A propriedade de Borsuk-Ulam para classes de homotopia de funções entre superfícies

Vinicius Casteluber Laass
DMAT - IME - UFBA
e-mail: vinicius.laass@ufba.br

Trabalho em conjunto com

Daciberg Lima Gonçalves
IME - Universidade de São Paulo

John Guaschi
LMNO - Université de Caen Basse-Normandie

Bate-Papo Topológico Virtual – DM UFSCar
09 de Junho de 2020

Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre [1].

Von

Karol Borsuk (Warszawa).

Es seien M und N zwei metrische Räume, von denen mindestens einer kompakt ist. N^M bezeichnet den Raum, der als Elemente alle stetige Abbildungen φ von M in [2] N hat und der durch die Formel $\varrho(\varphi, \varphi') = \operatorname{Sup}_{x \in M} \varrho[\varphi(x), \varphi'(x)]$ [3] metrisiert ist. Je zwei, zu einer Komponente [4] der Menge $Z \subset N^M$ gehörende Funktionen werden *äquivalent in Z* genannt. Eine Abbildung $\varphi \in N^M$ heisst *wesentlich* [5], wenn jede mit φ in N^M äquivalente Abbildung M auf [2] N abbildet.

Mit S_n werde ich die euklidische n-dimensionale Sphäre, d. h. die Oberfläche einer Vollkugel im euklidischen $(n+1)$-dimensionalen Raume R^{n+1} bezeichnen. Ist p ein beliebiger Punkt der Sphäre S_n, so bezeichnet p^* den zu p *antipodischen*, d. h. symetrisch zu p rel. zum Mittelpunkte von S_n gelegenen Punkt von S_n. Eine Funktion $f \in S_n^{S_n}$ wird *antipodentreu* genannt, wenn $f(p^*) = [f(p)]^*$ für jedes $p \in S_n$ gilt.

[1] Die Hauptresultate dieser Arbeit sind (ohne Beweise) in meinem Sektionsvortrage auf dem Internationalen Math. Kongresse, Zürich 1932, vorgebracht worden.

[2] φ bildet M *in* N ab, wenn $\varphi(M) \subset N$ ist; φ bildet M *auf* N ab, wenn $\varphi(M) = N$ ist. Vgl. z. B. H. Hopf, Math. Ann. 102, S. 572, Fussnote 14.

[3] $\varrho(x, y)$ (bzw. $\varrho(A, B)$) bezeichnet, wie üblich, die Entfernung zwischen den Punkten x und y (bzw. Teilmengen A und B) eines metrischen Raumes.

[4] Eine Komponente von Z ist eine grösste (in keiner von sich selbst Verschiedenen enthaltene) zusammenhängende Teilmenge von Z.

[5] Vgl. H. Hopf, Moskauer Math. Sammlung 1930, S. 53.

Der Zweck dieser Arbeit ist, folgende drei Sätze zu beweisen:

Satz I [6]. *Jede antipodentreue Abbildung von S_n ist wesentlich.*

Satz II [7]. *Ist $f \in R^{S_n}$ (d. h. bildet f die Sphäre S_n auf einen Teil von R^n ab), so gibt es einen derartigen Punkt $p \in S_n$, dass $f(p) = f(p^*)$ ist.*

Satz III. *Sind $A_0, A_1, \ldots, A_n$ in sich kompakte Mengen von denen keine zwei antipodische Punkte der Sphäre S_n enthält, so enthält die Summe $\sum_{i=0}^{n} A_i$ die Sphäre S_n nicht.*

Bezeichnungen. Sind $M_1, M_2, \ldots, M_n$ metrische Räume, so bezeichnet $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ das *Produkt* der Räume $M_1, M_2, \ldots, M_n$, d. h. den Raum der als Elemente alle n-Tupeln $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ hat, wo $x_i \in M_i$ für $i = 1, 2, \ldots, n$, und der durch die Formel $\varrho[(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)] = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \varrho(x_i, y_i)^2}$ metrisiert ist. Ist insbesondere $M_1 = M_2 = \ldots = M_n = M$, so werde ich M^n anstatt $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ schreiben. Ist insbesonderen M *die Menge R aller reellen Zahlen*, werde ich den Raum R^n, d. h. den euklidischen n-dimensionalen Raum als die Teilmenge des Raumes R^{n+1} auffassen, und zwar $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ mit $(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) \in R^{n+1}$ identifizieren. Sind r und φ Polarkoordinaten des Punktes $(x_1, x_2) \in R^2$, so werde ich den Punkt $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R_n$ auch mit $([r, \varphi], x_3, \ldots, x_n)$ bezeichnen.

K. Borsuk, *Drei Sätze über die n-dimensionale Euklidische Sphäre*, Fundamenta Mathematicae 20 (1933) 177-190.

Teorema de Borsuk-Ulam

$f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ contínua $\implies$ existe $x \in \mathbb{S}^n$ tal que $f(-x) = f(x)$.

Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre [1].

Von

Karol Borsuk (Warszawa).

Es seien M und N zwei metrische Räume, von denen mindestens einer kompakt ist. N^M bezeichnet den Raum, der als Elemente alle stetige Abbildungen φ von M in [2] N hat und der durch die Formel $\varrho(\varphi, \varphi') = \operatorname{Sup}_{x \in M} \varrho[\varphi(x), \varphi'(x)]$ [3] metrisiert ist. Je zwei, zu einer Komponente [4] der Menge $Z \subset N^M$ gehörende Funktionen werden *äquivalent in* Z genannt. Eine Abbildung $\varphi \in N^M$ heisst *wesentlich* [5], wenn jede mit φ in N^M äquivalente Abbildung M auf [2] N abbildet.

Mit S_n werde ich die euklidische n-dimensionale Sphäre, d. h. die Oberfläche einer Vollkugel im euklidischen $(n+1)$-dimensionalen Raume R^{n+1} bezeichnen. Ist p ein beliebiger Punkt der Sphäre S_n, so bezeichnet p^* den zu p *antipodischen*, d. h. symetrisch zu p rel. zum Mittelpunkte von S_n gelegenen Punkt von S_n. Eine Funktion $f \in S_n^{S_n}$ wird *antipodentreu* genannt, wenn $f(p^*) = [f(p)]^*$ für jedes $p \in S_n$ gilt.

[1]) Die Hauptresultate dieser Arbeit sind (ohne Beweise) in meinem Sektionsvortrage auf dem Internationalen Math. Kongresse, Zürich 1932, vorgebracht worden.

[2]) φ bildet M *in* N ab, wenn $\varphi(M) \subset N$ ist; φ bildet M *auf* N ab, wenn $\varphi(M) = N$ ist. Vgl. z. B. H. Hopf, Math. Ann. 102, S. 572, Fussnote 14.

[3]) $\varrho(x, y)$ (bzw. $\varrho(A, B)$) bezeichnet, wie üblich, die Entfernung zwischen den Punkten x und y (bzw. Teilmengen A und B) eines metrischen Raumes.

[4]) Eine Komponente von Z ist eine grösste (in keiner von sich selbst Verschiedenen enthaltene) zusammenhängende Teilmenge von Z.

[5]) Vgl. H. Hopf, Moskauer Math. Sammlung 1930, S. 53.

Der Zweck dieser Arbeit ist, folgende drei Sätze zu beweisen:

Satz I [6]). *Jede antipodentreue Abbildung von S_n ist wesentlich.*

Satz II [7]). *Ist $f \in R^{S_n}$ (d. h. bildet f die Sphäre S_n auf einen Teil von R^n ab), so gibt es einen derartigen Punkt $p \in S_n$, dass $f(p) = f(p^*)$ ist.*

Satz III. *Sind $A_0, A_1, \ldots, A_n$ in sich kompakte Mengen von denen keine zwei antipodische Punkte der Sphäre S_n enthält, so enthält die Summe $\sum_{i=0}^{n} A_i$ die Sphäre S_n nicht.*

Bezeichnungen. Sind $M_1, M_2, \ldots, M_n$ metrische Räume, so bezeichnet $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ das *Produkt* der Räume $M_1, M_2, \ldots, M_n$, d. h. den Raum der als Elemente alle n-Tupeln $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ hat, wo $x_i \in M_i$ für $i = 1, 2, \ldots, n$, und der durch die Formel $\varrho[(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)] = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \varrho(x_i, y_i)^2}$ metrisiert ist. Ist insbesondere $M_1 = M_2 = \ldots = M_n = M$, so werde ich M^n anstatt $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ schreiben. Ist insbesonderen M *die Menge R aller reellen Zahlen*, werde ich den Raum R^n, d. h. den euklidischen n-dimensionalen Raum als die Teilmenge des Raumes R^{n+1} auffassen, und zwar $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ mit $(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) \in R^{n+1}$ identifizieren. Sind r und φ Polarkoordinaten des Punktes $(x_1, x_2) \in R^2$, so werde ich den Punkt $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R_n$ auch mit $([r, \varphi], x_3, \ldots, x_n)$ bezeichnen.

K. Borsuk, *Drei Sätze über die n-dimensionale Euklidische Sphäre*, Fundamenta Mathematicae 20 (1933) 177-190.

Teorema de Borsuk-Ulam

$f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ contínua $\implies$ existe $x \in \mathbb{S}^n$ tal que $f(-x) = f(x)$.

Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre [1].

Von

Karol Borsuk (Warszawa).

Es seien M und N zwei metrische Räume, von denen mindestens einer kompakt ist. N^M bezeichnet den Raum, der als Elemente alle stetige Abbildungen φ von M in [2] N hat und der durch die Formel $\varrho(\varphi, \varphi') = \operatorname{Sup}_{x \in M} \varrho[\varphi(x), \varphi'(x)]$ [3] metrisiert ist. Je zwei, zu einer Komponente [4] der Menge $Z \subset N^M$ gehörende Funktionen werden *äquivalent in* Z genannt. Eine Abbildung $\varphi \in N^M$ heisst *wesentlich* [5], wenn jede mit φ in N^M äquivalente Abbildung M auf [2] N abbildet.

Mit S_n werde ich die euklidische n-dimensionale Sphäre, d. h. die Oberfläche einer Vollkugel im euklidischen $(n+1)$-dimensionalen Raume R^{n+1} bezeichnen. Ist p ein beliebiger Punkt der Sphäre S_n, so bezeichnet p^* den zu p *antipodischen*, d. h. symetrisch zu p rel. zum Mittelpunkte von S_n gelegenen Punkt von S_n. Eine Funktion $f \in S_n^{S_n}$ wird *antipodentreu* genannt, wenn $f(p^*) = [f(p)]^*$ für jedes $p \in S_n$ gilt.

[1]) Die Hauptresultate dieser Arbeit sind (ohne Beweise) in meinem Sektionsvortrage auf dem Internationalen Math. Kongresse, Zürich 1932, vorgebracht worden.

[2]) φ bildet M *in* N ab, wenn $\varphi(M) \subset N$ ist; φ bildet M *auf* N ab, wenn $\varphi(M) = N$ ist. Vgl. z. B. H. Hopf, Math. Ann. 102, S. 572, Fussnote 14.

[3]) $\varrho(x, y)$ (bzw. $\varrho(A, B)$) bezeichnet, wie üblich, die Entfernung zwischen den Punkten x und y (bzw. Teilmengen A und B) eines metrischen Raumes.

[4]) Eine Komponente von Z ist eine grösste (in keiner von sich selbst Verschiedenen enthaltene) zusammenhängende Teilmenge von Z.

[5]) Vgl. H. Hopf, Moskauer Math. Sammlung 1930, S. 53.

Fundamenta Mathematicae T. XX.

Der Zweck dieser Arbeit ist, folgende drei Sätze zu beweisen:

Satz I [6]). *Jede antipodentreue Abbildung von S_n ist wesentlich.*

Satz II [7]). *Ist $f \in R^{S_n}$ (d. h. bildet f die Sphäre S_n auf einen Teil von R^n ab), so gibt es einen derartigen Punkt $p \in S_n$, dass $f(p) = f(p^*)$ ist.*

Satz III. *Sind $A_0, A_1, \ldots, A_n$ in sich kompakte Mengen von denen keine zwei antipodische Punkte der Sphäre S_n enthält, so enthält die Summe $\sum_{i=0}^{n} A_i$ die Sphäre S_n nicht.*

Bezeichnungen. Sind $M_1, M_2, \ldots, M_n$ metrische Räume, so bezeichnet $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ das *Produkt* der Räume $M_1, M_2, \ldots, M_n$, d. h. den Raum der als Elemente alle n-Tupeln $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ hat, wo $x_i \in M_i$ für $i = 1, 2, \ldots, n$, und der durch die Formel $\varrho[(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)] = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \varrho(x_i, y_i)^2}$ metrisiert ist. Ist insbesondere $M_1 = M_2 = \ldots = M_n = M$, so werde ich M^n anstatt $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ schreiben. Ist insbesonderen M *die Menge R aller reellen Zahlen*, werde ich den Raum R^n, d. h. den euklidischen n-dimensionalen Raum als die Teilmenge des Raumes R^{n+1} auffassen, und zwar $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ mit $(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) \in R^{n+1}$ identifizieren. Sind r und φ Polarkoordinaten des Punktes $(x_1, x_2) \in R^2$, so werde ich den Punkt $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R_n$ auch mit $([r, \varphi], x_3, \ldots, x_n)$ bezeichnen.

K. Borsuk, *Drei Sätze über die n-dimensionale Euklidische Sphäre*, Fundamenta Mathematicae 20 (1933) 177-190.

Teorema de Borsuk-Ulam

$f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ contínua $\implies$ existe $x \in \mathbb{S}^n$ tal que $f(-x) = f(x)$.

Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre [1].

Von

Karol Borsuk (Warszawa).

Es seien M und N zwei metrische Räume, von denen mindestens einer kompakt ist. N^M bezeichnet den Raum, der als Elemente alle stetige Abbildungen φ von M in [2] N hat und der durch die Formel $\varrho(\varphi, \varphi') = \operatorname{Sup}_{x \in M} \varrho[\varphi(x), \varphi'(x)]$ [3] metrisiert ist. Je zwei, zu einer Komponente [4] der Menge $Z \subset N^M$ gehörende Funktionen werden *äquivalent in* Z genannt. Eine Abbildung $\varphi \in N^M$ heisst *wesentlich* [5], wenn jede mit φ in N^M äquivalente Abbildung M auf [2] N abbildet.

Mit S_n werde ich die euklidische n-dimensionale Sphäre, d. h. die Oberfläche einer Vollkugel im euklidischen $(n+1)$-dimensionalen Raume R^{n+1} bezeichnen. Ist p ein beliebiger Punkt der Sphäre S_n, so bezeichnet p^* den zu p *antipodischen*, d. h. symetrisch zu p rel. zum Mittelpunkte von S_n gelegenen Punkt von S_n. Eine Funktion $f \in S_n^{S_n}$ wird *antipodentreu* genannt, wenn $f(p^*) = [f(p)]^*$ für jedes $p \in S_n$ gilt.

[1]) Die Hauptresultate dieser Arbeit sind (ohne Beweise) in meinem Sektionsvortrage auf dem Internationalen Math. Kongresse, Zürich 1932, vorgebracht worden.

[2]) φ bildet M *in* N ab, wenn $\varphi(M) \subset N$ ist; φ bildet M *auf* N ab, wenn $\varphi(M) = N$ ist. Vgl. z. B. H. Hopf, Math. Ann. 102, S. 572, Fussnote 14.

[3]) $\varrho(x, y)$ (bzw. $\varrho(A, B)$) bezeichnet, wie üblich, die Entfernung zwischen den Punkten x und y (bzw. Teilmengen A und B) eines metrischen Raumes.

[4]) Eine Komponente von Z ist eine grösste (in keiner von sich selbst Verschiedenen enthaltene) zusammenhängende Teilmenge von Z.

[5]) Vgl. H. Hopf, Moskauer Math. Sammlung 1930, S. 53.

Der Zweck dieser Arbeit ist, folgende drei Sätze zu beweisen:

Satz I [6]). *Jede antipodentreue Abbildung von S_n ist wesentlich.*

Satz II [7]). *Ist $f \in R^{S_n}$ (d. h. bildet f die Sphäre S_n auf einen Teil von R^n ab), so gibt es einen derartigen Punkt $p \in S_n$, dass $f(p) = f(p^*)$ ist.*

Satz III. *Sind $A_0, A_1, \ldots, A_n$ in sich kompakte Mengen von denen keine zwei antipodische Punkte der Sphäre S_n enthält, so enthält die Summe $\sum_{i=0}^{n} A_i$ die Sphäre S_n nicht.*

Bezeichnungen. Sind $M_1, M_2, \ldots, M_n$ metrische Räume, so bezeichnet $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ das *Produkt* der Räume $M_1, M_2, \ldots, M_n$, d. h. den Raum der als Elemente alle n-Tupeln $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ hat, wo $x_i \in M_i$ für $i = 1, 2, \ldots, n$, und der durch die Formel $\varrho[(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)] = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \varrho(x_i, y_i)^2}$ metrisiert ist. Ist insbesondere $M_1 = M_2 = \ldots = M_n = M$, so werde ich M^n anstatt $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ schreiben. Ist insbesonderen M *die Menge R aller reellen Zahlen*, werde ich den Raum R^n, d. h. den euklidischen n-dimensionalen Raum als die Teilmenge des Raumes R^{n+1} auffassen, und zwar $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ mit $(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) \in R^{n+1}$ identifizieren. Sind r und φ Polarkoordinaten des Punktes $(x_1, x_2) \in R^2$, so werde ich den Punkt $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R_n$ auch mit $([r, \varphi], x_3, \ldots, x_n)$ bezeichnen.

K. Borsuk, *Drei Sätze über die n-dimensionale Euklidische Sphäre*, Fundamenta Mathematicae 20 (1933) 177-190.

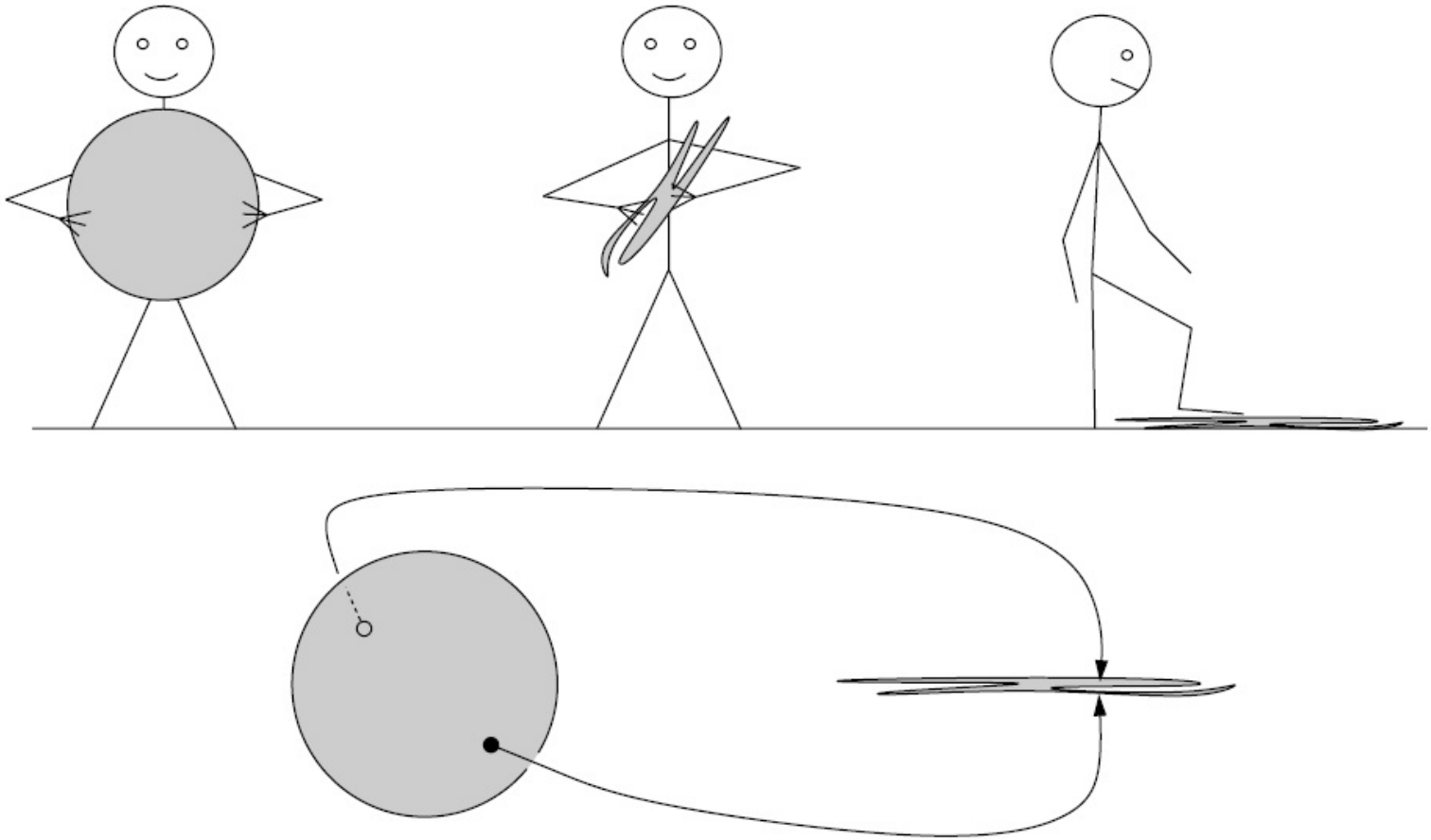
Teorema de Borsuk-Ulam

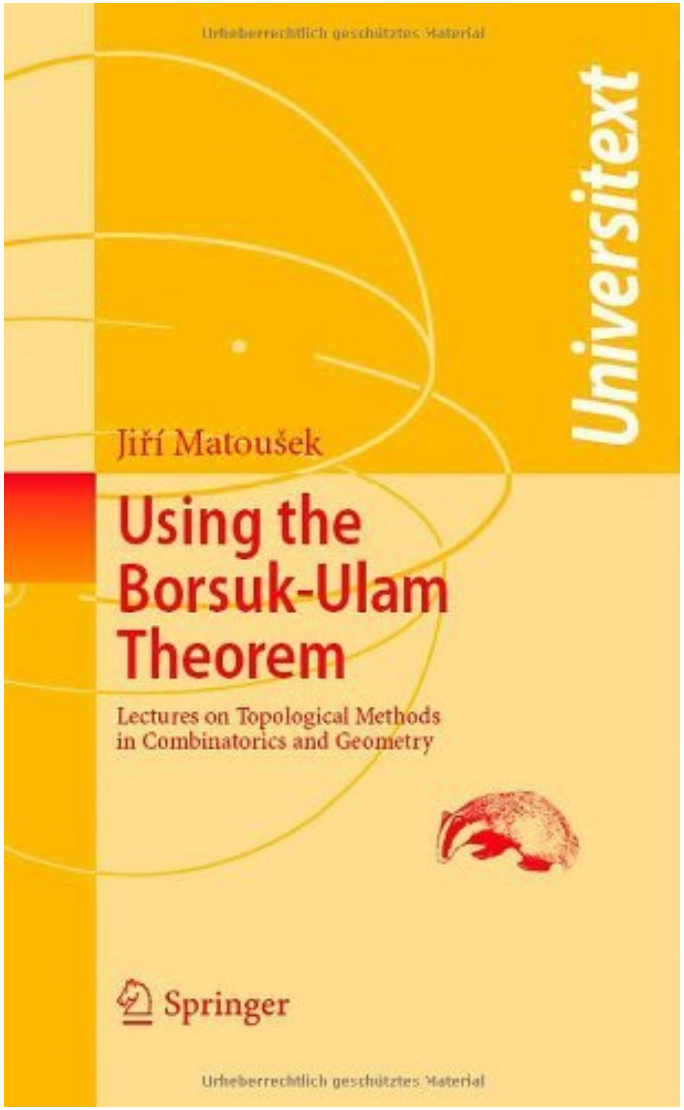
$f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ contínua $\implies$ existe $x \in \mathbb{S}^n$ tal que $f(-x) = f(x)$.

Teorema de Borsuk-Ulam

$f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ contínua $\implies$ existe $x \in \mathbb{S}^n$ tal que $f(-x) = f(x)$.

Para $n = 2$





J. Matoušek, *Using the Borsuk-Ulam Theorem*, Universitext, Springer - Verlag, (2002).

BORSUK'S ANTIPODAL THEOREM AND ITS GENERALIZATIONS AND APPLICATIONS: A SURVEY

H. STEINLEIN

After more than 50 years, Borsuk's antipodal theorem still attracts the interest of mathematicians more than at any time before. Due to its long history and the continuing interest in it, a comprehensive survey seems to be necessary, particularly because this would be the first such survey apart from more introductory survey papers (cf. [19,416]), historical comments in textbooks (e.g. [119, 126,251]), and survey papers on partial aspects or on closely related topics [9, 34,43,54,57,76,78,113,147,180,219,245,271,318,328,335,347,352,361,435,447].

The main work for this survey was in collecting all the material together. I was very surprised to find such a large number of references, and in the end I had to cut short my search to be able to finish the paper (however, I would be grateful for hints as to further literature). Of course, the list of references is not complete, but I hope complete enough to be useful for people interested in this topic.

The huge amount of material made it impossible to write the paper as detailed as planned. Thus, the main function of this paper is to order the list of references according to different proofs, generalizations and applications and to describe them only briefly!

H. Steinlein, *Borsuk's antipodal theorem and its generalizations and applications: a survey*, Topological methods in nonlinear analysis, Sém. Math. Sup., vol. 95, Presses Univ. Montréal, Montreal, QC (1985) pp. 166–235.

Teorema de Borsuk-Ulam

$$\tau : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n, \qquad \tau(x) = -x$$

$$\forall f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n \text{ contínua} \qquad \exists x \in \mathbb{S}^n \text{ tal que } f(\tau(x)) = f(x).$$

$$\tau(\tau(x)) = x \qquad \tau(x) \neq x \qquad \forall x \in \mathbb{S}^n$$

Definição

- M e N espaços topológicos;
- $\tau : M \to M$ involução livre;

$(M, \tau; N)$ tem a propriedade de Borsuk-Ulam se:

$$\forall f : M \to N \text{ contínua} \qquad \exists x \in M \text{ tal que } f(\tau(x)) = f(x).$$

Exemplo: $(\mathbb{S}^n, \tau; \mathbb{R}^n)$, $\tau(x) = -x$ tem a propriedade de Borsuk-Ulam.

Teorema de Borsuk-Ulam

$$\tau : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n, \qquad \tau(x) = -x$$

$$\forall f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n \text{ contínua} \qquad \exists x \in \mathbb{S}^n \text{ tal que } f(\tau(x)) = f(x).$$

$$\tau(\tau(x)) = x \qquad \tau(x) \neq x \qquad \forall x \in \mathbb{S}^n$$

Definição

- M e N espaços topológicos;
- $\tau : M \to M$ involução livre;

$(M, \tau; N)$ tem a propriedade de Borsuk-Ulam se:

$$\forall f : M \to N \text{ contínua} \qquad \exists x \in M \text{ tal que } f(\tau(x)) = f(x).$$

Exemplo: $(\mathbb{S}^n, \tau; \mathbb{R}^n)$, $\tau(x) = -x$ tem a propriedade de Borsuk-Ulam.

Teorema de Borsuk-Ulam

$$\tau : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n, \qquad \tau(x) = -x$$

$$\forall f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n \text{ contínua} \qquad \exists x \in \mathbb{S}^n \text{ tal que } f(\tau(x)) = f(x).$$

$$\tau(\tau(x)) = x \qquad \tau(x) \neq x \qquad \forall x \in \mathbb{S}^n$$

Definição

- M e N espaços topológicos;
- $\tau : M \to M$ involução livre;

$(M, \tau; N)$ tem a propriedade de Borsuk-Ulam se:

$$\forall f : M \to N \text{ contínua} \qquad \exists x \in M \text{ tal que } f(\tau(x)) = f(x).$$

Exemplo: $(\mathbb{S}^n, \tau; \mathbb{R}^n)$, $\tau(x) = -x$ tem a propriedade de Borsuk-Ulam.

Teorema de Borsuk-Ulam

$$\tau : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n, \qquad \tau(x) = -x$$

$$\forall f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n \text{ contínua} \qquad \exists x \in \mathbb{S}^n \text{ tal que } f(\tau(x)) = f(x).$$

$$\tau(\tau(x)) = x \qquad \tau(x) \neq x \qquad \forall x \in \mathbb{S}^n$$

Definição

- M e N espaços topológicos;
- $\tau : M \to M$ involução livre;

$(M, \tau; N)$ tem a propriedade de Borsuk-Ulam se:

$$\forall f : M \to N \text{ contínua} \qquad \exists x \in M \text{ tal que } f(\tau(x)) = f(x).$$

Exemplo: $(\mathbb{S}^n, \tau; \mathbb{R}^n)$, $\tau(x) = -x$ tem a propriedade de Borsuk-Ulam.

Teorema de Borsuk-Ulam

$$\tau : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n, \qquad \tau(x) = -x$$

$$\forall f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n \text{ contínua} \qquad \exists x \in \mathbb{S}^n \text{ tal que } f(\tau(x)) = f(x).$$

$$\tau(\tau(x)) = x \qquad \tau(x) \neq x \qquad \forall x \in \mathbb{S}^n$$

Definição

- M e N espaços topológicos;
- $\tau : M \to M$ involução livre;

$(M, \tau; N)$ tem a propriedade de Borsuk-Ulam se:

$$\forall f : M \to N \text{ contínua} \qquad \exists x \in M \text{ tal que } f(\tau(x)) = f(x).$$

Exemplo: $(\mathbb{S}^n, \tau; \mathbb{R}^n)$, $\tau(x) = -x$ tem a propriedade de Borsuk-Ulam.

Teorema de Borsuk-Ulam

$$\tau : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n, \qquad \tau(x) = -x$$

$$\forall f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n \text{ contínua} \qquad \exists x \in \mathbb{S}^n \text{ tal que } f(\tau(x)) = f(x).$$

$$\tau(\tau(x)) = x \qquad \tau(x) \neq x \qquad \forall x \in \mathbb{S}^n$$

Definição

- M e N espaços topológicos;
- $\tau : M \to M$ involução livre;

$(M, \tau; N)$ tem a propriedade de Borsuk-Ulam se:

$$\forall f : M \to N \text{ contínua} \qquad \exists x \in M \text{ tal que } f(\tau(x)) = f(x).$$

Exemplo: $(\mathbb{S}^n, \tau; \mathbb{R}^n)$, $\tau(x) = -x$ tem a propriedade de Borsuk-Ulam.

Teorema de Borsuk-Ulam

$$\tau : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n, \qquad \tau(x) = -x$$

$$\forall f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n \text{ contínua} \qquad \exists x \in \mathbb{S}^n \text{ tal que } f(\tau(x)) = f(x).$$

$$\tau(\tau(x)) = x \qquad \tau(x) \neq x \qquad \forall x \in \mathbb{S}^n$$

Definição

- M e N espaços topológicos;
- $\tau : M \to M$ involução livre;

$(M, \tau; N)$ tem a propriedade de Borsuk-Ulam se:

$$\forall f : M \to N \text{ contínua} \qquad \exists x \in M \text{ tal que } f(\tau(x)) = f(x).$$

Exemplo: $(\mathbb{S}^n, \tau; \mathbb{R}^n)$, $\tau(x) = -x$ tem a propriedade de Borsuk-Ulam.

Teorema de Borsuk-Ulam

$$\tau : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n, \qquad \tau(x) = -x$$

$$\forall f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n \text{ contínua} \qquad \exists x \in \mathbb{S}^n \text{ tal que } f(\tau(x)) = f(x).$$

$$\tau(\tau(x)) = x \qquad \tau(x) \neq x \qquad \forall x \in \mathbb{S}^n$$

Definição

- M e N espaços topológicos;
- $\tau : M \to M$ involução livre;

$(M, \tau; N)$ tem a propriedade de Borsuk-Ulam se:

$$\forall f : M \to N \text{ contínua} \qquad \exists x \in M \text{ tal que } f(\tau(x)) = f(x).$$

Exemplo: $(\mathbb{S}^n, \tau; \mathbb{R}^n)$, $\tau(x) = -x$ tem a propriedade de Borsuk-Ulam.

- M superfície fechada munida de involução livre τ;
- N superfície fechada.

Classificação das triplas $(M, \tau; \mathbb{R}^2)$ que têm a propriedade de Borsuk-Ulam:

D. L. Gonçalves, *The Borsuk-Ulam theorem for surfaces*, Quaestiones Mathematicae 29 (2006), 117–123.

Classificação das triplas $(M, \tau; N)$ que têm a propriedade de Borsuk-Ulam:

D. L. Gonçalves, J. Guaschi, *The Borsuk-Ulam theorem for maps into a surface*, Topology and its Applications 157 (2010), 1742–1759.

- M superfície fechada munida de involução livre τ;
- N superfície fechada.

Classificação das triplas $(M, \tau; \mathbb{R}^2)$ que têm a propriedade de Borsuk-Ulam:

D. L. Gonçalves, *The Borsuk-Ulam theorem for surfaces*, Quaestiones Mathematicae 29 (2006), 117–123.

Classificação das triplas $(M, \tau; N)$ que têm a propriedade de Borsuk-Ulam:

D. L. Gonçalves, J. Guaschi, *The Borsuk-Ulam theorem for maps into a surface*, Topology and its Applications 157 (2010), 1742–1759.

- M superfície fechada munida de involução livre τ;
- N superfície fechada.

Classificação das triplas $(M, \tau; \mathbb{R}^2)$ que têm a propriedade de Borsuk-Ulam:

D. L. Gonçalves, *The Borsuk-Ulam theorem for surfaces*, Quaestiones Mathematicae 29 (2006), 117–123.

Classificação das triplas $(M, \tau; N)$ que têm a propriedade de Borsuk-Ulam:

D. L. Gonçalves, J. Guaschi, *The Borsuk-Ulam theorem for maps into a surface*, Topology and its Applications 157 (2010), 1742–1759.

- M superfície fechada munida de involução livre τ;
- N superfície fechada.

Classificação das triplas $(M, \tau; \mathbb{R}^2)$ que têm a propriedade de Borsuk-Ulam:

D. L. Gonçalves, *The Borsuk-Ulam theorem for surfaces*, Quaestiones Mathematicae 29 (2006), 117–123.

Classificação das triplas $(M, \tau; N)$ que têm a propriedade de Borsuk-Ulam:

D. L. Gonçalves, J. Guaschi, *The Borsuk-Ulam theorem for maps into a surface*, Topology and its Applications 157 (2010), 1742–1759.

- M superfície fechada munida de involução livre τ;
- N superfície fechada.

Classificação das triplas $(M, \tau; \mathbb{R}^2)$ que têm a propriedade de Borsuk-Ulam:

D. L. Gonçalves, *The Borsuk-Ulam theorem for surfaces*, Quaestiones Mathematicae 29 (2006), 117–123.

Classificação das triplas $(M, \tau; N)$ que têm a propriedade de Borsuk-Ulam:

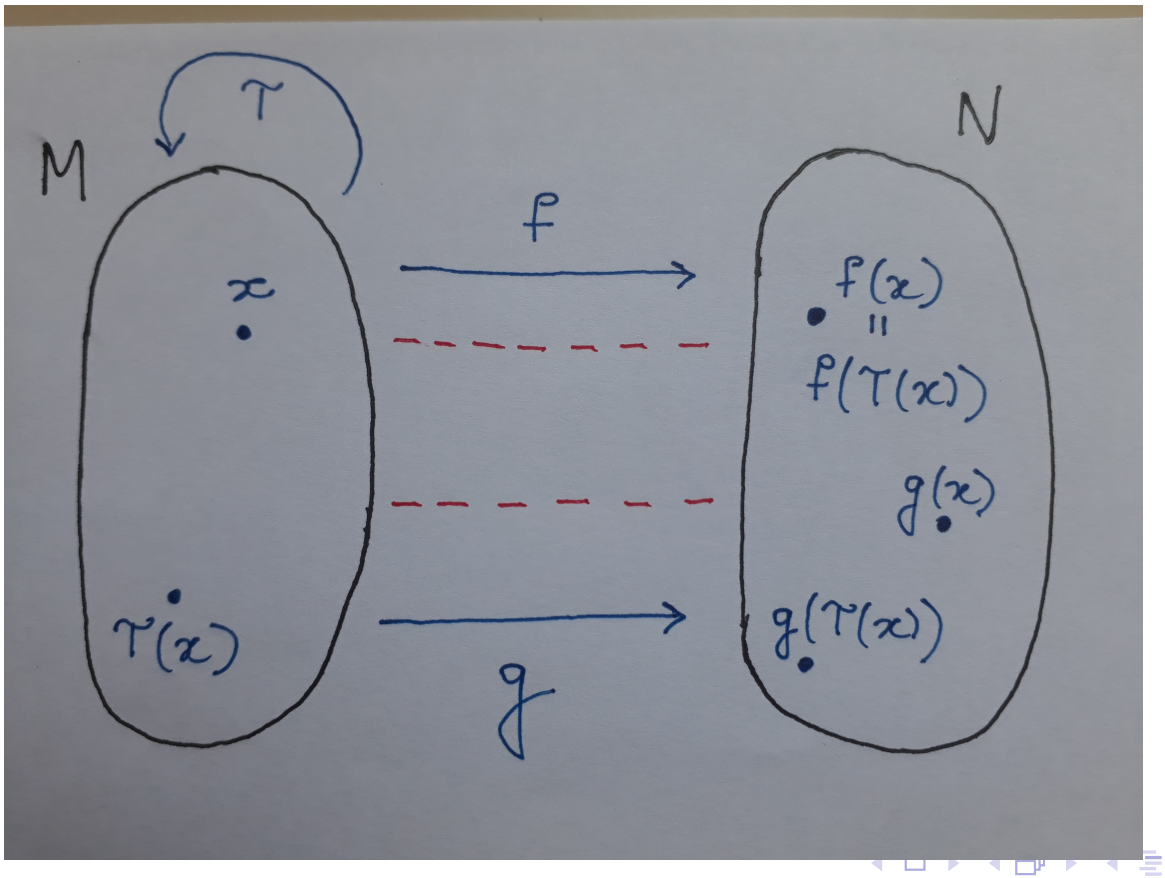
D. L. Gonçalves, J. Guaschi, *The Borsuk-Ulam theorem for maps into a surface*, Topology and its Applications 157 (2010), 1742–1759.

$(M, \tau; N)$ tem a propriedade de Borsuk-Ulam se:

$\forall f : M \to N$ contínua $\qquad \exists x \in M$ tal que $f(\tau(x)) = f(x)$.

$(M, \tau; N)$ NÃO tem a propriedade de Borsuk-Ulam se:

$\exists g : M \to N$ contínua $\qquad \forall x \in M$ vale $g(\tau(x)) \neq g(x)$.



$$[M,N] = \{\text{classes de homotopia}\} = \frac{\{f : M \longrightarrow N \text{ contínua}\}}{\text{homotopia}}$$

Definição

- M e N espaços topológicos;
- $\tau : M \to M$ involução livre;

$\beta \in [M,N]$ tem a propriedade de Borsuk-Ulam se:

$\forall f \in \beta$ contínua $\qquad \exists x \in M$ tal que $f(\tau(x)) = f(x)$.

_____, *A propriedade de Borsuk-Ulam para funções entre superfícies*, Tese de Doutorado, IME - Universidade de São Paulo, 2015.

D. L. Gonçalvez, J. Guaschi, _____, *The Borsuk-Ulam property for homotopy classes of selfmaps of surfaces of Euler characteristic zero*, J. Fixed Point Theory Appl. 21, 65 (2019).

$$[M, N] = \{\text{classes de homotopia}\} = \frac{\{f : M \longrightarrow N \text{ contínua}\}}{\text{homotopia}}$$

Definição

- M e N espaços topológicos;
- $\tau : M \to M$ involução livre;

$\beta \in [M, N]$ tem a propriedade de Borsuk-Ulam se:

$\forall f \in \beta$ contínua $\qquad \exists x \in M$ tal que $f(\tau(x)) = f(x)$.

_____, *A propriedade de Borsuk-Ulam para funções entre superfícies*, Tese de Doutorado, IME - Universidade de São Paulo, 2015.

D. L. Gonçalvez, J. Guaschi, _____, *The Borsuk-Ulam property for homotopy classes of selfmaps of surfaces of Euler characteristic zero*, J. Fixed Point Theory Appl. 21, 65 (2019).

$$[M,N] = \{\text{classes de homotopia}\} = \frac{\{f : M \longrightarrow N \text{ contínua}\}}{\text{homotopia}}$$

Definição

- M e N espaços topológicos;
- $\tau : M \to M$ involução livre;

$\beta \in [M,N]$ tem a propriedade de Borsuk-Ulam se:

$\forall f \in \beta$ contínua $\qquad \exists x \in M$ tal que $f(\tau(x)) = f(x)$.

_____, *A propriedade de Borsuk-Ulam para funções entre superfícies*, Tese de Doutorado, IME - Universidade de São Paulo, 2015.

D. L. Gonçalvez, J. Guaschi, _____, *The Borsuk-Ulam property for homotopy classes of selfmaps of surfaces of Euler characteristic zero*, J. Fixed Point Theory Appl. 21, 65 (2019).

$$[M,N] = \{\text{classes de homotopia}\} = \frac{\{f : M \longrightarrow N \text{ contínua}\}}{\text{homotopia}}$$

Definição

- M e N espaços topológicos;
- $\tau : M \to M$ involução livre;

$\beta \in [M,N]$ tem a propriedade de Borsuk-Ulam se:

$\forall f \in \beta$ contínua $\qquad \exists x \in M$ tal que $f(\tau(x)) = f(x)$.

_____, *A propriedade de Borsuk-Ulam para funções entre superfícies*, Tese de Doutorado, IME - Universidade de São Paulo, 2015.

D. L. Gonçalvez, J. Guaschi, _____, *The Borsuk-Ulam property for homotopy classes of selfmaps of surfaces of Euler characteristic zero*, J. Fixed Point Theory Appl. 21, 65 (2019).

$$[M,N] = \{\text{classes de homotopia}\} = \frac{\{f : M \longrightarrow N \text{ contínua}\}}{\text{homotopia}}$$

Definição

- M e N espaços topológicos;
- $\tau : M \to M$ involução livre;

$\beta \in [M,N]$ tem a propriedade de Borsuk-Ulam se:

$\forall f \in \beta$ contínua $\qquad \exists x \in M$ tal que $f(\tau(x)) = f(x)$.

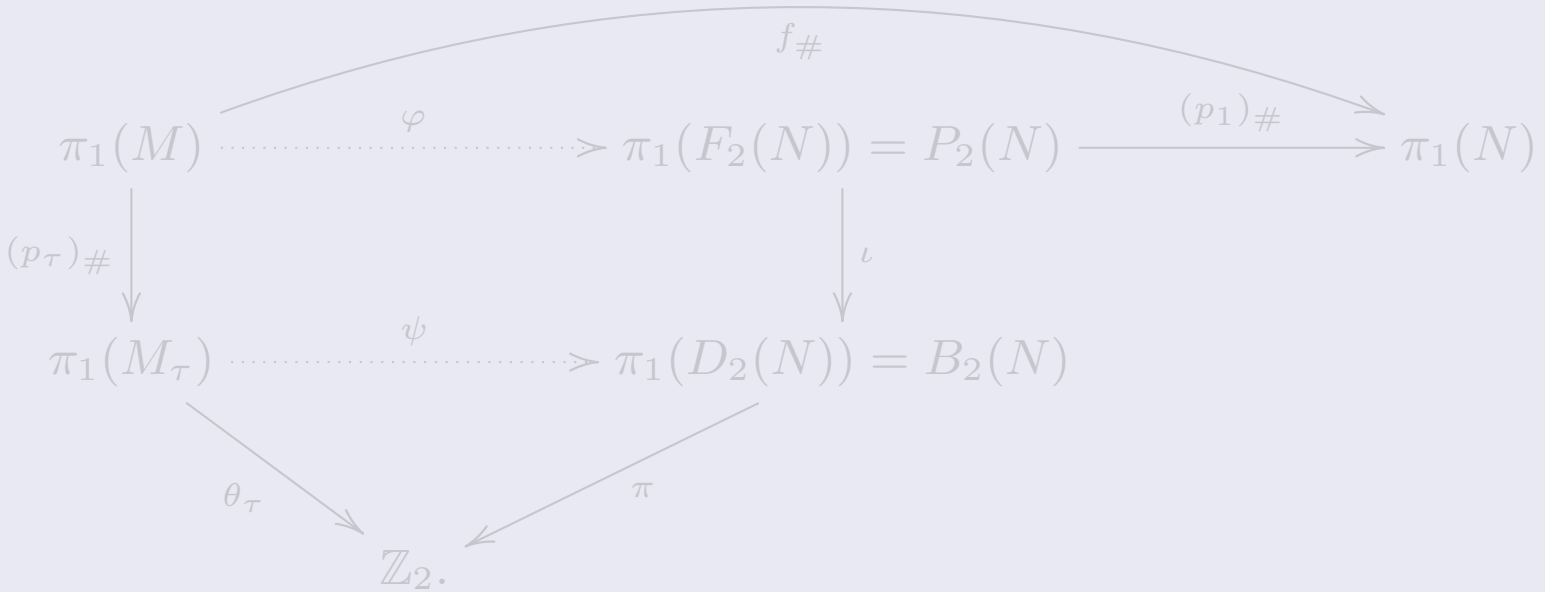
_____, *A propriedade de Borsuk-Ulam para funções entre superfícies*, Tese de Doutorado, IME - Universidade de São Paulo, 2015.

D. L. Gonçalvez, J. Guaschi, _____, *The Borsuk-Ulam property for homotopy classes of selfmaps of surfaces of Euler characteristic zero*, J. Fixed Point Theory Appl. 21, 65 (2019).

Proposição (Borsuk-Ulam e Grupos de Tranças)

- M superfície fechada munida de uma involução livre τ;
- $M_\tau = \dfrac{M}{\sim}, \quad x \sim \tau(x)$;
- N superfície fechada diferente de $\mathbb{S}^2$ e $\mathbb{RP}^2$;
- $F_2(N) = \{(y_1, y_2) \in N \times N \,|\, y_1 \neq y_2\}$;
- $D_2(N) = \dfrac{F_2(N)}{\sim}, \quad (y_1, y_2) \sim (y_2, y_1)$.

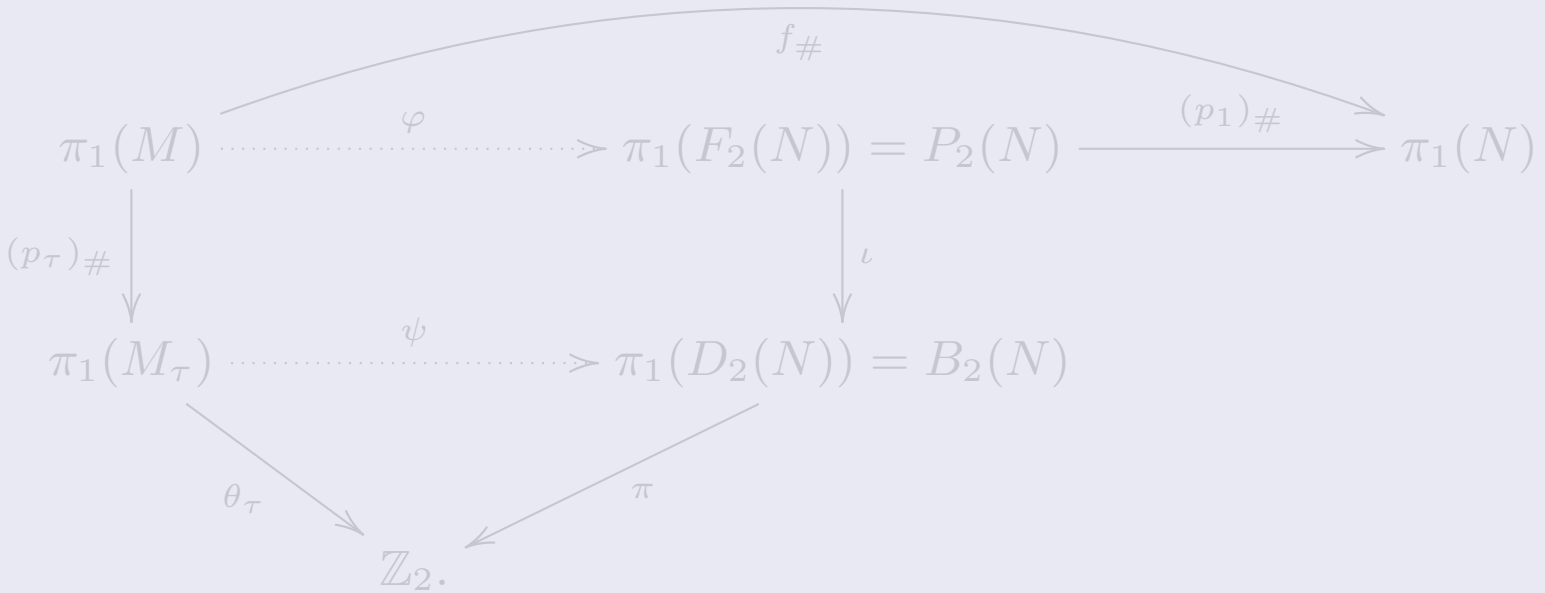
São equivalentes:

1. $\beta = [f] \in [M, N]$ não tem a propriedade de Borsuk-Ulam;
2. 

Proposição (Borsuk-Ulam e Grupos de Tranças)

- M superfície fechada munida de uma involução livre τ;
- $M_\tau = \dfrac{M}{\sim}, \quad x \sim \tau(x)$;
- N superfície fechada diferente de $\mathbb{S}^2$ e $\mathbb{RP}^2$;
- $F_2(N) = \{(y_1, y_2) \in N \times N \,|\, y_1 \neq y_2\}$;
- $D_2(N) = \dfrac{F_2(N)}{\sim}, \quad (y_1, y_2) \sim (y_2, y_1)$.

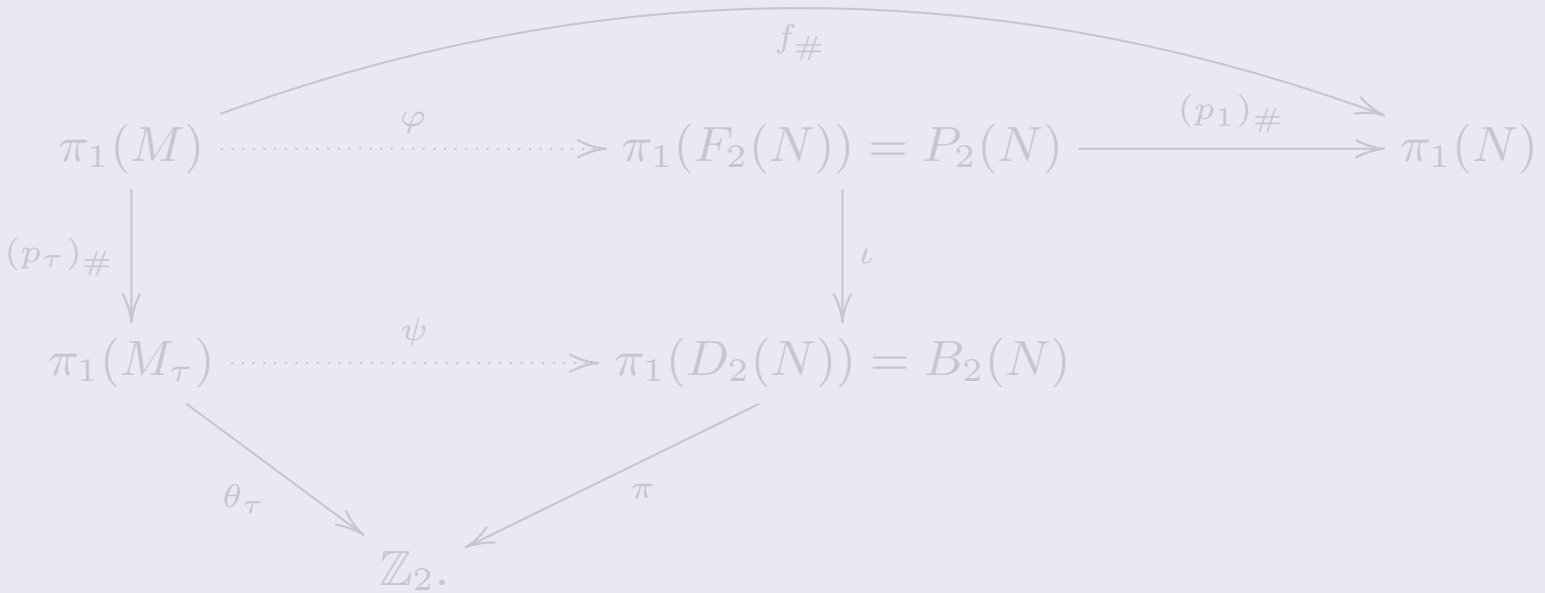
São equivalentes:

1. $\beta = [f] \in [M, N]$ não tem a propriedade de Borsuk-Ulam;
2. 

Proposição (Borsuk-Ulam e Grupos de Tranças)

- M superfície fechada munida de uma involução livre τ;
- $M_\tau = \dfrac{M}{\sim}, \quad x \sim \tau(x)$;
- N superfície fechada diferente de $\mathbb{S}^2$ e $\mathbb{RP}^2$;
- $F_2(N) = \{(y_1, y_2) \in N \times N \,|\, y_1 \neq y_2\}$;
- $D_2(N) = \dfrac{F_2(N)}{\sim}, \quad (y_1, y_2) \sim (y_2, y_1)$.

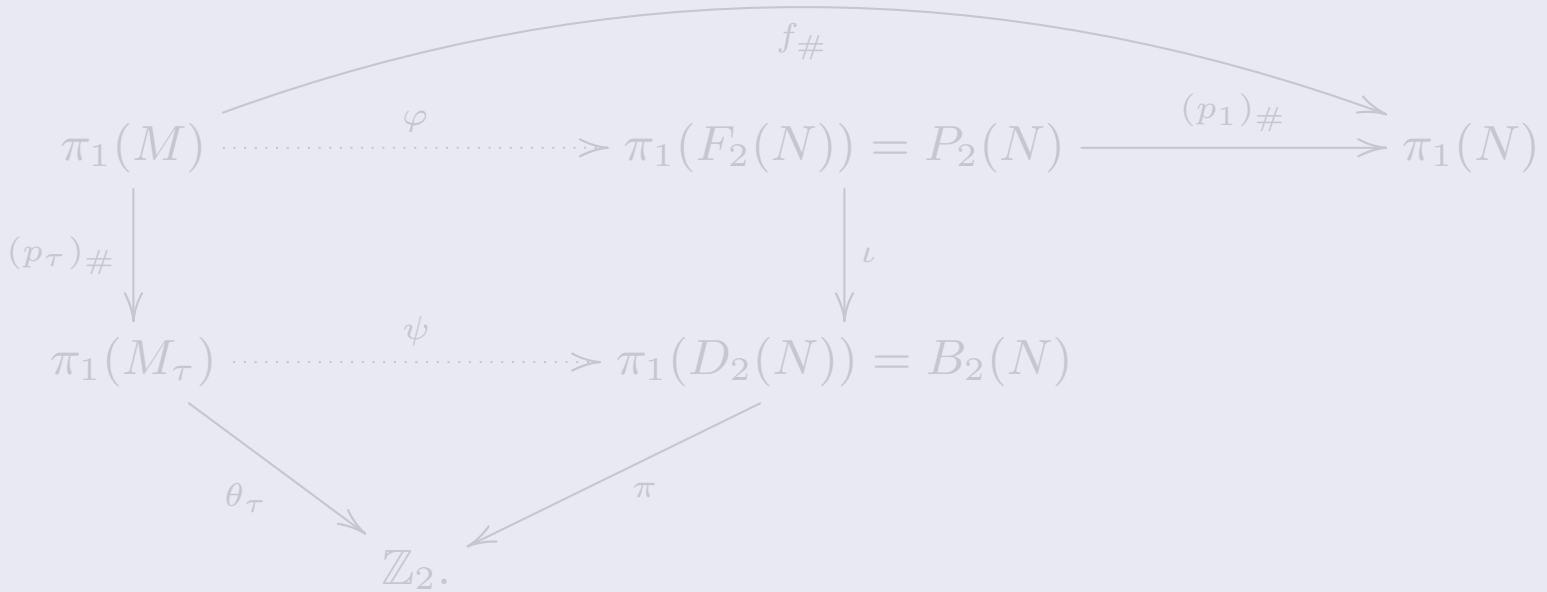
São equivalentes:

1. $\beta = [f] \in [M, N]$ não tem a propriedade de Borsuk-Ulam;
2. 

Proposição (Borsuk-Ulam e Grupos de Tranças)

- M superfície fechada munida de uma involução livre τ;
- $M_\tau = \dfrac{M}{\sim}, \quad x \sim \tau(x)$;
- N superfície fechada diferente de $\mathbb{S}^2$ e $\mathbb{RP}^2$;
- $F_2(N) = \{(y_1, y_2) \in N \times N \,|\, y_1 \neq y_2\}$;
- $D_2(N) = \dfrac{F_2(N)}{\sim}, \quad (y_1, y_2) \sim (y_2, y_1)$.

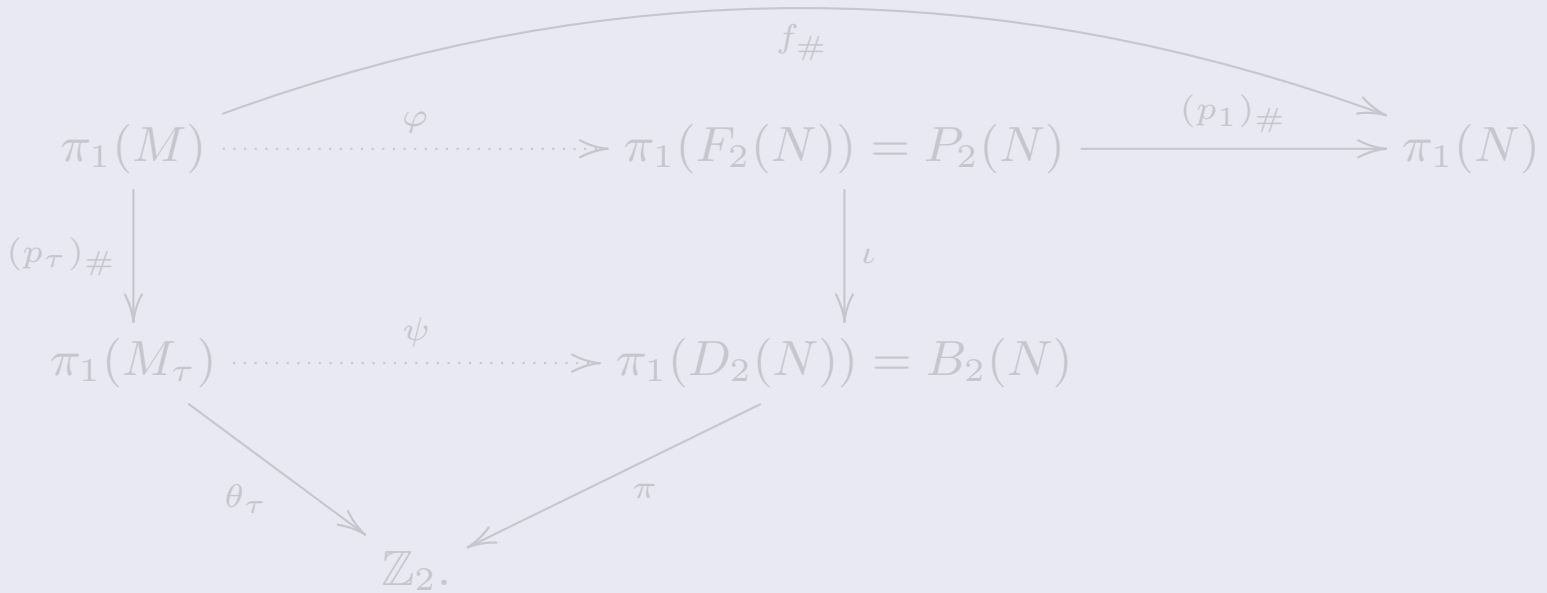
São equivalentes:

1. $\beta = [f] \in [M, N]$ não tem a propriedade de Borsuk-Ulam;
2. 

Proposição (Borsuk-Ulam e Grupos de Tranças)

- M superfície fechada munida de uma involução livre τ;
- $M_\tau = \dfrac{M}{\sim}, \quad x \sim \tau(x)$;
- N superfície fechada diferente de $\mathbb{S}^2$ e $\mathbb{RP}^2$;
- $F_2(N) = \{(y_1, y_2) \in N \times N \,|\, y_1 \neq y_2\}$;
- $D_2(N) = \dfrac{F_2(N)}{\sim}, \quad (y_1, y_2) \sim (y_2, y_1)$.

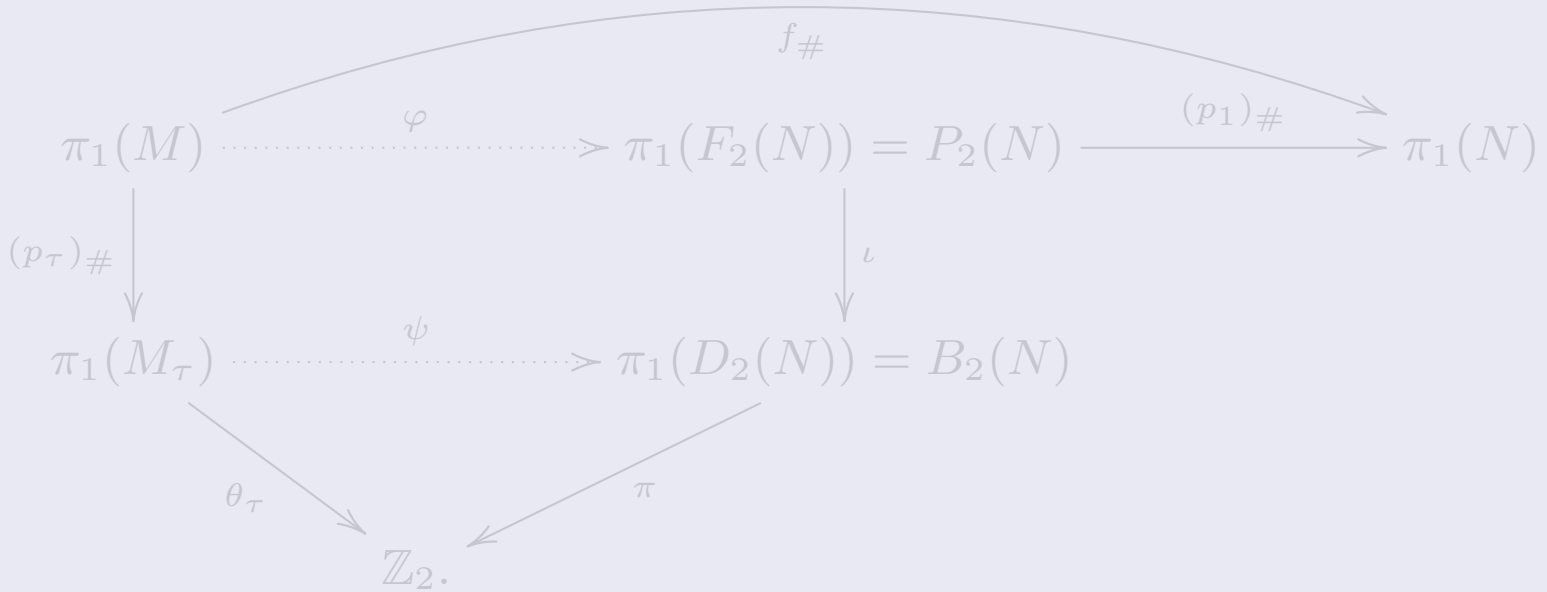
São equivalentes:

1. $\beta = [f] \in [M, N]$ não tem a propriedade de Borsuk-Ulam;
2. 

Proposição (Borsuk-Ulam e Grupos de Tranças)

- M superfície fechada munida de uma involução livre τ;
- $M_\tau = \dfrac{M}{\sim}, \quad x \sim \tau(x)$;
- N superfície fechada diferente de $\mathbb{S}^2$ e $\mathbb{RP}^2$;
- $F_2(N) = \{(y_1, y_2) \in N \times N \,|\, y_1 \neq y_2\}$;
- $D_2(N) = \dfrac{F_2(N)}{\sim}, \quad (y_1, y_2) \sim (y_2, y_1)$.

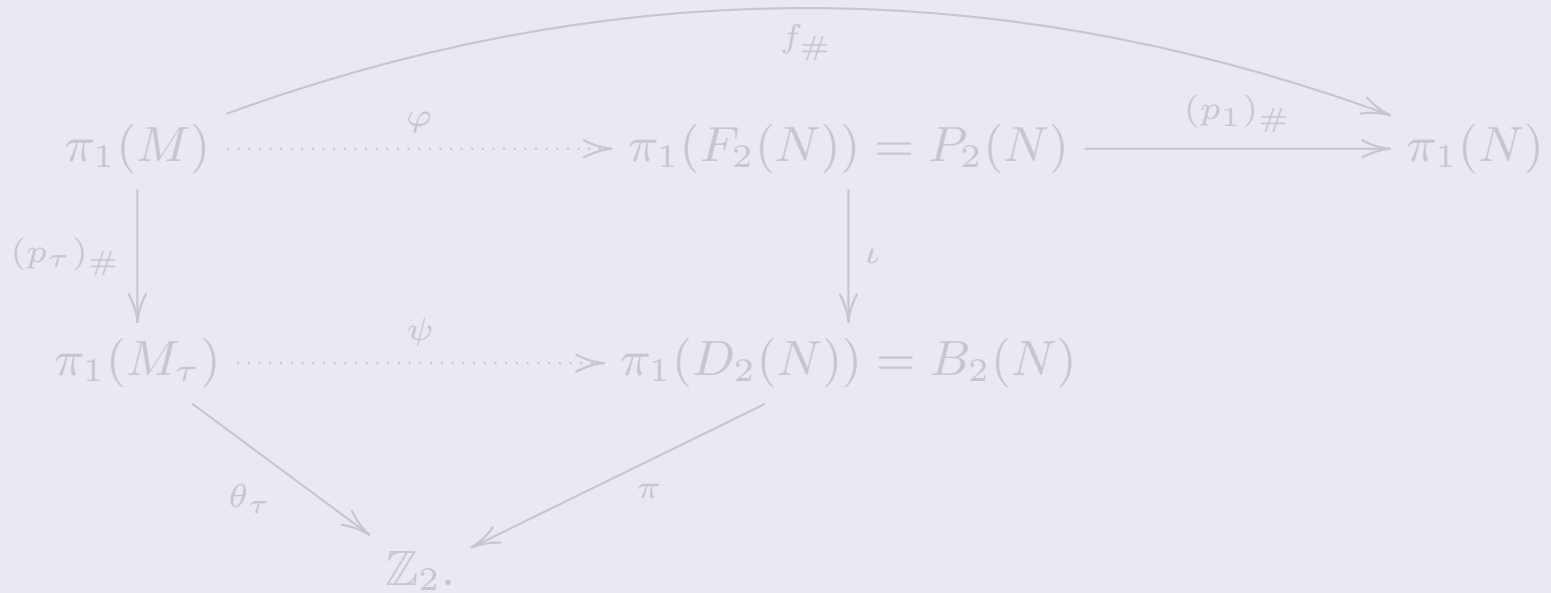
São equivalentes:

1. $\beta = [f] \in [M, N]$ não tem a propriedade de Borsuk-Ulam;
2. 

Proposição (Borsuk-Ulam e Grupos de Tranças)

- M superfície fechada munida de uma involução livre τ;
- $M_\tau = \dfrac{M}{\sim}, \quad x \sim \tau(x)$;
- N superfície fechada diferente de $\mathbb{S}^2$ e $\mathbb{RP}^2$;
- $F_2(N) = \{(y_1, y_2) \in N \times N \,|\, y_1 \neq y_2\}$;
- $D_2(N) = \dfrac{F_2(N)}{\sim}, \quad (y_1, y_2) \sim (y_2, y_1)$.

São equivalentes:

1. $\beta = [f] \in [M, N]$ não tem a propriedade de Borsuk-Ulam;
2. 

Proposição (Borsuk-Ulam e Grupos de Tranças)

- M superfície fechada munida de uma involução livre τ;
- $M_\tau = \dfrac{M}{\sim}, \quad x \sim \tau(x)$;
- N superfície fechada diferente de $\mathbb{S}^2$ e $\mathbb{RP}^2$;
- $F_2(N) = \{(y_1, y_2) \in N \times N \,|\, y_1 \neq y_2\}$;
- $D_2(N) = \dfrac{F_2(N)}{\sim}, \quad (y_1, y_2) \sim (y_2, y_1)$.

São equivalentes:

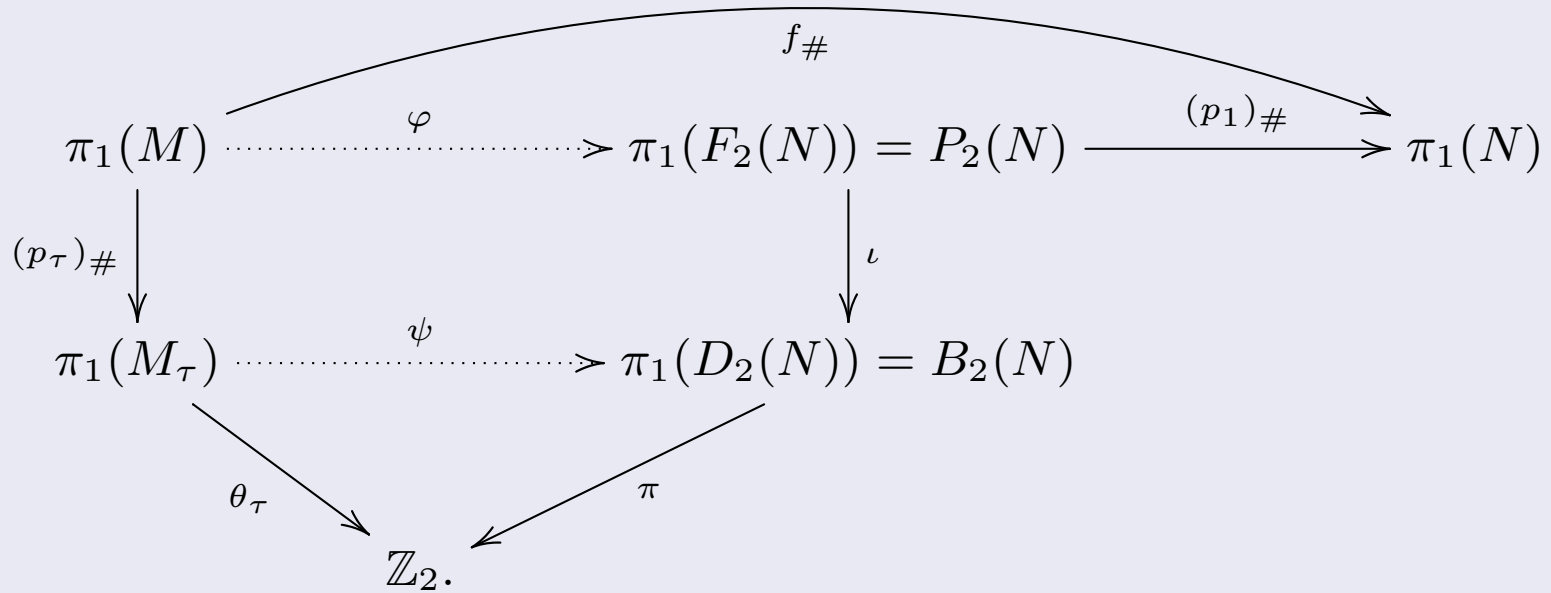
1. $\beta = [f] \in [M, N]$ não tem a propriedade de Borsuk-Ulam;
2. $$\begin{array}{ccccc} & & f_\# & & \\ & \overset{\varphi}{\curvearrowright} & & \overset{(p_1)_\#}{\curvearrowright} & \\ \pi_1(M) & \dashrightarrow & \pi_1(F_2(N)) = P_2(N) & \longrightarrow & \pi_1(N) \\ {\scriptstyle (p_\tau)_\#}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota} & & \\ \pi_1(M_\tau) & \dashrightarrow & \pi_1(D_2(N)) = B_2(N) & & \\ & {\scriptstyle \theta_\tau}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \pi} & & & \\ & \mathbb{Z}_2. & & & \end{array}$$

Proposição (Borsuk-Ulam e Grupos de Tranças)

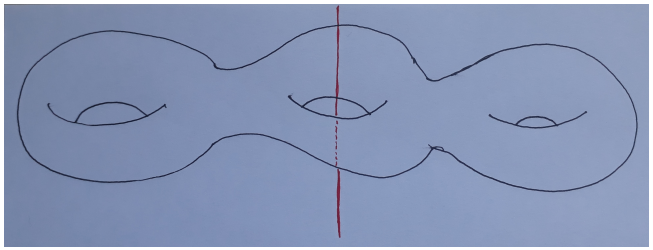
- M superfície fechada munida de uma involução livre τ;
- $M_\tau = \dfrac{M}{\sim}, \quad x \sim \tau(x)$;
- N superfície fechada diferente de $\mathbb{S}^2$ e $\mathbb{RP}^2$;
- $F_2(N) = \{(y_1, y_2) \in N \times N \,|\, y_1 \neq y_2\}$;
- $D_2(N) = \dfrac{F_2(N)}{\sim}, \quad (y_1, y_2) \sim (y_2, y_1)$.

São equivalentes:

1. $\beta = [f] \in [M, N]$ não tem a propriedade de Borsuk-Ulam;
2.

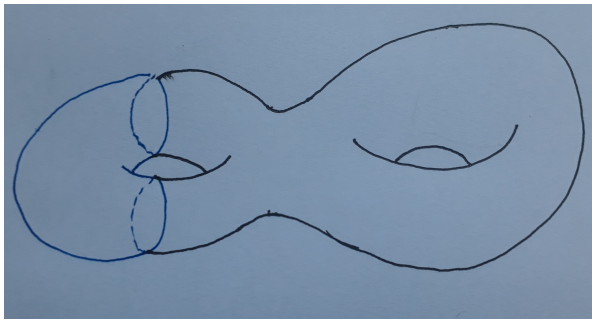


$$M = \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$$



$\tau : M \to M$ é a rotação de 180º em torno do eixo vermelho

$$M_\tau = \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$$



$$\pi_1(M) = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \mid [a_1, a_2][a_3, a_4][a_5, a_6] = 1 \rangle$$

$$\downarrow (p_\tau)_\#$$

$$\pi_1(M_\tau) = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \mid [\alpha_1, \alpha_2][\alpha_3, \alpha_4] = 1 \rangle$$

$a_1 \to \alpha_1^2$
$a_2 \to \alpha_2$

$a_3 \to \alpha_3$
$a_4 \to \alpha_4$

$a_5 \to \alpha_1 \alpha_3 \alpha_1^{-1}$
$a_6 \to \alpha_1 \alpha_4 \alpha_1^{-1}$

$$[\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2] \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}\left(\pi_1(\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2), \pi_1(\mathbb{T}^2)\right)$$

$$\beta = [f] \longmapsto \beta_\# = f_\#$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}\left(\pi_1(\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2), \pi_1(\mathbb{T}^2)\right)\\
=&\mathrm{Hom}\left(\langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \mid [a_1, a_2][a_3, a_4][a_5, a_6] = 1\rangle, \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\right)\\
=&\mathrm{Hom}\left(\mathrm{F}\left(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\right), \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\right)\\
=&M_{2\times 6}(\mathbb{Z})
\end{aligned}$$

$$\beta_\# = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \beta_{1,3} & \beta_{1,4} & \beta_{1,5} & \beta_{1,6} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \beta_{2,3} & \beta_{2,4} & \beta_{2,5} & \beta_{2,6} \end{pmatrix}$$

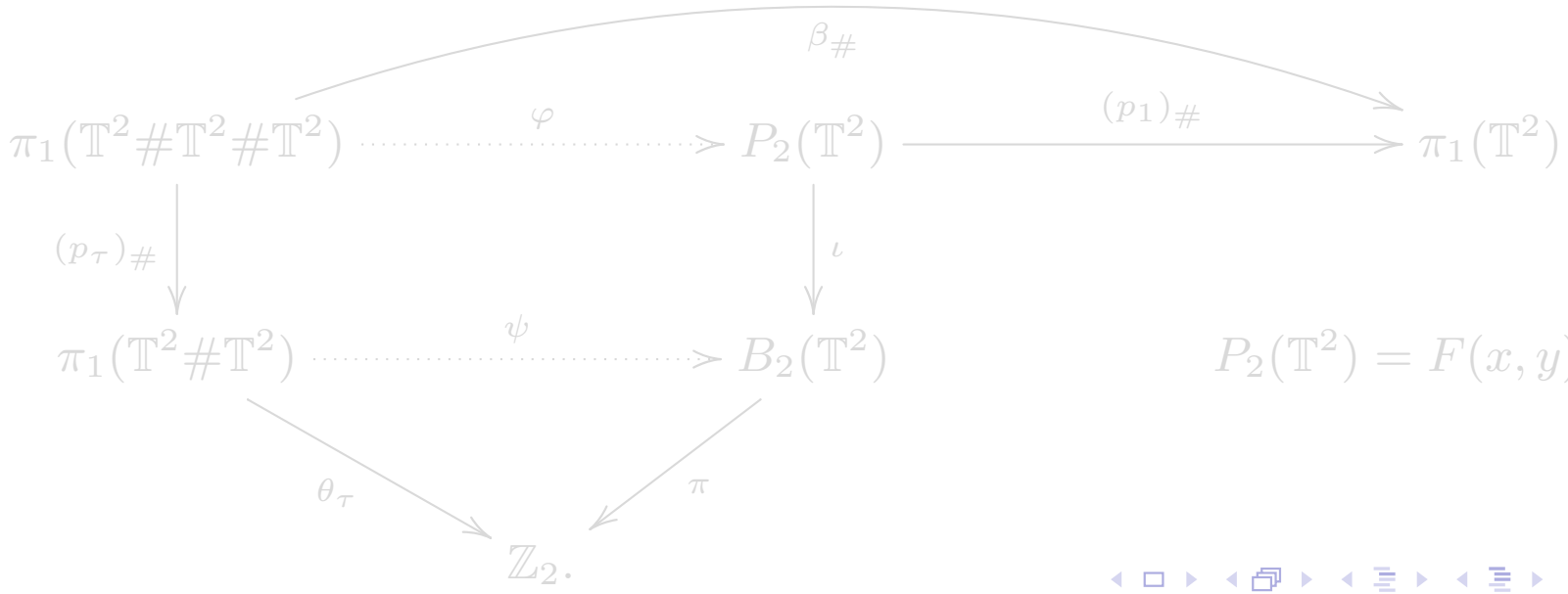
$$\begin{array}{ccccc}
 & & \overset{\beta_\#}{\frown} & & \\
\pi_1(\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2) & \overset{\varphi}{\dashrightarrow} & P_2(\mathbb{T}^2) & \xrightarrow{(p_1)_\#} & \pi_1(\mathbb{T}^2) \\
\downarrow{\scriptstyle (p_\tau)_\#} & & \downarrow{\scriptstyle \iota} & & \\
\pi_1(\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2) & \overset{\psi}{\dashrightarrow} & B_2(\mathbb{T}^2) & & \\
 & {\scriptstyle \theta_\tau}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \pi} & & & \\
 & \mathbb{Z}_2. & & &
\end{array}$$

$$P_2(\mathbb{T}^2) = F(x, y) \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

$$[\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2] \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}\left(\pi_1(\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2), \pi_1(\mathbb{T}^2)\right)$$
$$\beta = [f] \longmapsto \beta_\# = f_\#$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}\left(\pi_1(\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2), \pi_1(\mathbb{T}^2)\right)\\
=&\mathrm{Hom}\left(\langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \mid [a_1, a_2][a_3, a_4][a_5, a_6] = 1\rangle, \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\right)\\
=&\mathrm{Hom}\left(\mathrm{F}\left(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\right), \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\right)\\
=&M_{2\times 6}(\mathbb{Z})
\end{aligned}$$

$$\beta_\# = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \beta_{1,3} & \beta_{1,4} & \beta_{1,5} & \beta_{1,6} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \beta_{2,3} & \beta_{2,4} & \beta_{2,5} & \beta_{2,6} \end{pmatrix}$$

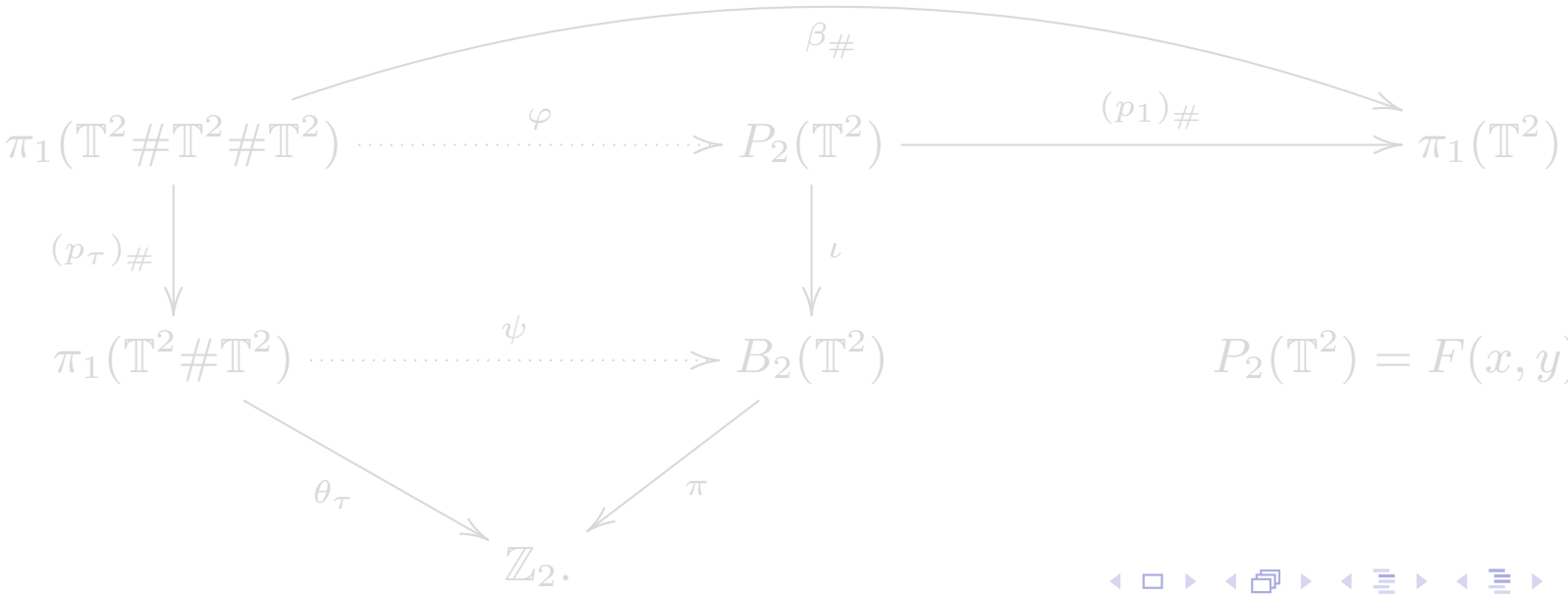


$$P_2(\mathbb{T}^2) = F(x, y)\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$$

$$[\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2] \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}\left(\pi_1(\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2), \pi_1(\mathbb{T}^2)\right)$$
$$\beta = [f] \longmapsto \beta_\# = f_\#$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}\left(\pi_1(\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2), \pi_1(\mathbb{T}^2)\right)\\
=&\mathrm{Hom}\left(\langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \mid [a_1, a_2][a_3, a_4][a_5, a_6] = 1\rangle, \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\right)\\
=&\mathrm{Hom}\left(\mathrm{F}\left(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\right), \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\right)\\
=&M_{2\times 6}(\mathbb{Z})
\end{aligned}$$

$$\beta_\# = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \beta_{1,3} & \beta_{1,4} & \beta_{1,5} & \beta_{1,6} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \beta_{2,3} & \beta_{2,4} & \beta_{2,5} & \beta_{2,6} \end{pmatrix}$$

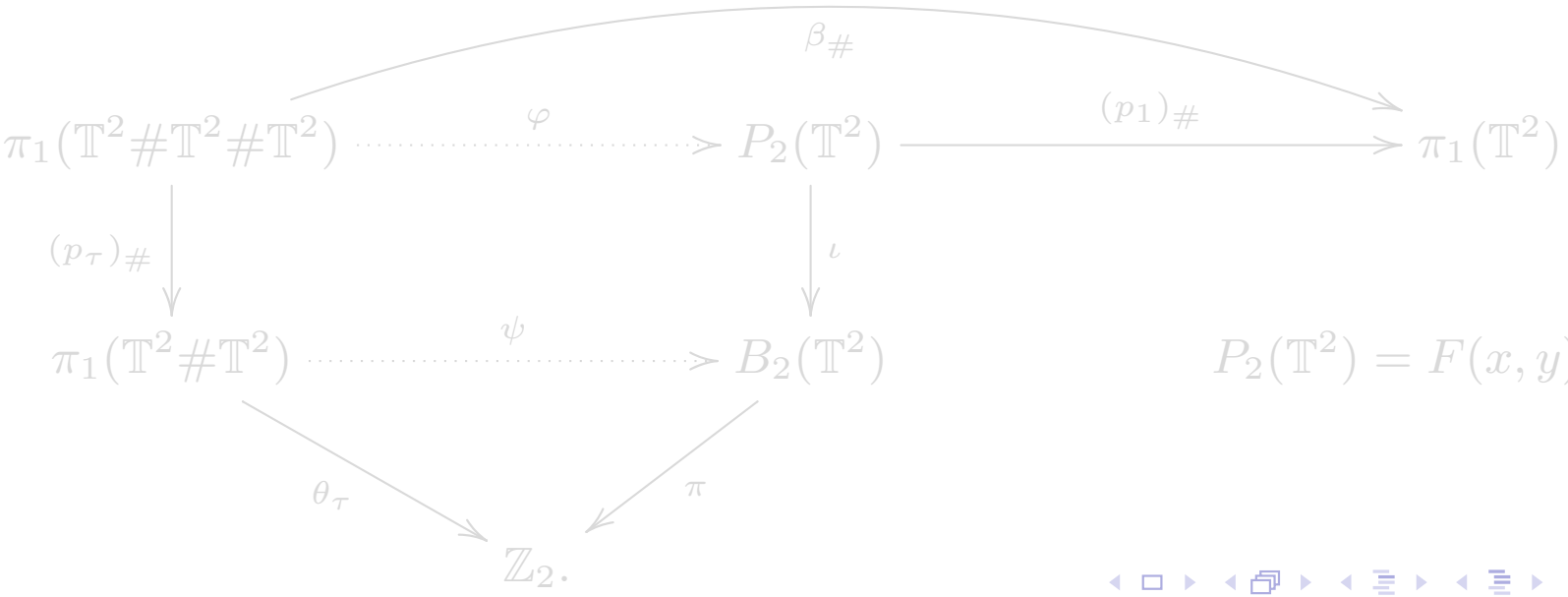


$$P_2(\mathbb{T}^2) = F(x, y)\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$$

$$[\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2] \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}\left(\pi_1(\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2), \pi_1(\mathbb{T}^2)\right)$$
$$\beta = [f] \longmapsto \beta_\# = f_\#$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}\left(\pi_1(\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2), \pi_1(\mathbb{T}^2)\right)\\
=&\mathrm{Hom}\left(\langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \mid [a_1, a_2][a_3, a_4][a_5, a_6] = 1\rangle, \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\right)\\
=&\mathrm{Hom}\left(\mathrm{F}\left(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\right), \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\right)\\
=&M_{2\times 6}(\mathbb{Z})
\end{aligned}$$

$$\beta_\# = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \beta_{1,3} & \beta_{1,4} & \beta_{1,5} & \beta_{1,6} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \beta_{2,3} & \beta_{2,4} & \beta_{2,5} & \beta_{2,6} \end{pmatrix}$$



$$P_2(\mathbb{T}^2) = F(x, y) \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

$$[\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2] \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}\left(\pi_1(\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2), \pi_1(\mathbb{T}^2)\right)$$
$$\beta = [f] \longmapsto \beta_\# = f_\#$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}\left(\pi_1(\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2), \pi_1(\mathbb{T}^2)\right)\\
=&\mathrm{Hom}\left(\langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \mid [a_1, a_2][a_3, a_4][a_5, a_6] = 1\rangle, \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\right)\\
=&\mathrm{Hom}\left(\mathrm{F}\left(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\right), \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\right)\\
=&M_{2\times 6}(\mathbb{Z})
\end{aligned}$$

$$\beta_\# = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \beta_{1,3} & \beta_{1,4} & \beta_{1,5} & \beta_{1,6} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \beta_{2,3} & \beta_{2,4} & \beta_{2,5} & \beta_{2,6} \end{pmatrix}$$

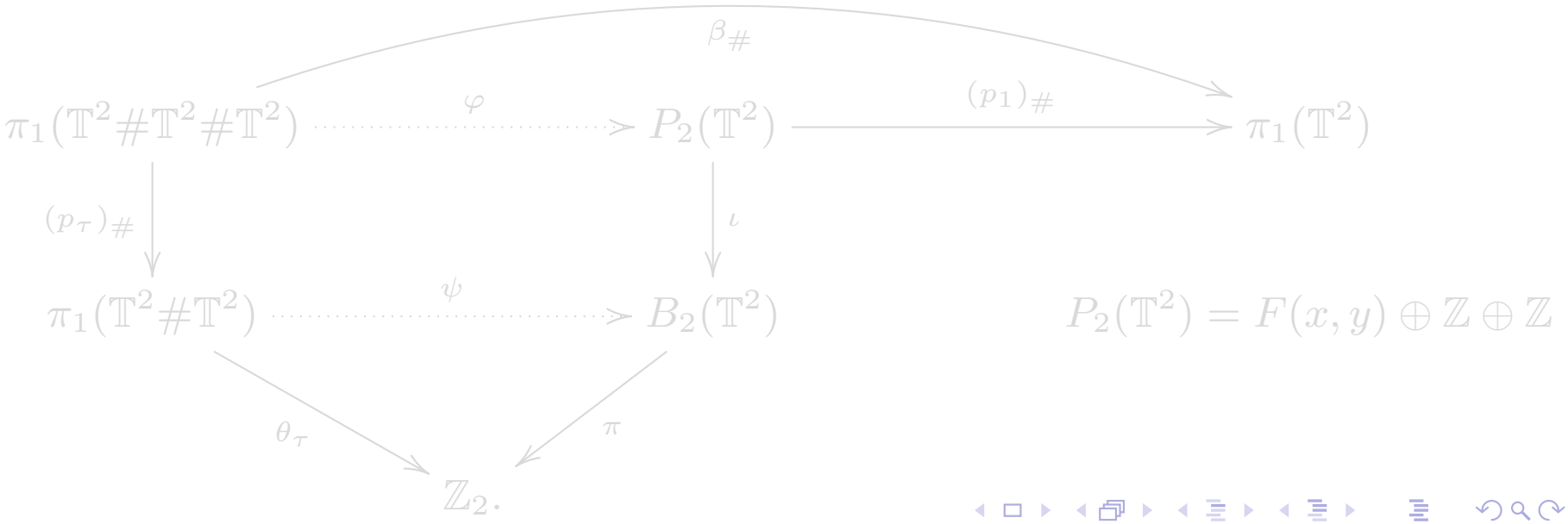
$$\begin{array}{ccccc}
 & & \overset{\beta_\#}{\frown} & & \\
\pi_1(\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2) & \overset{\varphi}{\dashrightarrow} & P_2(\mathbb{T}^2) & \xrightarrow{(p_1)_\#} & \pi_1(\mathbb{T}^2) \\
\downarrow{\scriptstyle (p_\tau)_\#} & & \downarrow{\scriptstyle \iota} & & \\
\pi_1(\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2) & \overset{\psi}{\dashrightarrow} & B_2(\mathbb{T}^2) & & \\
 & {\scriptstyle \theta_\tau}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \pi} & & & \\
 & \mathbb{Z}_2. & & &
\end{array}$$

$$P_2(\mathbb{T}^2) = F(x, y) \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

$$[\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2] \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}\left(\pi_1(\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2), \pi_1(\mathbb{T}^2)\right)$$
$$\beta = [f] \longmapsto \beta_\# = f_\#$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}\left(\pi_1(\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2), \pi_1(\mathbb{T}^2)\right)\\
=&\mathrm{Hom}\left(\langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \mid [a_1, a_2][a_3, a_4][a_5, a_6] = 1\rangle, \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\right)\\
=&\mathrm{Hom}\left(\mathrm{F}\left(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\right), \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\right)\\
=&M_{2\times 6}(\mathbb{Z})
\end{aligned}$$

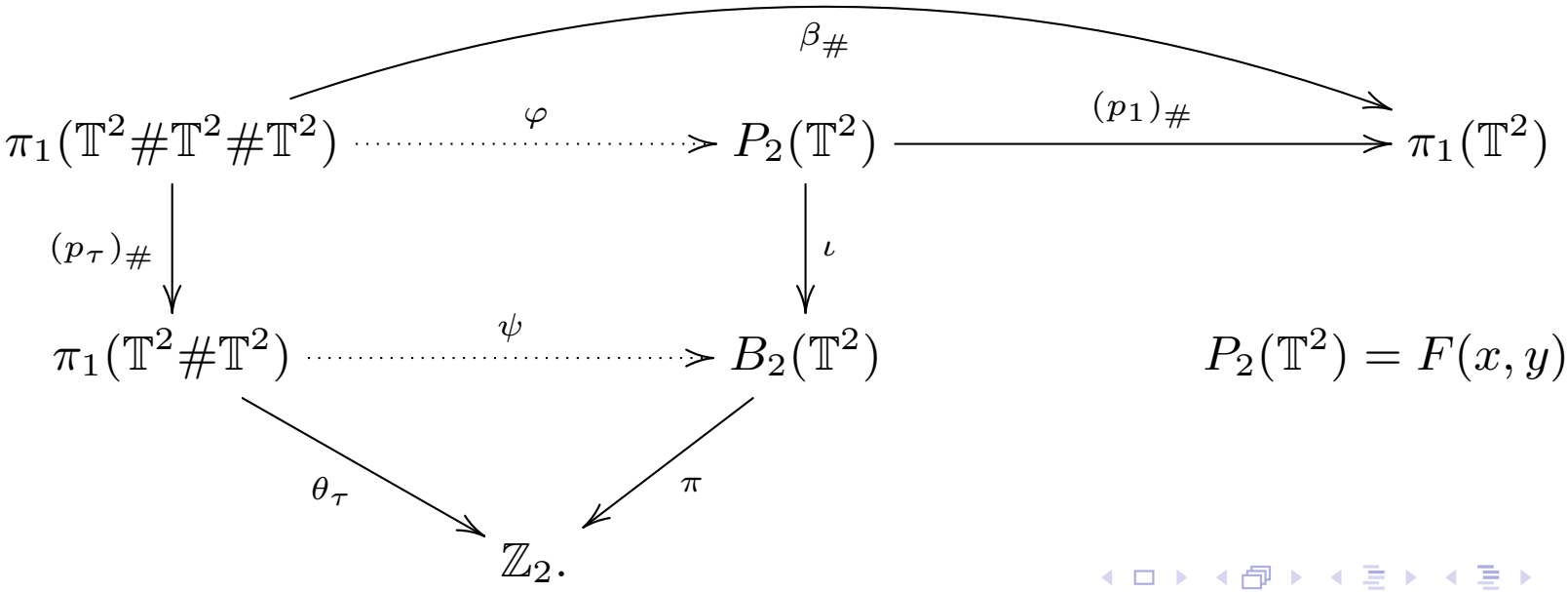
$$\beta_\# = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \beta_{1,3} & \beta_{1,4} & \beta_{1,5} & \beta_{1,6} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \beta_{2,3} & \beta_{2,4} & \beta_{2,5} & \beta_{2,6} \end{pmatrix}$$



$$[\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2] \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}\left(\pi_1(\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2), \pi_1(\mathbb{T}^2)\right)$$
$$\beta = [f] \longmapsto \beta_\# = f_\#$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}\left(\pi_1(\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2), \pi_1(\mathbb{T}^2)\right)\\
=&\mathrm{Hom}\left(\langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \mid [a_1, a_2][a_3, a_4][a_5, a_6] = 1\rangle, \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\right)\\
=&\mathrm{Hom}\left(\mathrm{F}\left(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\right), \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\right)\\
=&M_{2\times 6}(\mathbb{Z})
\end{aligned}$$

$$\beta_\# = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \beta_{1,3} & \beta_{1,4} & \beta_{1,5} & \beta_{1,6} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \beta_{2,3} & \beta_{2,4} & \beta_{2,5} & \beta_{2,6} \end{pmatrix}$$



$$P_2(\mathbb{T}^2) = F(x, y)\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$$

$$\beta \in [\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2] \qquad \beta_\# = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \beta_{1,3} & \beta_{1,4} & \beta_{1,5} & \beta_{1,6} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \beta_{2,3} & \beta_{2,4} & \beta_{2,5} & \beta_{2,6} \end{pmatrix}$$

Teorema

β tem a propriedade de Borsuk-Ulam se, e somente se,

$$\det \begin{bmatrix} \beta_{1,3} - \beta_{1,5} & \beta_{1,4} - \beta_{1,6} \\ \beta_{2,3} - \beta_{2,5} & \beta_{2,4} - \beta_{2,6} \end{bmatrix} \neq 0.$$

Obrigado!!!

$$\beta \in [\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2] \qquad \beta_\# = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \beta_{1,3} & \beta_{1,4} & \beta_{1,5} & \beta_{1,6} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \beta_{2,3} & \beta_{2,4} & \beta_{2,5} & \beta_{2,6} \end{pmatrix}$$

Teorema

β tem a propriedade de Borsuk-Ulam se, e somente se,

$$\det \begin{bmatrix} \beta_{1,3} - \beta_{1,5} & \beta_{1,4} - \beta_{1,6} \\ \beta_{2,3} - \beta_{2,5} & \beta_{2,4} - \beta_{2,6} \end{bmatrix} \neq 0.$$

Obrigado!!!

$$\beta \in [\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2, \mathbb{T}^2] \qquad \beta_\# = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \beta_{1,3} & \beta_{1,4} & \beta_{1,5} & \beta_{1,6} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \beta_{2,3} & \beta_{2,4} & \beta_{2,5} & \beta_{2,6} \end{pmatrix}$$

Teorema

β tem a propriedade de Borsuk-Ulam se, e somente se,

$$\det \begin{bmatrix} \beta_{1,3} - \beta_{1,5} & \beta_{1,4} - \beta_{1,6} \\ \beta_{2,3} - \beta_{2,5} & \beta_{2,4} - \beta_{2,6} \end{bmatrix} \neq 0.$$

Obrigado!!!