Avanços no estudo de problemas elípticos com o operador 1-laplaciano

Marcos T. O. Pimenta
marcos.pimenta@unesp.br

Unesp - Faculdade de Ciências e Tecnologia,
Presidente Prudente, São Paulo

18 de março de 2021

* Financiado por FAPESP e CNPq



Apresentação

1. Aproximação por problemas envolvendo o $p-$laplaciano
2. *Pairing theory* de Anzellotti
3. Demonstração do Teorema 5.0.1
4. Referências bibliográficas



Table of Contents

1. Aproximação por problemas envolvendo o $p-$laplaciano
2. *Pairing theory* de Anzellotti
3. Demonstração do Teorema 5.0.1
4. Referências bibliográficas



Aproximação por problemas envolvendo o $p-$laplaciano

Nas aulas anteriores, estudamos uma abordagem de problemas envolvendo o operador $1-$laplaciano, baseada na análise do funcional energia definido em BV. Nessa videoaula, começaremos a estudar uma outra abordagem, que consiste na aproximação do problema original, através de problemas envolvendo operador $p-$laplaciano e, posteriormente, fazemos $p \to 1^+$.



Aproximação por problemas envolvendo o $p-$laplaciano

Nas aulas anteriores, estudamos uma abordagem de problemas envolvendo o operador $1-$laplaciano, baseada na análise do funcional energia definido em BV. Nessa videoaula, começaremos a estudar uma outra abordagem, que consiste na aproximação do problema original, através de problemas envolvendo operador $p-$laplaciano e, posteriormente, fazemos $p \to 1^+$.

Exemplificaremos essa abordagem através, primeiramente, dos resultados do trabalho [7], que trata da existência de soluções nodais para um problema elíptico quasilinear e subscrítico.



Aproximação por problemas envolvendo o $p-$laplaciano

Mais especificamente, consideremos o problema

$$\begin{cases} -\text{div}\left(\dfrac{Du}{|Du|}\right) &= f(x,u) \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde $N \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto, limitado e com fronteira Lipschitz. A não-linearidade f, por outro lado, satisfaz as seguintes hipóteses:



Aproximação por problemas envolvendo o $p-$laplaciano

(f_1) $f \in C^0(\mathbb{R})$;

(f_2) existe $\alpha > 0$ tal que $\limsup_{|s|\to 0} \dfrac{f(s)}{|s|^\alpha} < +\infty$;

(f_3) existem constantes $c_1, c_2 > 0$ e $q \in (1, 1^*)$ tais que

$$|f(s)| \leq c_1 + c_2|s|^{q-1}, \quad s \in \mathbb{R},$$

onde $1^* = N/(N-1)$;

(f_4) existe $\kappa > 1$ tal que

$$0 < \kappa F(s) \leq f(s)s,$$

para todo $s \neq 0$;

(f_5) f é crescente para $s \in \mathbb{R}$.



Aproximação por problemas envolvendo o $p-$laplaciano

O principal resultado desses capítulo é o seguinte teorema.

Teorema 5.0.1

Suponha que f satisfaça $(f_1)-(f_5)$. Então existe $u_0 \in BV(\Omega)$, solução nodal de variação limitada de (1). Isto é, existem $u_0 \in BV(\Omega)$ e $\mathbf{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tais que $u_0^\pm \neq 0$, $\|\mathbf{z}\|_\infty \leq 1$ e

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \mathbf{z} &= f(u_0) \text{ q.s. em } \Omega, \\ (\mathbf{z}, Du_0) &= |Du_0| \text{ em } \mathcal{M}(\Omega), \\ [\mathbf{z}, \nu] &\in sign(-u_0) \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$



Table of Contents

1. Aproximação por problemas envolvendo o $p-$laplaciano
2. *Pairing theory* de Anzellotti
3. Demonstração do Teorema 5.0.1
4. Referências bibliográficas



Pairing theory de Anzellotti

Em vários argumentos utilizados aqui, necessitaremos de uma espécie de Fórmula de Green para expressões como $w\,\mathrm{div}(\mathbf{z})$, onde $\mathbf{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $\mathrm{div}(\mathbf{z}) \in L^N(\Omega)$ e $w \in BV(\Omega)$. Para isso, precisamos lidar com o produto entre $\mathbf{z}$ e Dw, o qual denotamos por $(\mathbf{z}, Dw)$. Isso pode ser feito através da *pairing theory* , desenvolvida por Anzellotti em [5]



Pairing theory de Anzellotti

Denotemos

$$X_N(\Omega) = \left\{ \mathbf{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N);\ \mathrm{div}(\mathbf{z}) \in L^N(\Omega) \right\}.$$



Pairing theory de Anzellotti

Denotemos

$$X_N(\Omega) = \left\{ \mathbf{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N);\ \mathrm{div}(\mathbf{z}) \in L^N(\Omega) \right\}.$$

Para $\mathbf{z} \in X_N(\Omega)$ e $w \in BV(\Omega)$, definimos a distribuição $(\mathbf{z}, Dw) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ por

$$\langle (\mathbf{z}, Dw), \varphi \rangle := -\int_\Omega w\varphi\, \mathrm{div}(\mathbf{z}) dx - \int_\Omega w\mathbf{z} \cdot \nabla\varphi dx,$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.



Pairing theory de Anzellotti

Denotemos

$$X_N(\Omega) = \left\{ \mathbf{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N);\ \mathrm{div}(\mathbf{z}) \in L^N(\Omega) \right\}.$$

Para $\mathbf{z} \in X_N(\Omega)$ e $w \in BV(\Omega)$, definimos a distribuição $(\mathbf{z}, Dw) \in \mathcal{D}'(\Omega)$ por

$$\langle (\mathbf{z}, Dw), \varphi \rangle := -\int_\Omega w\varphi\, \mathrm{div}(\mathbf{z}) dx - \int_\Omega w\mathbf{z} \cdot \nabla\varphi dx,$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Pode ser provado que de fato a distribuição $(\mathbf{z}, Dw)$ é gerada por uma medida de Radon tal que

$$\left| \int_B (\mathbf{z}, Dw) \right| \leq |\mathbf{z}|_\infty \int_B |Dw|, \tag{2}$$

para todo boreliano $B \subset \Omega$.



Pairing theory de Anzellotti

Para definir um análogo da Fórmula de Green, é necessário descrever o traço do campo $\mathbf{z}$ na direção normal exterior à $\partial\Omega$.



Pairing theory de Anzellotti

Para definir um análogo da Fórmula de Green, é necessário descrever o traço do campo $\mathbf{z}$ na direção normal exterior à $\partial\Omega$. De fato, pode-se provar que existe um operador traço $[\cdot, \nu] : X_N(\Omega) \to L^\infty(\partial\Omega)$ tal que

$$| [\mathbf{z}, \nu] |_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq |\mathbf{z}|_\infty \tag{3}$$

e, se $\mathbf{z} \in C^1(\overline{\Omega}_\delta, \mathbb{R}^N)$,

$$[\mathbf{z}, \nu](x) = \mathbf{z}(x) \cdot \nu(x) \quad \text{sobre } \Omega_\delta,$$

onde Ω_δ denota uma δ-vizinhança de $\partial\Omega$.



Pairing theory de Anzellotti

Levando em conta essas definições, podemos provar a seguinte versão da Fórmula de Green, onde $\mathbf{z} \in X_N(\Omega)$ e $w \in BV(\Omega)$,

$$\int_\Omega w \,\mathrm{div}(\mathbf{z}) dx + \int_\Omega (\mathbf{z}, Dw) = \int_{\partial\Omega} [\mathbf{z}, \nu] w d\mathcal{H}^{N-1}. \tag{4}$$



Table of Contents

1. Aproximação por problemas envolvendo o $p-$laplaciano
2. *Pairing theory* de Anzellotti
3. Demonstração do Teorema 5.0.1
4. Referências bibliográficas



Problema como o $p-$laplaciano

Para $p > 1$, consideremos o problema

$$\begin{cases} -\text{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) &= f(u) \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$



Problema como o $p-$laplaciano

Para $p > 1$, consideremos o problema

$$\begin{cases} -\text{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) &= f(u) \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

cuja forma fraca é dada pela seguinte identidade integral

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f(u) v dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{6}$$



Problema como o $p-$laplaciano

Sabe-se que soluções fracas de (5) são pontos críticos do funcional energia $I_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por

$$I_p(u) := \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \int_\Omega F(u)dx,$$

o qual está bem definido para todo $1 < p < N$, uma vez que, por (f_3),

$$\int_\Omega F(u)dx \leq c_1|u|_1 + c_3|u|_q^q,$$

onde $q < N/(N-1) < pN/(N-p)$.



Problema como o $p-$laplaciano

Sabe-se que soluções fracas de (5) são pontos críticos do funcional energia $I_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por

$$I_p(u) := \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \int_\Omega F(u)dx,$$

o qual está bem definido para todo $1 < p < N$, uma vez que, por (f_3),

$$\int_\Omega F(u)dx \leq c_1|u|_1 + c_3|u|_q^q,$$

onde $q < N/(N-1) < pN/(N-p)$.
Consideremos o funcional $\Phi_p : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\Phi_p(u) := I_p(u) + \frac{p-1}{p}|\Omega|$$



Problema como o $p-$laplaciano

Afirmação

Para cada u tal que $\Phi_p(u)$ está bem definido, $(\Phi_p(u))_{p>1}$ é não-decrescente.



Problema como o $p-$laplaciano

Afirmação

Para cada u tal que $\Phi_p(u)$ está bem definido, $(\Phi_p(u))_{p>1}$ é não-decrescente.

De fato, se $1 < p_1 \leq p_2 < N$, então pela Desigualdade de Young com os expoentes p_2/p_1 e $p_2/(p_2 - p_1)$, temos que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p_1} dx \leq \frac{p_1}{p_2} \int_\Omega |\nabla u|^{p_2} dx + \frac{p_2 - p_1}{p_2} |\Omega|. \tag{7}$$

Assim, segue que



Problema como o $p-$laplaciano

$$\begin{aligned}
\Phi_{p_1}(u) &= \frac{1}{p_1}\int_\Omega |\nabla u|^{p_1} dx + \frac{p_1-1}{p_1}|\Omega| - \int_\Omega F(u)dx \\
&\leq \frac{1}{p_1}\left(\frac{p_1}{p_2}\int_\Omega |\nabla u|^{p_2} dx + \frac{p_2-p_1}{p_2}|\Omega|\right) + \frac{p_1-1}{p_1}|\Omega| - \int_\Omega F(u)dx \\
&= \Phi_{p_2}(u). \qquad (8)
\end{aligned}$$



Problema como o $p-$laplaciano

$$\begin{aligned}\Phi_{p_1}(u) &= \frac{1}{p_1}\int_\Omega |\nabla u|^{p_1}dx + \frac{p_1-1}{p_1}|\Omega| - \int_\Omega F(u)dx \\ &\leq \frac{1}{p_1}\left(\frac{p_1}{p_2}\int_\Omega |\nabla u|^{p_2}dx + \frac{p_2-p_1}{p_2}|\Omega|\right) + \frac{p_1-1}{p_1}|\Omega| - \int_\Omega F(u)dx \\ &= \Phi_{p_2}(u). \end{aligned} \tag{8}$$

Como Φ_p e I_p diferem apenas por uma constante, podemos estudar (5) de um ponto de vista variacional, por meio de ambos os funcionais I_p ou Φ_p.



Problema como o $p-$laplaciano

Por (f_2), para $p > 1$ suficientemente próximo de 1, a função f satisfaz

$$\limsup_{s \to 0} \frac{f(s)}{|s|^p} = 0.$$



Problema como o $p-$laplaciano

Por (f_2), para $p > 1$ suficientemente próximo de 1, a função f satisfaz

$$\limsup_{s \to 0} \frac{f(s)}{|s|^p} = 0.$$

Então, para cada tal p, a variedade de Nehari associada a (5) está bem definida e é dada por

$$\mathcal{N}_p^{\pm} = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega); u^{\pm} \neq 0 \text{ e } \Phi_p'(u^{\pm})u^{\pm} = 0\}.$$



Problema como o $p-$laplaciano

Por (f_2), para $p > 1$ suficientemente próximo de 1, a função f satisfaz

$$\limsup_{s\to 0} \frac{f(s)}{|s|^p} = 0.$$

Então, para cada tal p, a variedade de Nehari associada a (5) está bem definida e é dada por

$$\mathcal{N}_p^{\pm} = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega); u^{\pm} \neq 0 \text{ e } \Phi_p'(u^{\pm})u^{\pm} = 0\}.$$

Pode-se provar que existe $u_p \in \mathcal{N}_p^{\pm}$ (ver por exemplo [6]) tal que

$$\Phi_p(u_p) = \min_{v\in\mathcal{N}_p^{\pm}} \Phi_p(v) \tag{9}$$

e u_p é uma solução nodal de (5), a qual possui a menor energia entre todas aquelas que mudam de sinal.



Problema como o $p-$laplaciano

Pode-se provar ainda que

$$\Phi_p(u_p) = \max_{t,s>0} \Phi_p(tu_p^+ + su_p^-). \tag{10}$$



Problema como o $p-$laplaciano

Pode-se provar ainda que

$$\Phi_p(u_p) = \max_{t,s>0} \Phi_p(tu_p^+ + su_p^-). \tag{10}$$

Além disso, para cada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u^\pm \neq 0$, existem $t, s > 0$ tais que

$$tu^+ + su^- \in \mathcal{N}_p^\pm.$$



Problema como o $p-$laplaciano

Lema 5.2.1

A família $(\Phi_p(u_p))_p$ é não-decrescente para $p \in (1, N)$.



Problema como o $p-$laplaciano

Lema 5.2.1

A família $(\Phi_p(u_p))_p$ é não-decrescente para $p \in (1, N)$.

Demonstração

Seja $1 < p_1 \leq p_2 < N$, $u_{p_1} \in W_0^{1,p_1}(\Omega)$ e $u_{p_2} \in W_0^{1,p_2}(\Omega)$ satisfazendo (9).



Problema como o $p-$laplaciano

Lema 5.2.1

A família $(\Phi_p(u_p))_p$ é não-decrescente para $p \in (1, N)$.

Demonstração

Seja $1 < p_1 \leq p_2 < N$, $u_{p_1} \in W_0^{1,p_1}(\Omega)$ e $u_{p_2} \in W_0^{1,p_2}(\Omega)$ satisfazendo (9). Como $p_2 \geq p_1$, então $W_0^{1,p_2}(\Omega) \subset W_0^{1,p_1}(\Omega)$, de forma que, como $u_{p_2}^{\pm} \neq 0$, então existem $t, s > 0$ tais que

$$tu_{p_2}^{+} + su_{p_2}^{-} \in \mathcal{N}_{p_1}^{\pm}. \tag{11}$$



Problema como o $p-$laplaciano

Então, de (8), (9), (10) e (11), segue que

$$\Phi_{p_2}(u_{p_2}) \geq \Phi_{p_2}(tu_{p_2}^{+} + su_{p_2}^{-})$$



Problema como o $p-$laplaciano

Então, de (8), (9), (10) e (11), segue que

$$\begin{aligned} \Phi_{p_2}(u_{p_2}) &\geq \Phi_{p_2}(tu_{p_2}^+ + su_{p_2}^-) \\ &\geq \Phi_{p_1}(tu_{p_2}^+ + su_{p_2}^-) \end{aligned}$$



Problema como o $p-$laplaciano

Então, de (8), (9), (10) e (11), segue que

$$\begin{aligned}\Phi_{p_2}(u_{p_2}) &\geq \Phi_{p_2}(tu_{p_2}^{+} + su_{p_2}^{-}) \\ &\geq \Phi_{p_1}(tu_{p_2}^{+} + su_{p_2}^{-}) \\ &\geq \Phi_{p_1}(u_{p_1}).\end{aligned}$$



Problema como o $p-$laplaciano

Lemma 5.2.2

Para $\overline{p} \in (1, N)$, a família $(u_p)_{1<p<\overline{p}}$ é limitada em $BV(\Omega)$.



Problema como o $p-$laplaciano

Lemma 5.2.2

Para $\overline{p} \in (1, N)$, a família $(u_p)_{1<p<\overline{p}}$ é limitada em $BV(\Omega)$.

Demonstração

Pelo Lema 5.2.1, segue que, para $\overline{p} \in (1, N)$ fixado

$$\Phi_p(u_p) \leq \Phi_{\overline{p}}(u_{\overline{p}}) =: C, \tag{12}$$

para todo $p \in (1, \overline{p})$. Assim, existe $C > 0$ tal que

$$\int_\Omega |\nabla u_p|^p dx \leq C, \quad \forall p \in (1, \overline{p}). \tag{13}$$



Problema como o $p-$laplaciano

De fato, por (f_4) e (12), note que

$$C \geq \Phi_p(u_p)$$



Problema como o $p-$laplaciano

De fato, por (f_4) e (12), note que

$$\begin{aligned} C &\geq \Phi_p(u_p) \\ &= \Phi_p(u_p) - \frac{1}{\kappa}\Phi_p'(u_p)u_p \end{aligned}$$



Problema como o $p-$laplaciano

De fato, por (f_4) e (12), note que

$$\begin{aligned} C &\geq \Phi_p(u_p) \\ &= \Phi_p(u_p) - \frac{1}{\kappa}\Phi_p'(u_p)u_p \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\kappa}\right)\int_\Omega |\nabla u_p|^p dx + \int_\Omega \left(\frac{1}{\kappa} f(u_p)u_p - F(u_p)\right) dx \end{aligned}$$



Problema como o $p-$laplaciano

De fato, por (f_4) e (12), note que

$$\begin{aligned} C &\geq \Phi_p(u_p) \\ &= \Phi_p(u_p) - \frac{1}{\kappa}\Phi_p'(u_p)u_p \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\kappa}\right)\int_\Omega |\nabla u_p|^p dx + \int_\Omega \left(\frac{1}{\kappa} f(u_p)u_p - F(u_p)\right) dx \\ &\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\kappa}\right)\int_\Omega |\nabla u_p|^p dx \end{aligned}$$



Problema como o $p-$laplaciano

De fato, por (f_4) e (12), note que

$$\begin{aligned} C &\geq \Phi_p(u_p) \\ &= \Phi_p(u_p) - \frac{1}{\kappa}\Phi_p'(u_p)u_p \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\kappa}\right)\int_\Omega |\nabla u_p|^p dx + \int_\Omega \left(\frac{1}{\kappa} f(u_p)u_p - F(u_p)\right) dx \\ &\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\kappa}\right)\int_\Omega |\nabla u_p|^p dx \\ &\geq \left(\frac{1}{\overline{p}} - \frac{1}{\kappa}\right)\int_\Omega |\nabla u_p|^p dx. \end{aligned} \tag{14}$$



Problema como o $p-$laplaciano

Assim, pela desigualdade de Young e (14),



Problema como o $p-$laplaciano

Assim, pela desigualdade de Young e (14),

$$\|u_p\| = \int_\Omega |\nabla u_p| dx$$



Problema como o $p-$laplaciano

Assim, pela desigualdade de Young e (14),

$$\begin{aligned} \|u_p\| &= \int_\Omega |\nabla u_p| dx \\ &\leq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_p|^p dx + \frac{p-1}{p}|\Omega| \end{aligned}$$



Problema como o $p-$laplaciano

Assim, pela desigualdade de Young e (14),

$$\begin{aligned} \|u_p\| &= \int_\Omega |\nabla u_p| dx \\ &\leq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_p|^p dx + \frac{p-1}{p}|\Omega| \\ &\leq C_1. \end{aligned}$$



Problema como o $p-$laplaciano

Do último resultado e das imersões compactas de Sobolev, temos que existe $u_0 \in BV(\Omega)$ tal que

$$u_p \to u_0, \quad \text{em } L^r(\Omega), \text{ para todo } 1 \leq r < 1^*, \tag{15}$$

e

$$u_p \to u_0, \quad \text{q.s. em } \Omega, \tag{16}$$

quando $p \to 1^+$.



Problema como o $p-$laplaciano

Além disso, o Lema 5.2.2 também implica que (ver [2][Proposition 3]) existe $\mathbf{z} \in L^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, tal que $|\mathbf{z}|_{\infty} \leq 1$ e

$$|\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p \rightharpoonup \mathbf{z}, \tag{17}$$

em $L^r(\Omega, \mathbb{R}^N)$, quando $p \to 1^+$, para todo $1 \leq r < \infty$.



Problema como o $p-$laplaciano

Além disso, o Lema 5.2.2 também implica que (ver [2][Proposition 3]) existe $\mathbf{z} \in L^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, tal que $|\mathbf{z}|_{\infty} \leq 1$ e

$$|\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p \rightharpoonup \mathbf{z}, \tag{17}$$

em $L^r(\Omega, \mathbb{R}^N)$, quando $p \to 1^+$, para todo $1 \leq r < \infty$. Em particular

$$|\nabla u_p|^{p-2}\nabla u_p \to \operatorname{div} \mathbf{z} \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega) \tag{18}$$

quando $p \to 1^+$, o que segue considerando $\nabla\varphi$ como função teste em (17), onde $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.



Problema como o $p-$laplaciano

Note que, de (5), (15), (18) e aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$-\operatorname{div} \mathbf{z} = f(u_0), \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{19}$$



Problema como o $p-$laplaciano

Lemma 5.2.3

A função u_0 e o campo vetorial $\mathbf{z}$ satisfazem a seguinte igualdade no sentido de medidas de Radon em Ω,

$$(\mathbf{z}, Du_0) = |Du_0|.$$



Problema como o $p-$laplaciano

Lemma 5.2.4

A função u_0 satisfaz $[\mathbf{z}, \nu] \in \text{sign}(-u_0)$ sobre $\partial\Omega$.



Problema como o $p-$laplaciano

Até agora, de (19) e pelos Lemas 5.2.3 e 5.2.4, encontramos $u_0 \in BV(\Omega)$, para o qual existe $\mathbf{z} \in X_N(\Omega)$ tal que $|\mathbf{z}|_\infty \leq 1$ e

$$\begin{cases} -\text{div}\,(\mathbf{z}) &= f(u_0) \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega), \\ (\mathbf{z}, Du_0) &= |Du_0| \text{ em } \mathcal{M}(\Omega), \\ [\mathbf{z}, \nu] &\in sign(-u_0) \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{20}$$



Problema como o $p-$laplaciano

Resta então demonstrar que $u_0 \neq 0$.



Problema como o $p-$laplaciano

Resta então demonstrar que $u_0 \neq 0$. Para isso, devemos introduzir o funcional energia $\Phi : BV(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\Phi(u) = \|u\| - \int_\Omega F(u)dx.$$



Problema como o $p-$laplaciano

Resta então demonstrar que $u_0 \neq 0$. Para isso, devemos introduzir o funcional energia $\Phi : BV(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\Phi(u) = \|u\| - \int_\Omega F(u)dx.$$

Primeiramente, note que pela desigualdade de Young, $\Phi(u) \leq \Phi_p(u)$ para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.



Problema como o $p-$laplaciano

Resta então demonstrar que $u_0 \neq 0$. Para isso, devemos introduzir o funcional energia $\Phi : BV(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\Phi(u) = \|u\| - \int_\Omega F(u)dx.$$

Primeiramente, note que pela desigualdade de Young, $\Phi(u) \leq \Phi_p(u)$ para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Além disso,

$$\lim_{p \to 1^+} \Phi_p(u_p) = \Phi(u_0). \tag{21}$$

De fato, como u_0 satisfaz (20), note que, quando $p \to 1^+$,



Problema como o $p-$laplaciano

$$\|u_0\| = \int_\Omega |Du_0| + \int_{\partial\Omega} |u_0| d\mathcal{H}^{N-1}$$



Problema como o $p-$laplaciano

$$\begin{aligned} \|u_0\| &= \int_\Omega |Du_0| + \int_{\partial\Omega} |u_0| d\mathcal{H}^{N-1} \\ &= \int_\Omega (\mathbf{z}, Du_0) - \int_{\partial\Omega} u_0 \left[\mathbf{z}, \nu\right] d\mathcal{H}^{N-1} \end{aligned}$$



Problema como o $p-$laplaciano

$$\begin{aligned} \|u_0\| &= \int_\Omega |Du_0| + \int_{\partial\Omega} |u_0| d\mathcal{H}^{N-1} \\ &= \int_\Omega (\mathbf{z}, Du_0) - \int_{\partial\Omega} u_0 \, [\mathbf{z}, \nu] \, d\mathcal{H}^{N-1} \\ &= -\int_\Omega u_0 \, \mathrm{div}\mathbf{z} \, dx \end{aligned}$$



Problema como o $p-$laplaciano

$$\begin{aligned}
\|u_0\| &= \int_\Omega |Du_0| + \int_{\partial\Omega} |u_0| d\mathcal{H}^{N-1} \\
&= \int_\Omega (\mathbf{z}, Du_0) - \int_{\partial\Omega} u_0 \, [\mathbf{z}, \nu] \, d\mathcal{H}^{N-1} \\
&= -\int_\Omega u_0 \, \mathrm{div}\mathbf{z} \, dx \\
&= \int_\Omega f(u_0) u_0 \, dx
\end{aligned}$$



Problema como o $p-$laplaciano

$$\begin{aligned}
\|u_0\| &= \int_\Omega |Du_0| + \int_{\partial\Omega} |u_0| d\mathcal{H}^{N-1} \\
&= \int_\Omega (\mathbf{z}, Du_0) - \int_{\partial\Omega} u_0 \, [\mathbf{z}, \nu] \, d\mathcal{H}^{N-1} \\
&= -\int_\Omega u_0 \, \mathrm{div}\mathbf{z} \, dx \\
&= \int_\Omega f(u_0) u_0 dx \\
&= \frac{1}{p} \int_\Omega f(u_p) u_p dx + o(1)
\end{aligned}$$



Problema como o $p-$laplaciano

$$
\begin{aligned}
\|u_0\| &= \int_\Omega |Du_0| + \int_{\partial\Omega} |u_0| d\mathcal{H}^{N-1} \\
&= \int_\Omega (\mathbf{z}, Du_0) - \int_{\partial\Omega} u_0 \, [\mathbf{z}, \nu] \, d\mathcal{H}^{N-1} \\
&= -\int_\Omega u_0 \, \mathrm{div}\mathbf{z} \, dx \\
&= \int_\Omega f(u_0) u_0 dx \\
&= \frac{1}{p} \int_\Omega f(u_p) u_p dx + o(1) \\
&= \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u_p|^p dx + o(1). \qquad (22)
\end{aligned}
$$



Problema como o $p-$laplaciano

Além disso, por (f_3), (15) e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, quando $p \to 1^+$,

$$\int_\Omega F(u_0)dx = \int_\Omega F(u_p)dx + o(1). \tag{23}$$

Assim, (22) e (23) implicam em (21).



Problema como o $p-$laplaciano

Além disso, por (f_3), (15) e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, quando $p \to 1^+$,

$$\int_\Omega F(u_0)dx = \int_\Omega F(u_p)dx + o(1). \tag{23}$$

Assim, (22) e (23) implicam em (21).

Note que, por $(f_2)'$ e (f_3), para todo $\epsilon > 0$, existe uma constante positiva $C_\epsilon > 0$ tal que

$$|f(s)s| \leq \epsilon|s| + C_\epsilon|s|^q, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$



Problema como o $p-$laplaciano

Além disso, por (f_3), (15) e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, quando $p \to 1^+$,

$$\int_\Omega F(u_0)dx = \int_\Omega F(u_p)dx + o(1). \tag{23}$$

Assim, (22) e (23) implicam em (21).

Note que, por $(f_2)'$ e (f_3), para todo $\epsilon > 0$, existe uma constante positiva $C_\epsilon > 0$ tal que

$$|f(s)s| \leq \epsilon|s| + C_\epsilon|s|^q, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Então,

$$\Phi(u) \quad \geq \quad (1-\epsilon)\|u\| - C\|u\|^q.$$



Problema como o $p-$laplaciano

Consideremos $\epsilon > 0$ tal que $1 - \epsilon > 1/2$. Então, se $\|u\| \leq \rho$, onde $0 < \rho < \left(\dfrac{(1-\epsilon) - 1/2}{C_\epsilon} \right)^{\frac{1}{q-1}}$, segue que

$$\Phi(u) \geq \frac{\|u\|}{2}. \tag{24}$$



Problema como o $p-$laplaciano

Consideremos $\epsilon > 0$ tal que $1 - \epsilon > 1/2$. Então, se $\|u\| \leq \rho$, onde $0 < \rho < \left(\dfrac{(1-\epsilon) - 1/2}{C_\epsilon} \right)^{\frac{1}{q-1}}$, segue que

$$\Phi(u) \geq \frac{\|u\|}{2}. \tag{24}$$

Então, como o fato de u_p pertencer ao conjunto de Nehari nodal $\mathcal{N}_p^{\pm}$ implica que $u_p^{\pm} \in \mathcal{N}_p$, segue que $s = 1$ é o ponto de máximo da função $s \mapsto \Phi_p(s u_p^{\pm})$. Assim, para todo $p \in (1, \overline{p})$,

$$\begin{aligned} \Phi_p(u_p^{\pm}) &\geq \Phi_p\left(\frac{\rho u_p^{\pm}}{\|u_p^{\pm}\|} \right) && (25) \\ &\geq \Phi\left(\frac{\rho u_p^{\pm}}{\|u_p^{\pm}\|} \right) && (26) \\ &\geq \frac{\rho}{2}, && (27) \end{aligned}$$



Problema como o $p-$laplaciano

onde usamos (24) e ainda o fato de que $u_p \in W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow BV(\Omega)$.



Problema como o $p-$laplaciano

onde usamos (24) e ainda o fato de que $u_p \in W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow BV(\Omega)$. Assim,

$$\frac{\rho}{2} \leq \Phi_p(u_p^{\pm}) = \int_\Omega \left(\frac{1}{p} f(u_p^{\pm}) u_p^{\pm} - F(u_p^{\pm}) \right) dx \tag{28}$$

para todo $p \in (1, \overline{p})$. Dessa forma, se $u_p^{\pm} \to 0$ in $BV(\Omega)$, então (f_3) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue implicam que (28) não valeria. Assim, $u_0^{\pm} \neq 0$. Isso finaliza a demonstração do Teorema 5.0.1.



Table of Contents

1. Aproximação por problemas envolvendo o $p-$laplaciano
2. *Pairing theory* de Anzellotti
3. Demonstração do Teorema 5.0.1
4. Referências bibliográficas



Bibliografia I

- F. Andreu, C. Ballester, V. Caselles and J. M. Mazón, *The Dirichlet problem for the total variation flow*, J. Functional Anal., 180, No. 2, 347 - 403 (2001).
- F. Andreu, C. Ballester, V. Caselles and J. M. Mazón, *Minimizing total variation flow*, C. R. Acad. Sci., Paria, Sr. I, Math., 331, No. 11, 867 - 872 (2000).
- F. Andreu, C. Ballester, V. Caselles and J. M. Mazón, *Minimizing total variation flow*, Differential Integral Equations, 14, No. 3, 321 - 360 (2001).
- F. Andreu, V. Caselles and J. M. Mazón, *Parabolic quasilinear equations minimizing linear growth functionals*, Progress in mathematics, 233. Birkhäuser Verlag, Basel (2004).



Bibliografia II


G. Anzellotti, Pairings between measures and bounded functions and compensated compactness, Ann. Mat. Pura Appl., 4, No. 135, 293 - 318 (1983).


S. Barile and G. M. Figueiredo, *Existence of a least energy nodal solution for a class of p&q−quasilinear elliptic equations*, Adv. Nonlinear Stud., 14, No. 2, 511 - 530 (2014).


G. M. Figueiredo and M. T. O. Pimenta, *Sub-supersolution method for a quasilinear elliptic problem involving the 1−Laplacian operator and a gradient term*, J. Funct. Anal., 278, No. 3, 108325 (2020).

