating coefficients, Journal of Differential Equations. **231**, (2006) 598–610.

[14] M. D'Abbicco and M. R. Ebert, A new phenomenon in the critical exponent for structurally damped semi-linear evolution equations, **149**, (2017) 1-40.

[15] M. D'Abbicco; S. Lucente, The beam equation with nonlinear memory, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. **67**, (2016).

[16] L. D'Ambrosio, S. Lucente, Nonlinear Liouville theorems for grushin and tricomi operator, J. Diff. Equa. **193**, n.2, (2003), 511-541.

[17] Y. Ding, X. Yao, $L^p \breve{} L^q$ estimates for dispersive equations and related applications, J. Math. Anal. Appl. **356** (2009), 711–728.

[18] M. R. Ebert, L. M. Lourenço, The critical exponent for evolution models with power non-linearity. Submitted.

[19] M. R. Ebert; R. A. Kapp; W. N. Nascimento; M. Reissig, Klein-Gordon type wave models with non-effective time-dependent potential, in Analytic Methods of Analysis and Differential Equations, ed. by M.V. Dubatovskaya, S.V. Rogosin. AMADE 2012 (Cambridge Scientific Publishers, Cambridge, 2014), 143–161.

[20] M. R. Ebert; W. N. Nascimento, A classification for wave models with time-dependent potential and speed of propagation, Advances in Differential Equations, (2018).

[21] M. R. Ebert, M. Reissig, Theory of Damped wave models with integrable and decaying in time speed of propagation, Journal of Hyperbolic Differential Equations. **13**, n.2, (2016), 417-439.

[22] M. R. Ebert, M. Reissig, Methods for Partial Differential Equations (Qualitative Properties of Solutions, Phase Space Analysis, Semilinear Models), Birkhäuser Basel, (2018).

[23] Fefferman, Charles and Stein, Elias M, H^p spaces of several variables, Acta mathematica. Springer, **129**, n.1, (1972), 137–193.

[24] H. Fujita, *On the blowing up of solutions of the Cauchy Problem for* $u_t = \triangle u + u^{1+\alpha}$, J. Fac.Sci. Univ. Tokyo **13** (1966), 109-124.

[25] A. Galstian; T. Kinoshita; K. Yagdjian, A note on wave equation in Einstein and de Sitter space-time, Journal of Mathematical Physics.**51** (2010).

[26] A. Galstian; K. Yagdjian, Finite lifespan of solutions of the semilinear wave equation in the Einstein-de Sitter spacetime. arXiv:1612.09536 [math-ph] (2017).

[27] V. Georgiev, H. Lindblad, C.D.Sogge, Weighted Strichartz estimates and global existence for semilinear wave equations, Am.J. Math. **119** (1997), 1291-1319.

[28] J. Ginibre and G. Velo. On the class of nonlinear Schrödinger equations, J. Funct. Anal. **32** (1979), 1–32, 33–72.

[29] R.T Glassey, Existence in the large for $\Box u = F(u)$ in two space dimensions, Math. Z. **178** (1981), 233-261.

[30] R. T. Glassey *Finite-time blow-up for solutions of nonlinear wave equations*, Math.Z. **177** (1981) 3, 323–340.

[31] Guo, Ai; Cui, Shangbin, Solvability of the Cauchy problem of nonlinear beam equations in Besov spaces, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. **65**, (2006), 802–824.

[32] Y. Hong and Y. Sire. On fractional schrödinger equations in Sobolev spaces. Commun. Pure Appl. Anal., 14(6):2265–2282, 2015.

[33] Hirschman Jr, On multiplier transformations, Duke Mathematical Journal. **26**, n.2, (1959), 221–242.

[34] F. Hirosawa, On the asymptotic behavior of the energy for the wave equations with time depending coefficients. Mathematische Annalen, Vol.339, n.4, (2007), 819–838.

[35] L. Hörmander, Estimates for translation invariant operators in L^p spaces, Vol 104 of Acta Mathematica, Acta Math. 104 (1960), no. 1-2, 93–140.

[36] L. Hörmander, Lectures on nonlinear hyperbolic differential equations, Vol 26 of Mathématiques and Applications, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[37] R. Ikehata, M. Ohta, *Critical exponents for semilinear dissipative wave equations in* $\mathbb{R}^N$, J. Math. Anal. Appl. 269 (2002), 87–97.

[38] R. Ikehata, K. Tanizawa, *Global existence of solutions for semilinear damped wave equations in* R^N *with noncompactly supported initial data*, Nonlinear Analysis **61** (2005), 1189–1208.

[39] Ishii, Hitoshi, On some Fourier multipliers and partial differential equations, Math. Japon. **19**(1974), 139–163.

[40] F. John, *Blow-up of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions*, Manuscripta Math. **28** (1979) 1-3, 235–268.

[41] J. Kevorkian ; J. D. Cole, Multiple scale and singular perturbation methods. Springer. (1996), ISBN 0-387-94202-5.

[42] M. Keel and T. Tao, Small Data Blow-up for Semi-linear Klein-Gordon Equations, Amer.J.Math. **121** (1997), 629-669.

[43] L. D. Landau; E. M. Lifshitz, Course of theoretical physics III: Quantum mechanics, Non-relativistic theory (3rd ed.), Pergamon Press, (1977) p. 569

[44] N. Laskin. Fractional Schrödinger equation. Phys. Rev. E (3), 66(5):056108, 7, 2002.

[45] S. P. Levandosky. Decay estimates for fourth order wave equations. Journal of diferential equations, **143** (1998), 360–413.

[46] S.P. Levandosky, Stability and instability of fourth-order solitary waves, J. Dynam. Differential Equations **10** (1998), 151–188.

[47] S.P. Levandosky, W.A. Strauss, Time decay for the nonlinear beam equation, Methods Appl. Anal. **7** (2000) 479–488.

[48] F. Linares, G. Ponce, Introduction to Nonlinear Dispersive Equations, Springer, 2009.

[49] H. Lindblad, C.D.Sogge, On existence and Scattering with minimal regularity for semilinear wave equations, J. Funct. Anal. **130** (1995), 357-426.

[50] H. Lindblad, C.D.Sogge, Long-time existence for small amplitude semilinear wave equations, Am. J. Math. **118** (1996), 1047-1135.

[51] H. Lindblad and D. Sogge, Restriction theorems and semilinear Klein-Gordon equations in $(1+3)$-dimensions, Duke Math. J., **85** (1996), 227-252.

[52] W. Littman, Fourier transforms of surface-carried measures and differentiability of surface averages, Bulletin of the American Mathematical Society. Vol. 69, n. 6, (1963), 766–770.

[53] B. Marshall, W. Strauss, S. Wainger, $L^p - L^q$ estimates for the Klein-Gordon equation. J. Math. Pures Appl. 59 (1980), 417–440.

[54] A. Miyachi, On some estimates for the wave equation in L^p and H^p, Journal of the Faculty of Science, the University of Tokyo. Sect. 1 A, Mathematics, **27**, n.2, (1980), 331–354.

[55] A. Miyachi, On some Fourier multipliers for $H^p(\mathbb{R}^n)$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math, **27**, n.1, (1980), 157–179.

[56] A. Miyachi, On some singular Fourier multipliers, Journal of the Faculty of Science, the University of Tokyo. Sect. 1 A, Mathematics, **28**, n.2, (1981), 267–315.

[57] S. Mizohata, On the Cauchy Problem (Academic, New York, 1985).

[58] W. N. Nascimento, Klein-Gordon models with non-effective potential, PhD thesis, Universidade Federal de São Carlos/Technical University Bergakademie Freiberg, (2016), 183pp.

[59] A.C. Newell. Solitons in Mathematics and Physics, Regional Conference series in Applied Math. **48**, SIAM, 1985.

[60] F. W. Olver; D.W. Lozier; R.F. Boisvert; C. W. Clark, NIST Handbook of Mathematical Functions, National Institute of Standards and Technology (US Department of Commerce), (2010).

[61] A. Palmieri, Linear and non linear sigma-evolution equations, Master-Thesis, UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BARI, (2015), 105pp.

[62] B. Pausader, Scattering and the Levandosky–Strauss conjecture for fourth-order nonlinear wave equations, journal of diferential equations, **241** (2007), 237-278.

[63] J. Schaeffer, The equation $u_{tt} - \Delta u = |u|^p$ for the critical value of p. Proc. R. Soc Edinb. Sect. A **101** (1985), 31-44.

[64] H. Pecher, L^p-Abschätzungen und klassische Lösungen für nichtlineare Wellengleichungen. I, Mathematische Zeitschrift. Springer, Vol. 150, (1976), 159–183.

[65] J. Peral, L^p estimates for the Wave Equation, J. Funct. Anal. **36** (1980), 114–145.

[66] R. Racke, Lectures on nonlinear evolution equations, Initial value problems, Aspect of Mathematics E. Springer, **19**, (1992),

[67] M. Reissig, *Optimality of the Asymptotic Behavior of the Energy for Wave Models*, Modern Aspects of the Theory of Partial Differential Equations, Operator Theory: Advances and Applications. Editors M. Ruzhansky, J. Wirth. Springer, Basel (2011), 291–315.

[68] M. Reissig, C. Reuther, $L^p - L^q$ *decay estimates for Klein-Gordon models with effective mass*, Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ. **4** (2012), 323–362.

[69] G. F. Roach, An introduction to linear and nonlinear scattering theory, Routledge. (2017)

[70] M. Ruzhansky, J. Smith, *Dispersive and Strichartz Estimates for Hyperbolic Equations with Constant Coefficients*, in: MSJ Memoirs **22**, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2010.

[71] A. Scott, F. Chu, and D. McLaughlin. The soliton: a new concept in applied science, Proc. IEEE **97** (1973), 1143–1183.

[72] T.C. Sideris, Nonexistence of global solutions to semilinear wave equations in high dimensions, J. Differ. Equ, **52** (1984), 378-406.

[73] S. Sjöstrand, On the Riesz means of the solutions of the Schrödinger equation. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze, Vol. 24, n. 2(1970) 331–348.

[74] C. Sogge, L^p estimates for the wave equation and applications. Journées "Équations aux Dérivées Partielles" (Saint-Jean-de-Monts, 1993), Exp. No. XV, 12 pp., École Polytech., Palaiseau, 1993.

[75] E. M. Stein, Interpolation of linear operators, Transactions of the American Mathematical Society, JSTOR. **83** (1956), 482–492.

[76] E. M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions (PMS-30), Princeton university press. **30**, 1970.

[77] E. M. Stein, Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces (PMS-32), Princeton university press. **32**, 1971.

[78] E. M. Stein, Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals.(PMS-43), Princeton University Press, **43**, 1993.

[79] W.A. Strauss, Nonlinear Scattering Theory at low energy, J. Funct. Anal. **41** (1981), 110-133.

[80] W.A. Strauss, *Nonlinear wave equations*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, **73**, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1989.

[81] W. Strauss, Nonlinear scattering at low energy, J. Funct. Anal. **41** (1981) 110–133

[82] T. Tao, A (Concentration-)Compact Attractor for High-dimensional. Non-linear Schrödinger Equations, Dynamics of PDE, Vol.4, No.1,(2007), 1-53.

[83] R. S. Strichartz, Convolutions with kernels having singularities on a sphere, Transactions of the American Mathematical Society. **148**, n.2, (1970), 461–471.

[84] R. S. Strichartz, A priori estimates for the wave equation and some applications, Journal of Functional Analysis. Elsevier. **5**,(1970), 218–235.

[85] L. Tartar, An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces, Springer Science & Business Media. **3**, (2007).

[86] Van Duong Dinh. Well-posedness of nonlinear fractional Schrödinger and wave equations in Sobolev spaces. 2017. <hal-01426761v2>

[87] Y. Zhou, Blow up of solutions to semilinear wave equations with critical exponent in high dimensions. Chin. Ann. Math. Ser. **B28** (2007), 205-212.

[88] S. Wainger, Special trigonometric series in k dimensions, Amer Mathematical Society. **59**, (1965).

[89] Shuxin Wang, Well-posedness and Ill-posedness for the Nonlinear Beam Equation, Arxiv, online:http //arxiv.org/pdf/1306.6411v1:PDF.

[90] G. N. Watson. A treatise on the theory of Bessel functions. Cambridge University Press, (1922).

[91] X. Yao, Q. Zheng, Oscillatory integrals and L^p estimates for Schrödinger equations, J. Differential Equations **244** (2008), 741–752.

[92] B.T. Yordanov, Q.S. Zhang, Finite time blow-up up for critical wave equations in high dimensions. J. Funct. Anal. **231** (2006), 361-374.

[93] K. Yagdjian, Global existence in the Cauchy problem for nonlinear wave equations with variable speed of propagation. New trends in the theory of hyperbolic equations, Springer, (2005), 301–385.