Números de Reidemeister em grupos e a propriedade R_∞

Wagner Carvalho Sgobbi

June 2, 2020

Panorama

Panorama

0) Nºs de Reidemeister em grupos, R_∞ e Teoria de Nielsen;

Panorama

0) Nºs de Reidemeister em grupos, R_∞ e Teoria de Nielsen;
1) R_∞ pelo diagrama comutativo;

Panorama

0) Nºs de Reidemeister em grupos, R_∞ e Teoria de Nielsen;
1) R_∞ pelo diagrama comutativo;
2) R_∞ pelo invariante Σ^1;

Panorama

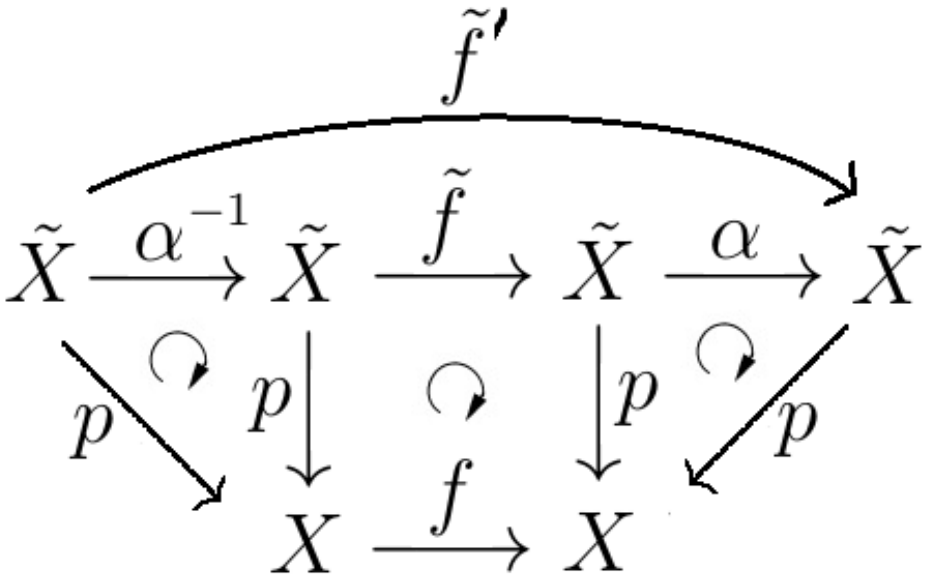
0) Nºs de Reidemeister em grupos, R_∞ e Teoria de Nielsen;
1) R_∞ pelo diagrama comutativo;
2) R_∞ pelo invariante Σ^1;
3) R_∞ por poliedros convexos;

0) N° de Reidemeister em grupos, R_∞ e Teoria de Nielsen

Definição (Número de Reidemeister topológico)

Seja X topológico com recobrimento universal $p : \tilde{X} \to X$ e $f : X \to X$ um homeomorfismo. Definimos $R(f)$ como o número de classes de equivalência de levantamentos $\tilde{f}$ pela relação

$$\tilde{f} \sim \tilde{f}' \Leftrightarrow \text{ existe } \alpha \in \mathcal{D} \text{ tal que } \alpha \tilde{f} \alpha^{-1} = \tilde{f}'.$$



0) N° de Reidemeister em grupos, R_∞ e Teoria de Nielsen

Definição (Número de Reidemeister topológico)

Seja X topológico com recobrimento universal $p : \tilde{X} \to X$ e $f : X \to X$ um homeomorfismo. Definimos $R(f)$ como o número de classes de equivalência de levantamentos $\tilde{f}$ pela relação

$$\tilde{f} \sim \tilde{f}' \Leftrightarrow \text{ existe } \alpha \in \mathcal{D} \text{ tal que } \alpha \tilde{f} \alpha^{-1} = \tilde{f}'.$$

Definição (Número de Reidemeister algébrico)

Seja G grupo e $\varphi \in Aut(G)$. O número de Reidemeister $R(\varphi)$ é o número de classes de equivalência em G dadas pela relação

$$g \sim_\varphi h \Leftrightarrow \text{ existe } z \in G \text{ tal que } zg\varphi(z)^{-1} = h.$$

Proposição

$R(f) = R(f_*)$, onde f_* é o automorfismo induzido de f em $\pi_1(X)$.

Proposição

$R(f) = R(f_*)$, onde f_* é o automorfismo induzido de f em $\pi_1(X)$.

Logo o número de Reidemeister algébrico generaliza o topológico.

0) N° de Reidemeister em grupos, R_∞ e Teoria de Nielsen

Proposição

$R(f) = R(f_*)$, onde f_* é o automorfismo induzido de f em $\pi_1(X)$.

Logo o número de Reidemeister algébrico generaliza o topológico.

Definição (Propriedade R_∞)

G tem a propriedade R_∞ quando $R(\varphi) = \infty \quad \forall\, \varphi \in Aut(G)$.

0) N° de Reidemeister em grupos, R_∞ e Teoria de Nielsen

Proposição

$R(f) = R(f_*)$, onde f_* é o automorfismo induzido de f em $\pi_1(X)$.

Logo o número de Reidemeister algébrico generaliza o topológico.

Definição (Propriedade R_∞)

G tem a propriedade R_∞ quando $R(\varphi) = \infty \quad \forall\, \varphi \in Aut(G)$.

A busca por grupos com R_∞ começou em 1994 com Fel'shtyn e Hill em [4], um paper com aplicações diretas na teoria de Nielsen.

0) N° de Reidemeister em grupos, R_∞ e Teoria de Nielsen

Proposição

$R(f) = R(f_*)$, onde f_* é o automorfismo induzido de f em $\pi_1(X)$.

Logo o número de Reidemeister algébrico generaliza o topológico.

Definição (Propriedade R_∞)

G tem a propriedade R_∞ quando $R(\varphi) = \infty \quad \forall\, \varphi \in Aut(G)$.

A busca por grupos com R_∞ começou em 1994 com Fel'shtyn e Hill em [4], um paper com aplicações diretas na teoria de Nielsen.

Exemplo

Se X é uma Nilvariedade compacta de dimensão ≥ 3, a propriedade R_∞ em $\pi_1(X)$ implica que todo homeomorfismo $f : X \to X$ pode ser deformado via homotopia a uma função f' livre de ponto fixo.

0) N° de Reidemeister em grupos, R_∞ e Teoria de Nielsen

Alguns grupos com a propriedade R_∞ (veja [3]):

0) N° de Reidemeister em grupos, R_∞ e Teoria de Nielsen

Alguns grupos com a propriedade R_∞ (veja [3]):

- Grupos de Baumslag-Solitar $BS(m, n)$ e suas generalizações;

0) N° de Reidemeister em grupos, R_∞ e Teoria de Nielsen

Alguns grupos com a propriedade R_∞ (veja [3]):

- Grupos de Baumslag-Solitar $BS(m, n)$ e suas generalizações;
- Grupos Γ_n (generalização de $BS(1, n)$);

0) N° de Reidemeister em grupos, R_∞ e Teoria de Nielsen

Alguns grupos com a propriedade R_∞ (veja [3]):

- Grupos de Baumslag-Solitar $BS(m, n)$ e suas generalizações;
- Grupos Γ_n (generalização de $BS(1, n)$);
- Grupos hiperbólicos não-elementares e grupos relativamente hiperbólicos;

0) N° de Reidemeister em grupos, R_∞ e Teoria de Nielsen

Alguns grupos com a propriedade R_∞ (veja [3]):

- Grupos de Baumslag-Solitar $BS(m, n)$ e suas generalizações;
- Grupos Γ_n (generalização de $BS(1, n)$);
- Grupos hiperbólicos não-elementares e grupos relativamente hiperbólicos;
- Os grupos de Grigorchuk, de Gupta-Sidki e de Houghton;

0) N° de Reidemeister em grupos, R_∞ e Teoria de Nielsen

Alguns grupos com a propriedade R_∞ (veja [3]):

- Grupos de Baumslag-Solitar $BS(m, n)$ e suas generalizações;
- Grupos Γ_n (generalização de $BS(1, n)$);
- Grupos hiperbólicos não-elementares e grupos relativamente hiperbólicos;
- Os grupos de Grigorchuk, de Gupta-Sidki e de Houghton;
- Grupos de Thompson, suas generalizações e produtos diretos;

0) N° de Reidemeister em grupos, R_∞ e Teoria de Nielsen

Alguns grupos com a propriedade R_∞ (veja [3]):

- Grupos de Baumslag-Solitar $BS(m, n)$ e suas generalizações;
- Grupos Γ_n (generalização de $BS(1, n)$);
- Grupos hiperbólicos não-elementares e grupos relativamente hiperbólicos;
- Os grupos de Grigorchuk, de Gupta-Sidki e de Houghton;
- Grupos de Thompson, suas generalizações e produtos diretos;
- Alguns "mapping class groups" de superfícies compactas orientadas;

0) N° de Reidemeister em grupos, R_∞ e Teoria de Nielsen

Alguns grupos com a propriedade R_∞ (veja [3]):

- Grupos de Baumslag-Solitar $BS(m, n)$ e suas generalizações;
- Grupos Γ_n (generalização de $BS(1, n)$);
- Grupos hiperbólicos não-elementares e grupos relativamente hiperbólicos;
- Os grupos de Grigorchuk, de Gupta-Sidki e de Houghton;
- Grupos de Thompson, suas generalizações e produtos diretos;
- Alguns "mapping class groups" de superfícies compactas orientadas;
- Alguns "lamplighter groups" $\mathbb{Z}_n \wr \mathbb{Z}$;

0) N° de Reidemeister em grupos, R_∞ e Teoria de Nielsen

Alguns grupos com a propriedade R_∞ (veja [3]):

- Grupos de Baumslag-Solitar $BS(m, n)$ e suas generalizações;
- Grupos Γ_n (generalização de $BS(1, n)$);
- Grupos hiperbólicos não-elementares e grupos relativamente hiperbólicos;
- Os grupos de Grigorchuk, de Gupta-Sidki e de Houghton;
- Grupos de Thompson, suas generalizações e produtos diretos;
- Alguns "mapping class groups" de superfícies compactas orientadas;
- Alguns "lamplighter groups" $\mathbb{Z}_n \wr \mathbb{Z}$;
- Grupos de tranças $B_n(S)$, com $n > 3$ e $S = D^2$ ou $S = S^2$;

0) N° de Reidemeister em grupos, R_∞ e Teoria de Nielsen

Alguns grupos com a propriedade R_∞ (veja [3]):

- Grupos de Baumslag-Solitar $BS(m, n)$ e suas generalizações;
- Grupos Γ_n (generalização de $BS(1, n)$);
- Grupos hiperbólicos não-elementares e grupos relativamente hiperbólicos;
- Os grupos de Grigorchuk, de Gupta-Sidki e de Houghton;
- Grupos de Thompson, suas generalizações e produtos diretos;
- Alguns "mapping class groups" de superfícies compactas orientadas;
- Alguns "lamplighter groups" $\mathbb{Z}_n \wr \mathbb{Z}$;
- Grupos de tranças $B_n(S)$, com $n > 3$ e $S = D^2$ ou $S = S^2$;
- Alguns grupos de Artin;

0) N° de Reidemeister em grupos, R_∞ e Teoria de Nielsen

Alguns grupos com a propriedade R_∞ (veja [3]):

- Grupos de Baumslag-Solitar $BS(m, n)$ e suas generalizações;
- Grupos Γ_n (generalização de $BS(1, n)$);
- Grupos hiperbólicos não-elementares e grupos relativamente hiperbólicos;
- Os grupos de Grigorchuk, de Gupta-Sidki e de Houghton;
- Grupos de Thompson, suas generalizações e produtos diretos;
- Alguns "mapping class groups" de superfícies compactas orientadas;
- Alguns "lamplighter groups" $\mathbb{Z}_n \wr \mathbb{Z}$;
- Grupos de tranças $B_n(S)$, com $n > 3$ e $S = D^2$ ou $S = S^2$;
- Alguns grupos de Artin;
- Alguns grupos cristalográficos;

0) N° de Reidemeister em grupos, R_∞ e Teoria de Nielsen

Alguns grupos com a propriedade R_∞ (veja [3]):

- Grupos de Baumslag-Solitar $BS(m,n)$ e suas generalizações;
- Grupos Γ_n (generalização de $BS(1,n)$);
- Grupos hiperbólicos não-elementares e grupos relativamente hiperbólicos;
- Os grupos de Grigorchuk, de Gupta-Sidki e de Houghton;
- Grupos de Thompson, suas generalizações e produtos diretos;
- Alguns "mapping class groups" de superfícies compactas orientadas;
- Alguns "lamplighter groups" $\mathbb{Z}_n \wr \mathbb{Z}$;
- Grupos de tranças $B_n(S)$, com $n > 3$ e $S = D^2$ ou $S = S^2$;
- Alguns grupos de Artin;
- Alguns grupos cristalográficos;
- Algumas extensões de $SL(n,\mathbb{Z}), PSL(n,\mathbb{Z}), GL(n,\mathbb{Z}), Sp(2n,\mathbb{Z}), n > 1$;

1) R_∞ pelo diagrama comutativo

1) R_∞ pelo diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{p} & C & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \xi} & \circlearrowright & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & \circlearrowright & \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \\ 1 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{p} & C & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Lema (vide (2))

Considere o diagrama comutativo de sequências exatas acima.

1) *se* $R(\psi) = \infty$, *então* $R(\varphi) = \infty$;
2) *se* $R(\xi) = \infty$ *e* $Fix(\psi)$ *é finito, então* $R(\varphi) = \infty$.

2) R_∞ pelo invariante Σ^1

2) R_∞ pelo invariante Σ^1

Definição

Seja G finitamente gerado.

$$S(G) = (Hom(G, \mathbb{R}) - \{0\})/\sim = \{[\chi] \mid \chi \in Hom(G, \mathbb{R}) - \{0\}\},$$

onde $\chi \sim \chi' \Leftrightarrow r\chi = \chi'$ para algum $r > 0$.

2) R_∞ pelo invariante Σ^1

Definição

Seja G finitamente gerado.

$$S(G) = (Hom(G, \mathbb{R}) - \{0\})/\sim = \{[\chi] \mid \chi \in Hom(G, \mathbb{R}) - \{0\}\},$$

onde $\chi \sim \chi' \Leftrightarrow r\chi = \chi'$ para algum $r > 0$.

Se $rk_{\mathbb{Z}}(G^{ab}) = n$, então $Hom(G, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$ e daí $S(G) \simeq S^{n-1}$.

2) R_∞ pelo invariante Σ^1

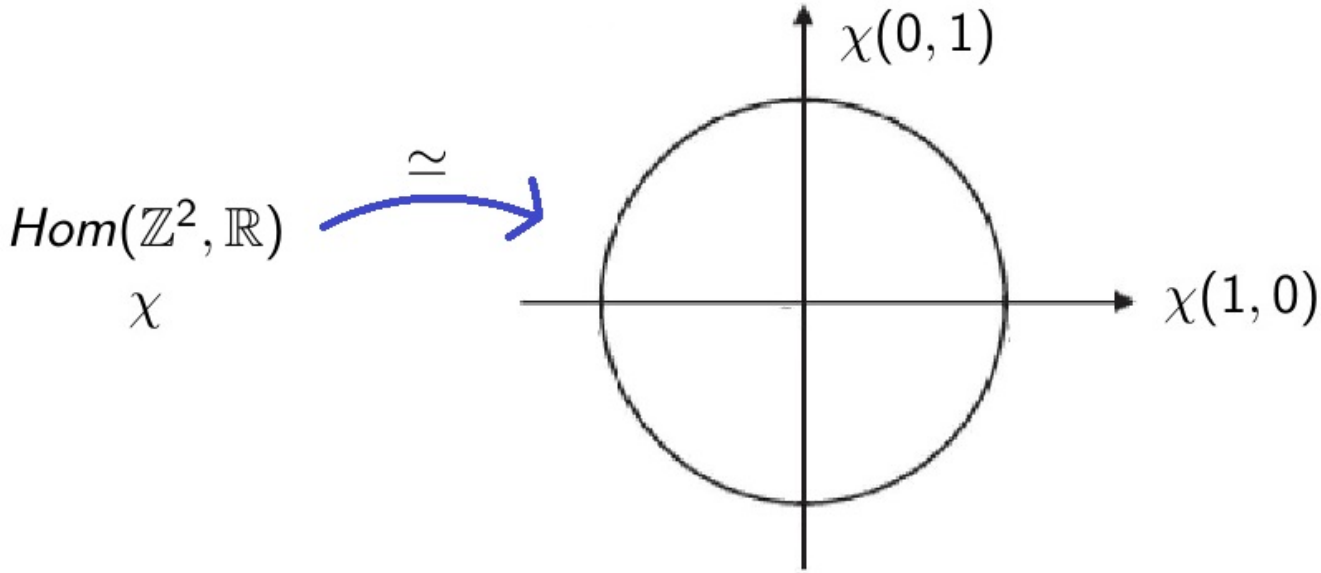
Definição

Seja G finitamente gerado.

$$S(G) = (Hom(G, \mathbb{R}) - \{0\})/\sim = \{[\chi] \mid \chi \in Hom(G, \mathbb{R}) - \{0\}\},$$

onde $\chi \sim \chi' \Leftrightarrow r\chi = \chi'$ para algum $r > 0$.

Se $rk_{\mathbb{Z}}(G^{ab}) = n$, então $Hom(G, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$ e daí $S(G) \simeq S^{n-1}$.



2) R_∞ pelo invariante Σ^1

Definição (O invariante Σ^1)

Seja G finitamente gerado por $X \subset G$. Denote por $\Gamma = \Gamma(G, X)$ o grafo de Cayley de G.

$$\Sigma^1(G) = \{[\chi] \in S(G) \mid \Gamma_\chi \text{ é conexo}\},$$

onde Γ_χ é o subgrafo de Γ induzido pelos vértices g com $\chi(g) \geq 0$.

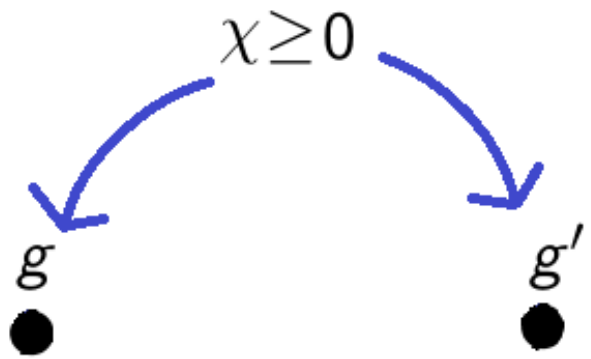
2) R_∞ pelo invariante Σ^1

Definição (O invariante Σ^1)

Seja G finitamente gerado por $X \subset G$. Denote por $\Gamma = \Gamma(G, X)$ o grafo de Cayley de G.

$$\Sigma^1(G) = \{[\chi] \in S(G) \mid \Gamma_\chi \text{ é conexo}\},$$

onde Γ_χ é o subgrafo de Γ induzido pelos vértices g com $\chi(g) \geq 0$.



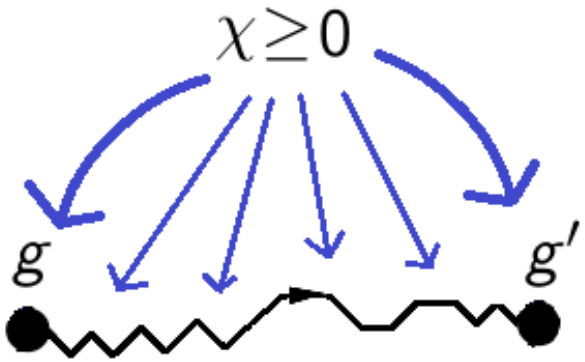
2) R_∞ pelo invariante Σ^1

Definição (O invariante Σ^1)

Seja G finitamente gerado por $X \subset G$. Denote por $\Gamma = \Gamma(G, X)$ o grafo de Cayley de G.

$$\Sigma^1(G) = \{[\chi] \in S(G) \mid \Gamma_\chi \text{ é conexo}\},$$

onde Γ_χ é o subgrafo de Γ induzido pelos vértices g com $\chi(g) \geq 0$.



2) R_∞ pelo invariante Σ^1

Exemplo (Baumslag-Solitar group)

$G = BS(1,2) = \langle a, t \mid tat^{-1} = a^2 \rangle \simeq \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \rtimes \mathbb{Z}.$

2) R_∞ pelo invariante Σ^1

Exemplo (Baumslag-Solitar group)

$G = BS(1,2) = \langle a, t \mid tat^{-1} = a^2 \rangle \simeq \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \rtimes \mathbb{Z}$.

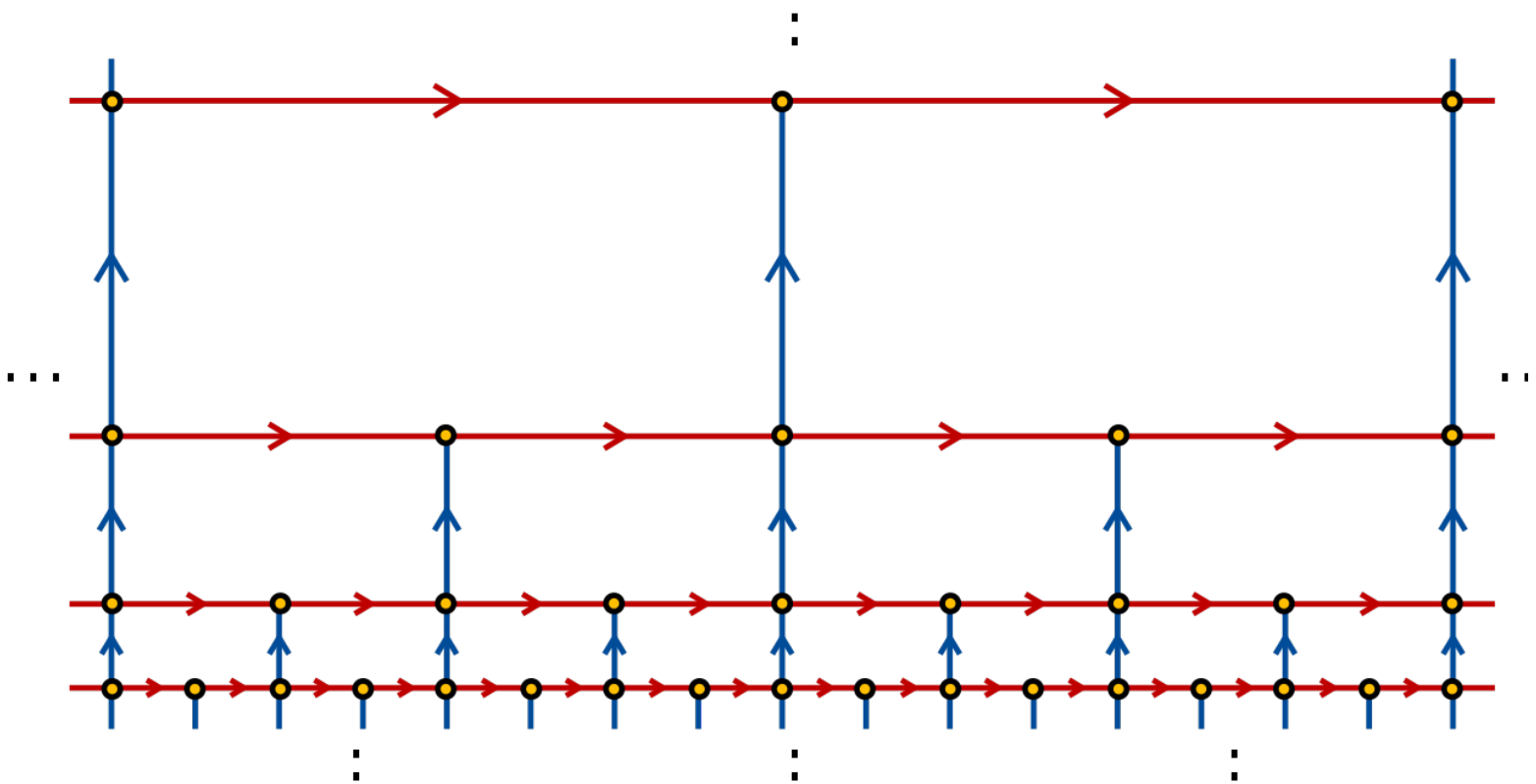
$G^{ab} \simeq \mathbb{Z} = \langle t \rangle$, logo $S(G) \simeq S^0$ consiste de $\chi(a) = 0$ e $\chi(t) = \pm 1$.

2) R_∞ pelo invariante Σ^1

Exemplo (Baumslag-Solitar group)

$G = BS(1,2) = \langle a, t \mid tat^{-1} = a^2 \rangle \simeq \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \rtimes \mathbb{Z}.$

$G^{ab} \simeq \mathbb{Z} = \langle t \rangle$, logo $S(G) \simeq S^0$ consiste de $\chi(a) = 0$ e $\chi(t) = \pm 1$.



2) R_∞ pelo invariante Σ^1

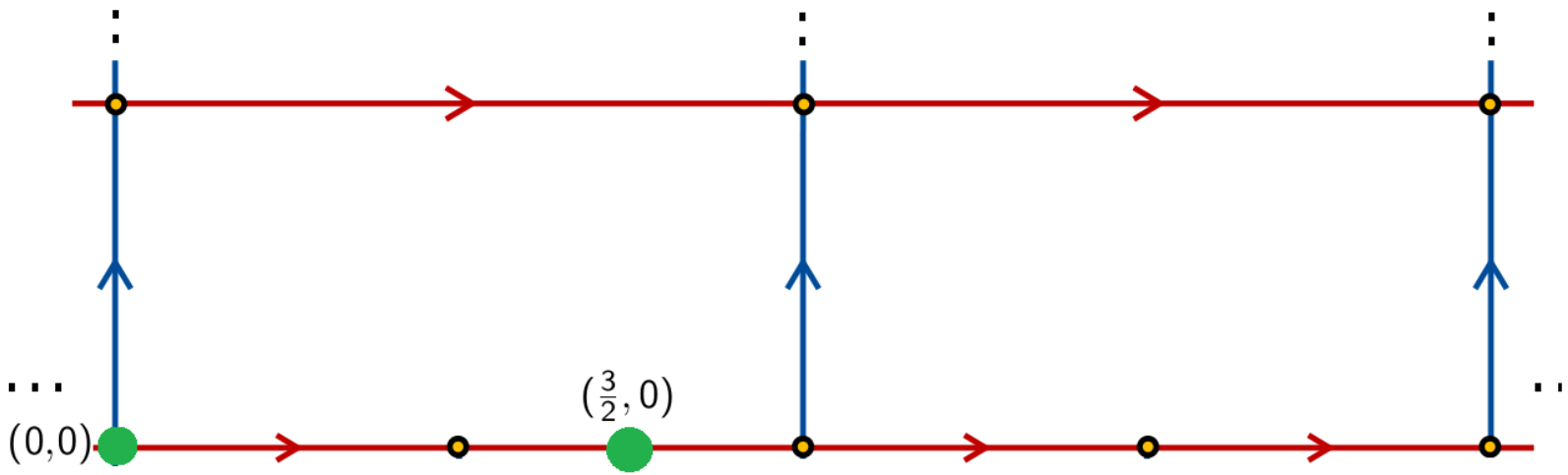
Caso 1: $\chi(a) = 0$ e $\chi(t) = 1$

$$\Gamma_\chi = \text{“metade de cima”}$$

2) R_∞ pelo invariante Σ^1

Caso 1: $\chi(a) = 0$ e $\chi(t) = 1$

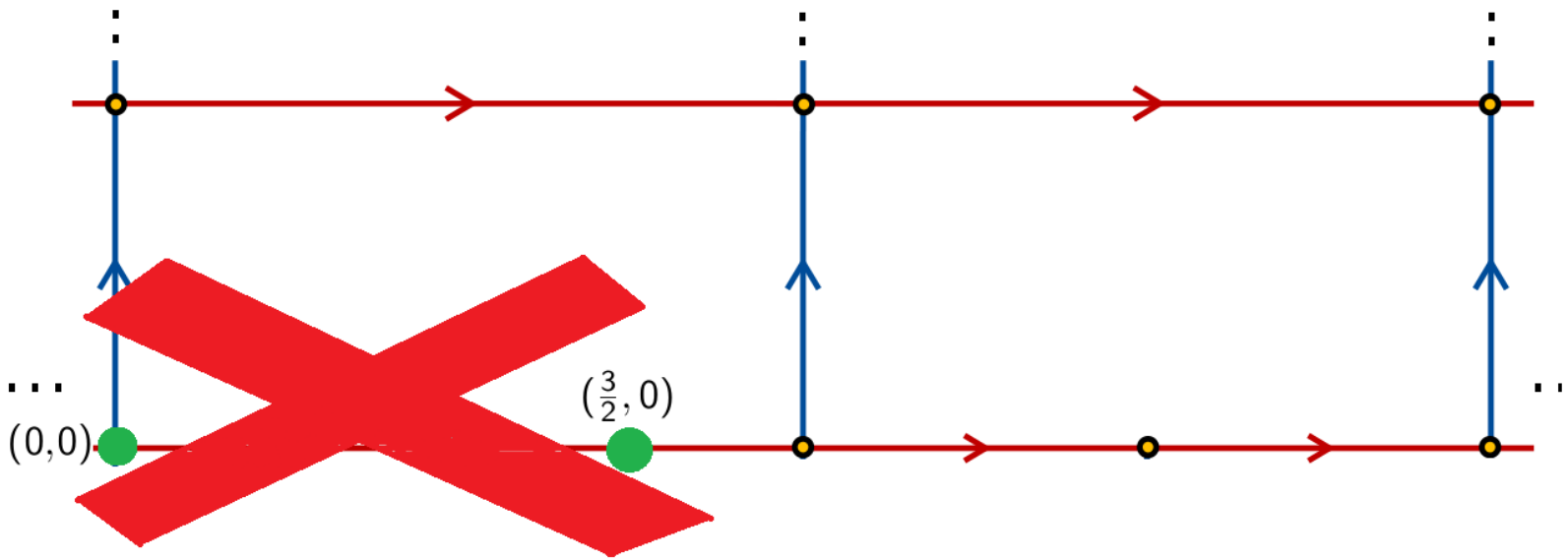
$\Gamma_\chi =$ "metade de cima"



2) R_∞ pelo invariante Σ^1

Caso 1: $\chi(a) = 0$ e $\chi(t) = 1$

$\Gamma_\chi =$ "metade de cima"



2) R_∞ pelo invariante Σ^1

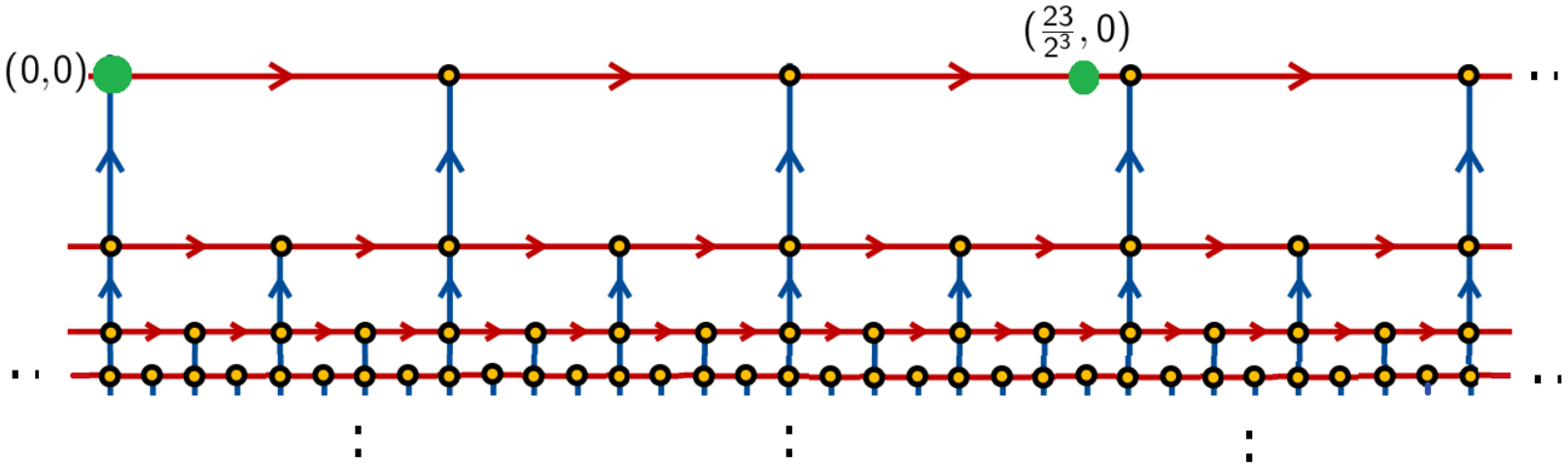
Caso 2: $\chi(a) = 0$ e $\chi(t) = -1$

$$\Gamma_\chi = \text{ “metade de baixo”}$$

2) R_∞ pelo invariante Σ^1

Caso 2: $\chi(a) = 0$ e $\chi(t) = -1$

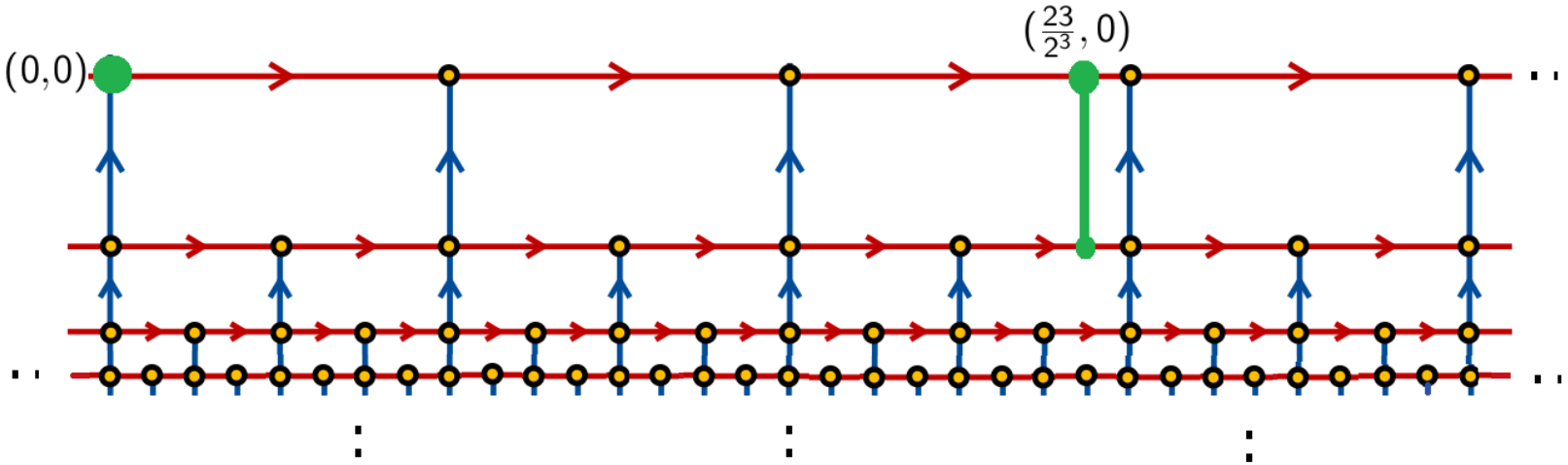
$\Gamma_\chi =$ "metade de baixo"



2) R_∞ pelo invariante Σ^1

Caso 2: $\chi(a) = 0$ e $\chi(t) = -1$

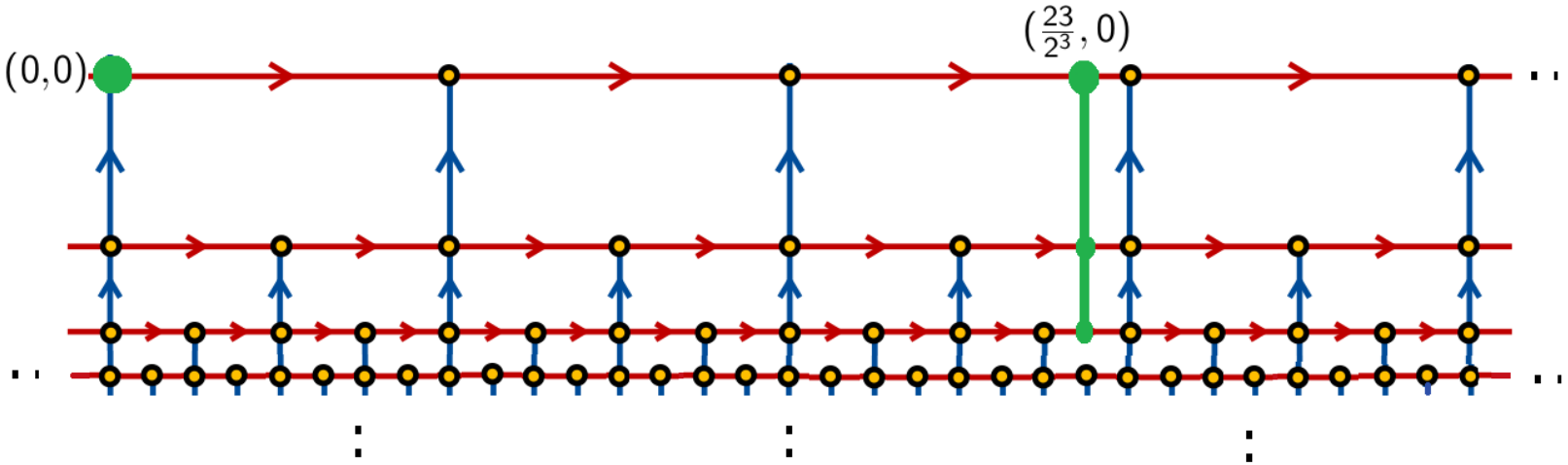
$\Gamma_\chi =$ "metade de baixo"



2) R_∞ pelo invariante Σ^1

Caso 2: $\chi(a) = 0$ e $\chi(t) = -1$

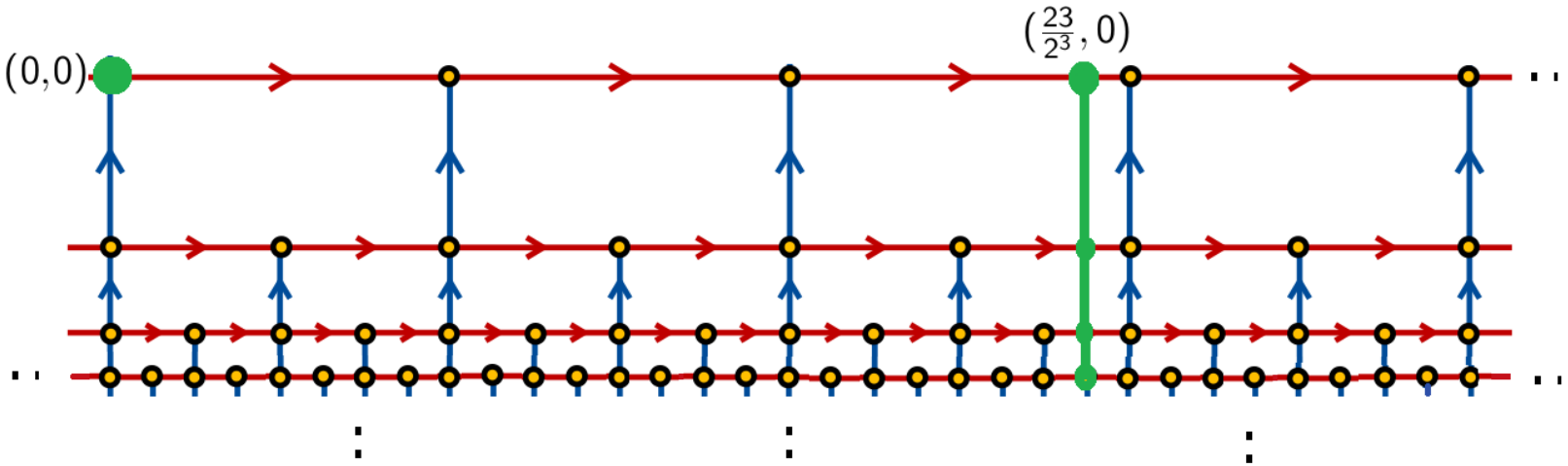
$\Gamma_\chi =$ "metade de baixo"



2) R_∞ pelo invariante Σ^1

Caso 2: $\chi(a) = 0$ e $\chi(t) = -1$

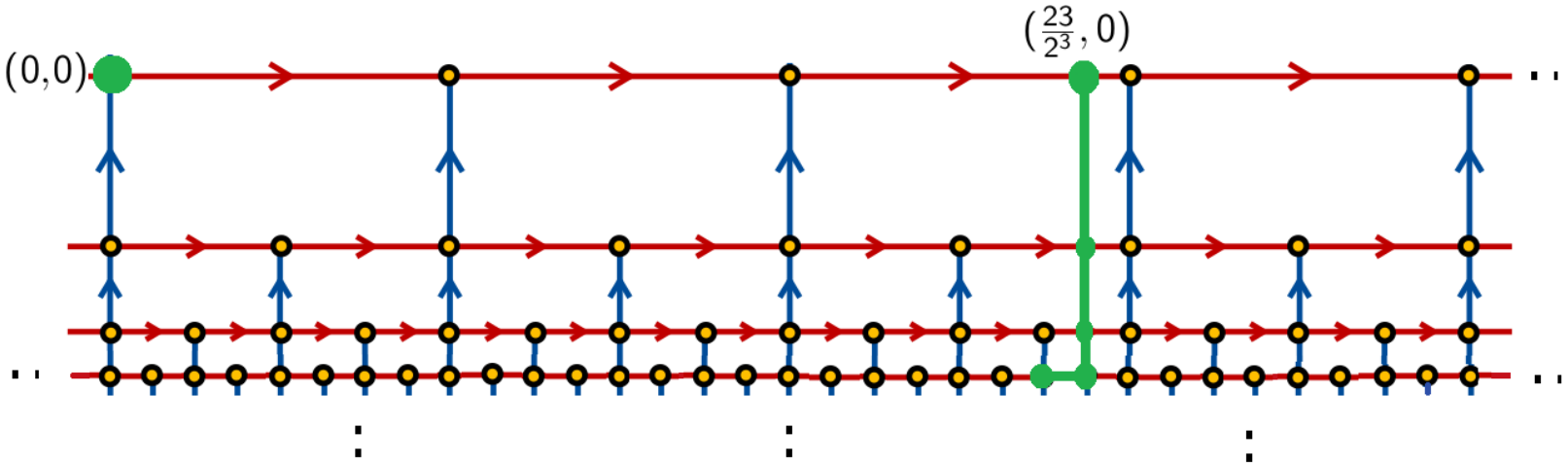
$\Gamma_\chi =$ "metade de baixo"



2) R_∞ pelo invariante Σ^1

Caso 2: $\chi(a) = 0$ e $\chi(t) = -1$

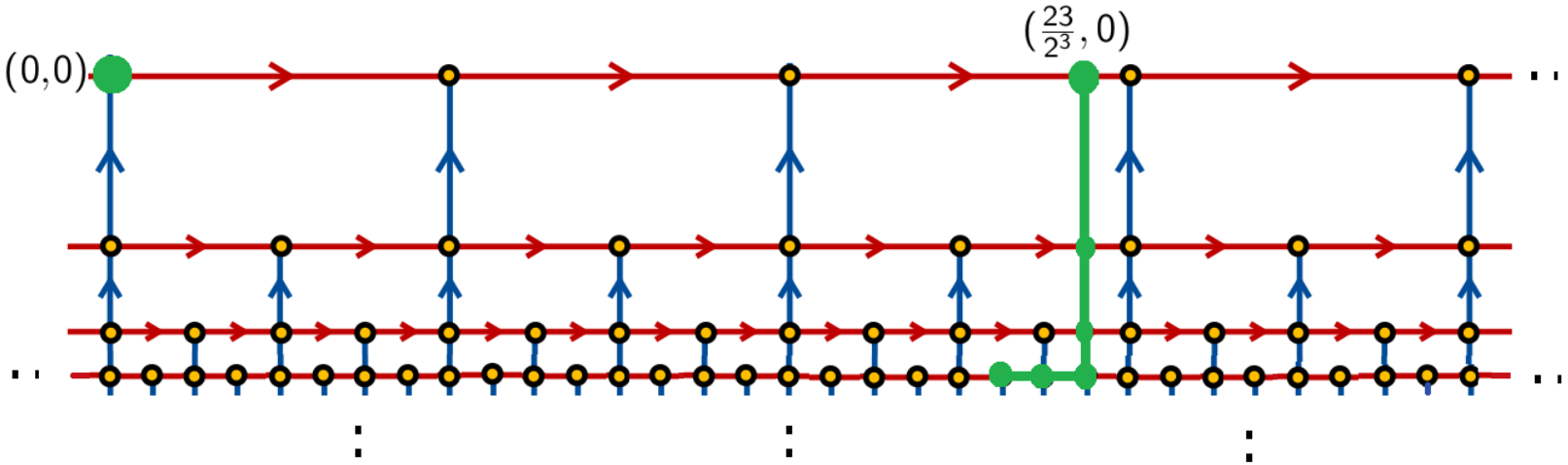
$\Gamma_\chi =$ "metade de baixo"



2) R_∞ pelo invariante Σ^1

Caso 2: $\chi(a) = 0$ e $\chi(t) = -1$

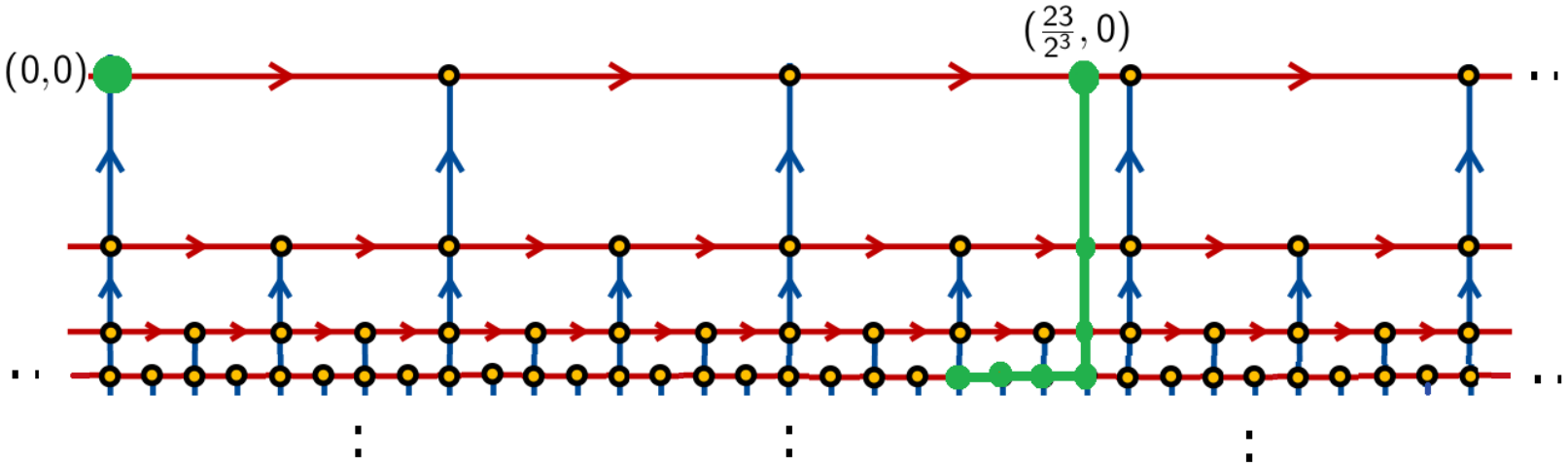
$\Gamma_\chi =$ "metade de baixo"



2) R_∞ pelo invariante Σ^1

Caso 2: $\chi(a) = 0$ e $\chi(t) = -1$

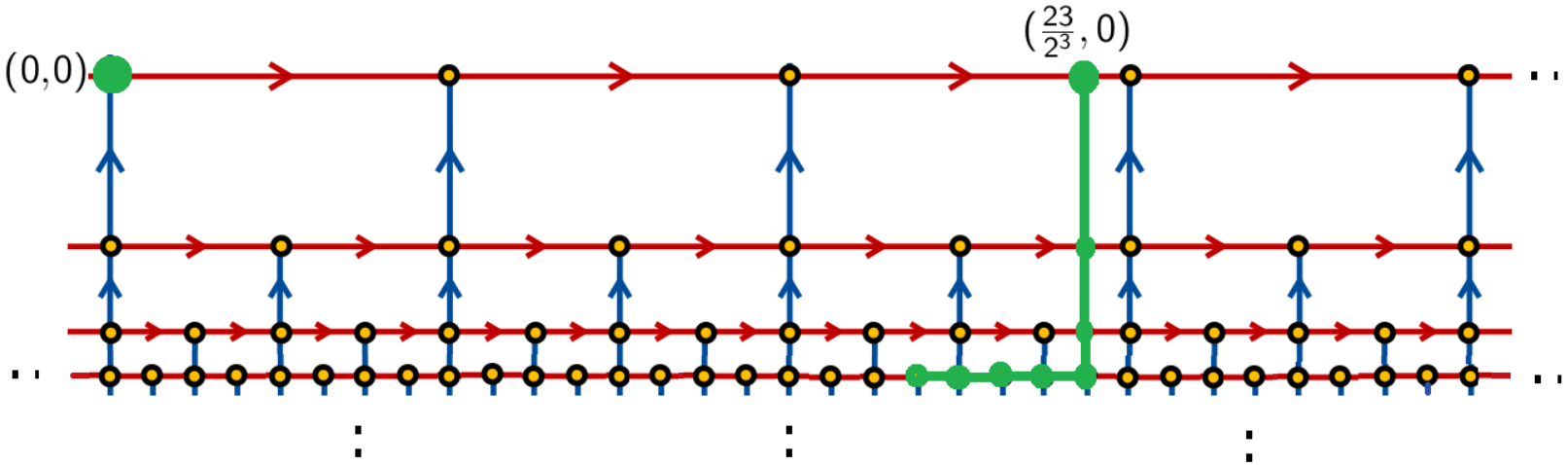
$\Gamma_\chi =$ "metade de baixo"



2) R_∞ pelo invariante Σ^1

Caso 2: $\chi(a) = 0$ e $\chi(t) = -1$

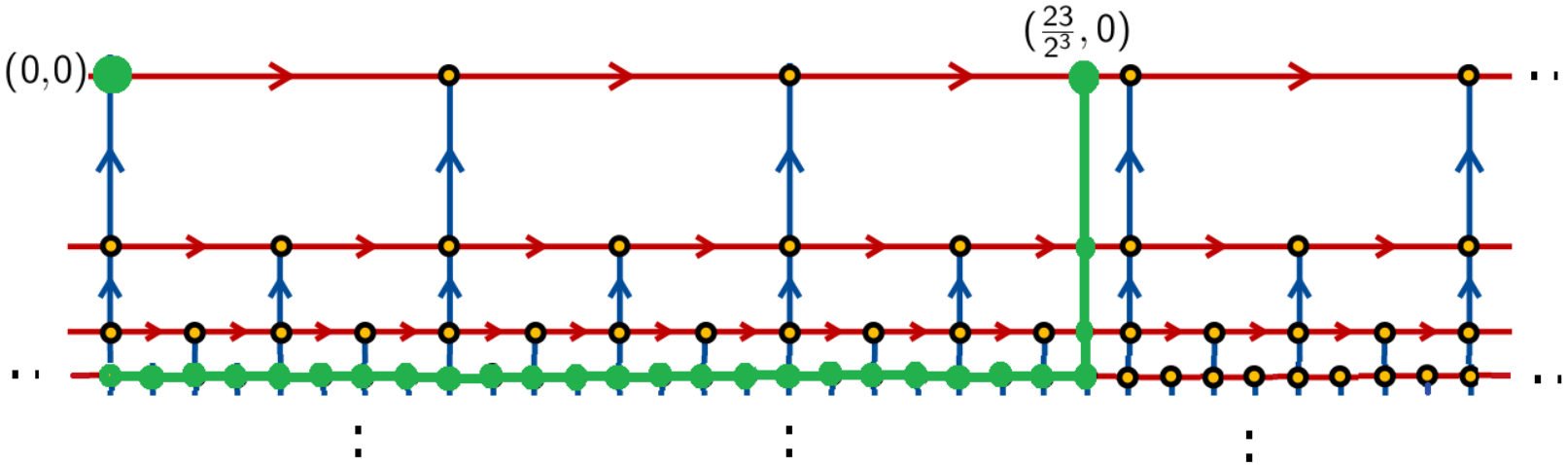
$\Gamma_\chi =$ "metade de baixo"



2) R_∞ pelo invariante Σ^1

Caso 2: $\chi(a) = 0$ e $\chi(t) = -1$

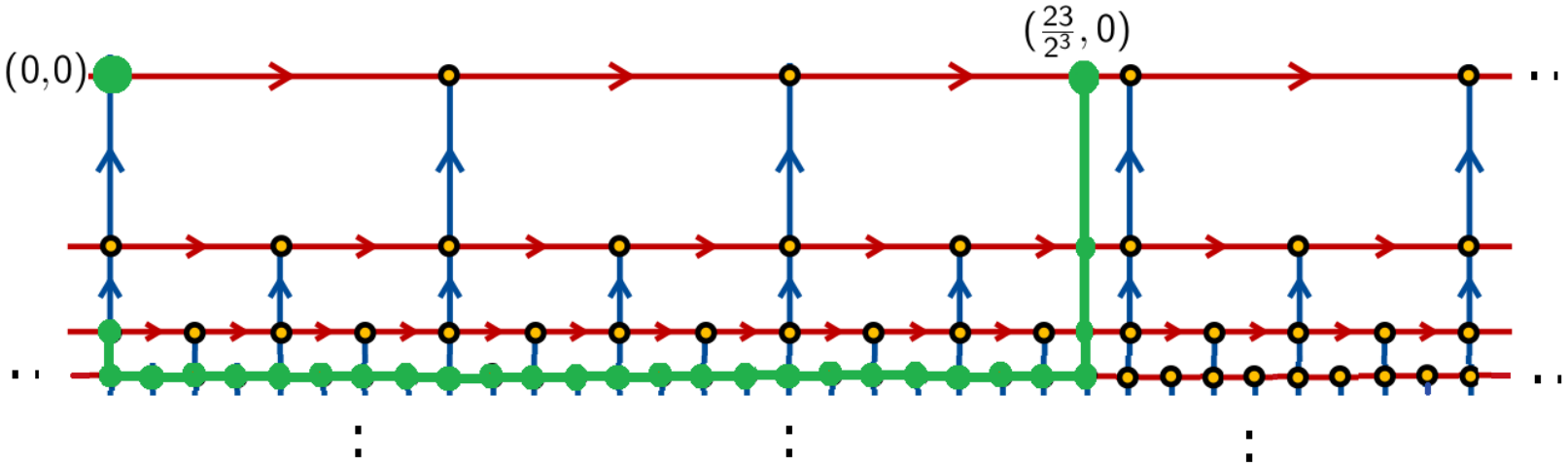
$\Gamma_\chi =$ "metade de baixo"



2) R_∞ pelo invariante Σ^1

Caso 2: $\chi(a) = 0$ e $\chi(t) = -1$

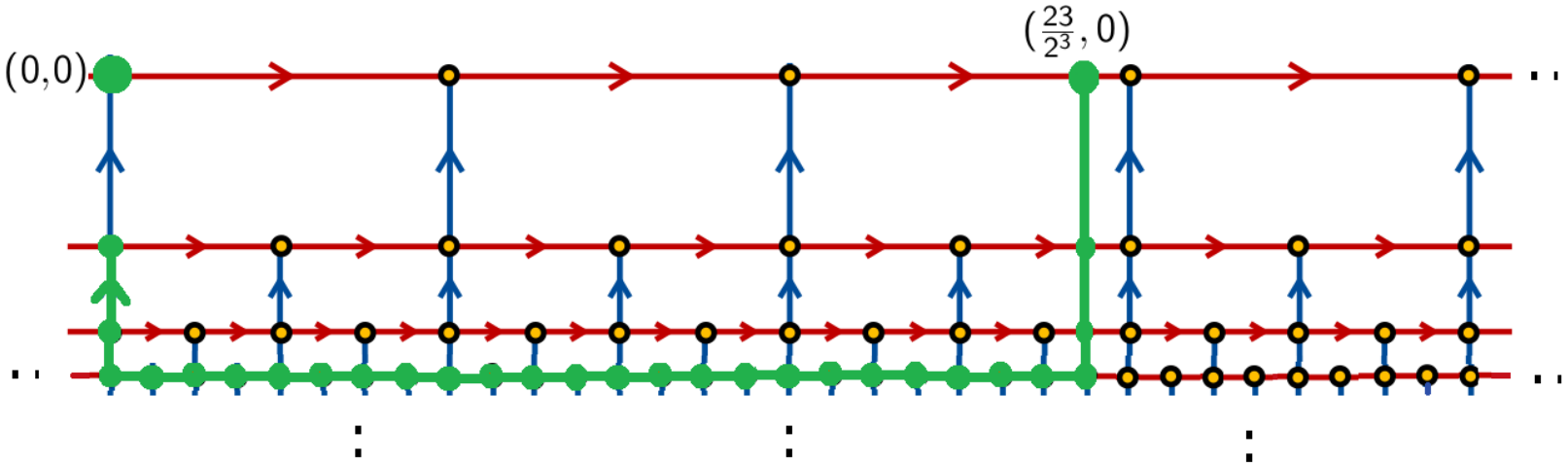
$\Gamma_\chi =$ "metade de baixo"



2) R_∞ pelo invariante Σ^1

Caso 2: $\chi(a) = 0$ e $\chi(t) = -1$

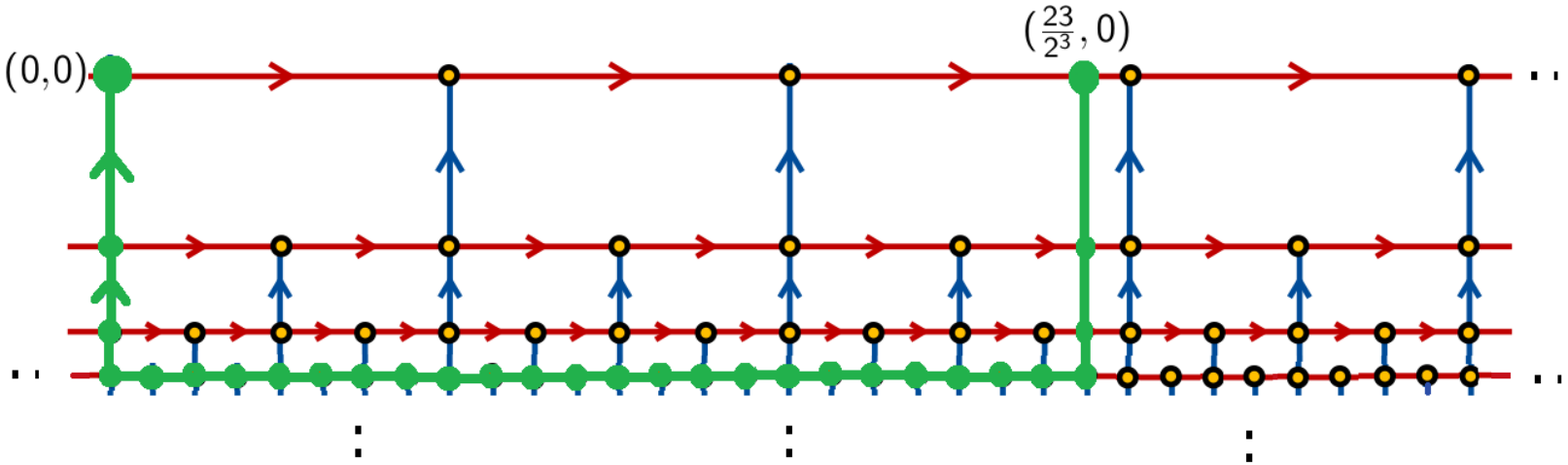
$\Gamma_\chi =$ "metade de baixo"



2) R_∞ pelo invariante Σ^1

Caso 2: $\chi(a) = 0$ e $\chi(t) = -1$

$\Gamma_\chi =$ "metade de baixo"



2) R_∞ pelo invariante Σ^1

Logo $\Sigma^1(BS(1,2))^c = \{[\chi_0]\}$, onde $\chi_0(a) = 0$ e $\chi_0(t) = 1$.

2) R_∞ pelo invariante Σ^1

Logo $\Sigma^1(BS(1,2))^c = \{[\chi_0]\}$, onde $\chi_0(a) = 0$ e $\chi_0(t) = 1$.

Teorema

O grupo de Baumslag-Solitar $G = BS(1,2)$ tem a propriedade R_∞.

2) R_∞ pelo invariante Σ^1

Logo $\Sigma^1(BS(1,2))^c = \{[\chi_0]\}$, onde $\chi_0(a) = 0$ e $\chi_0(t) = 1$.

Teorema

O grupo de Baumslag-Solitar $G = BS(1,2)$ tem a propriedade R_∞.

- $\Sigma^1(G)$ (e $\Sigma^1(G)^c$) são invariantes por automorfismos (vide [5]) ($\varphi \in Aut(G)$ e $[\chi] \in \Sigma^1(G) \Rightarrow [\chi \circ \varphi] \in \Sigma^1(G)$).

2) R_∞ pelo invariante Σ^1

Logo $\Sigma^1(BS(1,2))^c = \{[\chi_0]\}$, onde $\chi_0(a) = 0$ e $\chi_0(t) = 1$.

Teorema

O grupo de Baumslag-Solitar $G = BS(1,2)$ tem a propriedade R_∞.

- $\Sigma^1(G)$ (e $\Sigma^1(G)^c$) são invariantes por automorfismos (vide [5]) ($\varphi \in Aut(G)$ e $[\chi] \in \Sigma^1(G) \Rightarrow [\chi \circ \varphi] \in \Sigma^1(G)$).
- Logo $[\chi_0 \circ \varphi] = [\chi_0]$ e daí $\chi_0 \circ \varphi = r\chi_0$ para algum $r > 0$.

2) R_∞ pelo invariante Σ^1

Logo $\Sigma^1(BS(1,2))^c = \{[\chi_0]\}$, onde $\chi_0(a) = 0$ e $\chi_0(t) = 1$.

Teorema

O grupo de Baumslag-Solitar $G = BS(1,2)$ tem a propriedade R_∞.

- $\Sigma^1(G)$ (e $\Sigma^1(G)^c$) são invariantes por automorfismos (vide [5]) ($\varphi \in Aut(G)$ e $[\chi] \in \Sigma^1(G) \Rightarrow [\chi \circ \varphi] \in \Sigma^1(G)$).
- Logo $[\chi_0 \circ \varphi] = [\chi_0]$ e daí $\chi_0 \circ \varphi = r\chi_0$ para algum $r > 0$.
- Seja $N = \ker(\chi_0) = \ll a \gg$. Então $\varphi(N) \subset N$, pois dado $g \in N$,

$$\chi_0(\varphi(g)) = r.\chi_0(g) = r.0 = 0.$$

2) R_∞ pelo invariante Σ^1

Logo $\Sigma^1(BS(1,2))^c = \{[\chi_0]\}$, onde $\chi_0(a) = 0$ e $\chi_0(t) = 1$.

Teorema

O grupo de Baumslag-Solitar $G = BS(1,2)$ tem a propriedade R_∞.

- $\Sigma^1(G)$ (e $\Sigma^1(G)^c$) são invariantes por automorfismos (vide [5]) ($\varphi \in Aut(G)$ e $[\chi] \in \Sigma^1(G) \Rightarrow [\chi \circ \varphi] \in \Sigma^1(G)$).
- Logo $[\chi_0 \circ \varphi] = [\chi_0]$ e daí $\chi_0 \circ \varphi = r\chi_0$ para algum $r > 0$.
- Seja $N = \ker(\chi_0) = \ll a \gg$. Então $\varphi(N) \subset N$, pois dado $g \in N$,

$$\chi_0(\varphi(g)) = r.\chi_0(g) = r.0 = 0.$$

- Portanto, temos bem definido um automorfismo $\overline{\varphi}$ e um diagrama comutativo:

2) R_∞ pelo invariante Σ^1

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi} & G/N \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & \circlearrowright & \downarrow{\scriptstyle \overline{\varphi}} \\ G & \xrightarrow{\pi} & G/N \end{array}$$

2) R_∞ pelo invariante Σ^1

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi} & G/N \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & \circlearrowright & \downarrow{\scriptstyle \overline{\varphi}} \\ G & \xrightarrow{\pi} & G/N \end{array}$$

- Basta provar então que $R(\overline{\varphi}) = \infty$.

2) R_∞ pelo invariante Σ^1

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi} & G/N \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & \circlearrowright & \downarrow{\scriptstyle \overline{\varphi}} \\ G & \xrightarrow{\pi} & G/N \end{array}$$

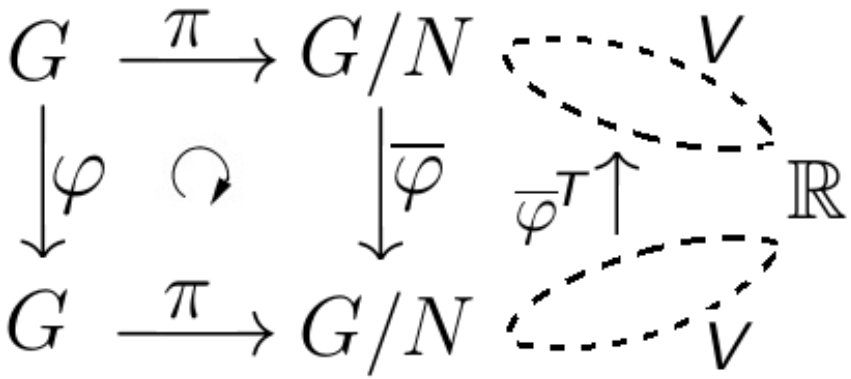
- Basta provar então que $R(\overline{\varphi}) = \infty$.
- $\frac{G}{N} = \frac{\langle a,t \mid tat^{-1}=a^2 \rangle}{\ll a \gg} = \langle t \rangle \simeq \mathbb{Z}$, logo $\overline{\varphi} = \pm Id_{\mathbb{Z}}$.

2) R_∞ pelo invariante Σ^1

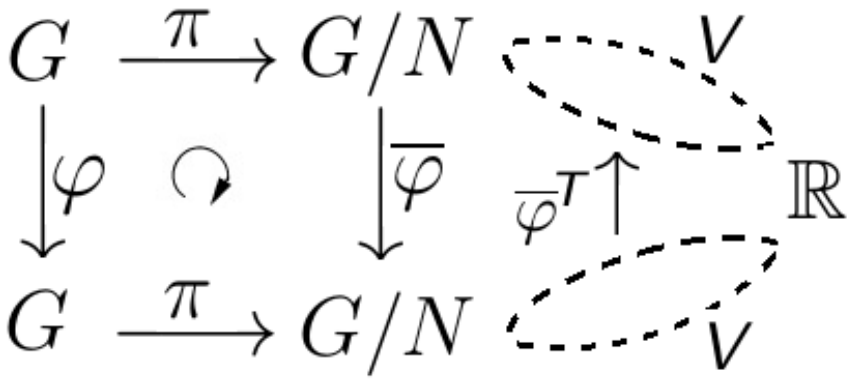
$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi} & G/N \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & \circlearrowright & \downarrow{\scriptstyle \overline{\varphi}} \\ G & \xrightarrow{\pi} & G/N \end{array}$$

- Basta provar então que $R(\overline{\varphi}) = \infty$.
- $\frac{G}{N} = \frac{\langle a,t \mid tat^{-1}=a^2 \rangle}{\ll a \gg} = \langle t \rangle \simeq \mathbb{Z}$, logo $\overline{\varphi} = \pm Id_{\mathbb{Z}}$.
- Seja $V = Hom(\frac{G}{N}, \mathbb{R}) \simeq Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$. Tem dimensão 1 e é gerado por $\overline{\chi_0}$. Seja $\overline{\varphi}^T : V \to V$ a transposta de $\overline{\varphi}$:

2) R_∞ pelo invariante Σ^1

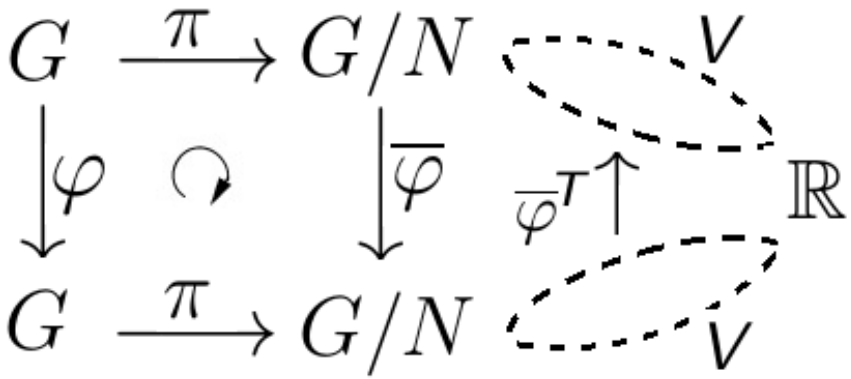


2) R_∞ pelo invariante Σ^1



- Temos $\overline{\varphi}^T(\overline{\chi_0}) = \overline{\chi_0} \circ \overline{\varphi} = \overline{\chi_0 \circ \varphi} = \overline{r\chi_0} = r\overline{\chi_0}$, logo $\overline{\varphi}^T = r.Id$. Como a matriz da transposta é a transposta da matriz, $\overline{\varphi} = r.Id$. Como $\overline{\varphi} = \pm Id_{\mathbb{Z}}$ e $r > 0$ temos $r = 1$ e $\overline{\varphi} = Id_{\mathbb{Z}}$.

2) R_∞ pelo invariante Σ^1



- Temos $\overline{\varphi}^T(\overline{\chi_0}) = \overline{\chi_0} \circ \overline{\varphi} = \overline{\chi_0 \circ \varphi} = \overline{r\chi_0} = r\overline{\chi_0}$, logo $\overline{\varphi}^T = r.Id$. Como a matriz da transposta é a transposta da matriz, $\overline{\varphi} = r.Id$. Como $\overline{\varphi} = \pm Id_{\mathbb{Z}}$ e $r > 0$ temos $r = 1$ e $\overline{\varphi} = Id_{\mathbb{Z}}$.
- Mas $R(Id_{\mathbb{Z}})$ é o número de classes de conjugação de $\mathbb{Z}$, logo $R(\overline{\varphi}) = \infty$ e portanto $R(\varphi) = \infty$ pelo diagrama. □

2) R_∞ pelo invariante Σ^1

Teorema (D. L. Gonçalves, D. Kochloukova, 2010)

Seja G f.g. tal que $\Sigma^1(G)^c$ é finito, não vazio, de pontos discretos e contido num hemisfério aberto de $S(G)$, então G tem R_∞.

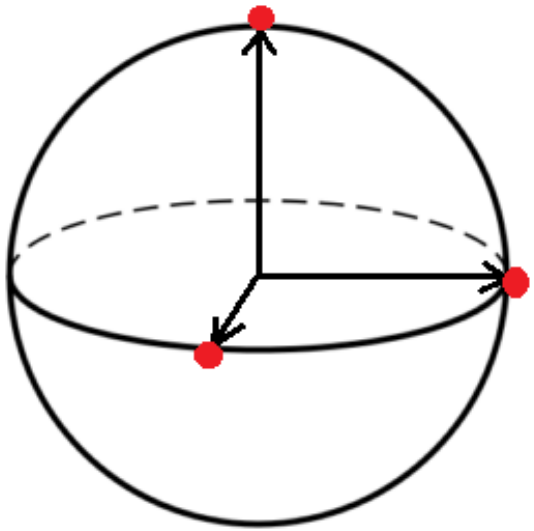
2) R_∞ pelo invariante Σ^1

Teorema (D. L. Gonçalves, D. Kochloukova, 2010)

Seja G f.g. tal que $\Sigma^1(G)^c$ é finito, não vazio, de pontos discretos e contido num hemisfério aberto de $S(G)$, então G tem R_∞.

Teorema (W. Sgobbi, P. Wong, 2018)

Seja $\Gamma_n = \langle a, t_1, ..., t_r \mid t_i t_j = t_j t_i,\ t_i a t_i^{-1} = a^{p_i{}^{y_i}} \rangle$, onde $n = p_1{}^{y_1} ... p_r{}^{y_r} \geq 2$. Então $\Sigma^1(\Gamma_n)^c = \{[\chi_1], ..., [\chi_r]\}$.

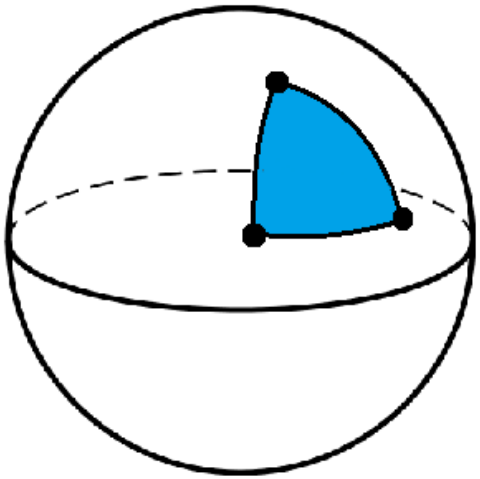


3) R_∞ por poliedros convexos

3) R_∞ por poliedros convexos

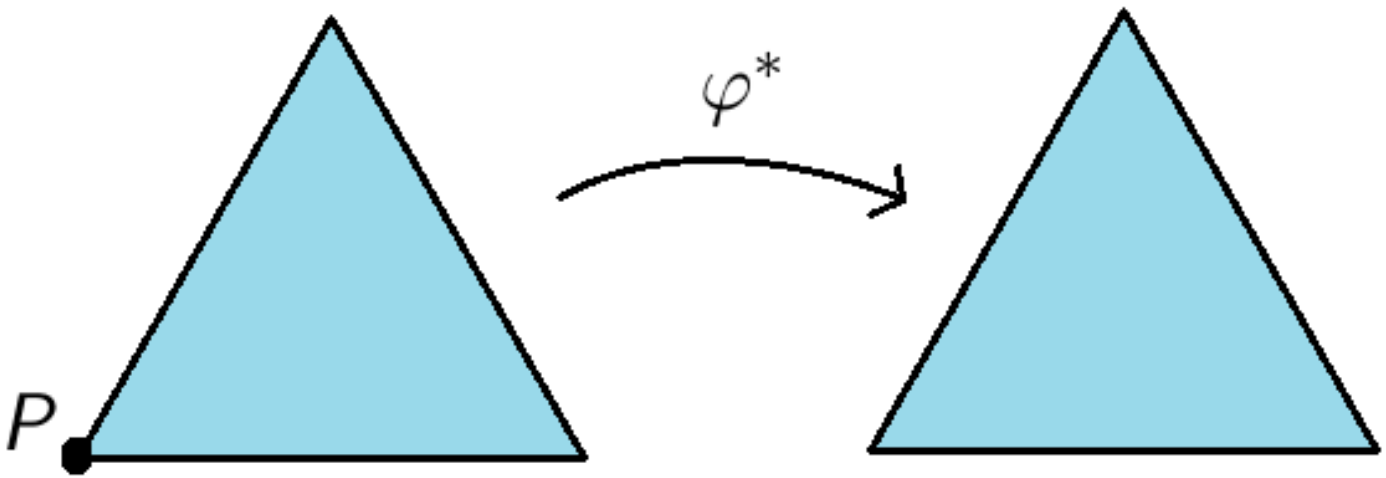
Teorema (W. Sgobbi, P. Wong, 2019)

Se existe poliedro convexo $P \subset S(G)$ invariante e contido num hemisfério aberto de $S(G)$ com vértices racionais, então G tem R_∞. Em particular, se $\Sigma^1(G)^c$ for tal poliedro, G tem R_∞.



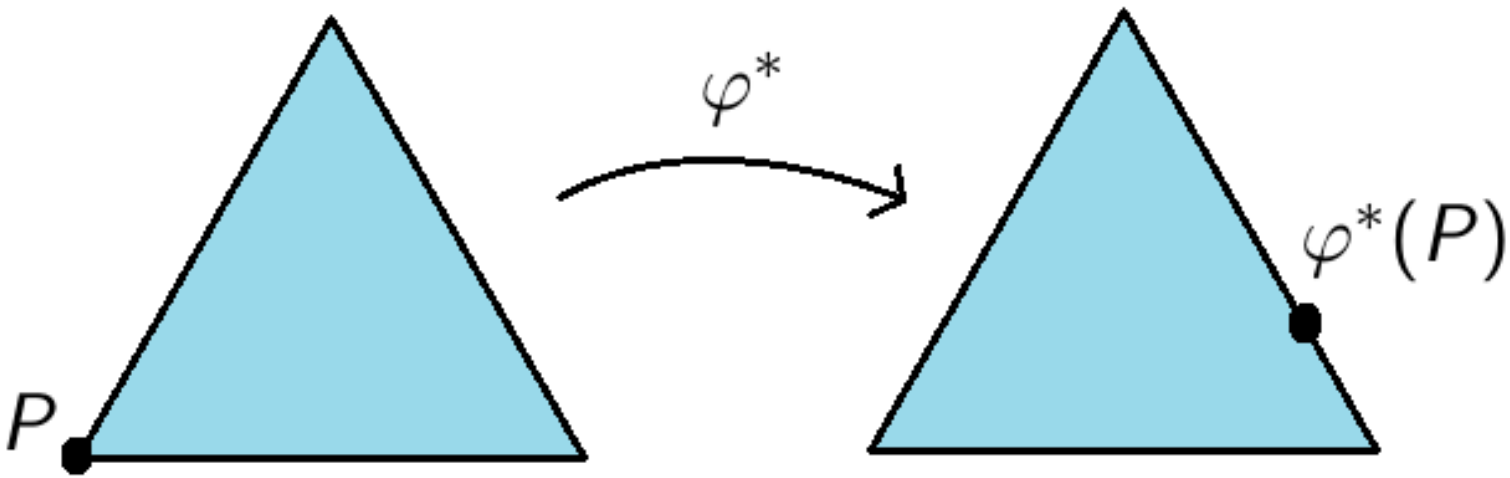
3) R_∞ por poliedros convexos

Ideia da demonstração



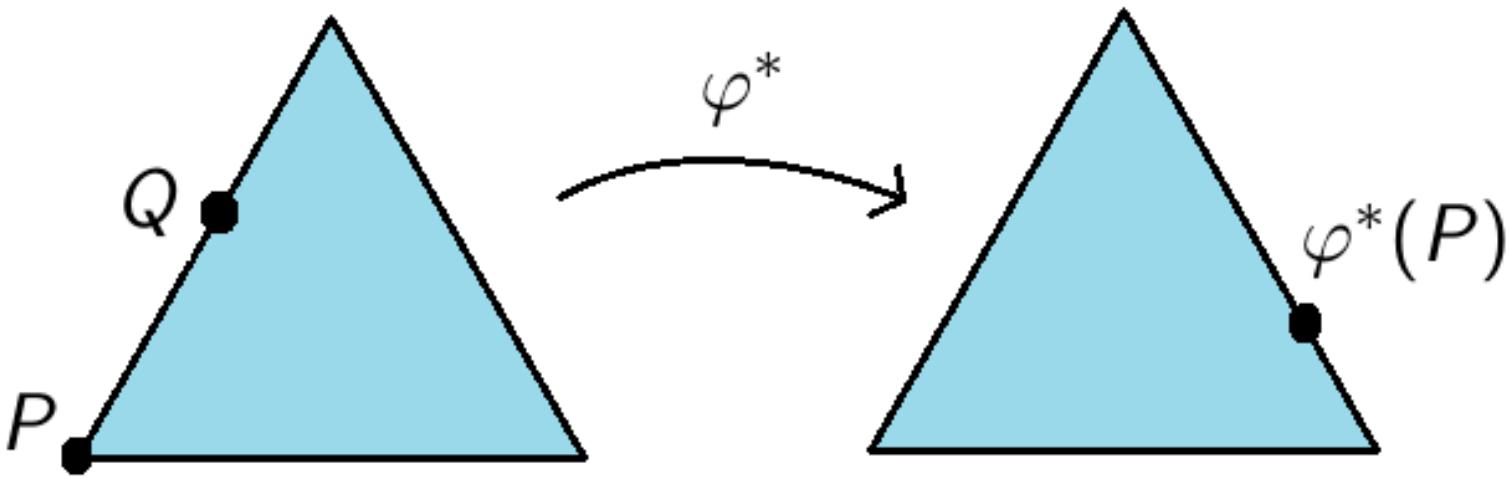
3) R_∞ por poliedros convexos

Ideia da demonstração

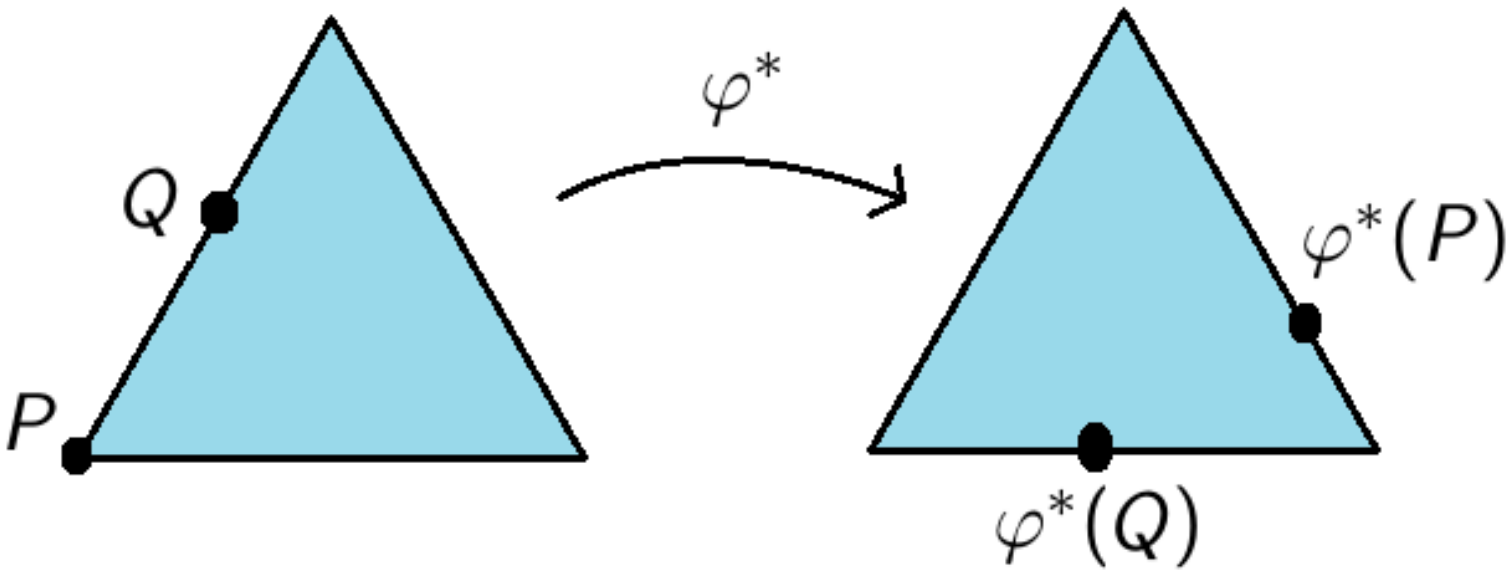


3) R_∞ por poliedros convexos

Ideia da demonstração

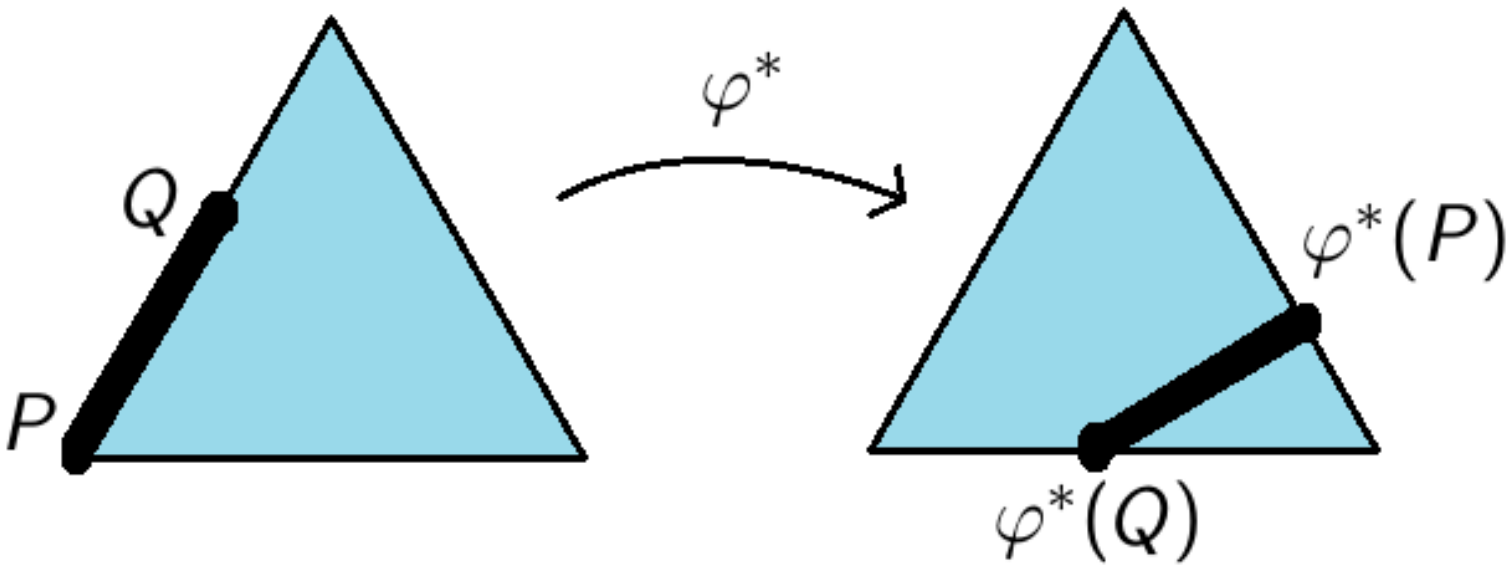


Ideia da demonstração



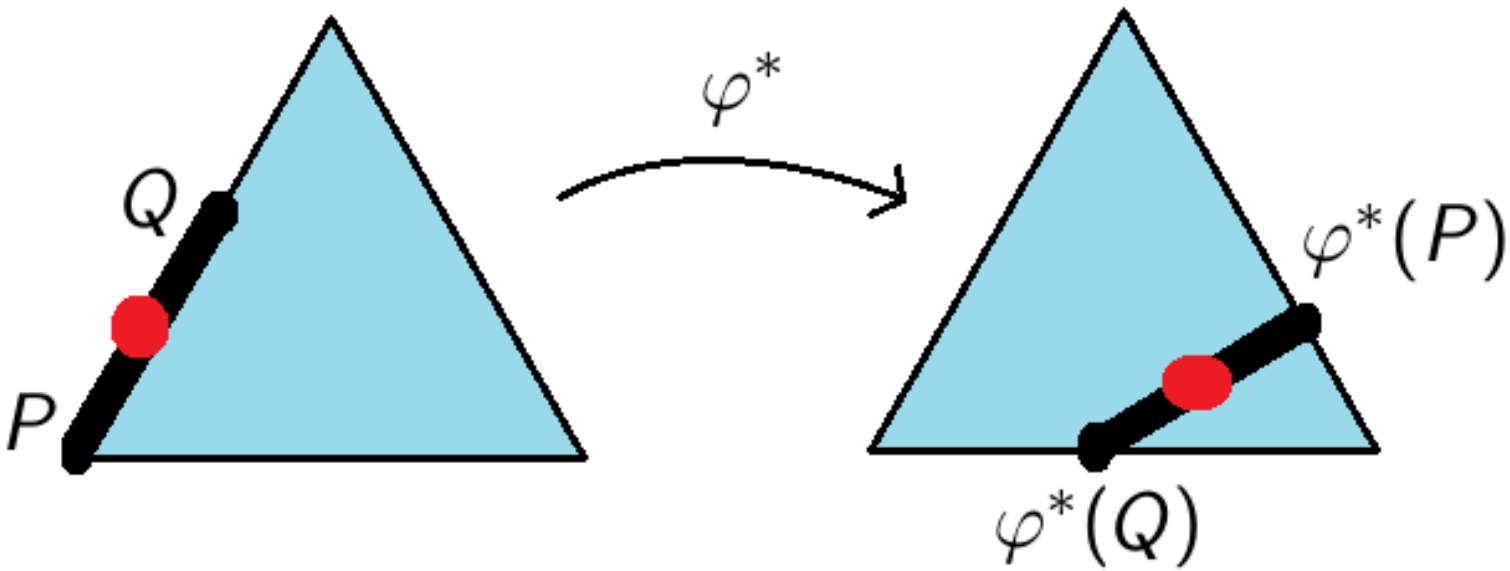
3) R_∞ por poliedros convexos

Ideia da demonstração



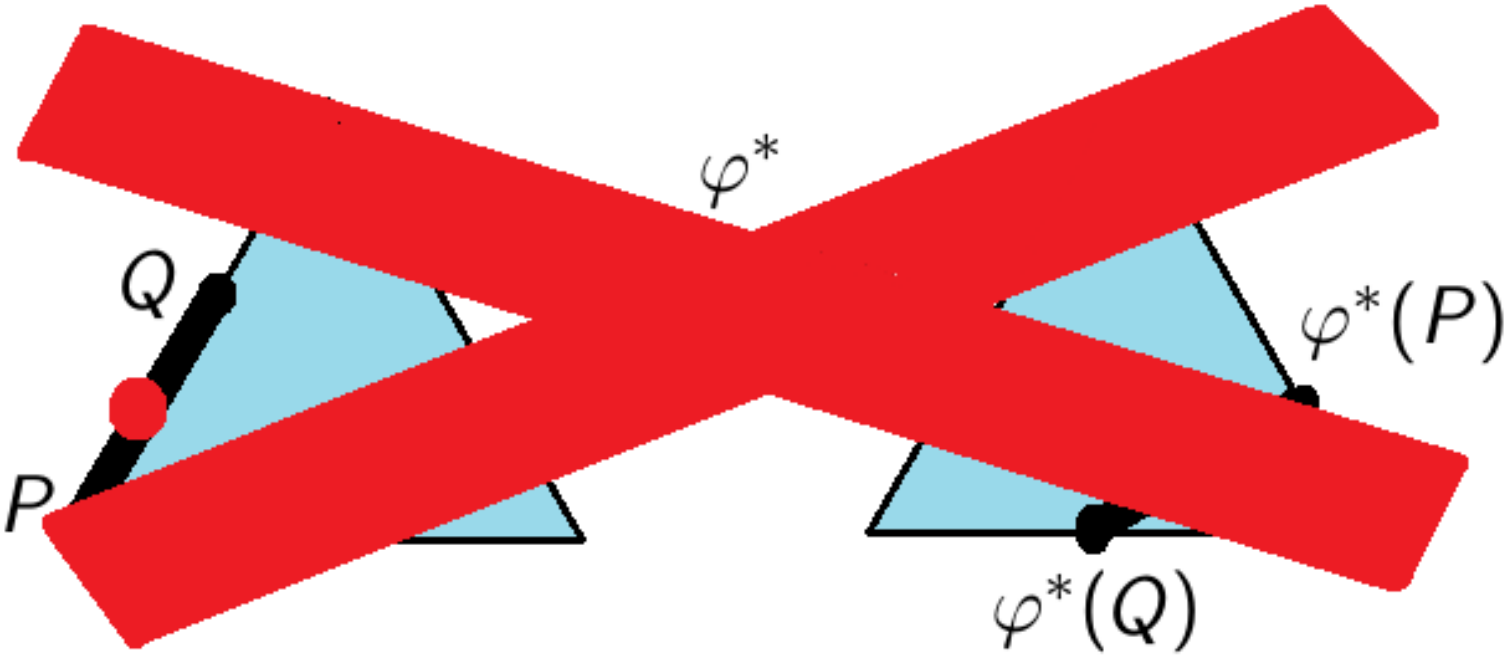
3) R_∞ por poliedros convexos

Ideia da demonstração



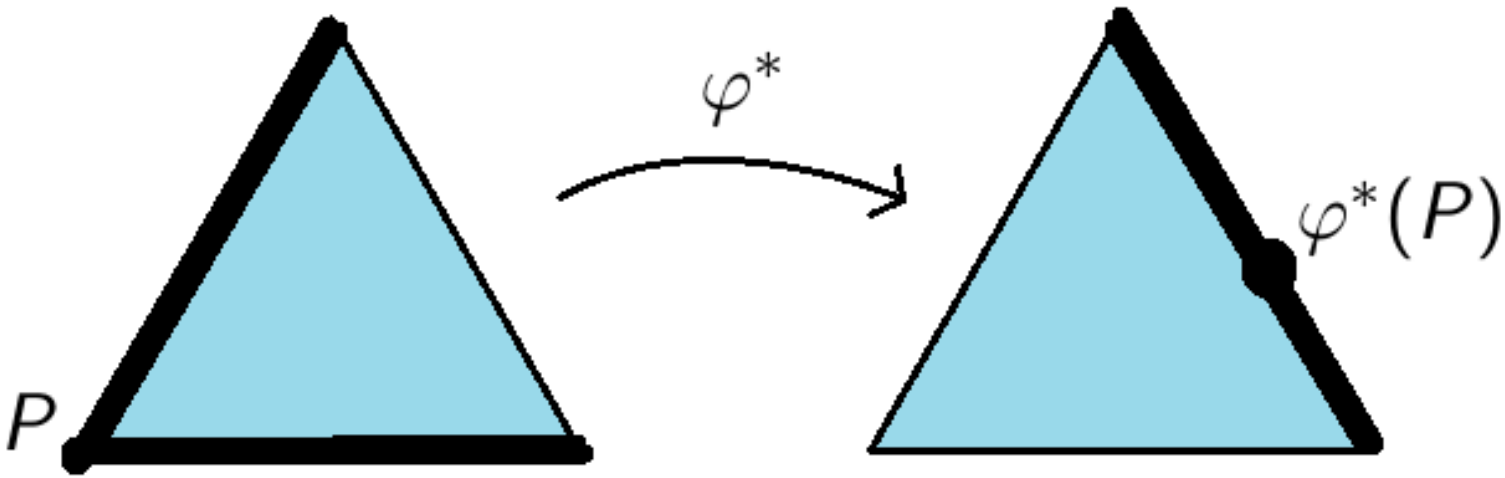
3) R_∞ por poliedros convexos

Ideia da demonstração



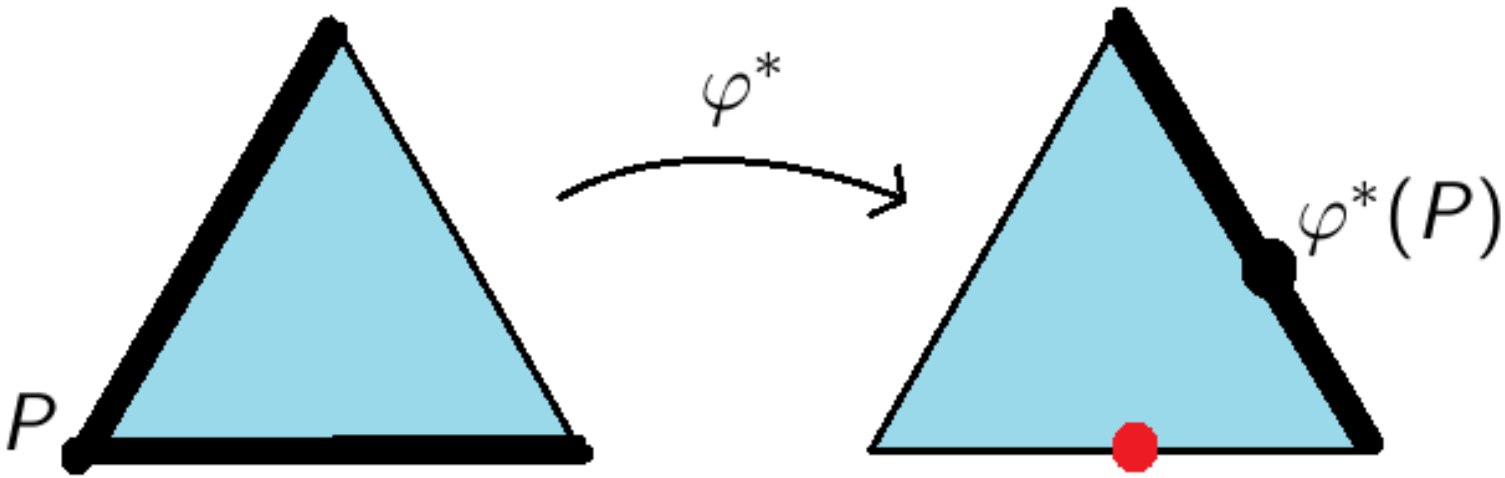
3) R_∞ por poliedros convexos

Ideia da demonstração



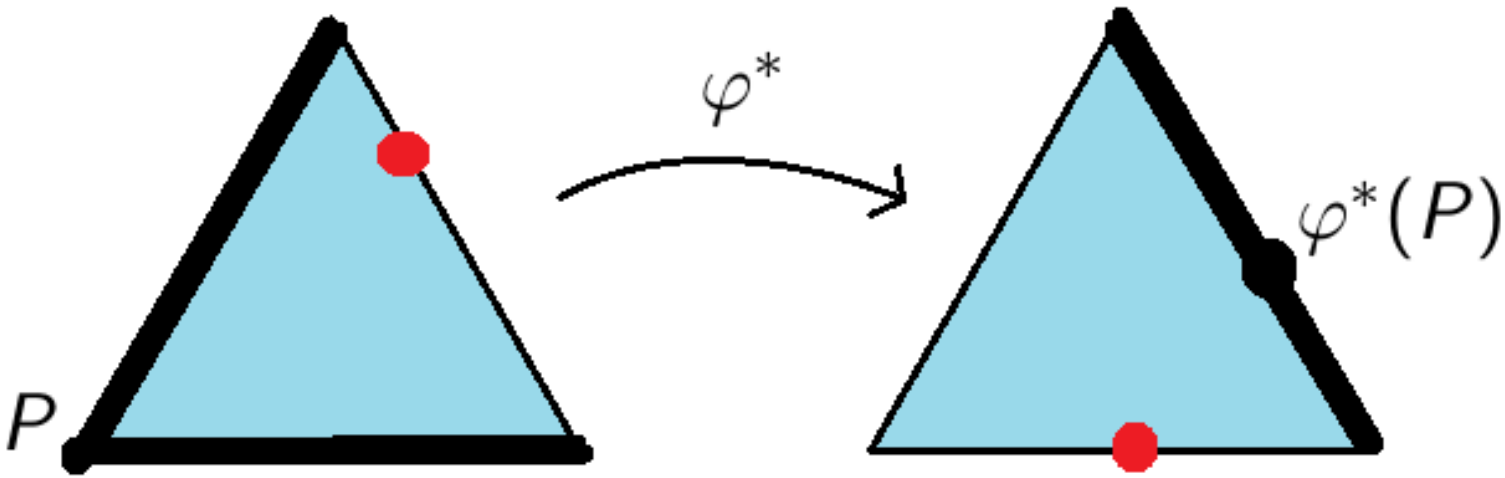
3) R_∞ por poliedros convexos

Ideia da demonstração



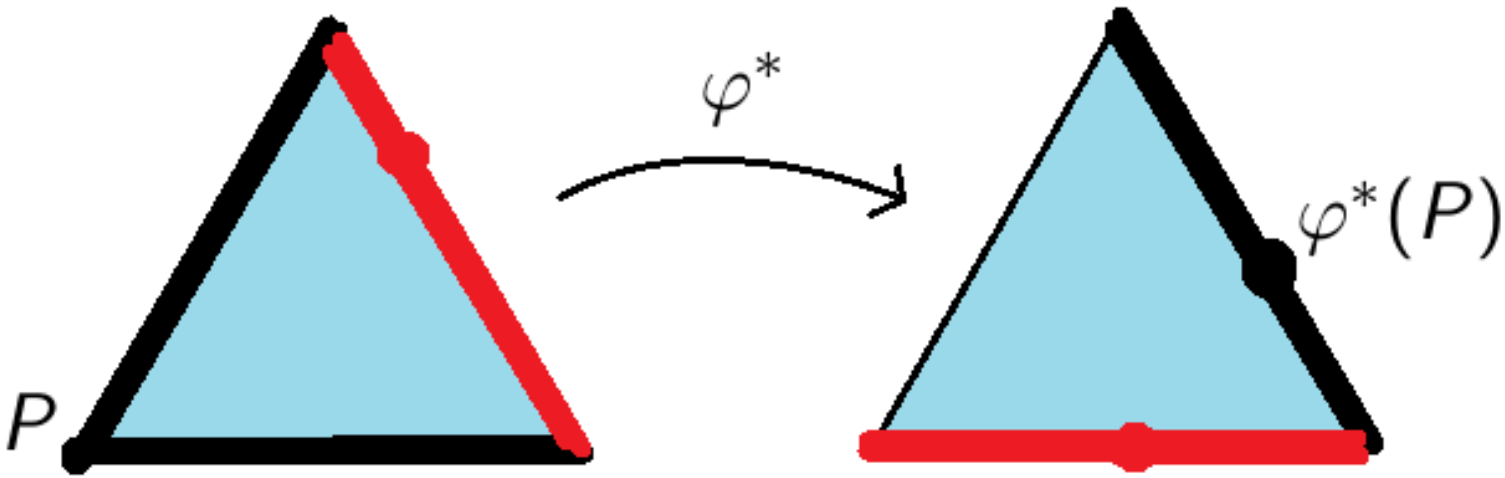
3) R_∞ por poliedros convexos

Ideia da demonstração



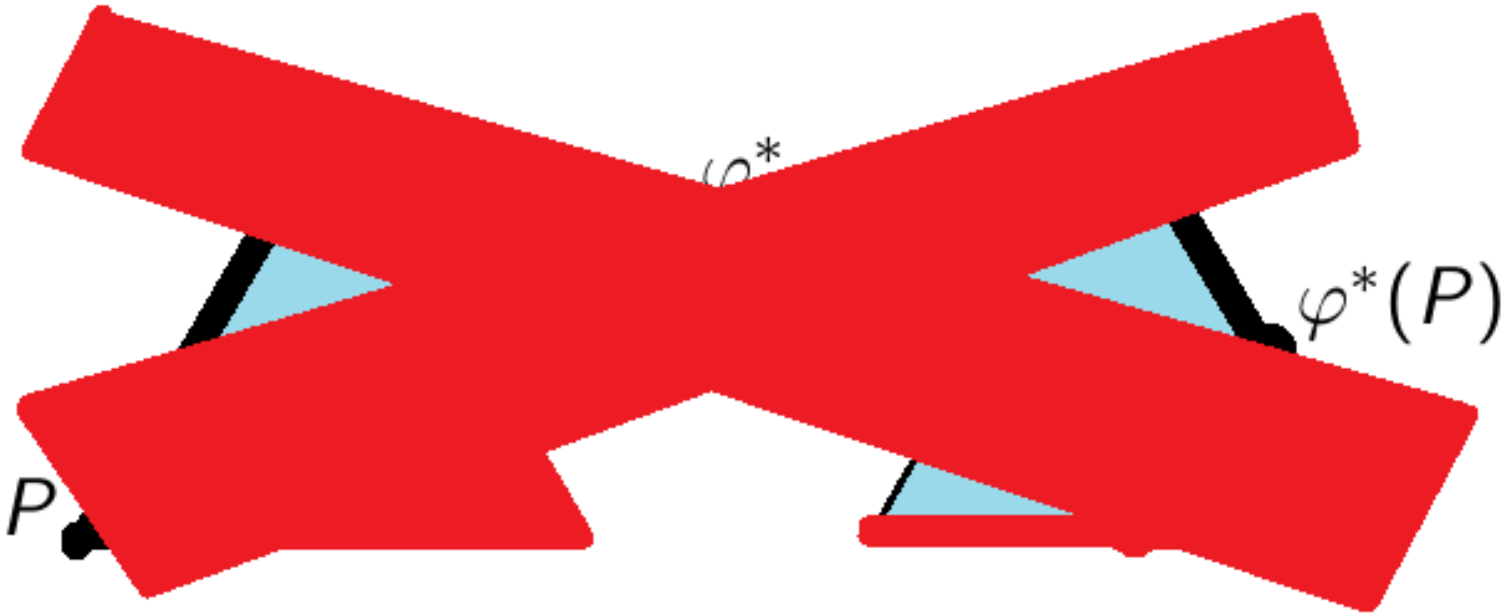
3) R_∞ por poliedros convexos

Ideia da demonstração



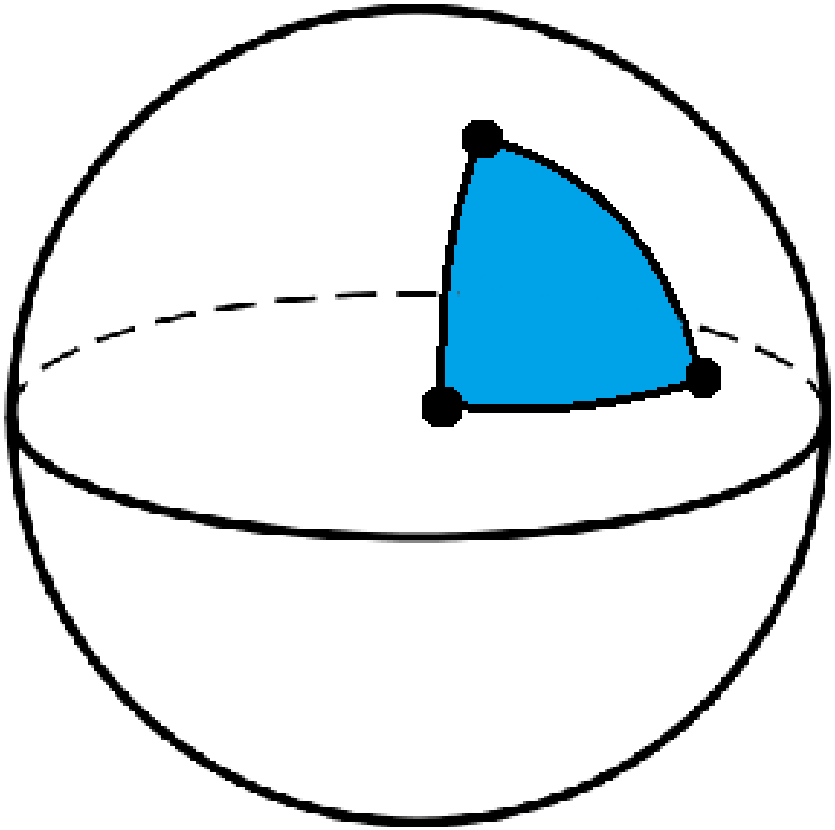
3) R_∞ por poliedros convexos

Ideia da demonstração



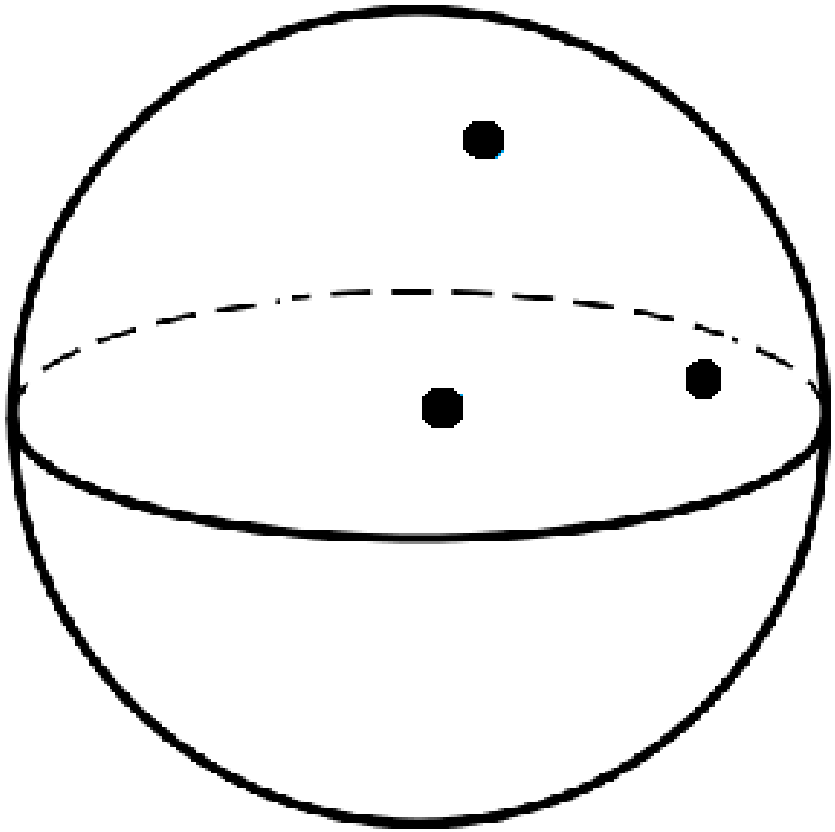
3) R_∞ por poliedros convexos

Ideia da demonstração



3) R_∞ por poliedros convexos

Ideia da demonstração



Referências bibliográficas

[1] D. Gonçalves, D. Kochloukova, *Sigma theory and twisted conjugacy classes*, Pacific J. Math. 247 (2010), 335-352.

[2] D. Gonçalves, P. Wong, *Twisted conjugacy classes in nilpotent groups*, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal) 633(633), June 2007.

[3] A. Fel'shtyn, T. Nasybullov, *The R_∞ and S_∞ properties for linear algebraic groups*, Journal of Group Theory 19(5), 2016.

[4] A. Fel'shtyn, R. Hill, *The Reidemeister zeta function with applications to Nielsen theory and a connection with Reidemeister torsion*, K-Theory, V. 8, N. 4, 1994, 367-393.

[5] Strebel, Ralph, *Notes on the Sigma invariants*, Version 2, 2013, PDF avaliable at https://arxiv.org/abs/1204.0214.

Mensagem de agradecimento

OBRIGADO!