Avanços no estudo de problemas elípticos com o operador 1-laplaciano

Marcos T. O. Pimenta
marcos.pimenta@unesp.br

Unesp - Faculdade de Ciências e Tecnologia,
Presidente Prudente, São Paulo

17 de março de 2021

* Financiado por FAPESP e CNPq



Apresentação

1. Métodos variacionais em $BV(\Omega)$
2. Um problema superlinear envolvendo o operador $1-$Laplaciano
   - O funcional energia
   - Propriedades de diferenciabilidade de Φ_0
   - A equação de Euler-Lagrange
   - Demonstração do Teorema 2.0.1
3. Um problema sublinear envolvendo o operador $1-$biharmônico
   - O espaço $BL_0(\Omega)$
   - O funcional energia do caso $1-$biharmônico
   - Demonstração do Teorema 4.0.1
4. Referências bibliográficas



Table of Contents

1. Métodos variacionais em $BV(\Omega)$
2. Um problema superlinear envolvendo o operador $1-$Laplaciano
   - O funcional energia
   - Propriedades de diferenciabilidade de Φ_0
   - A equação de Euler-Lagrange
   - Demonstração do Teorema 2.0.1
3. Um problema sublinear envolvendo o operador $1-$biharmônico
   - O espaço $BL_0(\Omega)$
   - O funcional energia do caso $1-$biharmônico
   - Demonstração do Teorema 4.0.1
4. Referências bibliográficas



Métodos variacionais em $BV(\Omega)$

Uma vez que já estudamos as propriedades básicas do espaço $BV(\Omega)$, vamos a partir de agora exibir algumas aplicações desse espaço na resolução de algumas EDPs elípticas quasilineares.

Vamos apresentar aqui problemas elípticos em domínios limitados, envolvendo diferentes tipos de operadores, como generalizações dos operadores Δ_p (operador p-Laplaciano) e Δ_p^2 (operador p-biharmônico).



Table of Contents

1. Métodos variacionais em $BV(\Omega)$
2. Um problema superlinear envolvendo o operador $1-$Laplaciano
   - O funcional energia
   - Propriedades de diferenciabilidade de Φ_0
   - A equação de Euler-Lagrange
   - Demonstração do Teorema 2.0.1
3. Um problema sublinear envolvendo o operador $1-$biharmônico
   - O espaço $BL_0(\Omega)$
   - O funcional energia do caso $1-$biharmônico
   - Demonstração do Teorema 4.0.1
4. Referências bibliográficas



1−Laplaciano em domínio limitado

Vamos começar pelo mais simples dos problemas, qual seja

$$\begin{cases} -\Delta_1 u &= f(u) \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde o operador Δ_1 é formalmente dado por $\Delta_1 u = \operatorname{div}\left(\dfrac{\nabla u}{|\nabla u|}\right)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto, limitado e com fronteira suave, $N \geq 2$ e a não-linearidade f satisfaz o seguinte conjunto de hipóteses:



1−Laplaciano em domínio limitado

(f_1) $f \in C^0(\mathbb{R})$;

(f_2) $f(s) = o(1)$ as $s \to 0$;

(f_3) existem $c_1, c_2 > 0$ tais que $|f(s)| \leq c_1 + c_2|s|^{p-1}$ para todo $s \in \mathbb{R}$, onde $p \in [1, 1^*)$;

(f_4) Existe $\theta > 1$ tal que

$$0 < \theta F(s) \leq f(s)s, \quad \text{for } s \neq 0,$$

onde $F(s) = \int_0^s f(t)dt$.



1−Laplaciano em domínio limitado

Nosso objetivo é o de demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 2.0.1

Suponha válidas as hipóteses $(f_1) - (f_4)$. Então (1) possui uma solução não-trivial.



1–Laplaciano em domínio limitado

Nosso objetivo é o de demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 2.0.1

Suponha válidas as hipóteses $(f_1) - (f_4)$. Então (1) possui uma solução não-trivial.

Observe que o teorema não deixa claro o tipo de solução que obteremos, o que será mostrado adiante.



1−Laplaciano em domínio limitado

Nosso objetivo é o de demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 2.0.1

Suponha válidas as hipóteses $(f_1) - (f_4)$. Então (1) possui uma solução não-trivial.

Observe que o teorema não deixa claro o tipo de solução que obteremos, o que será mostrado adiante.

Antes de começarmos a abordagem variacional que nos levará a provar o Teorema 2.0.1, é necessário estudarmos com mais cuidado o operador Δ_1, o qual, pela sua definição formal, não está bem definido em pontos onde $\nabla u = 0$.



1−Laplaciano em domínio limitado

De fato, como veremos, o funcional energia associado a (1) está bem definido em $BV(\Omega)$ e, seus pontos críticos, satisfazem uma versão de (1) na qual aparece um campo vetorial que está bem definido e que coincide com $\nabla u/|\nabla u|$ nos pontos onde $\nabla u \neq 0$.



1−Laplaciano em domínio limitado

Para abordar (1) vamos trabalhar no espaço $BV(\Omega)$, porém munido com a seguinte norma

$$\|u\| := \int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1},$$

a qual, pelo Teorema 1.1.13 é equivalente à norma usual de $BV(\Omega)$.

Definamos os seguintes funcionais, $\Phi_0, \Phi_F, \Phi : BV(\Omega) \to \mathbb{R}$ onde, para $u \in BV(\Omega)$, temos

$$\Phi_0(u) := \int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}_{N-1},$$

$$\Phi_F(u) := \int_\Omega F(u) dx$$

e



1−Laplaciano em domínio limitado

$$\Phi(u) := \Phi_0(u) - \Phi_F(u).$$



1−Laplaciano em domínio limitado

$$\Phi(u) := \Phi_0(u) - \Phi_F(u).$$

Analisando o funcional Φ é fácil ver que o mesmo não é diferenciável.



1−Laplaciano em domínio limitado

$$\Phi(u) := \Phi_0(u) - \Phi_F(u).$$

Analisando o funcional Φ é fácil ver que o mesmo não é diferenciável. De fato o funcional Φ_0 não é suave, embora seja lipschitziano e convexo, enquanto $\Phi_F \in C^1(BV(\Omega))$.



1−Laplaciano em domínio limitado

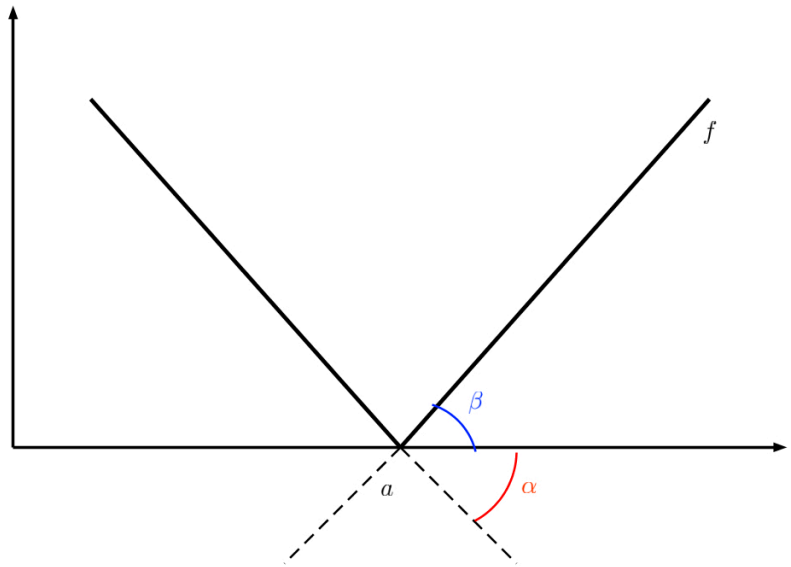
$$\Phi(u) := \Phi_0(u) - \Phi_F(u).$$

Analisando o funcional Φ é fácil ver que o mesmo não é diferenciável. De fato o funcional Φ_0 não é suave, embora seja lipschitziano e convexo, enquanto $\Phi_F \in C^1(BV(\Omega))$. Assim fica claro que devemos nos basear em outra teoria, que não a usual, para definirmos o que se entende por um ponto crítico de Φ. Isto será feito através da teoria de subdiferenciais (ver [3, 4]), a qual desenvolve resultados de análise não-linear para funcionais localmente lipschitzianos.



1−Laplaciano em domínio limitado

Apenas para motivar a definição do que vem a ser o subdiferencial de uma função localmente lipschitziana em um ponto do seu domínio, consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função localmente lipschitziana, convexa e cujo gráfico é dado abaixo.





1−Laplaciano em domínio limitado

Caso f fosse diferenciável no ponto $a \in \mathbb{R}$, uma vez que f é convexa, a derivada $f'(a)$ nos forneceria a inclinação da única reta que passa por $(a, f(a))$, a qual ficaria abaixo do gráfico de f. Note porém que qualquer reta r que passe por $(a, f(a))$ e tenha inclinação $m \in [-\alpha, \beta]$ tem a propriedade de tocar o gráfico e ficar abaixo do mesmo.



1−Laplaciano em domínio limitado

Caso f fosse diferenciável no ponto $a \in \mathbb{R}$, uma vez que f é convexa, a derivada $f'(a)$ nos forneceria a inclinação da única reta que passa por $(a, f(a))$, a qual ficaria abaixo do gráfico de f. Note porém que qualquer reta r que passe por $(a, f(a))$ e tenha inclinação $m \in [-\alpha, \beta]$ tem a propriedade de tocar o gráfico e ficar abaixo do mesmo.

Por isso o intervalo $[-\alpha, \beta]$ pode, em um contexto mais geral, ser visto como a derivada $f'(a)$.



1−Laplaciano em domínio limitado

Caso f fosse diferenciável no ponto $a \in \mathbb{R}$, uma vez que f é convexa, a derivada $f'(a)$ nos forneceria a inclinação da única reta que passa por $(a, f(a))$, a qual ficaria abaixo do gráfico de f. Note porém que qualquer reta r que passe por $(a, f(a))$ e tenha inclinação $m \in [-\alpha, \beta]$ tem a propriedade de tocar o gráfico e ficar abaixo do mesmo.

Por isso o intervalo $[-\alpha, \beta]$ pode, em um contexto mais geral, ser visto como a derivada $f'(a)$.

Definição

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função localmente lipschitziana e convexa, definimos o subdiferencial de f em a, $\partial f(a) \subset \mathbb{R}$ como o conjunto dos $z \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) - f(a) \geq z.(x - a)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.



1–Laplaciano em domínio limitado

Essa definição pode ser generalizada para funcionais $\Psi : X \to \mathbb{R}$ convexos e localmente lipschitzianos, definidos em um espaço de Banach X (ver [3, 4]).

Definição

Definimos o subdiferencial de Ψ em $u \in X$ como o conjunto $\partial\Psi(u) \subset X^*$, formado pelos $z^* \in X^*$ tais que

$$\Psi(v) - \Psi(u) \geq \langle z^*, v - u \rangle_{X^*,X}, \quad \forall v \in X.$$

Observação

- Se Ψ for diferenciável em u, então $\partial\Psi(u) = \{\Psi'(u)\}$,
- Essa definição pode ser generalizada para funcionais não-convexos.



1−Laplaciano em domínio limitado

Voltando para o nosso problema, note que $\Phi = \Phi_0 - \Phi_F$, onde Φ_0 é localmente lipschitziano e convexo, enquanto Φ_F é $C^1(BV(\Omega))$. Assim, diremos que $u \in BV(\Omega)$ é ponto crítico de Φ se u for tal que $0 \in \partial\Phi(u)$, o que corresponde a $\Phi_F'(u) \in \partial\Phi_0(u)$. Isso, por sua vez, é equivalente a

$$\Phi_0(v) - \Phi_0(u) \geq \Phi_F'(u)(v-u), \quad \forall v \in BV(\Omega). \tag{2}$$



1−Laplaciano em domínio limitado

Vamos agora estudar um resultado de [1], no qual são estudadas as propriedades de diferenciabilidade do funcional Φ_0. Como veremos, embora não diferenciável, esse funcional admite derivadas direcionais com respeito a algumas direções.



1−Laplaciano em domínio limitado

Vamos agora estudar um resultado de [1], no qual são estudadas as propriedades de diferenciabilidade do funcional Φ_0. Como veremos, embora não diferenciável, esse funcional admite derivadas direcionais com respeito a algumas direções.

Theorem 2.5 de [1]

Suponha que, para todo $x \in \Omega$, a função $g(x,p)$ seja diferenciável em p, para todo $p \neq 0$ e suponha que $g(x,0) = 0$ para todo x tal que $g(x,\cdot)$ não é diferenciável em $p = 0$. Suponha ainda que

$$g_0(x,p) = \lim_{t \to 0^+} g\left(x, \frac{p}{t}\right) t$$

seja diferenciável para todo $(x,p) \in \Omega \times (\mathbb{R}^N \backslash \{0\})$.



1−Laplaciano em domínio limitado

Finalmente suponha que exista $M > 0$ tal que $|g_p(x,p)| \leq M$ e $|g_p^0(x,p)| \leq M$. Então $\Phi_g : BV(\Omega) \to \mathbb{R}$, definida por

$$\begin{aligned} \Phi_g(u) &= \int_\Omega g(x, Du) \\ &:= \int_\Omega g(x, (Du)^a(x))dx \\ &\quad + \int_\Omega g^0\left(x, \frac{Du}{|Du|}(x)\right)|Du|^s \end{aligned}$$

é diferenciável no ponto $u \in BV(\Omega)$ na direção $v \in BV(\Omega)$ se e somente se $|Dv|^s$ é absolutamente contínua com respeito a $|Du|^s$ e (Dv^a) se anula quase sempre em $\{x \in \mathbb{R}^N;\ (Du)^a(x) = 0\}$.



1−Laplaciano em domínio limitado

Nesse caso, temos que

$$\begin{aligned}\Phi'_g(u)v &= \int_\Omega g_p(x,(Du)^a(x))(Dv)^a(x)dx \\ &\quad + \int_\Omega g_p^0\left(x,\frac{Du}{|Du|}(x)\right)\frac{Dv}{|Dv|}(x)|Dv|^s. \qquad (3)\end{aligned}$$



1−Laplaciano em domínio limitado

Nesse caso, temos que

$$\begin{aligned}\Phi_g'(u)v &= \int_\Omega g_p(x,(Du)^a(x))(Dv)^a(x)dx \\ &\quad + \int_\Omega g_p^0\left(x,\frac{Du}{|Du|}(x)\right)\frac{Dv}{|Dv|}(x)|Dv|^s. \qquad (3)\end{aligned}$$

Como

$$\Phi_0(u) = \Phi_g(u) + \int_{\partial\Omega}|u|d\mathcal{H}_{N-1}$$

onde $g(x,p) = |p|$ e $g^0(x,p) = |p|$, temos que, dado $u \in BV(\Omega)$,



1−Laplaciano em domínio limitado

$\Phi_0'(u)v$ está bem definido para todo $v \in BV(\Omega)$ tal que $|Dv|^s$ é absolutamente contínua com respeito a $|Du|^s$, (Dv^a) se anula quase sempre em $\{x \in \mathbb{R}^N;\ (Du)^a(x) = 0\}$ e $v(x) = 0$, $\mathcal{H}_{N-1}-$ q.s., no conjunto $\{x \in \partial\Omega;\ u(x) = 0\}$.



1−Laplaciano em domínio limitado

$\Phi_0'(u)v$ está bem definido para todo $v \in BV(\Omega)$ tal que $|Dv|^s$ é absolutamente contínua com respeito a $|Du|^s$, (Dv^a) se anula quase sempre em $\{x \in \mathbb{R}^N;\ (Du)^a(x) = 0\}$ e $v(x) = 0$, $\mathcal{H}_{N-1}-$ q.s., no conjunto $\{x \in \partial\Omega;\ u(x) = 0\}$.

Temos ainda que

$$\begin{aligned}\Phi_0'(u)v &= \int_\Omega \frac{(Du)^a(Dv)^a}{|(Du)^a|^2}dx \\ &+ \int_\Omega \frac{Du}{|Du|}(x)\frac{Dv}{|Dv|}(x)|(Dv)|^s \\ &+ \int_{\partial\Omega} \mathrm{sgn}(u)v d\mathcal{H}_{N-1}. \qquad (4)\end{aligned}$$



1−Laplaciano em domínio limitado

Vamos agora estudar a versão precisa da equação de Euler-Lagrange associada aos pontos críticos de Φ. Mais especificamente vamos provar que se $u \in BV(\Omega)$ for tal que $0 \in \partial\Phi(u)$, então existe um campo vetorial $z \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$, o qual faz o papel de $\dfrac{\nabla u}{|\nabla u|}$ em (1) e está bem definido mesmo onde $\nabla u = 0$.



1−Laplaciano em domínio limitado

Vamos agora estudar a versão precisa da equação de Euler-Lagrange associada aos pontos críticos de Φ. Mais especificamente vamos provar que se $u \in BV(\Omega)$ for tal que $0 \in \partial\Phi(u)$, então existe um campo vetorial $z \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$, o qual faz o papel de $\dfrac{\nabla u}{|\nabla u|}$ em (1) e está bem definido mesmo onde $\nabla u = 0$.

Consideremos as extensões dos funcionais Φ_0, Φ_F e Φ, dadas respectivamente por $\overline{\Phi_0}, \overline{\Phi_F}, \overline{\Phi} : L^{1^*}(\Omega) \to \mathbb{R}$, onde

$$\overline{\Phi_0}(u) = \begin{cases} \Phi_0(u) & \text{se } u \in BV(\Omega), \\ +\infty & \text{se } u \in L^{1^*}(\Omega) \backslash BV(\Omega), \end{cases}$$

$$\overline{\Phi_F}(u) = \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx$$

e $\overline{\Phi} = \overline{\Phi_0} - \overline{\Phi_F}$.



1−Laplaciano em domínio limitado

É fácil ver que $\overline{\Phi_F}$ é um funcional $C^1(L^{1^*}(\Omega))$ e que ainda $\overline{\Phi_0}$ é convexo e semicontínuo inferiormente em $L^{1^*}(\mathbb{R}^N)$.



1−Laplaciano em domínio limitado

É fácil ver que $\overline{\Phi_F}$ é um funcional $C^1(L^{1^*}(\Omega))$ e que ainda $\overline{\Phi_0}$ é convexo e semicontínuo inferiormente em $L^{1^*}(\mathbb{R}^N)$.

Lema 2.2.1

Se $u \in BV(\Omega)$ for tal que $0 \in \partial\Phi(u)$, então $0 \in \partial\overline{\Phi}(u)$.



1–Laplaciano em domínio limitado

É fácil ver que $\overline{\Phi_F}$ é um funcional $C^1(L^{1^*}(\Omega))$ e que ainda $\overline{\Phi_0}$ é convexo e semicontínuo inferiormente em $L^{1^*}(\mathbb{R}^N)$.

Lema 2.2.1

Se $u \in BV(\Omega)$ for tal que $0 \in \partial\Phi(u)$, então $0 \in \partial\overline{\Phi}(u)$.

Demonstração

Suponha que $u \in BV(\Omega)$ seja tal que $0 \in \partial\Phi(u)$. Então u satisfaz (2). Para $v \in L^{1^*}(\Omega)$, note que:

- se $v \in BV(\Omega) \cap L^{1^*}(\Omega)$, então

$$\begin{aligned} \overline{\Phi_0}(v) - \overline{\Phi_0}(u) &= \Phi_0(v) - \Phi_0(u) \\ &\geq \Phi_F'(u)(v-u) \\ &= \int_\Omega f(u)(v-u)\,dx = \overline{\Phi_F}'(u)(v-u); \end{aligned}$$

1−Laplaciano em domínio limitado

- se $v \in L^{1^*}(\Omega)\backslash BV(\Omega)$, como $\overline{\Phi_0}(v) = +\infty$ e $\overline{\Phi_0}(u) < +\infty$, temos que

$$\begin{aligned} \overline{\Phi_0}(v) - \overline{\Phi_0}(u) &= +\infty \\ &\geq \overline{\Phi_F}'(u)(v-u). \end{aligned}$$

Assim, nos dois casos $0 \in \partial\overline{\Phi}(u)$.



1−Laplaciano em domínio limitado

- se $v \in L^{1^*}(\Omega)\backslash BV(\Omega)$, como $\overline{\Phi_0}(v) = +\infty$ e $\overline{\Phi_0}(u) < +\infty$, temos que

$$\begin{aligned} \overline{\Phi_0}(v) - \overline{\Phi_0}(u) &= +\infty \\ &\geq \overline{\Phi_F}'(u)(v-u). \end{aligned}$$

Assim, nos dois casos $0 \in \partial\overline{\Phi}(u)$.

Se $u \in BV(\Omega)$ for uma solução de variação limitada de (1), pelo último resultado temos que $0 \in \partial\overline{\Phi}(u)$. Como $\overline{\Phi_0}$ é convexo e $\overline{\Phi_F}$ suave, temos que $\overline{\Phi_F}'(u) \in \partial\overline{\Phi_0}(u)$. Assim, por [7][Proposition 4.23], existe $z \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tal que $|z^*|_\infty \leq 1$,

$$-\operatorname{div} z = \overline{\Phi_F}'(u) \quad \text{em } L^N(\Omega). \tag{5}$$



1−Laplaciano em domínio limitado

Além disso,

$$\overline{\Phi_0}(u) = \int_\Omega u \operatorname{div} z \, dx. \tag{6}$$

Portanto segue de (5) e (6) que u satisfaz

$$\begin{cases} \exists\, z \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N),\ |z|_\infty \leq 1,\ \operatorname{div} z \in L^N(\Omega), \\ -\displaystyle\int_\Omega u \operatorname{div} z \, dx = \int_\Omega |Du|, \\ -\operatorname{div} z = f(x,u), \quad \text{quase sempre em } \Omega. \end{cases} \tag{7}$$

Logo (7) é a versão precisa de (1).



1−Laplaciano em domínio limitado

Passemos agora para a demonstração do resultado principal. Note que podemos sem dificuldade provar que o funcional Φ satisfaz as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha. Porém, o fato de o espaço $BV(\Omega)$ não ser reflexivo torna inviável provar que Φ satisfaz a condição de Palais-Smale.



1−Laplaciano em domínio limitado

Passemos agora para a demonstração do resultado principal. Note que podemos sem dificuldade provar que o funcional Φ satisfaz as condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha. Porém, o fato de o espaço $BV(\Omega)$ não ser reflexivo torna inviável provar que Φ satisfaz a condição de Palais-Smale. Assim, faz-se necessário enunciarmos e provarmos uma versão do Teorema do Passo da Montanha para funcionais localmente lipschitzianos, o qual não exija a condição Palais-Smale.



1−Laplaciano em domínio limitado

Teorema do Passo da Montanha

Seja E um espaço de Banach, $\Phi = I_0 - I$ onde $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ e I_0 um funcional localmente lipschitziano e convexo definido em E. Suponha que Φ satisfaça:



1−Laplaciano em domínio limitado

Teorema do Passo da Montanha

Seja E um espaço de Banach, $\Phi = I_0 - I$ onde $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ e I_0 um funcional localmente lipschitziano e convexo definido em E. Suponha que Φ satisfaça:

i) Existem $\rho > 0$, $\alpha > \Phi(0)$ tais que $\Phi|_{\partial B_\rho(0)} \geq \alpha$,

ii) $\Phi(e) < \Phi(0)$ para algum $e \in E \backslash \overline{B_\rho(0)}$,

Então para todo $\epsilon > 0$ existe $x_\epsilon \in E$ tal que

$$c - \epsilon < \Phi(x_\epsilon) < c + \epsilon, \tag{8}$$

onde $c \geq \alpha$ é caracterizado por



1−Laplaciano em domínio limitado

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} \Phi(\gamma(t)), \tag{9}$$

$\Gamma = \{\gamma \in C^0([0,1], E);\ \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(0) = e\}.$



1−Laplaciano em domínio limitado

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} \Phi(\gamma(t)), \tag{9}$$

$\Gamma = \{\gamma \in C^0([0,1], E);\ \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(0) = e\}$. Além disso,

$$I_0(y) - I_0(x_\epsilon) \geq I'(x_\epsilon)(y - x_\epsilon) - \epsilon\|y - x_\epsilon\|, \quad \forall y \in E. \tag{10}$$



1−Laplaciano em domínio limitado

Mostremos que o funcional Φ satisfaz as hipóteses dessa versão do Teorema do Passo da Montanha.

Primeiramente mostremos que o funcional Φ satisfaz a condição $i)$. Antes, note que por (f_2) e (f_3), segue que para todo $\eta > 0$, existe $A_\eta > 0$ tal que

$$|F(s)| \leq \eta|s| + A_\eta|s|^p, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Por (11) e pelo Teorema 1.1.9, segue que



1−Laplaciano em domínio limitado

$$\Phi(u) = \int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1} - \int_\Omega F(u)dx$$



1−Laplaciano em domínio limitado

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= \int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1} - \int_\Omega F(u)dx \\ &\geq \|u\| - \eta|u|_1 - A_\eta |u|_p^p\end{aligned}$$



1−Laplaciano em domínio limitado

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= \int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1} - \int_\Omega F(u)dx \\ &\geq \|u\| - \eta|u|_1 - A_\eta |u|_p^p \\ &\geq \|u\| - C\eta\|u\| - CA_\eta\|u\|^p\end{aligned}$$



1−Laplaciano em domínio limitado

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &= \int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1} - \int_\Omega F(u)dx \\
&\geq \|u\| - \eta|u|_1 - A_\eta |u|_p^p \\
&\geq \|u\| - C\eta\|u\| - CA_\eta\|u\|^p \\
&= (1 - C\eta)\|u\| - C_1\|u\|^p
\end{aligned}$$



1−Laplaciano em domínio limitado

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &= \int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1} - \int_\Omega F(u)dx \\
&\geq \|u\| - \eta|u|_1 - A_\eta |u|_p^p \\
&\geq \|u\| - C\eta\|u\| - CA_\eta\|u\|^p \\
&= (1 - C\eta)\|u\| - C_1\|u\|^p \\
&\geq \alpha,
\end{aligned}$$

para toda $u \in BV(\Omega)$, tal que $\|u\| = \rho$, onde $0 < \eta < 1/C$ é fixado e $0 < \rho < \left(\frac{1 - C\eta}{C_1}\right)^{\frac{1}{p-1}}$ e $\alpha = \rho(1 - C\eta - C_1\rho^{p-1})$.



1−Laplaciano em domínio limitado

Agora vamos provar que Φ satisfaz a condição *ii*) do Teorema do Passo da Montanha.



1−Laplaciano em domínio limitado

Agora vamos provar que Φ satisfaz a condição ii) do Teorema do Passo da Montanha. Note primeiramente que a condição (f_4) implica que existem constantes $d_1, d_2 > 0$ tais que

$$F(s) \geq d_1|s|^{\theta} - d_2, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{12}$$



1−Laplaciano em domínio limitado

Agora vamos provar que Φ satisfaz a condição ii) do Teorema do Passo da Montanha. Note primeiramente que a condição (f_4) implica que existem constantes $d_1, d_2 > 0$ tais que

$$F(s) \geq d_1|s|^\theta - d_2, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Se $u \in BV(\Omega)\backslash\{0\}$, dado $t > 0$, temos

$$\Phi(tu) \leq t\|u\| - d_1 t^\theta \int_\Omega |u|^\theta dx + d_2|\Omega| \to -\infty,$$

quando $t \to +\infty$, já que $\theta > 1$.



1−Laplaciano em domínio limitado

Então o Teorema do Passo da Montanha nos garante a existência de sequências $(u_n) \subset BV(\Omega)$ e $\epsilon_n \to 0$ tais que

$$\Phi_n(u_n) \to c, \quad \text{quando } n \to +\infty$$

e

$$\Phi_0(v) - \Phi_0(u_n) \geq \int_\Omega f(u_n)(v - u_n)dx - \epsilon_n \|v - u_n\|, \quad \forall v \in BV(\Omega). \quad (13)$$



1−Laplaciano em domínio limitado

Então o Teorema do Passo da Montanha nos garante a existência de sequências $(u_n) \subset BV(\Omega)$ e $\epsilon_n \to 0$ tais que

$$\Phi_n(u_n) \to c, \quad \text{quando } n \to +\infty$$

e

$$\Phi_0(v) - \Phi_0(u_n) \geq \int_\Omega f(u_n)(v - u_n)dx - \epsilon_n \|v - u_n\|, \quad \forall v \in BV(\Omega). \quad (13)$$

Mostremos agora que a sequência (u_n) é limitada em $BV(\Omega)$.



1−Laplaciano em domínio limitado

Então o Teorema do Passo da Montanha nos garante a existência de sequências $(u_n) \subset BV(\Omega)$ e $\epsilon_n \to 0$ tais que

$$\Phi_n(u_n) \to c, \quad \text{quando } n \to +\infty$$

e

$$\Phi_0(v) - \Phi_0(u_n) \geq \int_\Omega f(u_n)(v - u_n)dx - \epsilon_n \|v - u_n\|, \quad \forall v \in BV(\Omega). \quad (13)$$

Mostremos agora que a sequência (u_n) é limitada em $BV(\Omega)$. Em (13), ao escolhermos $v = 2u_n$, obtemos



1−Laplaciano em domínio limitado

$$\|u_n\| \geq \int_\Omega f(u_n)u_n dx - \epsilon_n \|u_n\|,$$



1−Laplaciano em domínio limitado

$$\|u_n\| \geq \int_\Omega f(u_n)u_n dx - \epsilon_n \|u_n\|,$$

o que implica que

$$(1+\epsilon_n)\|u_n\| \geq \int_\Omega f(u_n)u_n dx. \tag{14}$$



1−Laplaciano em domínio limitado

$$\|u_n\| \geq \int_\Omega f(u_n)u_n dx - \epsilon_n \|u_n\|,$$

o que implica que

$$(1+\epsilon_n)\|u_n\| \geq \int_\Omega f(u_n)u_n dx. \tag{14}$$

Então, por (f_4) e (14), note que

$$c + o_n(1) \quad \geq \quad \Phi(u_n)$$



1−Laplaciano em domínio limitado

$$\|u_n\| \geq \int_\Omega f(u_n)u_n dx - \epsilon_n \|u_n\|,$$

o que implica que

$$(1+\epsilon_n)\|u_n\| \geq \int_\Omega f(u_n)u_n dx. \tag{14}$$

Então, por (f_4) e (14), note que

$$\begin{aligned} c + o_n(1) &\geq \Phi(u_n) \\ &= \|u_n\| + \int_\Omega \left(\frac{1}{\theta} f(u_n)u_n - F(u_n)\right) dx - \int_\Omega \frac{1}{\theta} f(u_n)u_n dx \end{aligned}$$



1−Laplaciano em domínio limitado

$$\|u_n\| \geq \int_\Omega f(u_n)u_n dx - \epsilon_n \|u_n\|,$$

o que implica que

$$(1+\epsilon_n)\|u_n\| \geq \int_\Omega f(u_n)u_n dx. \tag{14}$$

Então, por (f_4) e (14), note que

$$\begin{aligned} c + o_n(1) &\geq \Phi(u_n) \\ &= \|u_n\| + \int_\Omega \left(\frac{1}{\theta} f(u_n)u_n - F(u_n)\right) dx - \int_\Omega \frac{1}{\theta} f(u_n)u_n dx \\ &\geq \|u_n\| \left(1 - \frac{1}{\theta} + \frac{\epsilon_n}{\theta}\right) \end{aligned}$$



1−Laplaciano em domínio limitado

$$\|u_n\| \geq \int_\Omega f(u_n)u_n dx - \epsilon_n \|u_n\|,$$

o que implica que

$$(1+\epsilon_n)\|u_n\| \geq \int_\Omega f(u_n)u_n dx. \tag{14}$$

Então, por (f_4) e (14), note que

$$\begin{aligned} c + o_n(1) &\geq \Phi(u_n) \\ &= \|u_n\| + \int_\Omega \left(\frac{1}{\theta} f(u_n)u_n - F(u_n)\right) dx - \int_\Omega \frac{1}{\theta} f(u_n)u_n dx \\ &\geq \|u_n\| \left(1 - \frac{1}{\theta} + \frac{\epsilon_n}{\theta}\right) \\ &\geq C\|u_n\|, \end{aligned}$$



1−Laplaciano em domínio limitado

para uma constante $C > 0$ uniforme em $n \in \mathbb{N}$. Logo (u_n) é limitada.



para uma constante $C > 0$ uniforme em $n \in \mathbb{N}$. Logo (u_n) é limitada.

Pela limitação de (u_n) em $BV(\Omega)$ e pela compacidade das imersões, segue que existe $u \in L^r(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $L^r(\Omega)$ para $1 \leq r < 1^*$. Ainda, pelo Lema 1.1.4 segue que $u \in BV(\Omega)$.



para uma constante $C > 0$ uniforme em $n \in \mathbb{N}$. Logo (u_n) é limitada.

Pela limitação de (u_n) em $BV(\Omega)$ e pela compacidade das imersões, segue que existe $u \in L^r(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $L^r(\Omega)$ para $1 \leq r < 1^*$. Ainda, pelo Lema 1.1.4 segue que $u \in BV(\Omega)$.

Assim, calculando o lim sup ambos os lados de (13) e usando novamente o Lema 1.1.4 temos que

$$\Phi_0(v) - \Phi_0(u) \geq \int_\Omega f(u)(v-u), \quad \forall v \in BV(\Omega). \tag{15}$$

Portanto u é solução de variação limitada de (1).



para uma constante $C > 0$ uniforme em $n \in \mathbb{N}$. Logo (u_n) é limitada.

Pela limitação de (u_n) em $BV(\Omega)$ e pela compacidade das imersões, segue que existe $u \in L^r(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $L^r(\Omega)$ para $1 \leq r < 1^*$. Ainda, pelo Lema 1.1.4 segue que $u \in BV(\Omega)$.

Assim, calculando o lim sup ambos os lados de (13) e usando novamente o Lema 1.1.4 temos que

$$\Phi_0(v) - \Phi_0(u) \geq \int_\Omega f(u)(v-u), \quad \forall v \in BV(\Omega). \tag{15}$$

Portanto u é solução de variação limitada de (1).
Para verificarmos que $u \neq 0$, note que, considerando $v = u + tu$ para $t > 0$ em (15), obtemos



1−Laplaciano em domínio limitado

$$\frac{\Phi_0(u+tu)-\Phi_0(u)}{t} \geq \int_\Omega f(u)u dx.$$



1−Laplaciano em domínio limitado

$$\frac{\Phi_0(u+tu)-\Phi_0(u)}{t} \geq \int_\Omega f(u)u dx.$$

Fazendo $t \to 0^+$, segue que

$$\Phi_0'(u)u \geq \int_\Omega f(u)u dx.$$



1−Laplaciano em domínio limitado

$$\frac{\Phi_0(u+tu)-\Phi_0(u)}{t} \geq \int_\Omega f(u)u dx.$$

Fazendo $t \to 0^+$, segue que

$$\Phi_0'(u)u \geq \int_\Omega f(u)u dx.$$

Usando o mesmo argumento para $t < 0$ e fazendo $t \to 0^-$, segue que

$$\Phi_0'(u)u \leq \int_\Omega f(u)u dx.$$



1−Laplaciano em domínio limitado

$$\frac{\Phi_0(u+tu)-\Phi_0(u)}{t} \geq \int_\Omega f(u)u dx.$$

Fazendo $t \to 0^+$, segue que

$$\Phi_0'(u)u \geq \int_\Omega f(u)u dx.$$

Usando o mesmo argumento para $t < 0$ e fazendo $t \to 0^-$, segue que

$$\Phi_0'(u)u \leq \int_\Omega f(u)u dx.$$

Então, pelas últimas desigualdades e por (4), temos que

$$\Phi_0(u) = \Phi_0'(u)u = \int_\Omega f(u)u dx. \tag{16}$$



1−Laplaciano em domínio limitado

Utilizando a mesma argumentação com $v = u_n + tu_n$ em (13), para $t > 0$ e $t < 0$ e fazendo $t \to 0^+$ e $t \to 0^-$, segue que

$$\Phi_0(u_n) = \Phi_0'(u_n)u_n = \int_\Omega f(u_n)u_n dx + o_n(1). \tag{17}$$



1−Laplaciano em domínio limitado

Utilizando a mesma argumentação com $v = u_n + tu_n$ em (13), para $t > 0$ e $t < 0$ e fazendo $t \to 0^+$ e $t \to 0^-$, segue que

$$\Phi_0(u_n) = \Phi_0'(u_n)u_n = \int_\Omega f(u_n)u_n dx + o_n(1). \tag{17}$$

Portanto, de (16), (17), (f_2), (f_3) e da compacidade das imersões de $BV(\Omega)$, segue que

$$\Phi_0(u) = \int_\Omega f(u)u dx$$



1−Laplaciano em domínio limitado

Utilizando a mesma argumentação com $v = u_n + tu_n$ em (13), para $t > 0$ e $t < 0$ e fazendo $t \to 0^+$ e $t \to 0^-$, segue que

$$\Phi_0(u_n) = \Phi_0'(u_n)u_n = \int_\Omega f(u_n)u_n dx + o_n(1). \tag{17}$$

Portanto, de (16), (17), (f_2), (f_3) e da compacidade das imersões de $BV(\Omega)$, segue que

$$\begin{aligned} \Phi_0(u) &= \int_\Omega f(u)u dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f(u_n)u_n dx \end{aligned}$$



1−Laplaciano em domínio limitado

Utilizando a mesma argumentação com $v = u_n + tu_n$ em (13), para $t > 0$ e $t < 0$ e fazendo $t \to 0^+$ e $t \to 0^-$, segue que

$$\Phi_0(u_n) = \Phi_0'(u_n)u_n = \int_\Omega f(u_n)u_n dx + o_n(1). \tag{17}$$

Portanto, de (16), (17), (f_2), (f_3) e da compacidade das imersões de $BV(\Omega)$, segue que

$$\begin{aligned} \Phi_0(u) &= \int_\Omega f(u)u dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f(u_n)u_n dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \Phi_0(u_n). \end{aligned}$$



1−Laplaciano em domínio limitado

Logo, a última igualdade, (f_2), (f_3) e a compacidade das imersões de $BV(\Omega)$, implicam que

$$0 < c = \lim_{n\to\infty} \Phi(u_n) = \Phi(u)$$

e assim $u \neq 0$.



Table of Contents

1. Métodos variacionais em $BV(\Omega)$
2. Um problema superlinear envolvendo o operador $1-$Laplaciano
   - O funcional energia
   - Propriedades de diferenciabilidade de Φ_0
   - A equação de Euler-Lagrange
   - Demonstração do Teorema 2.0.1
3. Um problema sublinear envolvendo o operador $1-$biharmônico
   - O espaço $BL_0(\Omega)$
   - O funcional energia do caso $1-$biharmônico
   - Demonstração do Teorema 4.0.1
4. Referências bibliográficas



Um problema sublinear $1-$biharmônico

Nessa seção vamos estudar um resultado de existência de solução não trivial para o seguinte problema envolvendo o operador $1-$biharmônico,

$$\begin{cases} \Delta_1^2 u = \lambda f(x,u) & \text{em } \Omega, \\ u = \dfrac{\Delta u}{|\Delta u|} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{18}$$

onde $\lambda > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira regular, $N \geq 3$ e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory.



Um problema sublinear 1−biharmônico

O operador 1−biharmônico é definido por

$$\Delta_1^2 u = \Delta\left(\frac{\Delta u}{|\Delta u|}\right),$$

e pode ser visto como o caso $p = 1$, para o operador $p-$biharmônico $\Delta_p^2 u = \Delta(|\Delta u|^{p-2}\Delta u)$, este último muito utilizado no estudo de sistemas de equações de segunda ordem.



Um problema sublinear $1-$biharmônico

Consideraremos uma não-linearidade do tipo "sublinear" com respeito ao nosso operador, satisfazendo as seguintes hipóteses sobre f.

(f_1) $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory, i.e. $f(\cdot, s) : \Omega \to \mathbb{R}$ é mensurável para todo $s \in \mathbb{R}$ e $f(x, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua para quase todo $x \in \Omega$;

(f_2) Existem $0 < q < 1$, $c_1 > 0$ e uma função $c_2 \in L^\infty(\Omega)$ tais que

$$|f(x, s)| \leq c_1 |s|^{q-1} + c_2(x) \quad \text{para q.t. } x \in \Omega \text{ e todo } s \in \mathbb{R};$$

(f_3) $F(x, t) \geq 0$ em $\Omega \times \mathbb{R}$ e existe $t_0 > 0$ tal que $\displaystyle\int_\Omega F(x, t_0)\, dx > 0$.



Um problema sublinear 1−biharmônico

Nosso objetivo é o de demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 4.0.1

Suponha que f satisfaça (f_1), (f_2) e (f_3). Então existe $\lambda_* > 0$ tal que (18) possui uma solução não-trivial para todo $\lambda \geq \lambda_*$.



Um problema sublinear 1−biharmônico

Nosso objetivo é o de demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 4.0.1

Suponha que f satisfaça (f_1), (f_2) e (f_3). Então existe $\lambda_* > 0$ tal que (18) possui uma solução não-trivial para todo $\lambda \geq \lambda_*$.

A prova desse resultado seguirá da aplicação de argumentos de minimização global do funcional energia a ele associado. Entretanto, antes de proceder com esses argumentos, é necessário estudarmos o espaço adequado para se tratar variacionalmente tal problema.



Um problema sublinear 1−biharmônico

Denotemos por $BL_0(\Omega)$ o espaço das funções de $W_0^{1,1}(\Omega)$ tais que $\Delta u \in \mathcal{M}(\Omega)$, ou seja

$$BL_0(\Omega) = \left\{ u \in W_0^{1,1}(\Omega) : \Delta u \in \mathcal{M}(\Omega) \right\}.$$



Um problema sublinear 1−biharmônico

Denotemos por $BL_0(\Omega)$ o espaço das funções de $W_0^{1,1}(\Omega)$ tais que $\Delta u \in \mathcal{M}(\Omega)$, ou seja

$$BL_0(\Omega) = \left\{ u \in W_0^{1,1}(\Omega) : \Delta u \in \mathcal{M}(\Omega) \right\}.$$

Como provado em [8][Proposition 2.2.], temos que

$$BL_0(\Omega) = \left\{ u \in W_0^{1,1}(\Omega) : \int_\Omega |\Delta u| < +\infty \right\}$$

onde

$$\int_\Omega |\Delta u| := \sup \left\{ \int_\Omega u \, \Delta \, \varphi \, dx : \varphi \in C_c^2(\Omega), \, |\varphi|_\infty \leq 1 \right\}$$

é definida como a variação total da medida Δu.



Um problema sublinear 1−biharmônico

Definindo $W^{2,1}_{\Delta}(\Omega) := \{u \in W^{1,1}_0(\Omega);\ \Delta u \in L^1(\Omega)\}$, note que

$$W^{2,1}_{\Delta}(\Omega) \subset BL_0(\Omega)$$

e ainda, para todo $u \in BL_0(\Omega)$ tal que $u \in W^{2,1}_{\Delta}(\Omega)$, temos que

$$\int_\Omega |\Delta u| = |\Delta u|_1.$$



Um problema sublinear 1−biharmônico

Definindo $W^{2,1}_{\Delta}(\Omega) := \{u \in W^{1,1}_0(\Omega);\ \Delta u \in L^1(\Omega)\}$, note que

$$W^{2,1}_{\Delta}(\Omega) \subset BL_0(\Omega)$$

e ainda, para todo $u \in BL_0(\Omega)$ tal que $u \in W^{2,1}_{\Delta}(\Omega)$, temos que

$$\int_\Omega |\Delta u| = |\Delta u|_1.$$

Vamos munir o espaço $BL_0(\Omega)$ com a seguinte norma

$$\|u\|_0 = |u|_1 + |\nabla u|_1 + \int_\Omega |\Delta u| \quad \text{para } u \in BL_0(\Omega).$$



Um problema sublinear 1−biharmônico

Pode-se provar propriedades totalmente análogas àquelas de $BV(\Omega)$.



Um problema sublinear 1−biharmônico

Pode-se provar propriedades totalmente análogas àquelas de $BV(\Omega)$.

Lema 4.1.1

Seja $(u_n) \subset BL_0(\Omega)$ uma sequência limitada tal que $u_n \to u$ in $L^r(\Omega)$, com $1 \leq r \leq N/(N-2)$. Então $u \in BL_0(\Omega)$ e

$$\int_\Omega |\Delta u| \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |\Delta u_n|. \tag{19}$$



Um problema sublinear 1−biharmônico

Pode-se provar propriedades totalmente análogas àquelas de $BV(\Omega)$.

Lema 4.1.1

Seja $(u_n) \subset BL_0(\Omega)$ uma sequência limitada tal que $u_n \to u$ in $L^r(\Omega)$, com $1 \leq r \leq N/(N-2)$. Então $u \in BL_0(\Omega)$ e

$$\int_\Omega |\Delta u| \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |\Delta u_n|. \tag{19}$$

Pode-se ainda provar que o espaço $(BL_0(\Omega), \|\cdot\|_0)$ é um espaço de Banach.



Um problema sublinear 1−biharmônico

Assim como o espaço $BV(\Omega)$, na topologia da norma de $BL_0(\Omega)$ o conjunto das funções $C^\infty(\overline{\Omega}) \cap BL_0(\Omega)$ não constituem um conjunto denso. Porém, aqui também há uma topologia segundo a qual essa densidade de fato se verifica. Para isso necessitamos introduzir a seguinte noção de convergência.



Um problema sublinear 1−biharmônico

Assim como o espaço $BV(\Omega)$, na topologia da norma de $BL_0(\Omega)$ o conjunto das funções $C^\infty(\overline{\Omega}) \cap BL_0(\Omega)$ não constituem um conjunto denso. Porém, aqui também há uma topologia segundo a qual essa densidade de fato se verifica. Para isso necessitamos introduzir a seguinte noção de convergência.

Definição

Dizemos que uma sequência $(u_n) \subset BL_0(\Omega)$ converge estritamente para $u \in BL_0(\Omega)$ se

- $u_n \to u$ in $W_0^{1,1}(\Omega)$ quando $n \to +\infty$,
- $\displaystyle\int_\Omega |\Delta u_n| \to \int_\Omega |\Delta u|$ quando $n \to +\infty$.



Um problema sublinear 1−biharmônico

A seguir enunciamos a densidade de $C^\infty(\overline{\Omega}) \cap BL_0(\Omega)$ em $BL_0(\Omega)$ com respeito à noção de convergência introduzida acima.



Um problema sublinear 1−biharmônico

A seguir enunciamos a densidade de $C^\infty(\overline{\Omega}) \cap BL_0(\Omega)$ em $BL_0(\Omega)$ com respeito à noção de convergência introduzida acima.

Proposição 4.1.3

Para todo $u \in BL_0(\Omega)$ existe uma sequência $(u_n) \subset C^\infty(\overline{\Omega}) \cap BL_0(\Omega)$ tal que

$$u_n \to u \quad \text{in } W_0^{1,1}(\Omega) \text{ quando } n \to +\infty \tag{20}$$

e

$$\int_\Omega |\Delta u_n| dx \to \int_\Omega |\Delta u| \quad \text{quando } n \to +\infty. \tag{21}$$



Um problema sublinear 1−biharmônico

As imersões de Sobolev também valem para esse espaço.



Um problema sublinear 1−biharmônico

As imersões de Sobolev também valem para esse espaço.

Proposição 4.1.4

A imersão

$$BL_0(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

é contínua para todo $p \in [1, 1^*]$, onde $1^* := N/(N-1)$. Mais precisamente, existe uma constante $C := C(\Omega, p, N) > 0$ tal que

$$\|u\|_p \leq C \|u\|_0 \quad \text{para todo } u \in BL_0(\Omega).$$

Além disso, a imersão

$$BL_0(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

é compacta para todo $p \in [1, 1^*)$.



Um problema sublinear 1−biharmônico

No problema específico que vamos tratar, seria interessante que $u \mapsto \int_\Omega |\Delta u|$ definisse uma norma em $BL_0(\Omega)$ equivalente a $\|\cdot\|_0$. Note que pela Desigualdade de Poincaré em BV e pelos resultados em [2][Theorem 1.2 and Proposition 2.1] de Brézis e Ponce, podemos definir em $BL_0(\Omega)$ a seguinte norma



Um problema sublinear 1−biharmônico

No problema específico que vamos tratar, seria interessante que $u \mapsto \int_\Omega |\Delta u|$ definisse uma norma em $BL_0(\Omega)$ equivalente a $\|\cdot\|_0$. Note que pela Desigualdade de Poincaré em BV e pelos resultados em [2][Theorem 1.2 and Proposition 2.1] de Brézis e Ponce, podemos definir em $BL_0(\Omega)$ a seguinte norma

$$\|u\| = \int_\Omega |\Delta u| \quad \text{para todo } u \in BL_0(\Omega),$$

a qual é equivalente a $\|\cdot\|_0$.



Um problema sublinear 1−biharmônico

Seja $\Phi : BL_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\Phi(u) = \int_\Omega |\Delta u| - \int_\Omega F(x,u)\,dx \quad \text{para todo } u \in BL_0(\Omega).$$



Um problema sublinear 1−biharmônico

Seja $\Phi : BL_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\Phi(u) = \int_\Omega |\Delta u| - \int_\Omega F(x,u)\,dx \quad \text{para todo } u \in BL_0(\Omega).$$

Vamos introduzir ainda os funcionais $\Phi_0 : BL_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ e $\Phi_F : BL_0(\Omega) \to \mathbb{R}$ definidos por

$$\Phi_0(u) = \int_\Omega |\Delta u| \quad \text{para todo } u \in BL_0(\Omega)$$

e

$$\Phi_F(u) = \int_\Omega \lambda F(x,u)\,dx \quad \text{para todo } u \in BL_0(\Omega),$$

de forma que

$$\Phi(u) = \Phi_0(u) - \Phi_F(u) \quad \text{para todo } u \in BL_0(\Omega).$$



Um problema sublinear 1−biharmônico

Observe que o funcional Φ_0 é convexo e lipschitziano. Ainda, como mostrado por Anzellotti em [1], dado $u \in BL_0(\Omega)$, para todo $v \in BL_0(\Omega)$ tal que $(\Delta v)^s << (\Delta u)^s$, temos que

$$\Phi_0'(u)v = \int_\Omega \frac{(\Delta u)^a (\Delta v)^a}{|(\Delta u)^a|}\, dx + \int_\Omega \frac{\Delta u}{|\Delta u|}(x)\frac{\Delta v}{|\Delta v|}(x)|(\Delta v)^s|. \qquad (22)$$



Um problema sublinear $1-$biharmônico

Observe que o funcional Φ_0 é convexo e lipschitziano. Ainda, como mostrado por Anzellotti em [1], dado $u \in BL_0(\Omega)$, para todo $v \in BL_0(\Omega)$ tal que $(\Delta v)^s << (\Delta u)^s$, temos que

$$\Phi_0'(u)v = \int_\Omega \frac{(\Delta u)^a (\Delta v)^a}{|(\Delta u)^a|}\, dx + \int_\Omega \frac{\Delta u}{|\Delta u|}(x)\frac{\Delta v}{|\Delta v|}(x)|(\Delta v)^s|. \qquad (22)$$

Uma vez que estamos tratando de um funcional que se escreve como a diferença entre um convexo e lipschitziano e um $C^1(BL_0(\Omega), \mathbb{R})$, dizemos que $u \in BL_0(\Omega)$ é uma *solução de variação limitada* de (18) se $0 \in \partial\Phi(u)$, i.e., se $\Phi_F'(u) \in \partial\Phi_0(u)$ onde $\partial\Phi_0(u)$ denota o subdiferencial de Φ_0 em u.



Um problema sublinear 1−biharmônico

Devido à convexidade de Φ_0, isso pode ser expresso através de

$$\Phi_0(v) - \Phi_0(u) \geq \Phi_F'(u)(v-u) \quad \text{para todo} v \in BL_0(\Omega). \tag{23}$$



Um problema sublinear 1−biharmônico

Devido à convexidade de Φ_0, isso pode ser expresso através de

$$\Phi_0(v) - \Phi_0(u) \geq \Phi_F'(u)(v-u) \quad \text{para todo} v \in BL_0(\Omega). \tag{23}$$

Pode-se provar analogamente à seção anterior que

$$\begin{cases} \exists\, z^* \in W_0^{1,1}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega),\ |z^*|_\infty \leq 1,\ \Delta z^* \in L^N(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega u \Delta z^* dx = \int_\Omega |\Delta u|, \\ \Delta z^* = \lambda f(x,u), \quad \text{quase sempre em } \Omega. \end{cases} \tag{24}$$

é a versão precisa de (18).



Um problema sublinear 1−biharmônico

Para provar o Teorema 4.0.1, vamos provar primeiramente que o funcional Φ é coercivo em $BL_0(\Omega)$.



Um problema sublinear 1−biharmônico

Para provar o Teorema 4.0.1, vamos provar primeiramente que o funcional Φ é coercivo em $BL_0(\Omega)$. Por (f_2), pela Desigualdade de Hölder e pela Proposição 4.1.4 segue que

$$\Phi(u) \geq \|u\| - c_1\lambda \int_\Omega |u|^q \, dx - \lambda \int_\Omega c_2(x) \, dx$$



Um problema sublinear 1−biharmônico

Para provar o Teorema 4.0.1, vamos provar primeiramente que o funcional Φ é coercivo em $BL_0(\Omega)$. Por (f_2), pela Desigualdade de Hölder e pela Proposição 4.1.4 segue que

$$\begin{aligned}\Phi(u) &\geq \|u\| - c_1\lambda\int_\Omega |u|^q\,dx - \lambda\int_\Omega c_2(x)\,dx \\ &\geq \|u\| - C|u|_1^q - C\end{aligned}$$



Um problema sublinear 1−biharmônico

Para provar o Teorema 4.0.1, vamos provar primeiramente que o funcional Φ é coercivo em $BL_0(\Omega)$. Por (f_2), pela Desigualdade de Hölder e pela Proposição 4.1.4 segue que

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &\geq \|u\| - c_1\lambda \int_\Omega |u|^q \, dx - \lambda \int_\Omega c_2(x)\, dx \\
&\geq \|u\| - C|u|_1^q - C \\
&\geq \|u\| - C\|u\|^q - C,
\end{aligned}$$



Um problema sublinear 1−biharmônico

Para provar o Teorema 4.0.1, vamos provar primeiramente que o funcional Φ é coercivo em $BL_0(\Omega)$. Por (f_2), pela Desigualdade de Hölder e pela Proposição 4.1.4 segue que

$$\begin{aligned}\Phi(u) &\geq \|u\| - c_1\lambda\int_\Omega |u|^q\,dx - \lambda\int_\Omega c_2(x)\,dx\\ &\geq \|u\| - C|u|_1^q - C\\ &\geq \|u\| - C\|u\|^q - C,\end{aligned}$$

implicando que Φ é coercivo e também limitado inferiormente.



Um problema sublinear 1−biharmônico

Seja $(u_n) \subset BL_0(\Omega)$ uma sequência minimizante para Φ, isto é, $\Phi(u_n) \to \beta$, onde $\beta = \inf_{BL_0(\Omega)} \Phi$. A coercividade de Φ implica que (u_n) é limitado em $BL_0(\Omega)$. Então, pela Proposição 4.1.4, temos que, a menos de subsequência, existe $u \in L^1(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $L^1(\Omega)$. Pelo Lema 4.1.1, segue que $u \in BL_0(\Omega)$ e ainda que (19) vale.



Um problema sublinear 1−biharmônico

Seja $(u_n) \subset BL_0(\Omega)$ uma sequência minimizante para Φ, isto é, $\Phi(u_n) \to \beta$, onde $\beta = \inf_{BL_0(\Omega)} \Phi$. A coercividade de Φ implica que (u_n) é limitado em $BL_0(\Omega)$. Então, pela Proposição 4.1.4, temos que, a menos de subsequência, existe $u \in L^1(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $L^1(\Omega)$. Pelo Lema 4.1.1, segue que $u \in BL_0(\Omega)$ e ainda que (19) vale. Assim,

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \int_\Omega |\Delta u| - \lambda \int_\Omega F(x,u)dx \\ &\leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega |\Delta u_n| - \lim_{n\to+\infty} \lambda \int_\Omega F(x,u_n)dx \\ &= \beta, \end{aligned}$$

de onde segue que $\Phi(u) = \beta$ e então u é um minimizante global.



Um problema sublinear 1−biharmônico

Agora vamos mostrar que u é uma solução de variação limitada de (18).



Um problema sublinear 1−biharmônico

Agora vamos mostrar que u é uma solução de variação limitada de (18). Para todo $v \in BL_0(\Omega)$ e $t > 0$, note que pela convexidade de Φ_0, temos que

$$\begin{aligned} \Phi_0(u) - \Phi_F(u) &\leq \Phi_0((1-t)u + tv) - \Phi_F((1-t)u + tv) \\ &\leq (1-t)\Phi_0(u) + t\Phi_0(v) - \Phi_F((1-t)u + tv). \end{aligned}$$



Um problema sublinear 1−biharmônico

Agora vamos mostrar que u é uma solução de variação limitada de (18). Para todo $v \in BL_0(\Omega)$ e $t > 0$, note que pela convexidade de Φ_0, temos que

$$\begin{aligned} \Phi_0(u) - \Phi_F(u) &\leq \Phi_0((1-t)u + tv) - \Phi_F((1-t)u + tv) \\ &\leq (1-t)\Phi_0(u) + t\Phi_0(v) - \Phi_F((1-t)u + tv). \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \Phi_0(v) - \Phi_0(u) &\geq \frac{1}{t}\left(\Phi_F(t(v-u)+u) - \Phi_F(u)\right) \\ &\geq \int_0^1 \Phi_F'(u + st(v-u))ds(v-u). \end{aligned}$$



Um problema sublinear 1−biharmônico

Agora vamos mostrar que u é uma solução de variação limitada de (18). Para todo $v \in BL_0(\Omega)$ e $t > 0$, note que pela convexidade de Φ_0, temos que

$$\begin{aligned} \Phi_0(u) - \Phi_F(u) &\leq \Phi_0((1-t)u + tv) - \Phi_F((1-t)u + tv) \\ &\leq (1-t)\Phi_0(u) + t\Phi_0(v) - \Phi_F((1-t)u + tv). \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \Phi_0(v) - \Phi_0(u) &\geq \frac{1}{t}\left(\Phi_F(t(v-u)+u) - \Phi_F(u)\right) \\ &\geq \int_0^1 \Phi_F'(u + st(v-u))ds(v-u). \end{aligned}$$

Fazendo $t \to 0^+$ temos que u satisfaz (23).



Um problema sublinear 1−biharmônico

Somente nos resta provar que u é uma solução não-trivial de (18). Esse é o único ponto onde a condição (f_3) será utilizada.



Um problema sublinear 1−biharmônico

Somente nos resta provar que u é uma solução não-trivial de (18). Esse é o único ponto onde a condição (f_3) será utilizada. Vamos considerar $x_0 \subset \Omega$ e $r, \delta > 0$ tais que $B_r(x_0) \subset \overline{B_{r+\delta}(x_0)} \subset \Omega$ e seja $w : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$w(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \Omega \backslash B_{r+\delta}(x_0), \\ t_0 & \text{se } x \in B_r(x_0), \\ \dfrac{t_0}{\delta}(r + \delta - |x - x_0|) & \text{se } x \in B_{r+\delta}(x_0) \backslash B_r(x_0). \end{cases}$$



Um problema sublinear 1−biharmônico

Somente nos resta provar que u é uma solução não-trivial de (18). Esse é o único ponto onde a condição (f_3) será utilizada. Vamos considerar $x_0 \subset \Omega$ e $r, \delta > 0$ tais que $B_r(x_0) \subset \overline{B_{r+\delta}(x_0)} \subset \Omega$ e seja $w : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por

$$w(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \Omega \backslash B_{r+\delta}(x_0), \\ t_0 & \text{se } x \in B_r(x_0), \\ \dfrac{t_0}{\delta}(r + \delta - |x - x_0|) & \text{se } x \in B_{r+\delta}(x_0) \backslash B_r(x_0). \end{cases}$$

Observe que $w \in W_0^{1,1}(\Omega)$ e, no sentido das distribuições

$$\begin{aligned} \Delta w &= -\frac{t_0}{\delta}\frac{(N-1)}{|x - x_0|}\chi_{B_{r+\delta}(x_0)\backslash B_r(x_0)} \\ &\quad + \frac{t_0}{\delta}\,\mathcal{H}_{N-1}|_{\partial B_{r+\delta}(x_0)} - \frac{t_0}{\delta}\,\mathcal{H}_{N-1}|_{\partial B_r(x_0)} \in \mathcal{M}(\Omega). \end{aligned}$$



Um problema sublinear 1−biharmônico

Então,

$$\begin{aligned}\Phi(w) &= \int_\Omega |\Delta w| - \lambda \int_\Omega F(x,w)\,dx \\ &\leq \int_\Omega |\Delta w| - \lambda \int_{B_r(x_0)} F(x,t_0)\,dx,\end{aligned}$$

o que, levando-se em conta (f_3), é negativo para $\lambda \geq \lambda^*$ onde λ^* é grande o suficiente.



Um problema sublinear 1−biharmônico

Então,

$$\begin{aligned}\Phi(w) &= \int_\Omega |\Delta w| - \lambda \int_\Omega F(x,w)\,dx \\ &\leq \int_\Omega |\Delta w| - \lambda \int_{B_r(x_0)} F(x,t_0)\,dx,\end{aligned}$$

o que, levando-se em conta (f_3), é negativo para $\lambda \geq \lambda^*$ onde λ^* é grande o suficiente. Logo segue que $\beta = \inf_{BL_0(\Omega)} \Phi < 0$ e que u é uma solução não-trivial de (18).



Table of Contents

1. Métodos variacionais em $BV(\Omega)$
2. Um problema superlinear envolvendo o operador 1−Laplaciano
   - O funcional energia
   - Propriedades de diferenciabilidade de Φ_0
   - A equação de Euler-Lagrange
   - Demonstração do Teorema 2.0.1
3. Um problema sublinear envolvendo o operador 1−biharmônico
   - O espaço $BL_0(\Omega)$
   - O funcional energia do caso 1−biharmônico
   - Demonstração do Teorema 4.0.1
4. Referências bibliográficas



Bibliografia I

- Anzellotti, G. *The Euler equation for functionals with linear growth*, Trans. Amer. Math. Soc., 290, No 2, 483 - 501, (1985).
- H. Brezis and A. Ponce, *Kato's inequality up to the boundary*, Commun. Contemp. Math. 10, No. 6, 1217 - 1241, (2008).
- K. Chang, *Variational methods for non-differentiable functionals and their applications to partial differential equations*, J. Math. Anal. Appl., 80, 102 - 129 (1981).
- F. Clarke, *Generalized gradients and applications*, Trans. Amer. Math. Soc., 205, 247 - 262 (1975).
- G. M. Figueiredo and M. T. O. Pimenta, *Nehari method for locally Lipschitz functionals with examples in problems in the space of bounded variation functions*, Nonlinear Differ. Equ. Appl., 25, No. 6, 18 (2018).



Bibliografia II

- G.M. Figueiredo and M.T.O. Pimenta, *Strauss' and Lions' type results in $BV(\mathbb{R}^N)$ with an application to $1-$Laplacian problem*, Milan J. Math, 86, No. 1, 15 - 30 (2018).
- Kawohl, B., Schuricht, F. *Dirichlet problems for the $1-$Laplace operator, including the eigenvalue problem*, Commun. Contemp. Math., 9, 515 - 543, (2007).
- E. Parini, B. Ruf and C. Tarsi, *The eigenvalue problem for the $1-$biharmonic problem*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. 13, No. 5, 307 - 322, (2014).
- M. Squassina, *On Palais' principle for non-smooth functionals*, Nonlinear Anal., 74, 3786 - 3804 (2011).
- A. Szulkin and T. Weth, *The method of Nehari manifold*, Handbook of nonconvex analysis and applications, 597 - 632, Int. Press, Somerville, MA, (2010).

