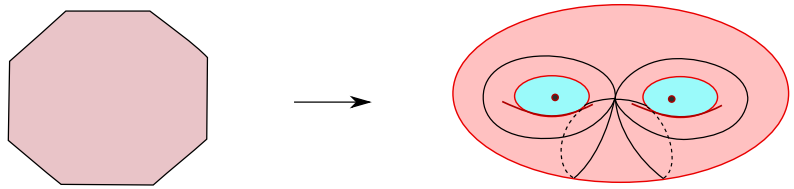
Emparelhamentos de Arestas de Polígonos Regulares



Catarina Mendes de Jesus

Departamento de Matemática
Universidade Federal de Juiz de Fora

- *Emparelhamentos de arestas de polígonos regulares*
- *Grafos de emparelhamentos de arestas*
- *Extensão e contração de grafos*
- *Emparelhamentos k- regulares*
- *Exemplos de emparelhamentos k-regulares*

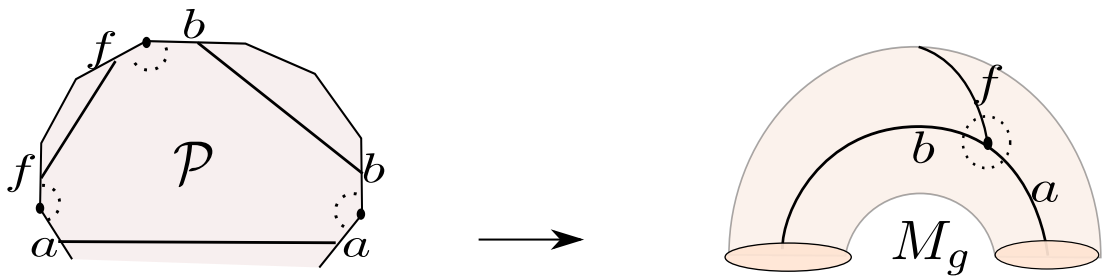
- *Emparelhamento de arestas de um polígono regular*

Emparelhamento de arestas

Seja $\mathcal{P}_n$ um polígono regular com n lados, M_g uma superfície com gênero g e $\phi : \mathcal{P}_n \longrightarrow M_g$ uma aplicação quociente que leva é tal que

- Duas ***arestas*** de $\mathcal{P}_n$ forma um ***arco de curva*** em M_g.
- k ***vértices*** de $\mathcal{P}_n$ formam um ***ponto*** em M_g.

Então a imagem do bordo de $\mathcal{P}_n$ corresponde a um grafo conexo $\mathcal{G}$ mergulhado em M_g.



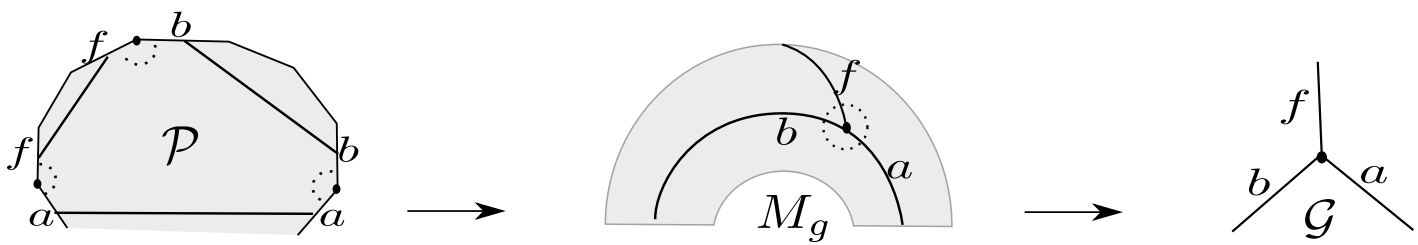
Se M_g é uma superfície fechada, então

- ϕ será dito ***emparelhamento de arestas***;
- $\mathcal{P}_n$ será dito ***polígono de emparelhamento*** de ϕ.

Emparelhamento de arestas

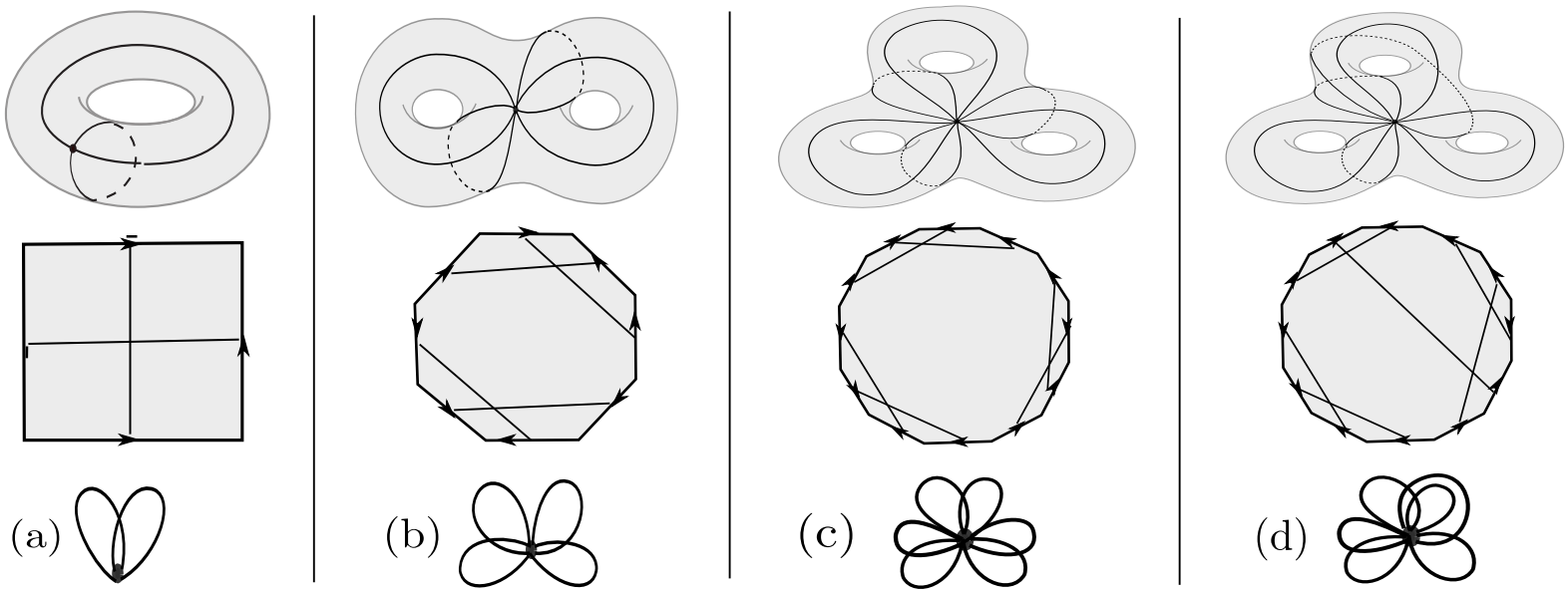
O grafo $\mathcal{G}$ mergulhado em M_g, formado pela imagem do bordo de $\mathcal{P}_n$ por ϕ é conexo, sendo que

- duas ***arestas*** de $\mathcal{P}_n$ forma uma arestas de $\mathcal{G}$ (arco de curva sobre M_g);
- k ***vértices*** de $\mathcal{P}_n$ formam um vértice de $\mathcal{G}$ (ponto em M).



Um segmento de reta sobre $\mathcal{P}_n$ indica o par de arestas identificado por ϕ sobre M_g.

O conjunto dos segmentos de retas sobre $\mathcal{P}_n$ é chamado de ***diagrama de emparelhamento***.

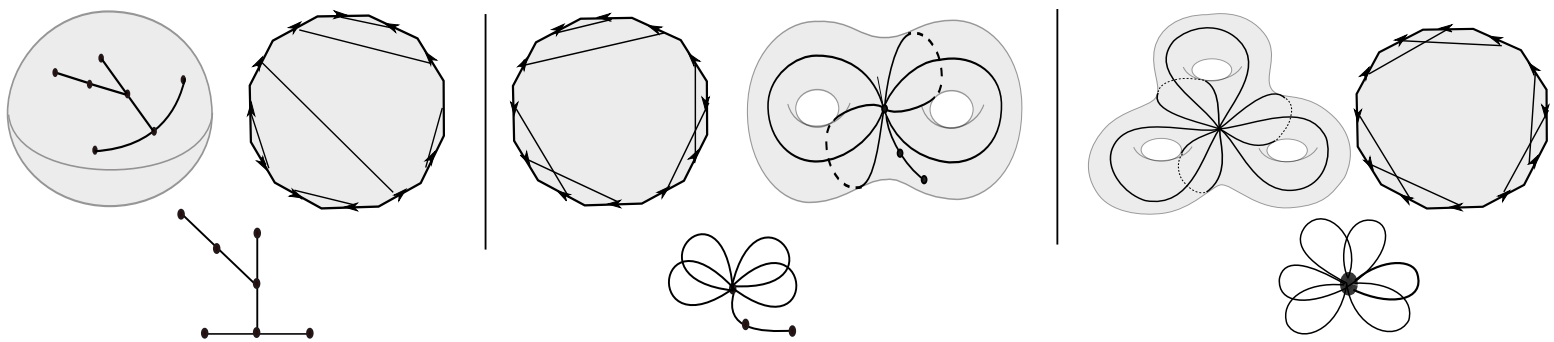


Identificação canônica sobre M_g, para $1 \leq g \leq 3$

Polígono de Emparelhamento de Arestas

$\mathcal{P}_n$ é um ***polígono de emparelhamento sobre a superfície*** M_g, se existe algum emparelhamento de arestas $\phi : \mathcal{P}_n \longrightarrow M_g$.

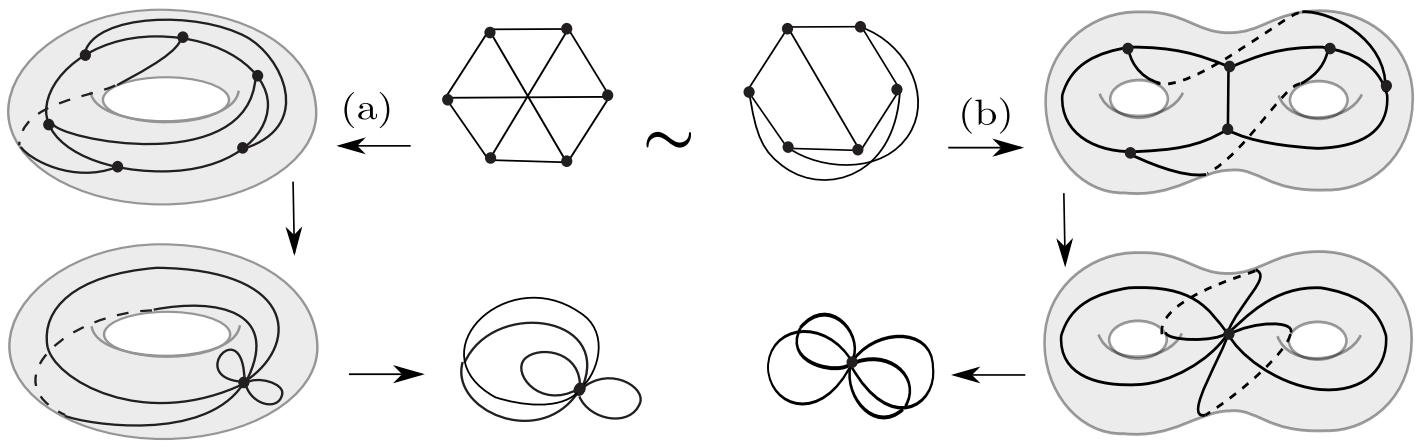
Afirmação: ***Todo polígono regular*** $\mathcal{P}_n$, ***com*** $n = 2A$ ***arestas no bordo*** $(A > 1)$ ***é polígono de emparelhamento sobre alguma superfície orientada e fechada com o gênero*** $g \leq \dfrac{A}{2}$.



Grafos de Emparelhamentos de Arestas

Grafo de Emparelhamento de Arestas

Um grafo conexo $\mathcal{G}$ ***mergulhado*** sobre a superfície fechada e orientada M_g será dito ***grafo de emparelhamento de arestas*** se o complemento $M_g \setminus \mathcal{G}$ é ***simplismente conexo*** (homeomorfa a um disco).



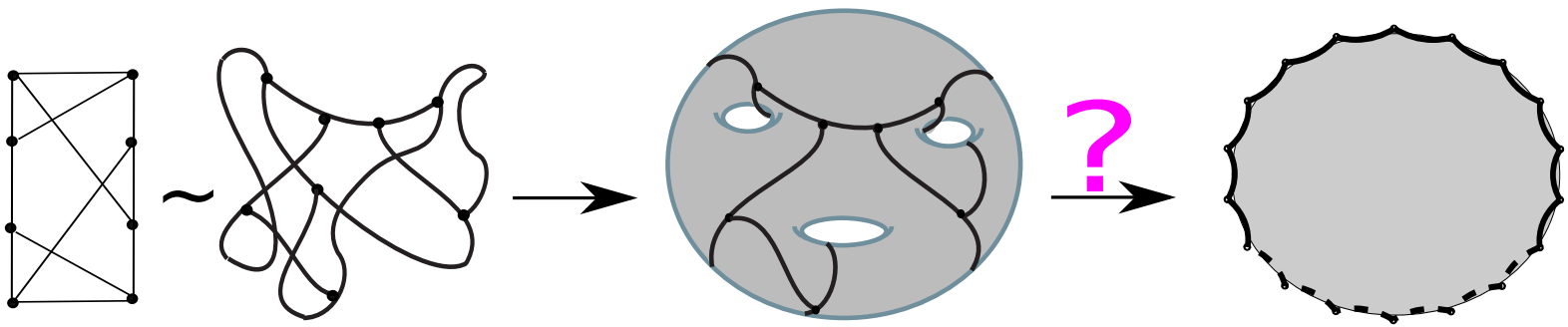
(a) não é grafo de emparelhamento de arestas sobre o toro, pois o complemento não é simplismente conexo.

(b) o complemento é simplismente conexo, portanto é grafo de emparelhamento de arestas.

Pergunta:

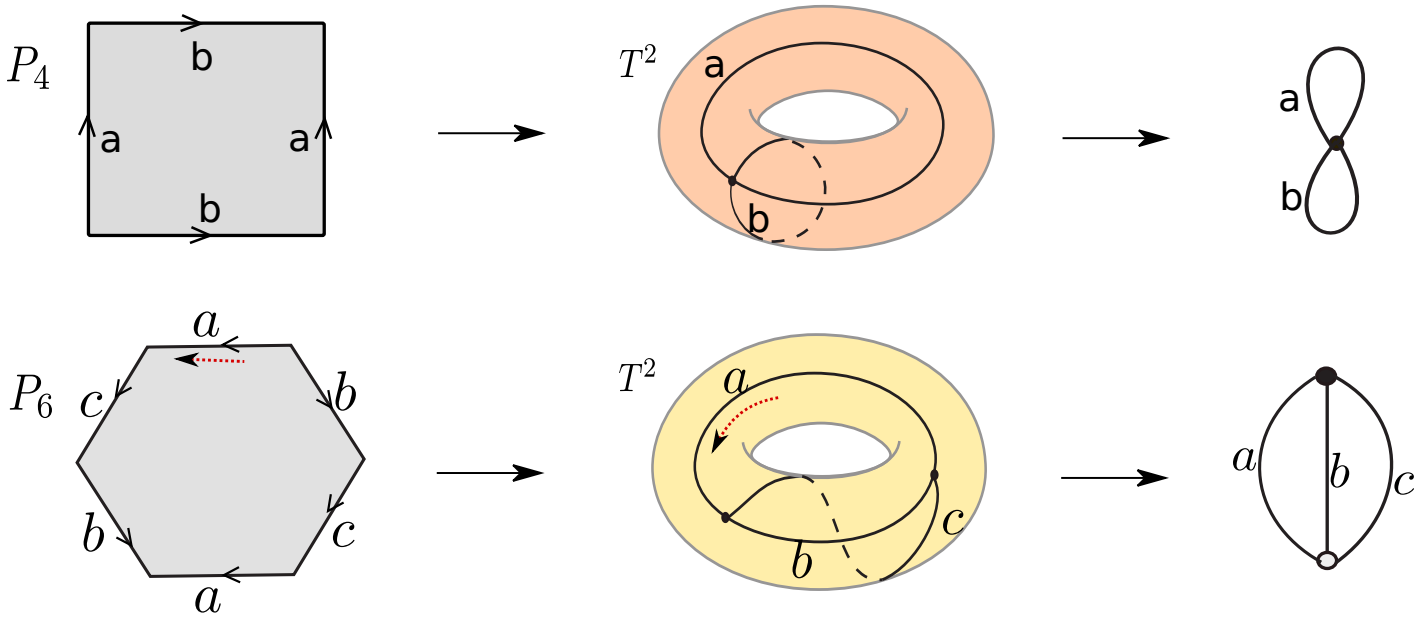
- *Quais grafos admitem mergulhos sobre M_g de maneira que o complemento $M_g \setminus \mathcal{G}$ seja simplismente conexo?*

- *Quantos diagramas de emparelhamento podem ser associado a um grafo de emparelhamento?*



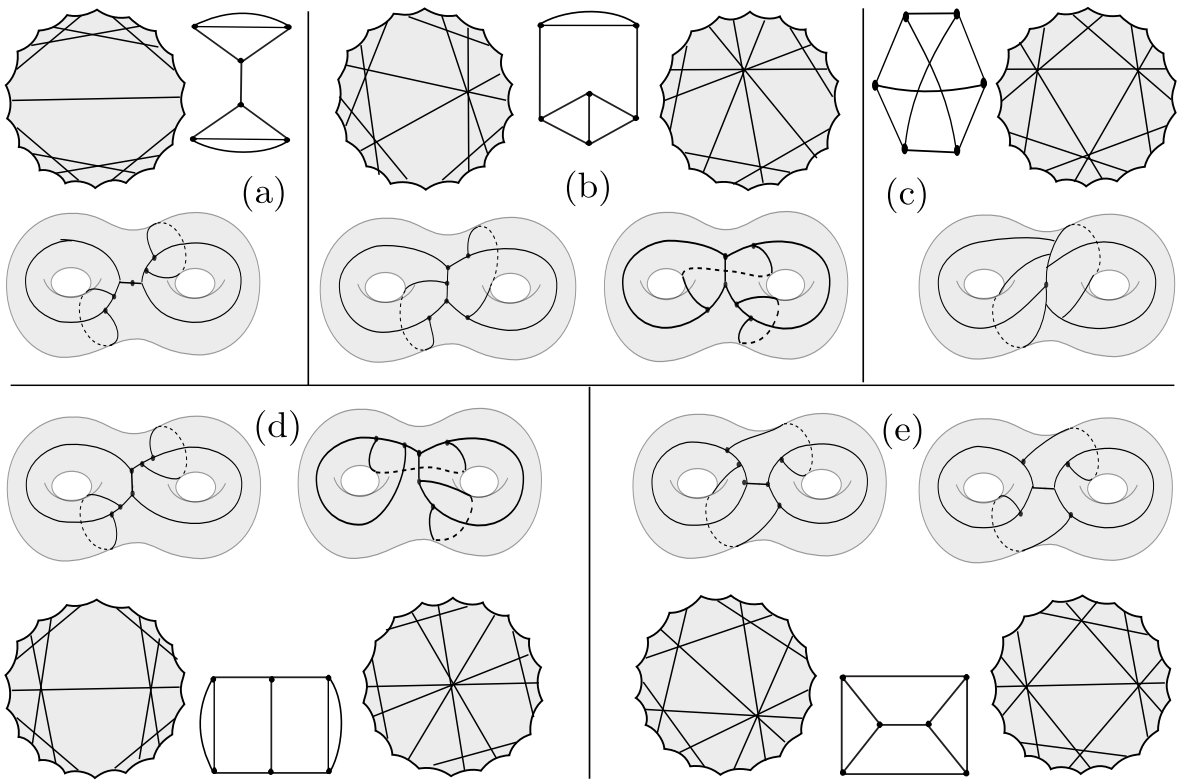
Grafo de Emparelhamento de Arestas

Possíveis emparelhamentos de arestas sobre o toro.



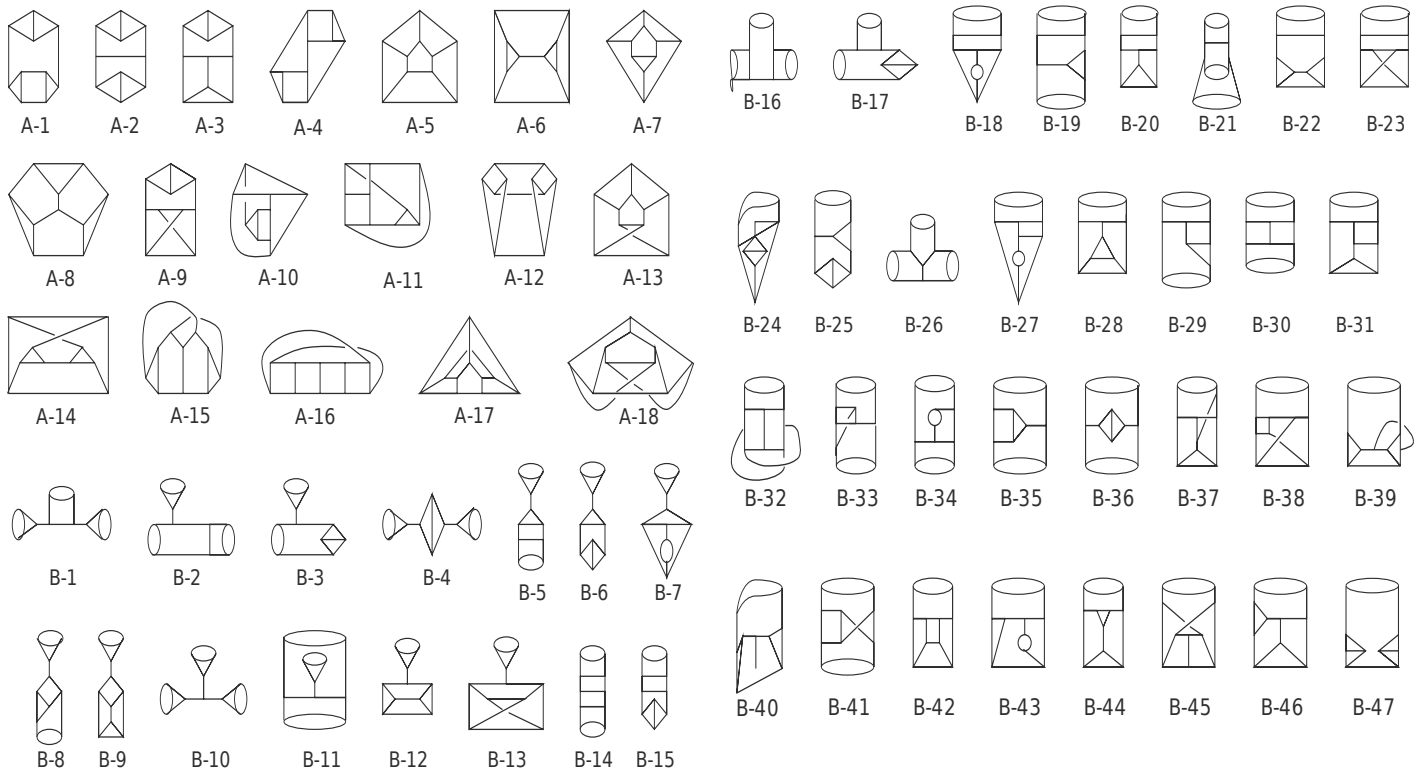
Bitoro: grafos trivalentes ($k = 3$)

(1982): T. JORGENSEN and M. NAATANEN, *Surfaces of genus 2: generic fundamental polygons*, *Quart. J. Math. Oxford Ser*



Tritoro: grafos trivalentes ($k = 3$)

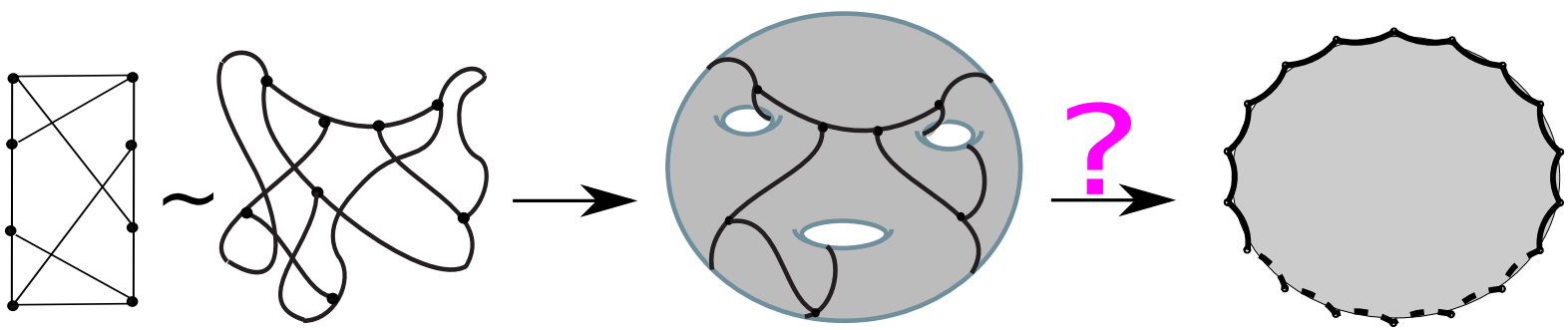
(2004): G. NAKAMURA, *Generic fundamental polygons for surfaces of genus three*, Kodai Math. J.



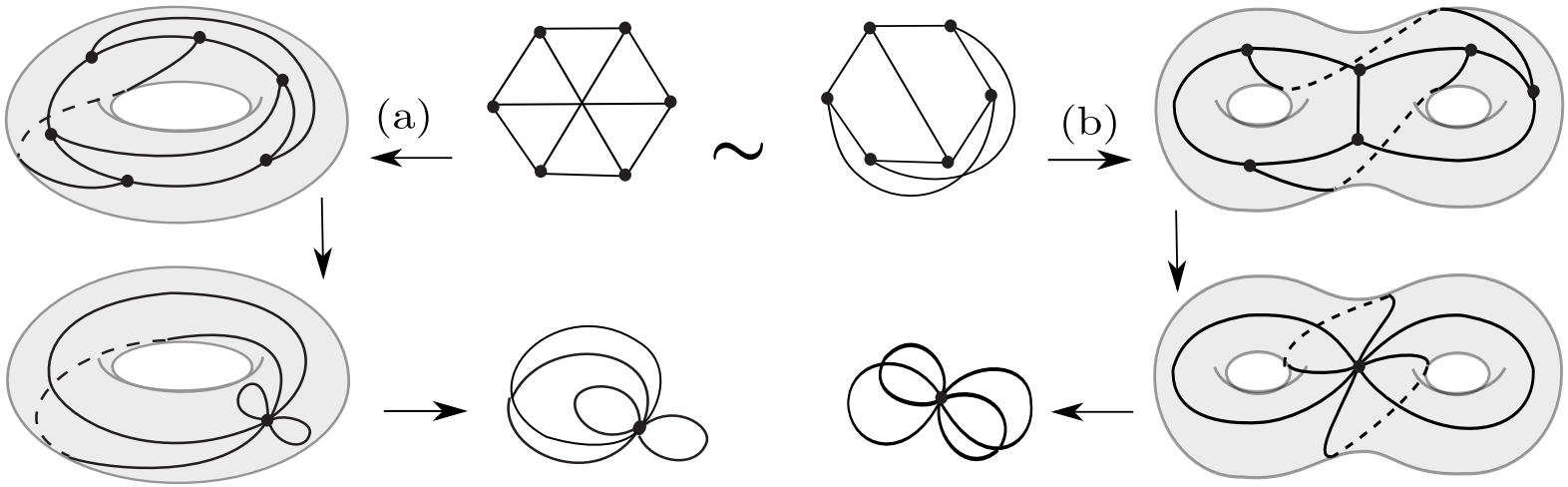
Pergunta:

- (Além dos grafos trivalentes e $g = 1, 2, 3$) ***Quais grafos admitem mergulhos sobre M_g de maneira que o complemento $M_g \setminus \mathcal{G}$ seja simplismente conexo?***

- ***Quantos diagramas de emparelhamento podem ser associado a um grafo de emparelhamento?***



Extensão e contração de grafos de sobre superfícies

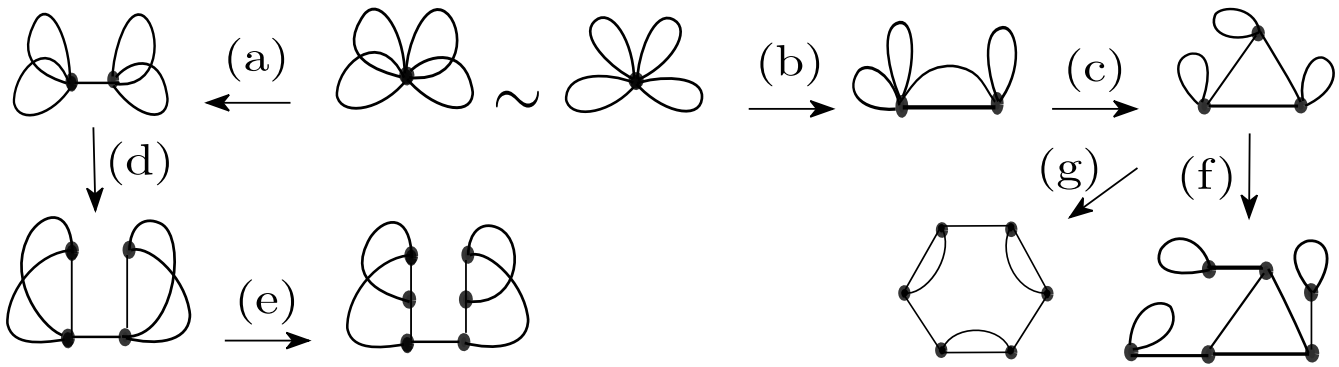


Exemplos de grafos com gênero 1.

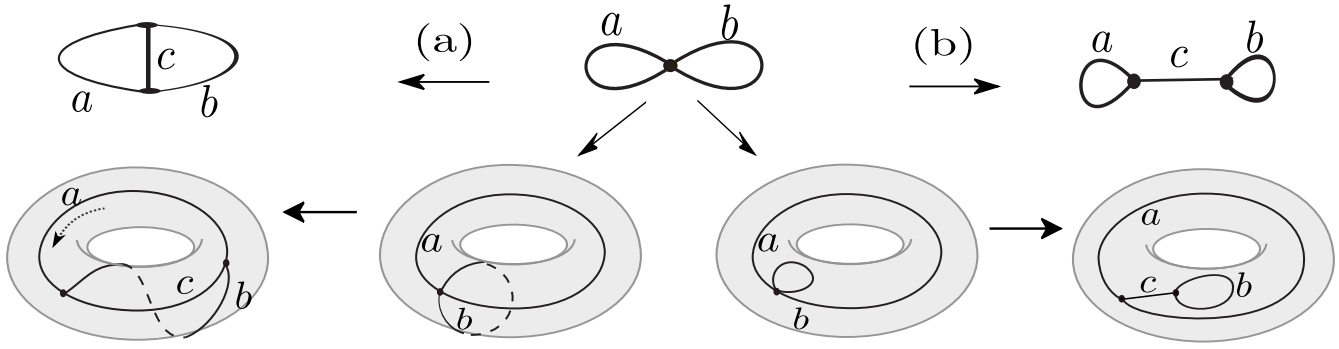
2019 (——-, P. D. Romero): *Graphs and closed surfaces associated with a pairing of edges for regular polygons, Bulletin of the Brazilian Mathematical Society.*

Extensão de grafos

Todo vértice v com grau maior que 3 pode ser "estirado" para obter dois novos vértices v_1 e v_2 e uma nova aresta $v_1 v_2$.

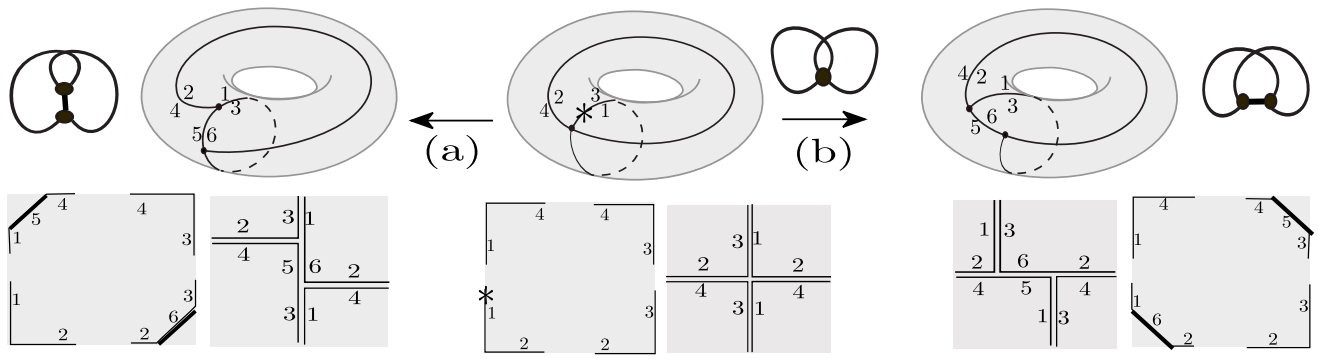


Extensão de grafos sobre uma superfície

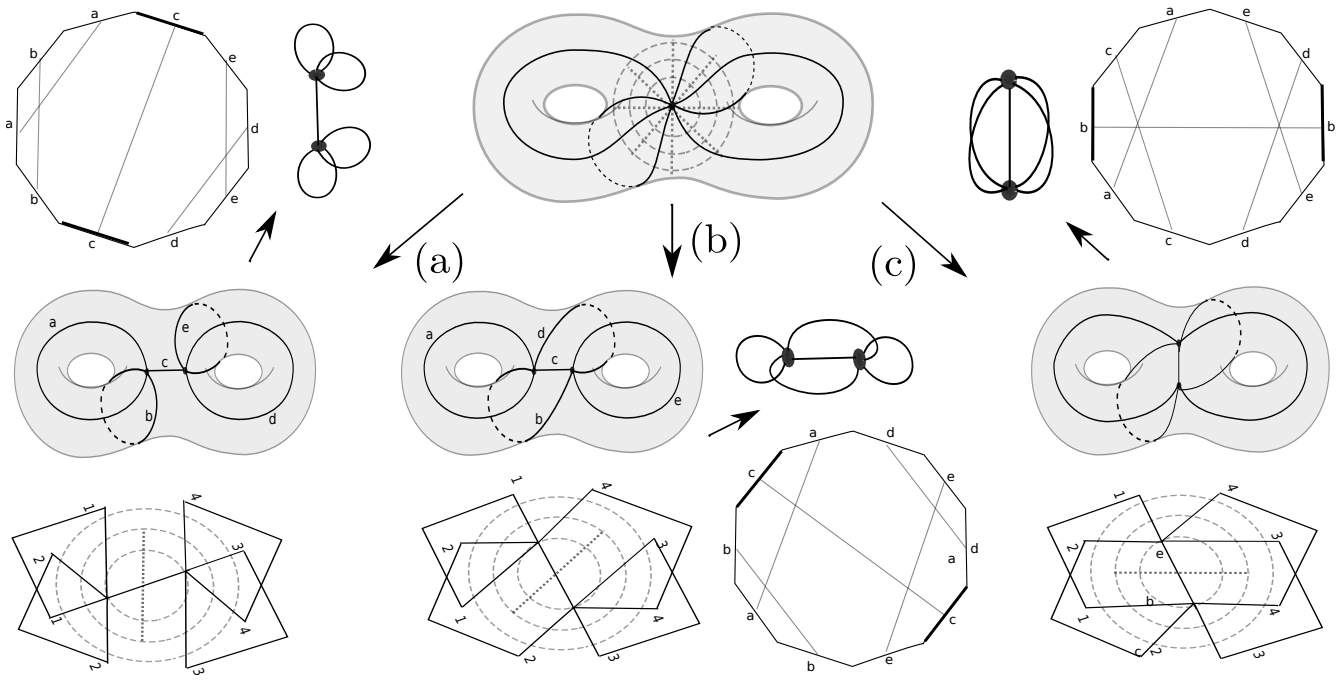


Extensão de grafo sobre o toro: $V = 2$

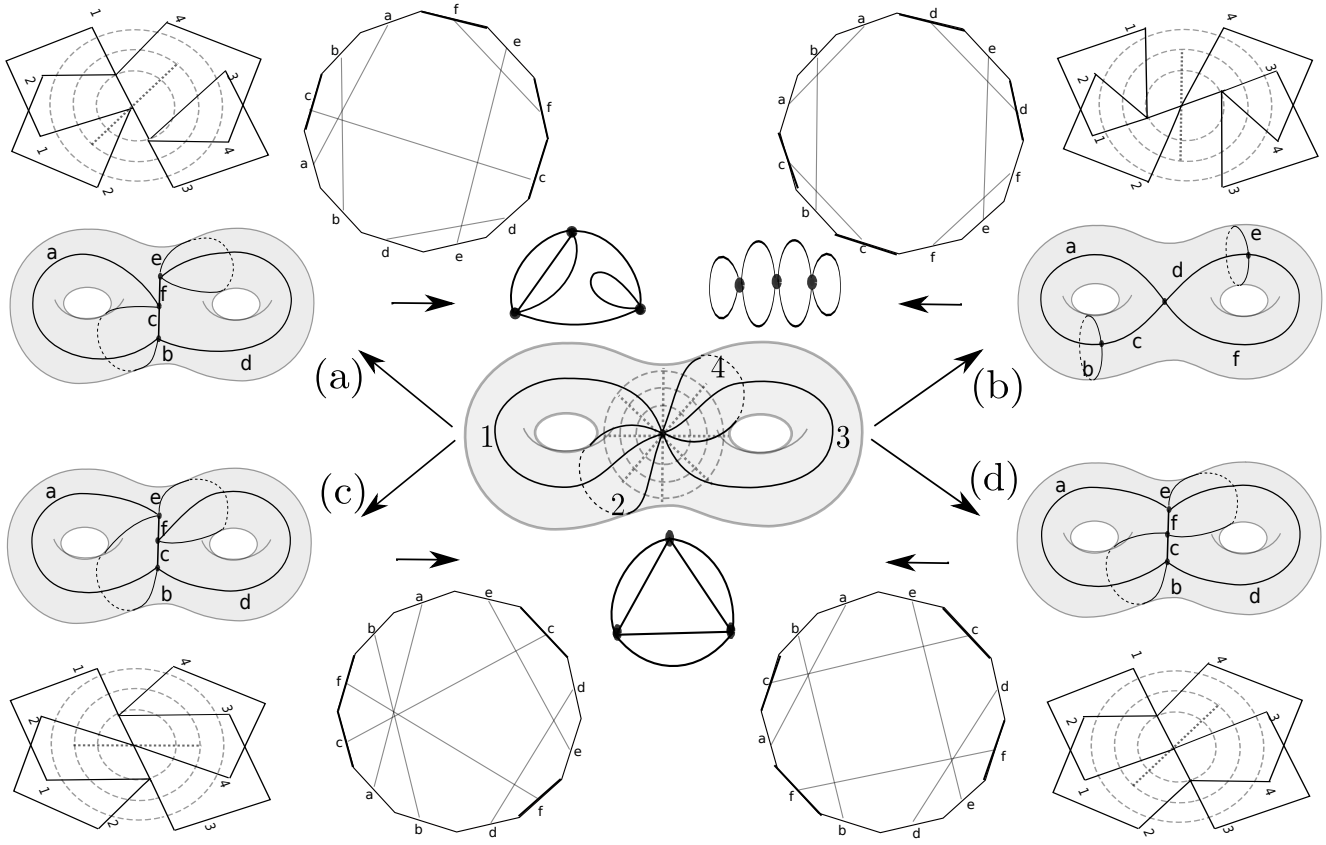
Grafos equivalentes sobre o toro.



Extensão de grafo sobre o bitoro: $V = 2$

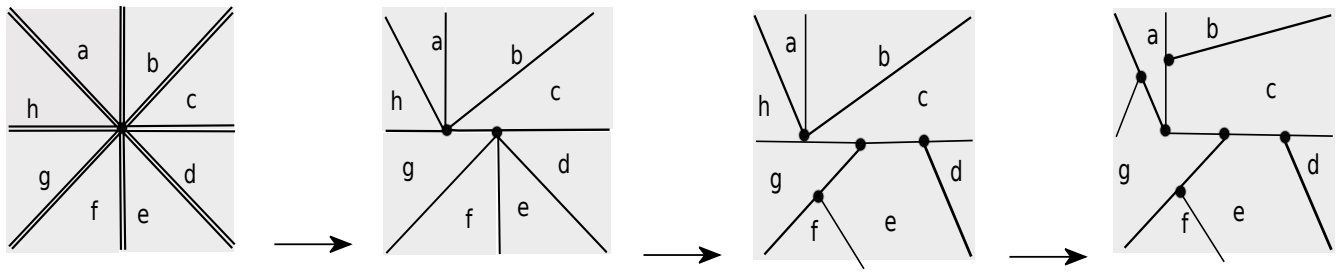


Extensão de grafo sobre o bitoro: $V = 3$



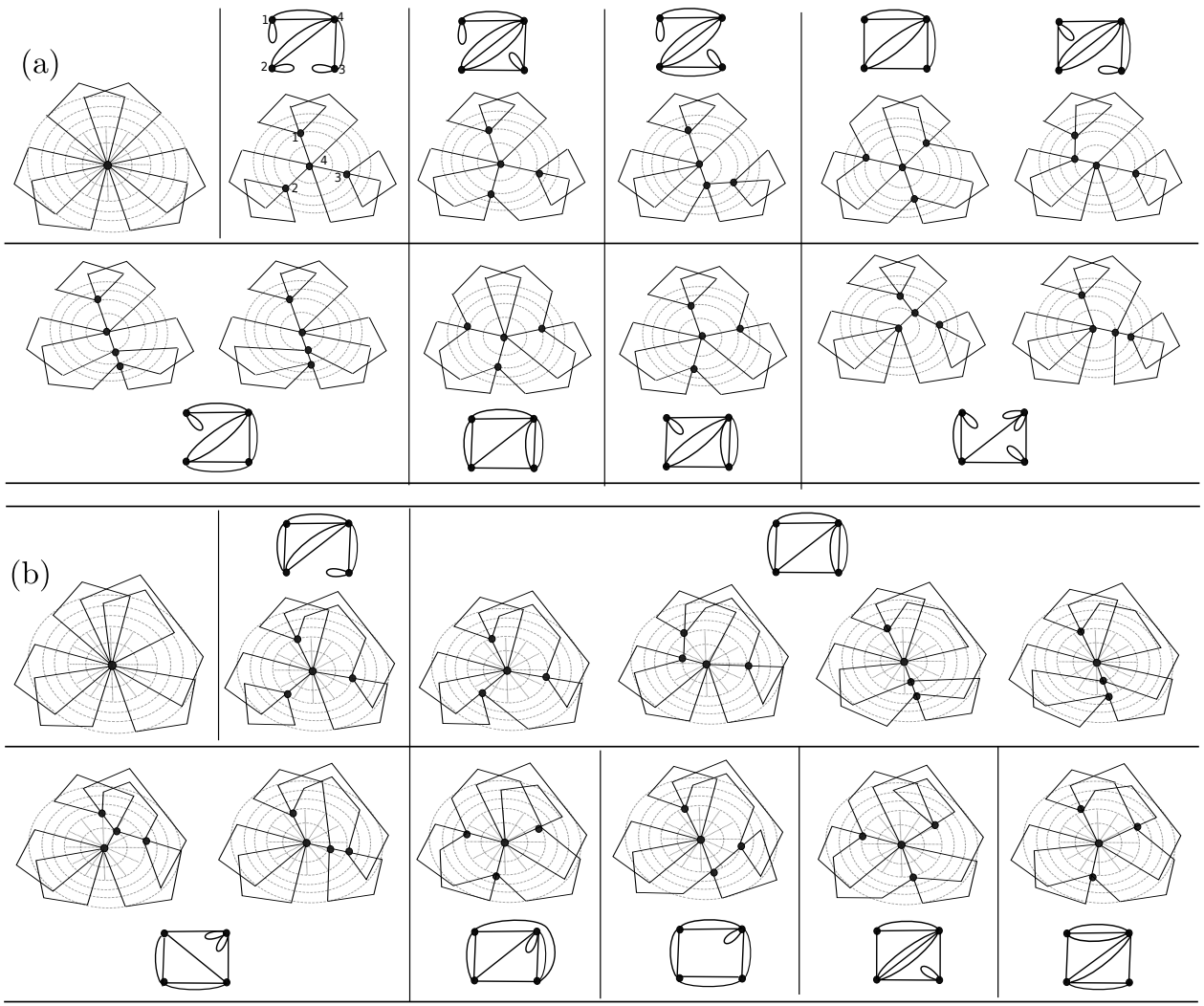
Extensão de grafo sobre superfície

Note que localmente a extensão de um vértice não altera a topologia do complemento do grafo sobre a superfície.



Consequentemente, a topologia do complemento do grafo não se altera com a extensão do grafo.

Grafos de emparelhamentos sobre o tritoro



Proposição: ***Seja $\mathcal{G}$ um grafo de emparelhamento de arestas sobre a superfície M_g. Todo grafo que pode ser obtido de $\mathcal{G}$ por extensão (ou contração) sobre M_g será um grafo de emparelhamento sobre M_g.***

Proposição: ***Seja $\mathcal{G}$ um grafo de emparelhamento de arestas sobre a superfície M_g. Todo grafo que pode ser obtido de $\mathcal{G}$ por extensão (ou contração) sobre M_g será um grafo de emparelhamento sobre M_g.***

Corolário: ***Todo grafo de emparelhamento com***

$$\beta = 1 - V + A$$

ciclos pode ser obtido por extensão de um grafo de emparelhamento com único vértice e β arestas sobre uma superfície fechada e orientada M_g, com

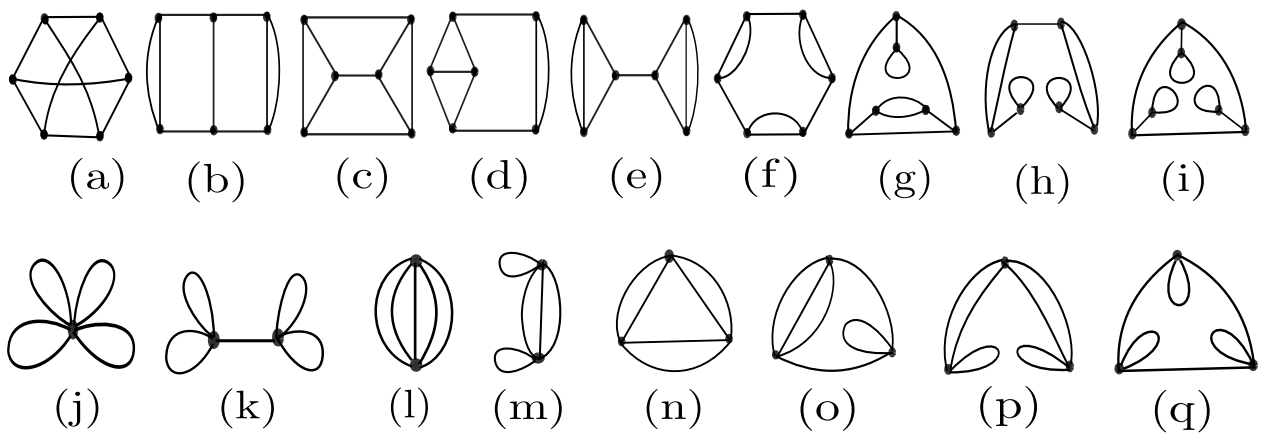
$$g = \frac{\beta}{2}.$$

Emparelhamentos com grafos k-regulares

Grafos k-regulares

Seja $\mathcal{G}$ um grafo com V vértices e A arestas:

- O ***grau*** de um vértice v corresponde o número de arestas que sai do vértice v.
- Um grafo é dito ***k-regular*** se todos os seus vértices tem grau igual k.



Dada uma superfície fechada e orientada M_g:

Perguntas:

- *Para quais inteiros k existem grafos de emparelhamento k-regulares?*
- *Fixado k, quantos grafos mergulhados sobre M_g são de emparelhamento k-regulares?*
- *Existem quantos emparelhamento para cada grafo k-regular?*

Para quais k existem emparelhamentos k-regulares?

Se $k = 1$, então $g = 0$. Neste caso $n = 2$ (não é polígono regular).

Se $k = 2$, então o grafo é homeomorfo ao círculo:

i) para $g = 0$, seu complemento na esfera não é conexo,

ii) para $g > 0$, seu complemento sobre M_g não é simplismente conexo.

Afirmação: ***Para $g > 0$, existem emparelhamentos $k-$regulares para $2 < k \leq 4g$.***

Grafos trivalentes: todos os vétices tem grau 3.

Relação entre g, V e A para grafos k-regulares

Seja $\mathcal{G}$ um grafo k-regular de emparelhamentos de arestas sobre M_g. Se G tem V vértices e A arestas, então
Então

- $F = 1$ ($M_g \setminus \mathcal{G}$ é simplismente conexo)
- $\chi(M_g) = 2 - 2g$,
- $\chi(M_g) = V - A + 1$,
- $kV = 2A$,

onde $\chi(M_g)$ denota característica de Euler satisfaz de M_g.
Das igualdades acima, ten-se $1 - 2g = V - A$ e

- $A = \dfrac{k(1-2g)}{2-k}$,
- $V = \dfrac{2(1-2g)}{2-k}$.

Proposição: *Se $\mathcal{P}_n$ é um polígono de emparelhamento K-regular associado ao par $(M_g, \mathcal{G})$, então*

$$(V, A) = \left(\frac{2(2g-1)}{k-2}, \frac{k(2g-1)}{k-2}\right).$$

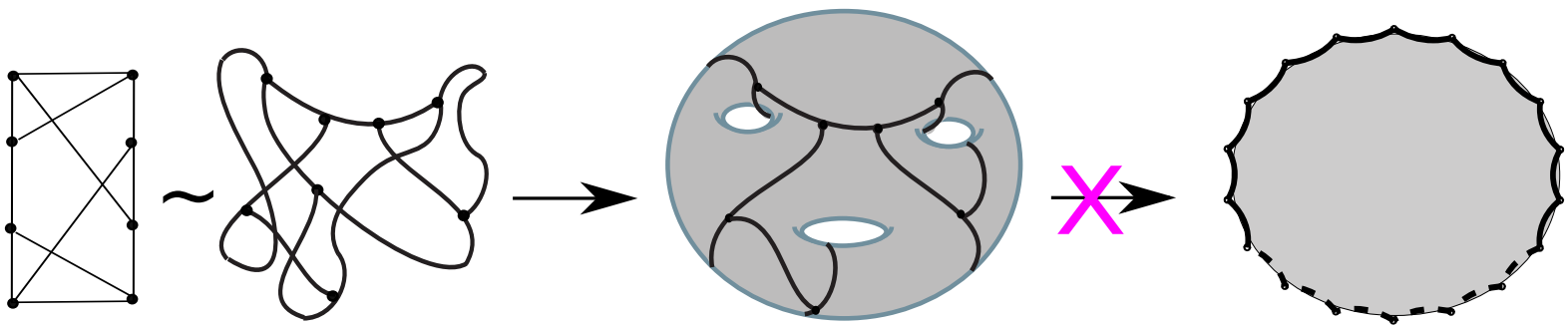
Corolário: *Dado um polígono $\mathcal{P}_n$, com $n = 12g - 6$ lados, sempre é possível obter um emparelhamento 3-regular (ou trivalente) sobre M_g.*

Relação entre g, V e A para grafos k-regulares

g	V	A	K	n
1	1	2	4	4
	2	3	3	6
2	1	4	8	8
	2	5	5	10
	3	6	4	12
	6	9	3	18
3	1	6	12	12
	2	7	7	14
	5	10	4	20
	10	15	3	30

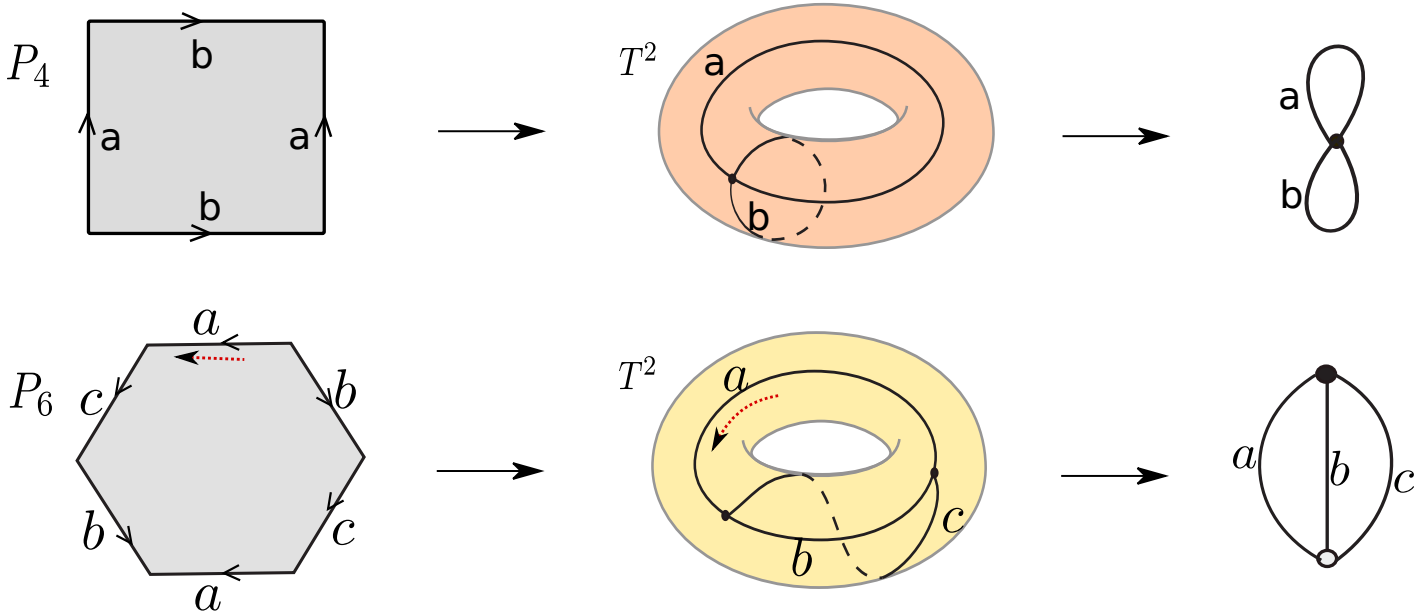
Para $g = 2$: $V = 1,\ 2,\ 5,\ 10$

Não existe a relação entre $g = 3$, $V = 8$, $A = 12$ e $k = 3$



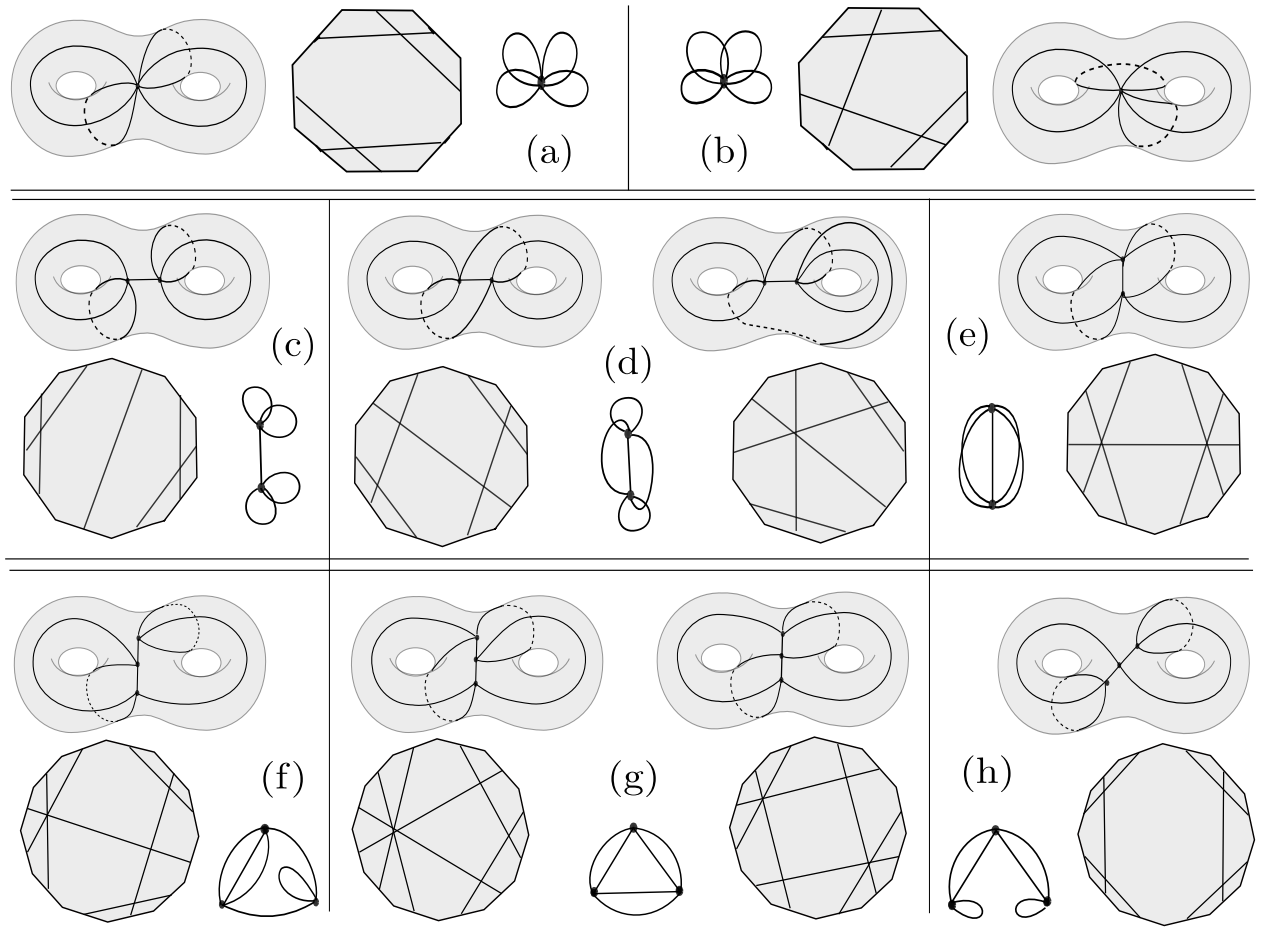
Para $g = 1$: $V = 1,\ 2$

Possíveis grafos para $g = 1$ e $V = 1,\ 2$



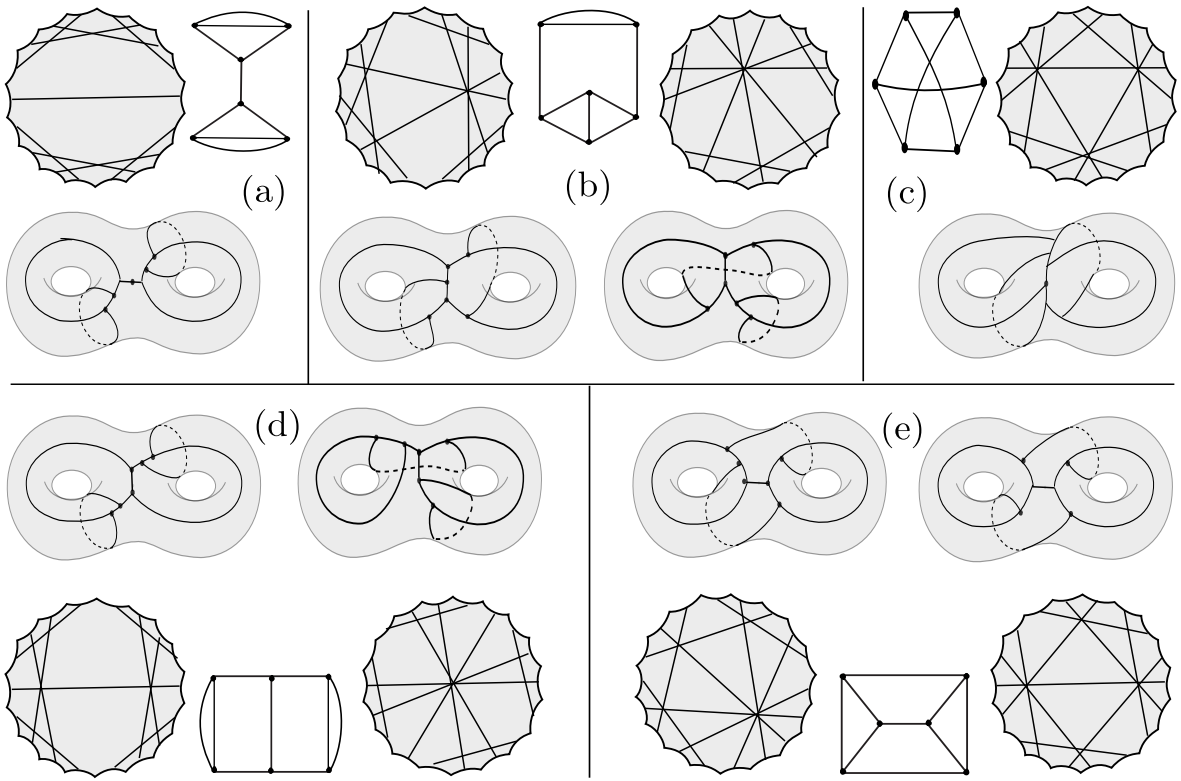
Para $g = 2$: $V = 1,\ 2,\ 3,\ 6$

Possíveis grafos para $g = 2$ e $V = 1,\ 2,\ 3$



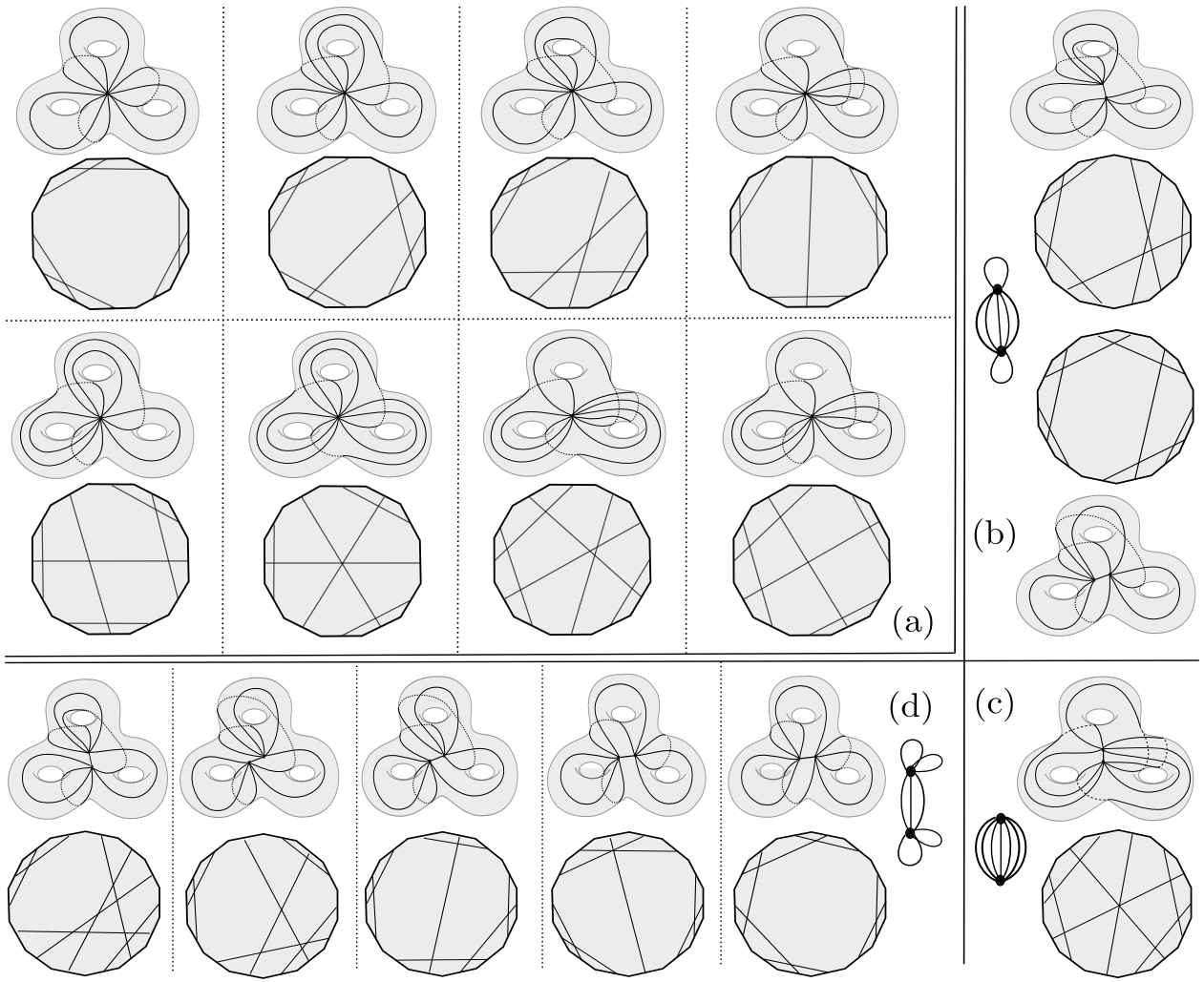
Para $g = 2$: $V = 1,\ 2,\ 3,\ 6$

Possíveis grafos para $g = 2$ e $V = 6$



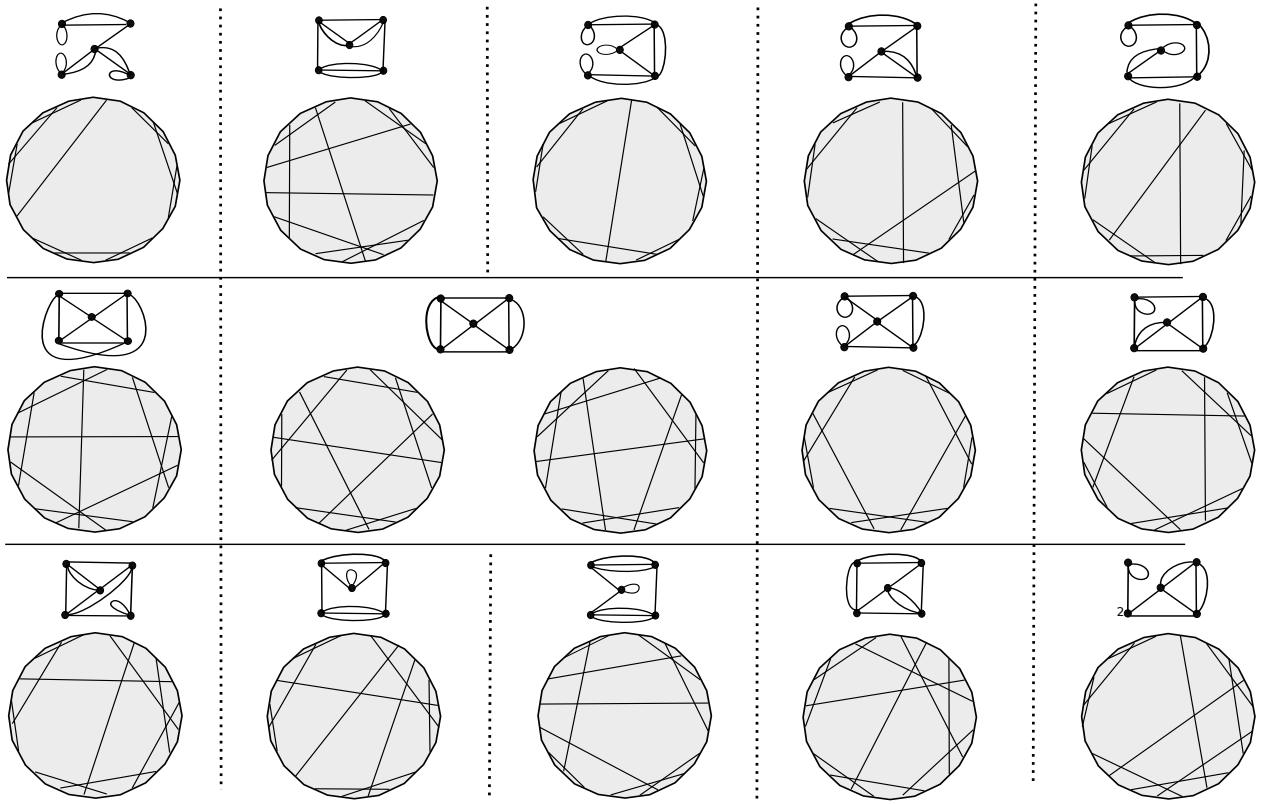
Para $g = 3$: $V = 1,\ 2,\ 5,\ 10$

Exemplos de grafos para $g = 3$ e $V = 1,\ 2$



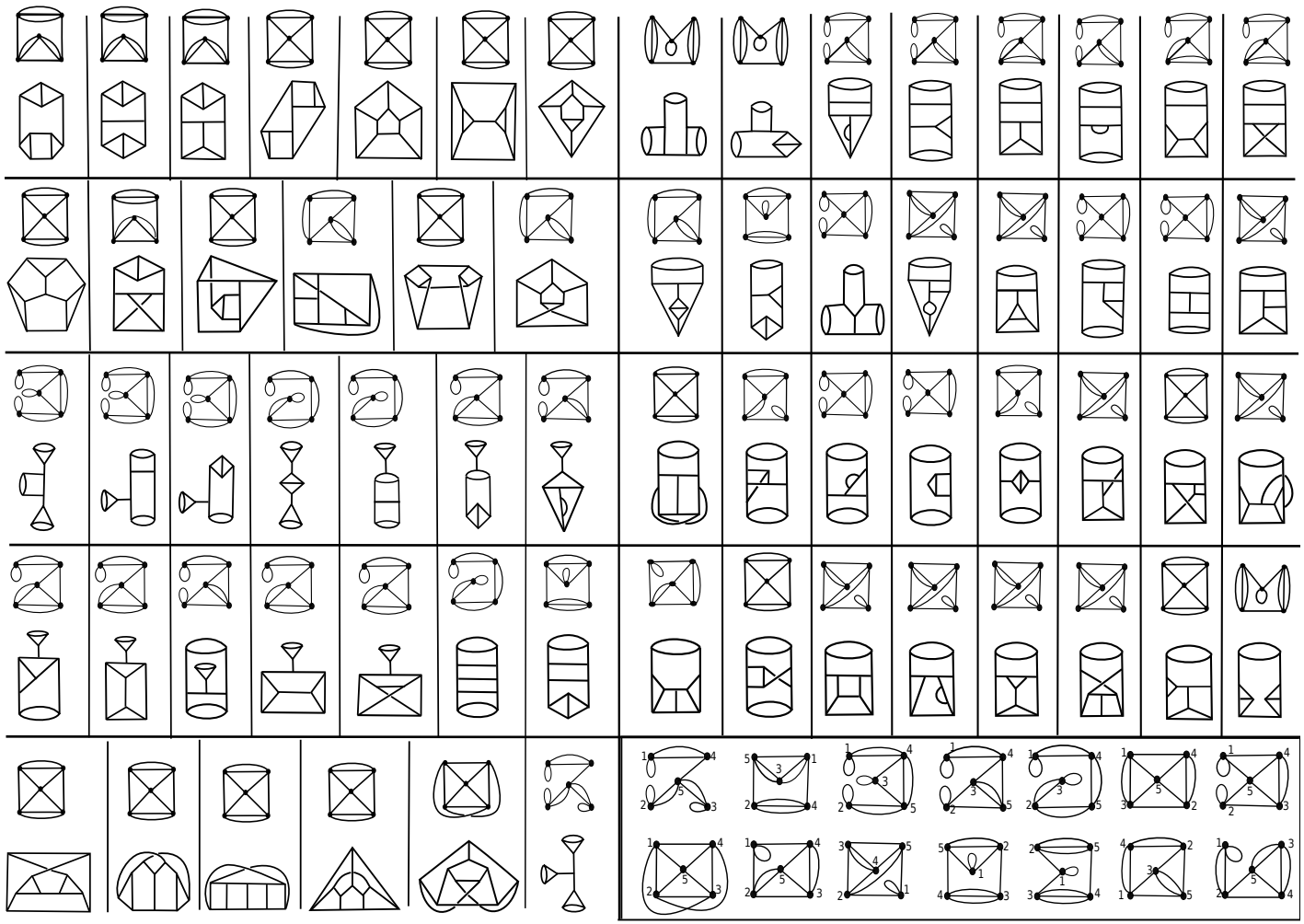
Para $g = 3$: $V = 1,\ 2,\ 5,\ 10$

Exemplos de grafos para $g = 3$ e $V = 5$



Para $g = 3$: $V = 1,\ 2,\ 5,\ 10$

Exemplos de grafos para $g = 3$ e $V = 10$ ($V = 5$)



Referências

1982: **T. Jorgensen** and **M. Naatanen**, Surfaces of genus 2: generic fundamental polygons, *Quart. J. Math. Oxford Ser*, 33 (1982)451-461.
Doi: 10.1093/qmath/33.4.451

2004: **G. Nakamura,** Generic fundamental polygons for surfaces of genus three, *Kodai Math. J.*, 27 (2004) 88-104.
Doi: 10.2996/kmj/1085143791

2010: **M. B. Faria** and **R. Palazzo Jr**, Emparelhamentos generalizados associados a tesselação (12g-6,3), *Tema Tend. Mat. Apl. Comp.*, 11 (2010) 59-67.
Doi: 10.5540/tema.2010.011.01.0059

2016: **M. B. Faria, C. Mendes de Jesus** and **P. D. R. Sanchez**, Surgeries of pairing of Edges associated to trivalent graphs, *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society*, New Series, 47 (2016) 1085-1095.
Doi: 10.1007/s00574-016-0205-3

2020: **C. Mendes de Jesus** and **P. D. R. Sanchez,** Graphs and closed surfaces associated with a pairing of edges for Regular Polygons, *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society*, 51 (2020) 527-541.
Doi: 10.1007/s00574-019-00163-y


Obrigada!