# Avanços no estudo de problemas elípticos com o operador 1-laplaciano

Marcos T. O. Pimenta
marcos.pimenta@unesp.br

Unesp - Faculdade de Ciências e Tecnologia,
Presidente Prudente, São Paulo

16 de março de 2021



# Avanços no estudo de problemas elípticos com o operador 1-laplaciano

Marcos T. O. Pimenta
marcos.pimenta@unesp.br

Unesp - Faculdade de Ciências e Tecnologia,
Presidente Prudente, São Paulo

16 de março de 2021

* Financiado por FAPESP e CNPq



# Apresentação


1. Introdução
2. Estrutura e propriedades do espaço $BV(\Omega)$
3. Referências bibliográficas




# Table of Contents


1. Introdução
2. Estrutura e propriedades do espaço $BV(\Omega)$
3. Referências bibliográficas




# Introdução

Para a implementação de métodos variacionais na resolução de EDPs, na maior parte das vezes utilizamos os Espaços de Sobolev, $W^{m,p}(\Omega)$, onde $m, p \in \mathbb{N}$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

Entretanto, para o estudo de equações envolvendo determinados tipos de operadores, a menos que se utilize alguma técnica especial, esses espaços não se mostram adequados para um correto tratamento.



# Introdução

Um exemplo nos ajudaria a entender esse fenômeno. Consideremos o problema de curvatura média prescrita dado por

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\dfrac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = f(x) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto com fronteira suave e $f$ é uma função dada.



# Introdução

Uma solução fraca de (1) é dada por $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$, tal que

$$\int_\Omega \frac{\nabla u \nabla v}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} dx = \int_\Omega f(x) v dx, \quad \forall v \in W_0^{1,1}(\Omega).$$



# Introdução

Uma solução fraca de (1) é dada por $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$, tal que

$$\int_\Omega \frac{\nabla u \nabla v}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} dx = \int_\Omega f(x) v dx, \quad \forall v \in W_0^{1,1}(\Omega).$$

Podemos ver facilmente que o funcional de Euler-Lagrange associado a (1) é $\Phi : W_0^{1,1}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\Phi(u) = \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u|^2} dx - \int_\Omega f(x) u dx.$$



# Introdução

Além disso, segue que $\Phi \in C^1(W_0^{1,1}(\Omega))$ e

$$\Phi'(u)v = \int_\Omega \frac{\nabla u \nabla v}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} dx - \int_\Omega f(x) v dx, \quad \forall v \in W_0^{1,1}(\Omega).$$



# Introdução

Além disso, segue que $\Phi \in C^1(W_0^{1,1}(\Omega))$ e

$$\Phi'(u)v = \int_\Omega \frac{\nabla u \nabla v}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} dx - \int_\Omega f(x)v dx, \quad \forall v \in W_0^{1,1}(\Omega).$$

Vamos pensar na situação geométrica para $\Phi$ mais simples possível, ou seja, quando $|f|_\infty$ é pequeno o suficiente. Nesse caso, $\Phi$ é coercivo e limitado inferiormente.



# Introdução

Além disso, segue que $\Phi \in C^1(W_0^{1,1}(\Omega))$ e

$$\Phi'(u)v = \int_\Omega \frac{\nabla u \nabla v}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} dx - \int_\Omega f(x)v dx, \quad \forall v \in W_0^{1,1}(\Omega).$$

Vamos pensar na situação geométrica para $\Phi$ mais simples possível, ou seja, quando $|f|_\infty$ é pequeno o suficiente. Nesse caso, $\Phi$ é coercivo e limitado inferiormente. Logo, o natural seria procurar por pontos críticos de $\Phi$ por minimização global.

Seja

$$\alpha = \inf_{u \in W_0^{1,1}(\Omega)} \Phi(u)$$

e $(u_n) \subset W_0^{1,1}(\Omega)$ uma sequência minimizante para $\Phi$.



# Introdução

Pela coercividade de $\Phi$, temos que $(u_n)$ é limitada. Nesse ponto, não podemos prosseguir como usualmente, extraindo uma subsequência fracamente convergente. Isso pois

$W_0^{1,1}(\Omega)$ não é reflexivo.



# Introdução

Pela coercividade de $\Phi$, temos que $(u_n)$ é limitada. Nesse ponto, não podemos prosseguir como usualmente, extraindo uma subsequência fracamente convergente. Isso pois

$$W_0^{1,1}(\Omega) \text{ não é reflexivo.}$$

Supondo que $\Omega$ seja limitado e usando a compacidade da imersão $W_0^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, temos que existe $\overline{u} \in L^1(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência

$$u_n \to \overline{u} \quad \text{em } L^1(\Omega).$$



# Introdução

Naturalmente nosso candidato a mínimo global para $\Phi$ é $\overline{u}$.



# Introdução

Naturalmente nosso candidato a mínimo global para $\Phi$ é $\overline{u}$. Porém

$$\overline{u} \in W_0^{1,1}(\Omega)?$$

Perceba que a resposta seria positiva no caso de ser verdadeiro o seguinte enunciado.



# Introdução

## Conjectura

Para todo $(v_n) \subset W_0^{1,1}(\Omega)$ limitada, se $v_n \to v$ em $L^1(\Omega)$, então $v \in W_0^{1,1}(\Omega)$ e

$$\begin{aligned} \Phi_0 : \quad W_0^{1,1}(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \Phi_0(u) := \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u|^2}\,dx \end{aligned}$$

é um funcional semicontínuo inferiormente com respeito à topologia de $L^1(\Omega)$.



# Introdução

De fato, se esse fosse o caso, seguiria que $\overline{u} \in W_0^{1,1}(\Omega)$ e

$$\begin{aligned} \alpha &\leq \Phi(\overline{u}) \\ &= \Phi_0(\overline{u}) - \int_\Omega f(x)\overline{u}dx \\ &\leq \liminf_{n\to+\infty} \Phi_0(u_n) - \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f(x)u_n dx \\ &= \liminf_{n\to+\infty} \Phi(u_n) = \alpha. \end{aligned}$$

Assim, $\Phi$ admitiria um mínimo global que seria, portanto, uma solução fraca de (1).



# Introdução

Entretanto a conjectura levantada não é verdadeira.



# Introdução

Entretanto a conjectura levantada não é verdadeira.

O exemplo a seguir mostra que existem sequências $(v_n) \subset W_0^{1,1}(\Omega)$ limitadas, tais que os respectivos limites em $L^1(\Omega)$ não pertencem a $W_0^{1,1}(\Omega)$.

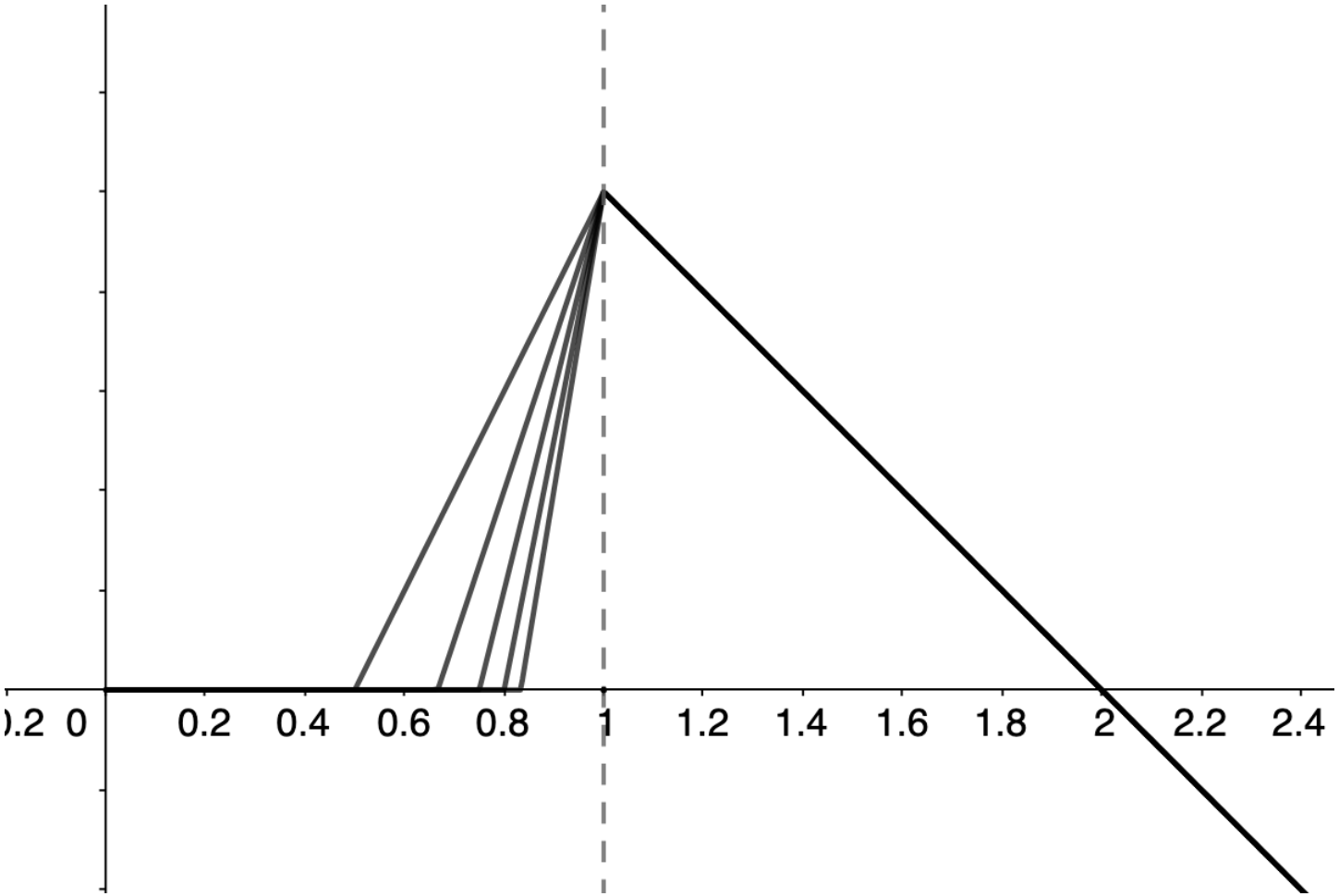
## Exemplo

Em $W_0^{1,1}((0,2))$, para cada $n \in \mathbb{N}$, seja

$$v_n = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1 - 1/n, \\ n(x-1)+1, & 1 - 1/n \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$



# Introdução






# Introdução

Note que $\|v_n\|_{W_0^{1,1}(0,2)} \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $v_n \to v$ em $L^1(0,2)$, onde

$$v(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Entretanto $v \notin W_0^{1,1}(0,2)$.



# Introdução

Note que $\|v_n\|_{W_0^{1,1}(0,2)} \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $v_n \to v$ em $L^1(0,2)$, onde

$$v(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Entretanto $v \notin W_0^{1,1}(0,2)$.

Esse fato deixa claro que é necessário tratar o problema (1) em um espaço maior do que $W_0^{1,1}(\Omega)$.



# Introdução

Esse espaço é o chamado **Espaço das funções de variação limitada,** $BV(\Omega)$, formado pelas funções de $L^1(\Omega)$, cujas derivadas distribucionais de primeira ordem sejam geradas por medidas de Radon.



# Introdução

Esse espaço é o chamado **Espaço das funções de variação limitada,** $BV(\Omega)$, formado pelas funções de $L^1(\Omega)$, cujas derivadas distribucionais de primeira ordem sejam geradas por medidas de Radon.

## Observação

Lembremos que medidas de Radon são medidas de Borel finitas em compactos, que são regulares exterior em todos os borelianos e regulares interior em abertos.



# Introdução

Esse espaço é o chamado **Espaço das funções de variação limitada,** $BV(\Omega)$, formado pelas funções de $L^1(\Omega)$, cujas derivadas distribucionais de primeira ordem sejam geradas por medidas de Radon.

## Observação

Lembremos que medidas de Radon são medidas de Borel finitas em compactos, que são regulares exterior em todos os borelianos e regulares interior em abertos.

Assim definimos

$$BV(\Omega) = \{u \in L^1(\Omega);\ Du \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N)\}.$$



# Introdução

Como veremos adiante, para tratar o problema em $BV(\Omega)$, será necessário estender o funcional $\Phi$ de $W_0^{1,1}(\Omega)$ para $BV(\Omega)$, o que por sua vez trará outras dificuldades, várias oriundas da falta de suavidade de tal extensão.



# Introdução

Como veremos adiante, para tratar o problema em $BV(\Omega)$, será necessário estender o funcional $\Phi$ de $W_0^{1,1}(\Omega)$ para $BV(\Omega)$, o que por sua vez trará outras dificuldades, várias oriundas da falta de suavidade de tal extensão. Entre os vários excelentes textos que tratam do espaço $BV(\Omega)$ e suas aplicações, gostaríamos de destacar os clássicos [1, 2, 3, 4].



# Table of Contents


1. Introdução
2. Estrutura e propriedades do espaço $BV(\Omega)$
3. Referências bibliográficas




# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

## Definição

Dizemos que uma função $u \in L^1(\Omega)$ é uma função de variação limitada, se sua derivada distribucional $Du$ for gerada por uma medida de Radon, isto é, se $Du \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Definimos assim o espaço das funções de variação limitada por

$$BV(\Omega) = \left\{ u \in L^1(\Omega);\ Du \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^N) \right\}.$$



# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

## Observação

Como $\mathcal{M}(\Omega)$ é igual ao dual topológico de $C_0(\Omega, \mathbb{R})$ e como $C_c^1(\Omega, \mathbb{R})$ é denso em $C_0(\Omega, \mathbb{R})$ com respeito à norma $\|\cdot\|_\infty$, segue que são equivalentes:

- $u \in BV(\Omega)$;
- $u \in L^1(\Omega)$ e
$$\|Du\| := \sup\left\{\int_\Omega u \operatorname{div}\varphi \, dx;\ \varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N),\ |\varphi|_\infty \leq 1\right\} < +\infty;$$
- $u \in L^1(\Omega)$ e
$$\|Du\| = \sup\left\{\sum_{i=1}^N \int_\Omega \varphi_i D_i u;\ \varphi \in C_0(\Omega, \mathbb{R}^N),\ |\varphi|_\infty \leq 1\right\} < +\infty.$$



# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

Além disso, pelo Teorema de Representação de Riesz-Alexandroff, temos ainda que

$$\|Du\| = \int_\Omega |Du|.$$



# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

Além disso, pelo Teorema de Representação de Riesz-Alexandroff, temos ainda que

$$\|Du\| = \int_\Omega |Du|.$$

Lembremos que, pelo Teorema de Radon-Nikodym, dada $u \in BV(\Omega)$, existem duas medidas, $Du^a << \mathcal{L}^N$ e $Du^s \perp \mathcal{L}^N$, onde $\mathcal{L}^N$ denota a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$, tais que

$$Du = Du^a + Du^s.$$



# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

Além disso, pelo Teorema de Representação de Riesz-Alexandroff, temos ainda que

$$\|Du\| = \int_\Omega |Du|.$$

Lembremos que, pelo Teorema de Radon-Nikodym, dada $u \in BV(\Omega)$, existem duas medidas, $Du^a << \mathcal{L}^N$ e $Du^s \perp \mathcal{L}^N$, onde $\mathcal{L}^N$ denota a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$, tais que

$$Du = Du^a + Du^s.$$

Dessa observação segue que $W^{1,1}(\Omega)$ é um subespaço de $BV(\Omega)$ e que a norma $\|\cdot\|$ é uma extensão da norma usual em $W^{1,1}(\Omega)$.



# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

De fato, se $u \in W^{1,1}(\Omega)$, então $Du^a = \nabla u$ e $Du^s = 0$. O exemplo a seguir mostra que a inclusão $W^{1,1}(\Omega) \subset BV(\Omega)$ é própria.



# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

De fato, se $u \in W^{1,1}(\Omega)$, então $Du^a = \nabla u$ e $Du^s = 0$. O exemplo a seguir mostra que a inclusão $W^{1,1}(\Omega) \subset BV(\Omega)$ é própria.

## Exemplo

Seja $E \subset \Omega$ um aberto com fronteira suave e tal que $\mathcal{H}^{N-1}(\partial E) < +\infty$, então note que, para todo $\varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tal que $|\varphi|_\infty \leq 1$, pelo Teorema da Divergência temos

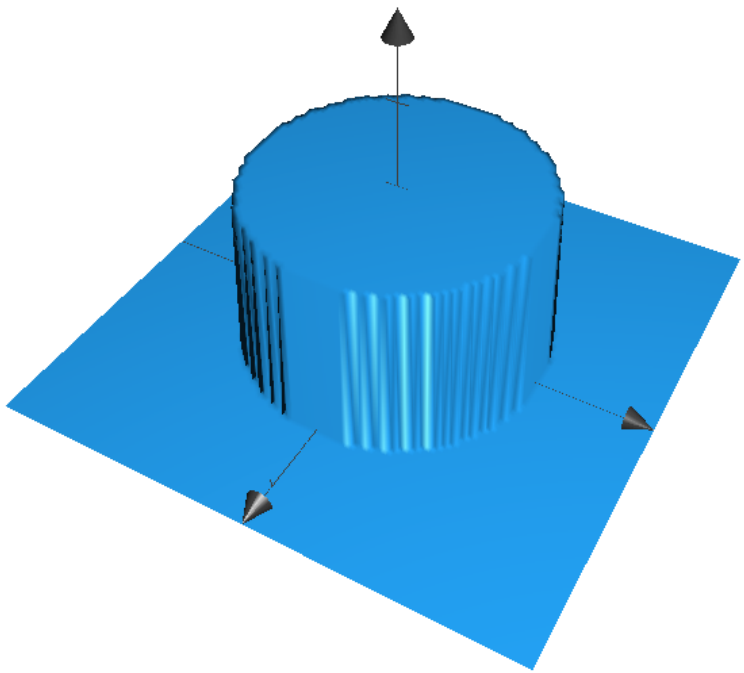
$$\int_\Omega \chi_E \operatorname{div} \varphi \, dx = \int_E \operatorname{div} \varphi \, dx = \int_{\partial E} \varphi . \nu \, \mathcal{H}_{N-1} \leq \mathcal{H}_{N-1}(\partial E) < +\infty,$$

onde $\nu$ denota campo normal exterior a $\partial E$. Assim, note que $\chi_E \in BV(\Omega)$, porém $\chi_E \notin W^{1,1}(\Omega)$. De fato $D\chi_E = -\nu \mathcal{H}_{N-1} \lfloor \partial E$, implicando que $D\chi_E$ não é gerada por uma função de $L^1(\Omega)$.



# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

Abaixo o gráfico de $\chi_E$ quando $E = B_1(0)$.





# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

Verifiquemos agora a semicontinuidade inferior da norma em $BV(\Omega)$ com respeito à topologia de $L^1(\Omega)$.



# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

Verifiquemos agora a semicontinuidade inferior da norma em $BV(\Omega)$ com respeito à topologia de $L^1(\Omega)$.

**Lema 1.1.4 (Muito importante)**

Seja $(u_n) \subset BV(\Omega)$ uma sequência limitada e tal que $u_n \to u$ in $L^1(\Omega)$. Então $u \in BV(\Omega)$ e

$$\int_\Omega |Du| \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |Du_n|.$$



# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

## Demonstração

Seja $\varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tal que $|\varphi|_\infty \leq 1$ e note que

$$\int_\Omega u \operatorname{div} \varphi \, dx = \lim_{n \to +\infty} \int_\Omega u_n \operatorname{div} \varphi \, dx \leq \liminf_{n \to \infty} \int_\Omega |Du_n|,$$

onde a primeira igualdade segue uma vez que $u_n \to u$ em $L^1(\Omega)$. Então o resultado segue tomando o supremo sobre $\varphi$.



# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

O espaço $BV(\Omega)$ é um espaço vetorial, onde podemos definir a seguinte norma:

$$\|u\| := |u|_1 + \int_\Omega |Du|,$$

para $u \in BV(\Omega)$.

Além disso, o Lema 1.1.4 nos permite provar que $(BV(\Omega), \|\cdot\|)$ **é um espaço de Banach.**



# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

## Lema 1.1.5

$(BV(\Omega), \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach.

## Demonstração

Seja $(u_n) \subset BV(\Omega)$ uma sequência de Cauchy. Então para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_\Omega |Du_n - Du_m| + |u_n - u_m|_1 < \epsilon, \quad n, m \geq n_0. \tag{2}$$

Como $(u_n)$ é também uma sequência de Cauchy em $L^1(\Omega)$, então existe $u \in L^1(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $L^1(\Omega)$, quando $n \to +\infty$.



# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

Então, para todo $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq n_0$, como $u_n - u_m \to u - u_m$ quando $n \to +\infty$ em $L^1(\Omega)$, segue do Lema 1.1.4 que

$$\int_\Omega |D(u - u_m)| \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |D(u_n - u_m)| < \epsilon.$$

Mas isso implica que $u \in BV(\Omega)$ e ainda que $u_m \to u$ em $BV(\Omega)$, quando $m \to +\infty$.



# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

Vamos agora tratar das propriedades de densidade de $C^\infty(\Omega)$ em $BV(\Omega)$. Note que, como

$$\overline{C^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|} = W^{1,1}(\Omega) \subsetneq BV(\Omega),$$

segue que $C^\infty(\Omega)$ não é denso em $BV(\Omega)$ com respeito à topologia da norma.

Assim, necessitamos introduzir uma noção de convergência que torne $C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ denso em $BV(\Omega)$, com respeito à topologia induzida. Isso será feito considerando a chamada *convergência estrita*.



# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

## Definição

Sejam $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset BV(\Omega)$ e $u \in BV(\Omega)$. Dizemos que $u_n \to u$ em $BV(\Omega)$ segundo a convergência estrita, se

$$u_n \to u \quad \text{em } L^1(\Omega)$$

e

$$\int_\Omega |Du_n| \to \int_\Omega |Du|,$$

quando $n \to +\infty$.



# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

O próximo resultado enuncia a densidade de $C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ em $BV(\Omega)$ com respeito à topologia da convergência estrita.



# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

O próximo resultado enuncia a densidade de $C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ em $BV(\Omega)$ com respeito à topologia da convergência estrita.

## Proposição 1.1.7

Para todo $u \in BV(\Omega)$, existe $(u_n) \subset C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ tal que

$$u_n \to u \quad \text{in } L^1(\Omega), \tag{3}$$

$$\int_\Omega |\nabla u_n| dx \to \int_\Omega |Du|. \tag{4}$$



# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

## Demonstração

Dado $\epsilon > 0$, seja $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ tal que

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_0} |Du| < \epsilon. \tag{5}$$

Seja ainda $\{\Omega_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma família de subconjuntos abertos de $\Omega$, tais que $\Omega_i \subset\subset \Omega_{i+1}$ e ainda $\Omega = \bigcup_{i=0}^{+\infty} \Omega_i$. Seja $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ dada por, $C_1 = \Omega_2$ e, para $i \geq 2$, $C_i = \Omega_{i+1} \setminus \overline{\Omega_{i-1}}$. Seja $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, isto é, $\varphi_i \in C_c^\infty(C_i)$, $0 \leq \varphi_i \leq 1$ e $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i = 1$.



# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

Para cada $i \in \mathbb{N}$, escolhamos $\rho_i$ funções regularizantes tais que

$$supp(\rho_i \star (\varphi_i u)) \subset C_i, , \tag{6}$$

$$\int_\Omega |\rho_i \star (u\varphi_i) - u\varphi_i| dx < \frac{\epsilon}{2^i}, \tag{7}$$

$$\int_\Omega |\rho_i \star (u\nabla\varphi_i) - u\nabla\varphi_i| dx < \frac{\epsilon}{2^i}, \tag{8}$$

$$\int_\Omega |\rho_1 \star (\varphi_1 Du)| dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi_1 Du| < \epsilon. \tag{9}$$



# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

Definamos então

$$u_\epsilon = \sum_{i=1}^{+\infty} \rho_i \star (u\varphi_i) \tag{10}$$

e observe que, levando-se em conta (6), essa soma é localmente finita, uma vez que cada $x \in \Omega$ pertence a no máximo dois dentre os conjuntos $\{C_i\}$, e portanto está bem definida. Nota-se claramente ainda que $u_\epsilon \in C^\infty(\Omega)$.



# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

Por (7), como $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i = 1$, note que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u - u_\epsilon| dx &\leq \sum_{i=1}^{+\infty} \int_\Omega |u\varphi_i - \rho_i \star (u\varphi_i)| dx \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

o que implica em (3).



# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

Por (7), como $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i = 1$, note que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u - u_\epsilon| dx &\leq \sum_{i=1}^{+\infty} \int_\Omega |u\varphi_i - \rho_i \star (u\varphi_i)| dx \\ &< \epsilon, \end{aligned}$$

o que implica em (3).

Como $\sum_{i=1}^{+\infty} \nabla\varphi_i \equiv 0$ em $\Omega$, segue que



# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

$$\begin{aligned}\nabla u_\epsilon &= \sum_{i=1}^{+\infty} \rho_i \star (\varphi_i Du) + \sum_{i=1}^{+\infty} \rho_i \star (u \nabla \varphi_i) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \rho_i \star (\varphi_i Du) + \sum_{i=1}^{+\infty} (\rho_i \star (u \nabla \varphi_i) - u \nabla \varphi_i).\end{aligned}$$



# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

$$\begin{aligned}\nabla u_\epsilon &= \sum_{i=1}^{+\infty} \rho_i \star (\varphi_i Du) + \sum_{i=1}^{+\infty} \rho_i \star (u \nabla \varphi_i) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \rho_i \star (\varphi_i Du) + \sum_{i=1}^{+\infty} (\rho_i \star (u \nabla \varphi_i) - u \nabla \varphi_i).\end{aligned}$$

Então (8) e (5) implicam que



# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

$$
\begin{aligned}
\left| \int_\Omega |\nabla u_\epsilon| dx - \int_\Omega |\rho_1 \star (\varphi_1 Du)| dx \right| &\leq \sum_{i=2}^{+\infty} \int_\Omega |\rho_i \star (\varphi_i Du)| dx \\
&\quad + \sum_{i=1}^{+\infty} \int_\Omega |\rho_i \star (u \nabla \varphi_i) - u \nabla \varphi_i| dx \\
&\leq \sum_{i=2}^{+\infty} \int_\Omega |\varphi_i Du| dx + \epsilon \\
&\leq \int_{\Omega \setminus \Omega_0} |Du| + \epsilon \\
&< 2\epsilon.
\end{aligned}
$$



# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

Assim (9) e a última desigualdade implicam que

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega |\nabla u_\epsilon| dx - \int_\Omega |Du|\right| &\leq \left|\int_\Omega |\nabla u_\epsilon| dx - \int_\Omega |\rho_1 \star (\varphi_1 Du)| dx\right| \\
&\quad + \left|\int_\Omega |\rho_1 \star (\varphi_1 Du)| dx - \int_\Omega |Du|\right| \\
&< 2\epsilon + \left|\int_\Omega |\rho_1 \star (\varphi_1 Du)| dx - \int_\Omega |\varphi_1 Du|\right| \\
&\quad + \left|\int_\Omega |\varphi_1 Du| - \int_\Omega |Du|\right| \\
&< 3\epsilon + \int_\Omega |\varphi_1 - 1||Du| \\
&\leq 3\epsilon + \int_{\Omega\setminus\Omega_0} |Du| \\
&< 4\epsilon.
\end{aligned}$$

# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

## Observações

- Modificando ligeiramente a demonstração, tomando funções regularizantes suficientemente próximos de $u$ na norma de $L^p(\Omega)$, poderíamos ainda obter uma sequência $(u_n) \subset C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$, para a qual valesse (4) e (3) com $L^p(\Omega)$ em lugar de $L^1(\Omega)$, para todo $p \geq 1$ tal que $u \in L^p(\Omega)$.



# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

## Observação 1.1.8

- Em [5][Theorem 3.1], é mostrado que, se $u \in BV(\Omega) \cap L^r(B)$, para $r \in [1, \infty)$, então existe uma sequência $(u_n)_n \subset C_0^\infty(\Omega)$, tal que,

$$u_n \to u \quad \text{em } L^s(\Omega)$$

e

$$\int_\Omega |\nabla u_n| dx \to \int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1},$$

quando $n \to +\infty$, para todo $s \in [1, r]$.



# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

## Observação 1.1.8

- Em [5][Theorem 3.1], é mostrado que, se $u \in BV(\Omega) \cap L^r(B)$, para $r \in [1, \infty)$, então existe uma sequência $(u_n)_n \subset C_0^\infty(\Omega)$, tal que,

$$u_n \to u \quad \text{em } L^s(\Omega)$$

e

$$\int_\Omega |\nabla u_n| dx \to \int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1},$$

quando $n \to +\infty$, para todo $s \in [1, r]$. Além disso, em [5][Lemma 4.1], é provado também que, se $p_n \to 1^+$ quando $n \to +\infty$, então

$$\lim_{n\to+\infty} \int_B |\nabla u_n|^{p_n} dx = \int_B |Du| + \int_{\partial B} |u| d\mathcal{H}^{N-1}.$$



# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

Para o espaço $BV(\Omega)$ valem também as imersões de Sobolev.

## Teorema 1.1.9 (Imersões contínuas)

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto com fronteira suave (não necessariamente limitado). Então as seguintes imersões são contínuas

$$BV(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \quad \text{para } p \in [1, 1^*],$$

onde $1^* = \dfrac{N}{N-1}$.



# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

## Demonstração

Dada $u \in BV(\Omega)$, seja $(u_n) \subset C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ uma sequência de funções que convergem para $u$ segundo a convergência estrita (a qual existe pela Proposição 1.1.7). Observe então que $u_n \in W^{1,1}(\Omega)$ para todo $n$ e assim, dado $p \in [1, 1^*]$, pela imersão contínua de $W^{1,1}(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$, segue que

$$|u_n|_p \leq C \left( |u_n|_1 + \int_\Omega |\nabla u_n| dx \right) < +\infty.$$



# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

## Demonstração

Dada $u \in BV(\Omega)$, seja $(u_n) \subset C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ uma sequência de funções que convergem para $u$ segundo a convergência estrita (a qual existe pela Proposição 1.1.7). Observe então que $u_n \in W^{1,1}(\Omega)$ para todo $n$ e assim, dado $p \in [1, 1^*]$, pela imersão contínua de $W^{1,1}(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$, segue que

$$|u_n|_p \leq C \left( |u_n|_1 + \int_\Omega |\nabla u_n| dx \right) < +\infty.$$

Como $L^p(\Omega)$ é reflexivo e $(u_n)$ é limitada em $L^p(\Omega)$, segue que $u_n \rightharpoonup u$ em $L^p(\Omega)$. Pela semicontinuidade inferior de $L^p(\Omega)$ com respeito à sua topologia fraca, segue que



# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

$$\|u\|_p \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_p \leq \liminf_{n\to\infty} C\left(\|u_n\|_1 + \int_\Omega |\nabla u_n| dx\right) = C\|u\|,$$

o que finaliza a demonstarção.



# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

$$\|u\|_p \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_p \leq \liminf_{n\to\infty} C\left(\|u_n\|_1 + \int_\Omega |\nabla u_n| dx\right) = C\|u\|,$$

o que finaliza a demonstarção.

Vale ainda as imersões compactas.

## Teorema 1.1.10 (Imersões compactas)

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, limitado e com fronteira suave. Então as imersões abaixo são compactas

$$BV(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \quad \text{para } p \in [1, 1^*),$$



# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

## Demonstração

Seja $(u_n) \subset BV(\Omega)$ tal que $\|u_n\| \leq 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, pela Observação 1.1.8, existe $v_n \in C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ tal que

$$|v_n - u_n|_p < \frac{1}{n}$$

e

$$\int_\Omega |\nabla v_n| dx < 2.$$

# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

## Demonstração

Seja $(u_n) \subset BV(\Omega)$ tal que $\|u_n\| \leq 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, pela Observação 1.1.8, existe $v_n \in C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ tal que

$$|v_n - u_n|_p < \frac{1}{n}$$

e

$$\int_\Omega |\nabla v_n| dx < 2.$$

Note que como $(v_n)$ é limitada em $W^{1,1}(\Omega)$, então pela compacidade da imersão desse espaço em $L^p(\Omega)$, para $p \in [1, 1^*)$, segue que existe uma subsequência $(v_{n_k})$ e $u \in L^p(\Omega)$, tal que

$$v_{n_k} \to u \quad \text{em } L^p(\Omega), \text{ quando } k \to \infty.$$

# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

Mas isso implica que também

$$u_{n_k} \to u \quad \text{em } L^p(\Omega), \text{ quando } k \to \infty.$$



# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

Outra semelhança do espaço $BV(\Omega)$ com relação aos espaços de Sobolev é o fato de que, tal como nos últimos, funções em $BV(\Omega)$ deixam traço em $\partial\Omega$, desde que o domínio seja suave o suficiente. No próximo resultado enunciamos com precisão esse fato, bem como a validade de uma versão generalizada da fórmula de Green.



# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

## Teorema 1.11 (Fórmula de Green)

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto com fronteira $\partial\Omega$ lipschitziana. Então existe um operador linear e contínuo $\gamma : BV(\Omega) \to L^1(\partial\Omega)$ tal que:



# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

## Teorema 1.11 (Fórmula de Green)

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto com fronteira $\partial\Omega$ lipschitziana. Então existe um operador linear e contínuo $\gamma : BV(\Omega) \to L^1(\partial\Omega)$ tal que:

$i)$ $\gamma(u) = u|_{\partial\Omega}$, para toda $u \in C(\overline{\Omega}) \cap BV(\Omega)$;



# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

## Teorema 1.11 (Fórmula de Green)

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto com fronteira $\partial\Omega$ lipschitziana. Então existe um operador linear e contínuo $\gamma : BV(\Omega) \to L^1(\partial\Omega)$ tal que:

*i)* $\gamma(u) = u|_{\partial\Omega}$, para toda $u \in C(\overline{\Omega}) \cap BV(\Omega)$;

*ii)* vale a seguinte versão generalizada da fórmula de Green:

$$\int_\Omega \varphi Du = -\int_\Omega u \operatorname{div} \varphi \, dx + \int_{\partial\Omega} \gamma(u)\varphi.\nu d\mathcal{H}_{N-1}, \qquad (11)$$

para todo $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, onde $\nu(x)$ está definido para todo $x \in \partial\Omega$, a menos de um conjunto de medida $\mathcal{H}_{N-1}$ nula, e consiste no vetor normal exterior a $\Omega$ em $x$.



# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

## Exemplo

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio com fronteira suave. Dada $u \in BV(\Omega)$, defina $v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ por

$$v(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega. \end{cases}$$

Então $v \in BV(\mathbb{R}^N)$ e ainda

$$Dv = Du\lfloor\Omega - tr(u)_{\partial\Omega}\nu\mathcal{H}^{N-1}\lfloor\partial\Omega,$$

onde $\nu(x)$ denota o vetor unitário exterior a $\Omega$, em $x \in \partial\Omega$.



# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

De fato, para toda $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, por (11), temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \varphi Dv &= -\int_{\mathbb{R}^N} v \,\mathrm{div}\varphi \, dx \\
&= -\int_{\Omega} u \,\mathrm{div}\varphi \, dx \\
&= \int_{\Omega} \varphi Du - \int_{\partial\Omega} tr_{\partial\Omega}(u)\, \nu\, \varphi \, \mathcal{H}^{N-1}.
\end{aligned}$$



# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

De fato, para toda $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, por (11), temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \varphi Dv &= -\int_{\mathbb{R}^N} v \,\mathrm{div}\varphi \, dx \\ &= -\int_{\Omega} u \,\mathrm{div}\varphi \, dx \\ &= \int_{\Omega} \varphi Du - \int_{\partial\Omega} tr_{\partial\Omega}(u)\, \nu \, \varphi \, \mathcal{H}^{N-1}.\end{aligned}$$

Disso decorre que

$$Dv = Du\lfloor\Omega - tr_{\partial\Omega}(u)\, \nu \, \mathcal{H}^{N-1}\lfloor\partial\Omega,$$

no sentido das distribuições.



# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

Agora vamos enunciar uma importante desigualdade que é amplamente utilizadas quando se trata de espaços de Sobolev e que também é muito importantes quando se trabalha em $BV(\Omega)$.



# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

Agora vamos enunciar uma importante desigualdade que é amplamente utilizadas quando se trata de espaços de Sobolev e que também é muito importantes quando se trabalha em $BV(\Omega)$.

**Teorema 1.12 (Desigualdade de Poincaré em $BV(\Omega)$)**

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto com fronteira lipschitziana. Então existe uma constante $C = C(N, \Omega) > 0$ tal que

$$\int_\Omega |u| dx \leq C \left( \int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1} \right).$$

A demonstração do resultado acima encontra-se em [6][Proposition 2]



# Estrutura e propriedades de $BV(\Omega)$

Para finalizar, o espaço $BV(\Omega)$ tem a propriedade de que, se $u, v \in BV(\Omega)$, então $\max\{u, v\}, \min\{u, v\} \in BV(\Omega)$ e ainda, para todo $u, v \in BV(\Omega)$,

$$\Phi_0(\max\{u, v\}) + \Phi_0(\min\{u, v\}) \leq \Phi_0(u) + \Phi_0(v). \tag{12}$$



# Table of Contents


1. Introdução
2. Estrutura e propriedades do espaço $BV(\Omega)$
3. Referências bibliográficas




# Bibliografia I


- Ambrosio, L., Fusco, N., Pallara, D., *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford (2000).
- Attouch, H., Buttazzo, G., Michaille, G. *Variational analysis in Sobolev and BV spaces. Applications to PDEs and optimization*, MPS/SIAM Series on Optimization, 6, Philadelphia, (2006).
- Evans, L.C., Gariepy, R.F. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, Boca Raton, (1992).
- Giusti, E. *Minimal surfaces and functions of bounded variation*, Monographs in Mathematics, 80, Birkhäuser Verlag, Basel, (1984).
- S. Littig and F. Schuricht, *Convergence of the eigenvalues of the p−Laplace operator as p goes to 1*, Calc. Var. Partial Differential Equations, 49, 707 - 727 (2014).




# Bibliografia II




Miranda, M. *Dirichlet problem with $L^1$ data for the non-homogeneous minimal surface equation*, Indiana Univ. Math. J., 24, 227 - 241, (1974/75).



Pimenta, M.T.O. *Espaço das funções de variação limitada e aplicações a problemas quasilineares elípticos*, *https://sites.google.com/site/mtopimenta/publicacoes*