Avanços no estudo de problemas elípticos com o operador 1-laplaciano

Marcos T. O. Pimenta
marcos.pimenta@unesp.br

Unesp - Faculdade de Ciências e Tecnologia,
Presidente Prudente, São Paulo

19 de março de 2021



Avanços no estudo de problemas elípticos com o operador 1-laplaciano

Marcos T. O. Pimenta
marcos.pimenta@unesp.br

Unesp - Faculdade de Ciências e Tecnologia,
Presidente Prudente, São Paulo

19 de março de 2021

* Financiado por FAPESP e CNPq



Apresentação

1. Método de sub-supersolução para problemas envolvendo o operador 1-laplaciano
2. Decomposição de Du e a Regra da Cadeia
3. Resultados técnicos
4. Demonstração do Teorema 6.0.2
5. Referências bibliográficas



Table of Contents

1. Método de sub-supersolução para problemas envolvendo o operador 1-laplaciano
2. Decomposição de Du e a Regra da Cadeia
3. Resultados técnicos
4. Demonstração do Teorema 6.0.2
5. Referências bibliográficas



Método de sub-supersolução

Nessa apresentação, abordamos os resultados do trabalho [4]. Mais especificamente, estudamos resultados de existência de solução para o seguinte problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\dfrac{Du}{|Du|}\right) + |Du| &= a(x)u + h(x,u) \text{ em } \Omega, \\ u &\geq 0 \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde $N \geq 2$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto, limitado e com fronteira Lipschitz.



Método de sub-supersolução

Dizemos que uma função $0 \leq u \in BV(\Omega)$ é uma solução de (1), se $D^j u = 0$ (onde $D^j u$ é a *jump part* da derivada distribucional Du) e se existe um campo vetorial $\mathbf{z} \in \mathcal{DM}_\infty(\Omega)$ com $|\mathbf{z}|_\infty \leq 1$, tal que

$$\begin{cases} -\text{div } \mathbf{z} + |Du| &= a(x)u + h(x,u) \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \\ (\mathbf{z}, Du) &= |Du| \text{ como medida em } \Omega \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$



Método de sub-supersolução

Dizemos que uma função $0 \leq u \in BV(\Omega)$ é uma solução de (1), se $D^j u = 0$ (onde $D^j u$ é a *jump part* da derivada distribucional Du) e se existe um campo vetorial $\mathbf{z} \in \mathcal{DM}_\infty(\Omega)$ com $|\mathbf{z}|_\infty \leq 1$, tal que

$$\begin{cases} -\text{div } \mathbf{z} + |Du| &= a(x)u + h(x,u) \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \\ (\mathbf{z}, Du) &= |Du| \text{ como medida em } \Omega \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Em [7], usando o método de sub-supersolução, os autores lidaram com um problema relacionado a (1), considerando o operador $p-$laplaciano, com $1 < p < \infty$, sem o termo gradiente.



Método de sub-supersolução

Vamos supor que a função a satisfaça a seguinte condição

(a_1) $a \in L^\infty(\Omega)$, $a \geq 0$ e $a \neq 0$.



Método de sub-supersolução

Vamos supor que a função a satisfaça a seguinte condição

(a_1) $a \in L^\infty(\Omega)$, $a \geq 0$ e $a \neq 0$.

Ainda, h é considerado uma função C^1, não decrescente na variável $t \in \mathbb{R}$, mensurável em $x \in \Omega$, que satisfaz

(h_1) $h(x,0) \geq a(x)$ q.s. em Ω.

(h_2) Existe $1 < r < 1^*$ tal que

$$h(x,t) \leq a(x)(t^{r-1}+1), \text{ para todo } t \geq 0 \text{ e para quase todo } x \in \Omega.$$



Método de sub-supersolução

Observação

Observe que, uma vez que $h(x,t)$ é não-decrescente na segunda variável, (h_1) implica que

$$h(x,t) \geq h(x,0) \geq a(x) \geq (1-t)a(x),$$

para todo $t \geq 0$ e para quase todo $x \in \Omega$.



Método de sub-supersolução

Observação

Observe que, uma vez que $h(x,t)$ é não-decrescente na segunda variável, (h_1) implica que

$$h(x,t) \geq h(x,0) \geq a(x) \geq (1-t)a(x),$$

para todo $t \geq 0$ e para quase todo $x \in \Omega$.

Nosso principal resultado é o seguinte teorema.

Teorema 6.0.2

Suponha que as condições (a_1), (h_1) e (h_2) valham. Então, se $|a|_\infty$ é pequeno o suficiente, então o problema (1) possui uma solução positiva, ou seja, existem $u \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $u > 0$ e um campo vetorial $\mathbf{z} \in \mathcal{DM}_\infty(\Omega)$, tal que $D^j u = 0$ e (2) é satisfeita.

Método de sub-supersolução

Para provar esse resultado, vamos aplicar o método de sub-supersolução. Esse método consiste em dar uma definição precisa para o que vem a ser uma sub-supersolução para (1) e, então, usando uma versão do Princípio de Comparação provado em [5], aplicar o Método de Iteração Monotônica, de forma a provar que entre uma sub e uma supersolução, existe uma solução.



Table of Contents

1. Método de sub-supersolução para problemas envolvendo o operador 1-laplaciano
2. Decomposição de Du e a Regra da Cadeia
3. Resultados técnicos
4. Demonstração do Teorema 6.0.2
5. Referências bibliográficas



Decomposição de Du e a Regra da Cadeia

Dada $u \in BV(\Omega)$, sabemos que podemos usar o Teorema de Radon-Nikodym para decompor Du como

$$Du = D^a u + D^s u,$$

onde $D^a u$ é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue $\mathcal{L}^N$, enquanto $D^s u$ é singular com respeito à essa medida.



Decomposição de Du e a Regra da Cadeia

Dada $u \in BV(\Omega)$, sabemos que podemos usar o Teorema de Radon-Nikodym para decompor Du como

$$Du = D^a u + D^s u,$$

onde $D^a u$ é absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue $\mathcal{L}^N$, enquanto $D^s u$ é singular com respeito à essa medida. Entretanto, precisamos estudar de maneira mais profunda a medida $D^s u$, lidando com as *Jump part* e *Cantor part*, denotadas $D^j u$ e $D^c u$, respectivamente.



Decomposição de Du e a Regra da Cadeia

Para defini-las, vamos seguir [1]. Primeiramente, para um dado $u \in BV(\Omega)$, dizemos que $x \in \Omega$ é um *Lebesgue point* para u, se existir $\tilde{u}(x)$ tal que

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\rho^N} \int_{B_\rho(x)} |u(y) - \tilde{u}(x)| dy = 0. \tag{3}$$



Decomposição de Du e a Regra da Cadeia

Para defini-las, vamos seguir [1]. Primeiramente, para um dado $u \in BV(\Omega)$, dizemos que $x \in \Omega$ é um *Lebesgue point* para u, se existir $\tilde{u}(x)$ tal que

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\rho^N} \int_{B_\rho(x)} |u(y) - \tilde{u}(x)| dy = 0. \tag{3}$$

Denotamos por S_u o conjunto dos pontos de Ω, os quais **não** são *Lebesgue points*, ou seja, $x \in \Omega \backslash S_u$ se e somente se existe $\tilde{u}(x)$ tal que (3) se verifica.



Decomposição de Du e a Regra da Cadeia

Para defini-las, vamos seguir [1]. Primeiramente, para um dado $u \in BV(\Omega)$, dizemos que $x \in \Omega$ é um *Lebesgue point* para u, se existir $\tilde{u}(x)$ tal que

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\rho^N} \int_{B_\rho(x)} |u(y) - \tilde{u}(x)| dy = 0. \tag{3}$$

Denotamos por S_u o conjunto dos pontos de Ω, os quais **não** são *Lebesgue points*, ou seja, $x \in \Omega \backslash S_u$ se e somente se existe $\tilde{u}(x)$ tal que (3) se verifica.

Para uma função $u \in BV(\Omega)$, dizemos que $x \in \Omega$ é um *approximate jump point* se existirem reais $u^-(x) < u^+(x)$ e um vetor $\nu_u \in \mathcal{S}^{N-1}$ tal que

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\rho^N} \int_{B_\rho^\pm(x)} |u(y) - u^\pm(x)| dy = 0,$$

onde $B_\rho^+(x) = \{y \in B_\rho(x); \langle y - x, \nu_u \rangle > 0\}$ and $B_\rho^-(x) = \{y \in B_\rho(x); \langle y - x, \nu_u \rangle < 0\}$.



Decomposição de Du e a Regra da Cadeia

O conjunto dos *jump points* de u é denotado por J_u. Pelo Teorema de Federer-Vol'pert (ver [1][Theorem 3.78]), para todo $u \in BV(\Omega)$, existe uma quantidade enumerável de hipersuperfícies Lipschitz Γ_k tais que

$$\mathcal{H}^{N-1}\left(S_u \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Gamma_k\right) = 0.$$

Além disso, $\mathcal{H}^{N-1}(S_u \setminus J_u) = 0$.



Decomposição de Du e a Regra da Cadeia

O conjunto dos *jump points* de u é denotado por J_u. Pelo Teorema de Federer-Vol'pert (ver [1][Theorem 3.78]), para todo $u \in BV(\Omega)$, existe uma quantidade enumerável de hipersuperfícies Lipschitz Γ_k tais que

$$\mathcal{H}^{N-1}\left(S_u \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Gamma_k\right) = 0.$$

Além disso, $\mathcal{H}^{N-1}(S_u \setminus J_u) = 0$. Denotamos

$$D^j u = D^s u \lfloor J_u \quad \text{e} \quad D^c u = D^s u \lfloor (\Omega \setminus S_u),$$

como *Jump e Cantor parts* de Du, respectivamente.



Decomposição de Du e a Regra da Cadeia

A *jump part* $D^j u$ pode também ser caracterizada como

$$D^j(u) = (u^+ - u^-)\nu_u \mathcal{H}^{N-1} \lfloor J_u.$$



Decomposição de Du e a Regra da Cadeia

A *jump part* $D^j u$ pode também ser caracterizada como

$$D^j(u) = (u^+ - u^-)\nu_u \mathcal{H}^{N-1} \lfloor J_u.$$

Para um dado $u \in BV(\Omega)$, em vários resultados, é necessário se trabalhar com um representante que surja como o limite de convoluções de u com funções regularizantes.



Decomposição de Du e a Regra da Cadeia

A *jump part* $D^j u$ pode também ser caracterizada como

$$D^j(u) = (u^+ - u^-)\nu_u \mathcal{H}^{N-1} \lfloor J_u.$$

Para um dado $u \in BV(\Omega)$, em vários resultados, é necessário se trabalhar com um representante que surja como o limite de convoluções de u com funções regularizantes. Esse é o chamado *precise representative* de u, denotado por u^* e é definido por

$$u^*(x) = \begin{cases} \tilde{u}(x) & \text{se } x \in \Omega \backslash S_u, \\ \dfrac{u^+(x) + u^-(x)}{2} & \text{se } x \in J_u. \end{cases}$$



Decomposição de Du e a Regra da Cadeia

A *jump part* $D^j u$ pode também ser caracterizada como

$$D^j(u) = (u^+ - u^-)\nu_u \mathcal{H}^{N-1} \lfloor J_u.$$

Para um dado $u \in BV(\Omega)$, em vários resultados, é necessário se trabalhar com um representante que surja como o limite de convoluções de u com funções regularizantes. Esse é o chamado *precise representative* de u, denotado por u^* e é definido por

$$u^*(x) = \begin{cases} \tilde{u}(x) & \text{se } x \in \Omega \backslash S_u, \\ \dfrac{u^+(x) + u^-(x)}{2} & \text{se } x \in J_u. \end{cases}$$

Assim, se $(\rho_\epsilon)_{\epsilon>0}$ é uma família de funções regularizantes, então $u \star \rho_\epsilon \to u^*$ pontualmente, quando $\epsilon \to 0^+$.



Decomposição de Du e a Regra da Cadeia

Para a abordagem que vamos seguir, será ainda muito importante usar uma versão da Regra da Cadeia para funções em $BV(\Omega)$.



Decomposição de Du e a Regra da Cadeia

Para a abordagem que vamos seguir, será ainda muito importante usar uma versão da Regra da Cadeia para funções em $BV(\Omega)$.

Teorema 6.1.1 (ver [1][Theorem 3.96])

Seja $u \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e $g \in C^1(\mathbb{R})$ uma função lipschitziana. Então $(g \circ u) \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e

$$D^a(g \circ u) = g'(\tilde{u}) D^a u,$$

$$D^c(g \circ u) = g'(\tilde{u}) D^c u,$$

enquanto

$$D^j(g \circ u) = \left(g(u^+) - g(u^-)\right) \nu_u \mathcal{H}^{N-1} \lfloor J_u.$$



Decomposição de Du e a Regra da Cadeia

Enquanto o representante preciso de $u \in BV(\Omega)$ é útil para propósitos de regularização, existe um outro representante, o qual se comporta melhor com respeito à Regra da Cadeia em $BV(\Omega)$. Para $g \in C^1(\mathbb{R})$ e $u \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, pelo Teorema 6.1.1 segue que $g(u) \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Além disso, definindo $g(w)^\sharp$ como

$$g(w)^\sharp(x) = \begin{cases} g(\tilde{w}(x)), & \text{se } x \in \Omega \backslash S_w, \\ \dfrac{1}{w^+(x) - w^-(x)} \displaystyle\int_{w^-(x)}^{w^+(x)} g(r)dr, & \text{se } x \in J_w, \end{cases}$$

podemos unificar a notação da Regra da Cadeia, escrevendo

$$D(g(w)) = g'(w)^\sharp Dw. \tag{4}$$



Decomposição de Du e a Regra da Cadeia

Vamos enunciar a seguir uma Fórmula de Green para expressões como $w\,\mathrm{div}(\mathbf{z})$, onde $\mathbf{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $\mathrm{div}(\mathbf{z}) \in \mathcal{M}(\Omega)$ e $w \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.



Decomposição de Du e a Regra da Cadeia

Vamos enunciar a seguir uma Fórmula de Green para expressões como $w\,\mathrm{div}(\mathbf{z})$, onde $\mathbf{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $\mathrm{div}(\mathbf{z}) \in \mathcal{M}(\Omega)$ e $w \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Vamos denotar

$$\mathcal{DM}_\infty = \left\{ \mathbf{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N);\ \mathrm{div}(\mathbf{z}) \in \mathcal{M}(\Omega) \right\}.$$



Decomposição de Du e a Regra da Cadeia

Vamos enunciar a seguir uma Fórmula de Green para expressões como $w\,\mathrm{div}(\mathbf{z})$, onde $\mathbf{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $\mathrm{div}(\mathbf{z}) \in \mathcal{M}(\Omega)$ e $w \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Vamos denotar

$$\mathcal{DM}_\infty = \left\{ \mathbf{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N);\ \mathrm{div}(\mathbf{z}) \in \mathcal{M}(\Omega) \right\}.$$

Para $\mathbf{z} \in \mathcal{DM}_\infty$ e $w \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, definimos a distribuição $(\mathbf{z}, Dw) : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ como

$$\langle (\mathbf{z}, Dw), \varphi \rangle := -\int_\Omega w^* \varphi \mathrm{div}(\mathbf{z}) - \int_\Omega w\mathbf{z} \cdot \nabla \varphi dx,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Com essa definição, pode-se provar que $(\mathbf{z}, Dw)$ é uma medida de Radon, tal que

$$\left| \int_B (\mathbf{z}, Dw) \right| \leq |\mathbf{z}|_\infty |Dw|(B),$$

para todo boreliano $B \subset \Omega$.



Decomposição de Du e a Regra da Cadeia

Para definir um análogo da Fórmula de Green, é necessário também descrever o traço do produto escalar de $\mathbf{z}$ pelo campo normal exterior em $\partial\Omega$. De fato, existe um operador $\gamma : \mathcal{DM}_\infty(\Omega) \to L^\infty(\partial\Omega)$ tal que

$$|\gamma(\mathbf{z})|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq |\mathbf{z}|_\infty$$

e, se $\mathbf{z} \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$,

$$\gamma(\mathbf{z})(x) = \mathbf{z}(x) \cdot \nu(x),$$

sobre $\partial\Omega$. Denotaremos $\gamma(\mathbf{z})$ simplesmente por $[\mathbf{z}, \nu]$.



Decomposição de Du e a Regra da Cadeia

Para definir um análogo da Fórmula de Green, é necessário também descrever o traço do produto escalar de $\mathbf{z}$ pelo campo normal exterior em $\partial\Omega$. De fato, existe um operador $\gamma : \mathcal{DM}_\infty(\Omega) \to L^\infty(\partial\Omega)$ tal que

$$|\gamma(\mathbf{z})|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq |\mathbf{z}|_\infty$$

e, se $\mathbf{z} \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$,

$$\gamma(\mathbf{z})(x) = \mathbf{z}(x) \cdot \nu(x),$$

sobre $\partial\Omega$. Denotaremos $\gamma(\mathbf{z})$ simplesmente por $[\mathbf{z}, \nu]$. Com essas definições, pode ser provado que a seguinte Fórmula de Green vale para todo $\mathbf{z} \in \mathcal{DM}_\infty(\Omega)$ e $w \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega w^* \mathrm{div}(\mathbf{z}) + \int_\Omega (\mathbf{z}, Dw) = \int_{\partial\Omega} [\mathbf{z}, \nu] w d\mathcal{H}^{N-1}. \tag{5}$$



Decomposição de Du e a Regra da Cadeia

Pode ainda ser provado a seguinte fórmula do produto (no sentido das distribuições) por $\mathbf{z} \in \mathcal{DM}_\infty(\Omega)$ e $w \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$,

$$\operatorname{div}(w\mathbf{z}) = (\mathbf{z}, Dw) + w^* \operatorname{div}(\mathbf{z}). \tag{6}$$



Table of Contents

1. Método de sub-supersolução para problemas envolvendo o operador 1-laplaciano
2. Decomposição de Du e a Regra da Cadeia
3. Resultados técnicos
4. Demonstração do Teorema 6.0.2
5. Referências bibliográficas



Resultados técnicos

Dizemos que $(\underline{u}, \overline{u})$ é um par de sub-supersolução para (1) se, $\underline{u}, \overline{u} \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $D^j \underline{u} = D^j \overline{u} = 0$, $0 < \underline{u} \leq \overline{u}$ e existem campos vetoriais $\underline{\mathbf{z}}$, $\overline{\mathbf{z}} \in \mathcal{DM}_\infty(\Omega)$, com $|\underline{\mathbf{z}}|_\infty, |\overline{\mathbf{z}}|_\infty \leq 1$, tais que

$$\begin{cases} -\text{div } \underline{\mathbf{z}} + |D\underline{u}| & \leq a(x)\underline{u} + h(x, \underline{u}) \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega), \\ (\underline{\mathbf{z}}, D\underline{u}) & = |D\underline{u}| \text{ em } \mathcal{M}(\Omega), \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -\text{div } \overline{\mathbf{z}} + |D\overline{u}| & \geq a(x)\overline{u} + h(x, \overline{u}) \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega), \\ (\overline{\mathbf{z}}, D\overline{u}) & = |D\overline{u}| \text{ em } \mathcal{M}(\Omega). \end{cases}$$



Resultados técnicos

O próximo resultado é muito importante para que possamos utilizar o método de sub-supersoluções.



Resultados técnicos

O próximo resultado é muito importante para que possamos utilizar o método de sub-supersoluções.

Lema 6.2.1

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, limitado e com fronteira Lipschitz e seja b uma função não-negativa em $L^q(\Omega)$, para $q > N$. Então existe pelo menos uma solução para o problema

$$\begin{cases} -\text{div}\left(\dfrac{Du}{|Du|}\right) + |Du| &= b(x) \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{7}$$



Resultados técnicos

Além disso, se

$$|b|_q \leq \left(S|\Omega|^{\frac{1}{q'} - \frac{N-1}{N}} \right)^{-1}, \tag{8}$$

então existe uma constante $C = C(N, \Omega, q)$ tal que

$$|u|_\infty \leq C|b|_q^{\frac{1}{p_0 - 1}}, \tag{9}$$

onde p_0 é tal que $1 < p_0 < \dfrac{N}{q'(N-1)}$, o qual existe, uma vez que $q > N$.



Resultados técnicos

Lema 6.2.2

Sejam c e d duas função não-negativas em $L^1(\Omega)$ com $c \leq d$ q.s. em Ω. Considere os problemas

$$\begin{cases} -\text{div}\left(\dfrac{Du_1}{|Du_1|}\right) + |Du_1| &= c(x) \quad em \quad \Omega, \\ u_1 &= 0 \text{ sobre } \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -\text{div}\left(\dfrac{Du_2}{|Du_2|}\right) + |Du_2| &= d(x) \quad em \quad \Omega, \\ u_2 &= 0 \text{ sobre } \quad \partial\Omega. \end{cases}$$



Resultados técnicos

Se u_1 for uma solução do primeiro problema e u_2, do segundo, então $u_1 \leq u_2$ q.s. em Ω.



Resultados técnicos

Se u_1 for uma solução do primeiro problema e u_2, do segundo, então $u_1 \leq u_2$ q.s. em Ω.

Observação

Uma consequência direta do último resultado é que a solução mencionada no Lema 6.2.1 é única.



Resultados técnicos

Lemma 6.2.4

Suponha que valham (a_1), (h_1) e (h_2). Se a função a é tal que $|a|_\infty$ é pequeno o suficiente, então existem $\underline{u}, \overline{u} \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tais que

i) $0 \leq \underline{u}(x) \leq \overline{u}(x)$ q.s. em Ω with $\underline{u} \neq 0$.

ii) $\underline{u}$ é uma subsolução e $\overline{u}$ é uma supersolução de (1).



Resultados técnicos

Lemma 6.2.4

Suponha que valham (a_1), (h_1) e (h_2). Se a função a é tal que $|a|_\infty$ é pequeno o suficiente, então existem $\underline{u}, \overline{u} \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tais que

i) $0 \leq \underline{u}(x) \leq \overline{u}(x)$ q.s. em Ω with $\underline{u} \neq 0$.

ii) $\underline{u}$ é uma subsolução e $\overline{u}$ é uma supersolução de (1).

Demonstração

Seja $\underline{u} \in BV(\Omega)$ a única solução não-negativa de

$$\begin{cases} -\text{div}\left(\dfrac{D\underline{u}}{|D\underline{u}|}\right) + |D\underline{u}| &= a(x) \text{ em } \Omega, \\ \underline{u} &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{10}$$



Resultados técnicos

Pelo Lema 6.2.1, se

$$|a|_\infty \leq \left(S|\Omega|^{\frac{2}{q}-\frac{N-1}{N}} \right)^{-1}$$

então a satisfaz (8) e, pelo Lema 6.2.1, $\underline{u} \in L^\infty(\Omega)$.



Resultados técnicos

Pelo Lema 6.2.1, se

$$|a|_\infty \leq \left(S|\Omega|^{\frac{2}{q}-\frac{N-1}{N}} \right)^{-1}$$

então a satisfaz (8) e, pelo Lema 6.2.1, $\underline{u} \in L^\infty(\Omega)$.
Para provar i), primeiramente, consideremos $\eta > 0$ fixo e tal que

$$0 < \eta|\Omega|^{\frac{1}{q}} < \frac{1}{2}\left(S|\Omega|^{\frac{1}{q'}-\frac{N-1}{N}} \right)^{-1}. \tag{11}$$



Resultados técnicos

Pelo Lema 6.2.1, se

$$|a|_\infty \leq \left(S|\Omega|^{\frac{2}{q}-\frac{N-1}{N}} \right)^{-1}$$

então a satisfaz (8) e, pelo Lema 6.2.1, $\underline{u} \in L^\infty(\Omega)$.
Para provar i), primeiramente, consideremos $\eta > 0$ fixo e tal que

$$0 < \eta|\Omega|^{\frac{1}{q}} < \frac{1}{2}\left(S|\Omega|^{\frac{1}{q'}-\frac{N-1}{N}} \right)^{-1}. \tag{11}$$

Agora, consideremos $\overline{u} \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, a única solução do problema

$$\begin{cases} -\text{div}\left(\dfrac{D\overline{u}}{|D\overline{u}|} \right) + |D\overline{u}| &= \eta + a(x) \text{ em } \Omega, \\ \overline{u} &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{12}$$



Resultados técnicos

Então, do Lema 6.2.2, concluímos que $0 \leq \underline{u}(x) \leq \overline{u}(x)$ q.s. em Ω com $\underline{u} \neq 0$, o que prova a condição (i).



Resultados técnicos

Então, do Lema 6.2.2, concluímos que $0 \leq \underline{u}(x) \leq \overline{u}(x)$ q.s. em Ω com $\underline{u} \neq 0$, o que prova a condição (i).
Para provar (ii), note que, usando a definição de $\underline{u}$ e a Observação 8, temos que,

$$\begin{aligned} -\text{div}\left(\frac{D\underline{u}}{|D\underline{u}|}\right) + |D\underline{u}| - a(x)\underline{u} - h(x,\underline{u}) &\leq a(x) - a(x)\underline{u} - h(x,\underline{u}) \\ &\leq (1-\underline{u})a(x) - (1-\underline{u})a(x) \\ &= 0, \end{aligned}$$

o que implica que $\underline{u}$ é uma subsolução de (1).



Resultados técnicos

Como $\overline{u}$ é uma solução de (12), então (h_2) implica que

$$-\text{div}\left(\frac{D\overline{u}}{|D\overline{u}|}\right) + |D\overline{u}| - a(x)\overline{u} - h(x,\overline{u}) \quad = \quad (\eta + a(x)) - a(x)\overline{u} - h(x,\overline{u})$$

Resultados técnicos

Como $\overline{u}$ é uma solução de (12), então (h_2) implica que

$$\begin{aligned} -\text{div}\left(\frac{D\overline{u}}{|D\overline{u}|}\right) + |D\overline{u}| - a(x)\overline{u} - h(x,\overline{u}) &= (\eta + a(x)) - a(x)\overline{u} - h(x,\overline{u}) \\ &\geq (\eta + a(x)) - a(x)\overline{u} - a(x) \end{aligned}$$

Resultados técnicos

Como $\overline{u}$ é uma solução de (12), então (h_2) implica que

$$\begin{aligned} -\text{div}\left(\frac{D\overline{u}}{|D\overline{u}|}\right) + |D\overline{u}| - a(x)\overline{u} - h(x,\overline{u}) &= (\eta + a(x)) - a(x)\overline{u} - h(x,\overline{u}) \\ &\geq (\eta + a(x)) - a(x)\overline{u} - a(x) \\ &\quad -a(x)\overline{u}^{r-1} \\ &\geq \eta - |a|_\infty(|\overline{u}|_\infty + |\overline{u}|_\infty^{r-1}). \quad (13) \end{aligned}$$

Resultados técnicos

Como $\overline{u}$ é uma solução de (12), então (h_2) implica que

$$\begin{aligned} -\text{div}\left(\frac{D\overline{u}}{|D\overline{u}|}\right) + |D\overline{u}| - a(x)\overline{u} - h(x,\overline{u}) &= (\eta + a(x)) - a(x)\overline{u} - h(x,\overline{u}) \\ &\geq (\eta + a(x)) - a(x)\overline{u} - a(x) \\ &\quad -a(x)\overline{u}^{r-1} \\ &\geq \eta - |a|_\infty(|\overline{u}|_\infty + |\overline{u}|_\infty^{r-1}). \end{aligned} \tag{13}$$

Se $a \in L^\infty(\Omega)$ for tal que

$$0 < |a|_\infty |\Omega|^{\frac{1}{q}} < \frac{1}{2}\left(S|\Omega|^{\frac{1}{q'}-\frac{N-1}{N}}\right)^{-1}, \tag{14}$$

então, por (11), (14) e pela Desigualdade de Minkowski, temos que

$$|\eta + a(\cdot)|_q \leq \left(S|\Omega|^{\frac{1}{q'}-\frac{N-1}{N}}\right)^{-1}.$$

Resultados técnicos

Da última desigualdade e do Lema 6.2.1, temos que

$$|\overline{u}|_\infty \leq C\left(S|\Omega|^{\frac{1}{q'}-\frac{N-1}{N}}\right)^{\frac{-1}{p_0-1}}. \tag{15}$$

Por (13) e (15), segue que

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\left(\frac{D\overline{u}}{|D\overline{u}|}\right)+|D\overline{u}| & \\ -a(x)\overline{u}-h(x,\overline{u}) \quad \geq \quad \eta-|a|_\infty & \left(C\left(S|\Omega|^{\frac{1}{q'}-\frac{N-1}{N}}\right)^{\frac{-1}{p_0-1}}\right. \qquad (16)\\ & \left.+C^{r-1}\left(S|\Omega|^{\frac{1}{q'}-\frac{N-1}{N}}\right)^{\frac{1-r}{p_0-1}}\right). \qquad (17) \end{aligned}$$



Resultados técnicos

Consideremos a função real

$$g(t) = \eta - t\left(C\left(S|\Omega|^{\frac{1}{q'}-\frac{N-1}{N}}\right)^{\frac{-1}{p_0-1}} + C^{r-1}\left(S|\Omega|^{\frac{1}{q'}-\frac{N-1}{N}}\right)^{\frac{1-r}{p_0-1}}\right).$$



Resultados técnicos

Consideremos a função real

$$g(t) = \eta - t\left(C\left(S|\Omega|^{\frac{1}{q'}-\frac{N-1}{N}}\right)^{\frac{-1}{p_0-1}} + C^{r-1}\left(S|\Omega|^{\frac{1}{q'}-\frac{N-1}{N}}\right)^{\frac{1-r}{p_0-1}}\right).$$

Note que $g(0) = \eta > 0$ e g é contínua em $t = 0$. Então, por continuidade, existe $\nu > 0$ tal que

$$g(t) > 0, \quad \forall t \in [0, \nu). \tag{18}$$



Resultados técnicos

Consideremos a função real

$$g(t) = \eta - t\left(C\left(S|\Omega|^{\frac{1}{q'}-\frac{N-1}{N}}\right)^{\frac{-1}{p_0-1}} + C^{r-1}\left(S|\Omega|^{\frac{1}{q'}-\frac{N-1}{N}}\right)^{\frac{1-r}{p_0-1}}\right).$$

Note que $g(0) = \eta > 0$ e g é contínua em $t = 0$. Então, por continuidade, existe $\nu > 0$ tal que

$$g(t) > 0, \quad \forall t \in [0, \nu). \tag{18}$$

Se considerarmos a função a tal que (14) vale e ainda tal que $|a|_\infty \in [0, \nu)$, temos de (17) e (18), que $\overline{u}$ é uma supersolução de (1).



Table of Contents

1. Método de sub-supersolução para problemas envolvendo o operador 1-laplaciano
2. Decomposição de Du e a Regra da Cadeia
3. Resultados técnicos
4. Demonstração do Teorema 6.0.2
5. Referências bibliográficas



Demonstração do Teorema 6.0.2

Seja $(\underline{u}, \overline{u})$ um par de sub-supersoluções dados pelo Lema 6.2.4. Para provar o Teorema 6.0.2, usamos o Método da Iteração Monotônica para mostrar que, entre $(\underline{u}, \overline{u})$, existe uma solução de (1).



Demonstração do Teorema 6.0.2

Seja $(\underline{u}, \overline{u})$ um par de sub-supersoluções dados pelo Lema 6.2.4. Para provar o Teorema 6.0.2, usamos o Método da Iteração Monotônica para mostrar que, entre $(\underline{u}, \overline{u})$, existe uma solução de (1). Para simplificar a notação, para $x \in \Omega$ and $t \in \mathbb{R}$, denotemos

$$f(x,t) = a(x)t + h(x,t).$$



Demonstração do Teorema 6.0.2

Seja $(\underline{u}, \overline{u})$ um par de sub-supersoluções dados pelo Lema 6.2.4. Para provar o Teorema 6.0.2, usamos o Método da Iteração Monotônica para mostrar que, entre $(\underline{u}, \overline{u})$, existe uma solução de (1). Para simplificar a notação, para $x \in \Omega$ and $t \in \mathbb{R}$, denotemos

$$f(x,t) = a(x)t + h(x,t).$$

Definimos

$$\tilde{f}(x,t) = \begin{cases} f(x, \overline{u}(x)), & \text{se } t > \overline{u}(x), \\ f(x,t), & \text{se } \underline{u}(x) \leq t \leq \overline{u}(x), \\ f(x, \underline{u}(x)), & \text{se } t < \underline{u}(x) \end{cases}$$

e note que, como $a \geq 0$ e $t \mapsto h(x,t)$ é não-decrescente, segue que $t \mapsto \tilde{f}(x,t)$ é não-decrescente.



Demonstração do Teorema 6.0.2

Seja $u_0 = \underline{u}$ e considere o seguinte problema

$$\begin{cases} -\text{div}\left(\dfrac{Du_1}{|Du_1|}\right) + |Du_1| &= \tilde{f}(x, u_0) \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u_1 &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{19}$$



Demonstração do Teorema 6.0.2

Seja $u_0 = \underline{u}$ e considere o seguinte problema

$$\begin{cases} -\text{div}\left(\dfrac{Du_1}{|Du_1|}\right) + |Du_1| &= \tilde{f}(x, u_0) \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u_1 &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{19}$$

Por [5][Theorem 3.2], existe u_1 uma solução de (19), isto é, uma função $u_1 \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tal que $D^j u_1 = 0$, e um campo vetorial $\mathbf{z}_1 \in \mathcal{DM}_\infty(\Omega)$ tal que $|\mathbf{z}_1|_\infty \leq 1$ e

$$\begin{cases} -\text{div } \mathbf{z}_1 + |Du_1| &= \tilde{f}(x, u_0) \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega), \\ (\mathbf{z}_1, Du_1) &= |Du_1| \text{ em } \mathcal{M}(\Omega), \\ u_1 &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Demonstração do Teorema 6.0.2

Como $u_0 = \underline{u}$ é uma subsolução de (1), então existe um campo vetorial $\mathbf{z}_0 \in \mathcal{DM}_\infty(\Omega)$ tal que $|\mathbf{z}_0|_\infty \leq 1$ e

$$\begin{cases} -\text{div } \mathbf{z}_0 + |Du_0| & \leq f(x, u_0) \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega), \\ (\underline{\mathbf{z}_0}, Du_0) & = |Du_0| \text{ em } \mathcal{M}(\Omega), \end{cases}$$



Demonstração do Teorema 6.0.2

Como $u_0 = \underline{u}$ é uma subsolução de (1), então existe um campo vetorial $\mathbf{z}_0 \in \mathcal{DM}_\infty(\Omega)$ tal que $|\mathbf{z}_0|_\infty \leq 1$ e

$$\begin{cases} -\text{div } \mathbf{z}_0 + |Du_0| & \leq f(x, u_0) \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega), \\ (\underline{\mathbf{z}_0}, Du_0) & = |Du_0| \text{ em } \mathcal{M}(\Omega), \end{cases}$$

Então, no sentido das distribuições,

$$\begin{aligned} -\text{div } \mathbf{z}_0 + |Du_0| &\leq f(x, u_0) \\ &= \tilde{f}(x, u_0) \\ &= -\text{div } \mathbf{z}_1 + |Du_1| \end{aligned}$$

e, assim, pelo Princípio da Comparação (ver [5][Theorem 3.5]), segue que

$$u_0 \leq u_1 \quad \text{q.s. em } \Omega.$$



Demonstração do Teorema 6.0.2

Como $\overline{u}$ é uma supersolução de (1), segue que, no sentido das distribuições,

$$\begin{aligned} -\text{div } \mathbf{z}_1 + |Du_1| &= \tilde{f}(x, u_0) \\ &\leq \tilde{f}(x, \overline{u}) \\ &= f(x, \overline{u}) \\ &\leq -\text{div } \overline{\mathbf{z}} + |D\overline{u}|. \end{aligned}$$



Demonstração do Teorema 6.0.2

Como $\overline{u}$ é uma supersolução de (1), segue que, no sentido das distribuições,

$$\begin{aligned} -\text{div } \mathbf{z}_1 + |Du_1| &= \tilde{f}(x, u_0) \\ &\leq \tilde{f}(x, \overline{u}) \\ &= f(x, \overline{u}) \\ &\leq -\text{div } \overline{\mathbf{z}} + |D\overline{u}|. \end{aligned}$$

Então, novamente pelo Princípio da Comparação, segue que $u_1 \leq \overline{u}$ q.s. em Ω. Assim,

$$u_0 \leq u_1 \leq \overline{u} \quad \text{q.s. em } \Omega.$$



Demonstração do Teorema 6.0.2

Pelos argumentos precedentes, para um dado $k \in \mathbb{N}$ e uma função $u_k \in BV(\Omega)$, tal que $D^j u_k = 0$,

$$\begin{cases} -\text{div}\left(\dfrac{Du_k}{|Du_k|}\right) + |Du_k| &= \tilde{f}(x, u_{k-1}) \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega), \\ (\mathbf{z}_k, Du_k) &= |Du_k| \text{ em } \mathcal{M}(\Omega), \\ u_k &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{20}$$

e tal que

$$\underline{u} \leq u_{k-1} \leq u_k \leq \overline{u} \quad \text{q.s. em } \Omega,$$



Demonstração do Teorema 6.0.2

existe uma função $u_{k+1} \in BV(\Omega)$ tal que $D^j u_{k+1} = 0$ e um campo vetorial $\mathbf{z}_{k+1} \in \mathcal{DM}_\infty(\Omega)$ tal que $|\mathbf{z}_{k+1}|_\infty \leq 1$,

$$\begin{cases} -\text{div } \mathbf{z}_{k+1} + |Du_{k+1}| &= \tilde{f}(x, u_k) \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega), \\ (\mathbf{z}_{k+1}, Du_{k+1}) &= |Du_{k+1}| \text{ em } \mathcal{M}(\Omega), \\ u_{k+1} &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{21}$$

e

$$0 \leq \underline{u} \leq u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_k \leq u_{k+1} \leq \overline{u} \quad \text{q.s. em } \Omega. \tag{22}$$



Demonstração do Teorema 6.0.2

Lemma 6.3.1

A sequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada em $BV(\Omega)$.



Demonstração do Teorema 6.0.2

Lemma 6.3.1

A sequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada em $BV(\Omega)$.

Demonstração

Vamos usar $u^*_{k+1} \in BV(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ como função teste em (21).

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |Du_{k+1}| &\leq \int_\Omega (1+u^*_{k+1})|Du_{k+1}| \\
&= \int_\Omega (\mathbf{z}_{k+1}, Du_{k+1}) + \int_\Omega u^*_{k+1}|Du_{k+1}| \\
&= -\int_\Omega u^*_{k+1}\mathrm{div}\mathbf{z}_{k+1} + \int_\Omega u^*_{k+1}|Du_{k+1}| \\
&= \int_\Omega \tilde{f}(x,u_k)u_{k+1}dx \\
&\leq |\overline{u}|_\infty \int_\Omega f(x,\overline{u})dx.
\end{aligned}$$

Demonstração do Teorema 6.0.2

Pelo último resultado e pelas imersões de $BV(\Omega)$, segue que existe $u \in BV(\Omega)$ tal que

$$u_k \to u \quad \text{em } L^q(\Omega), \quad \text{quando } k \to +\infty, \tag{23}$$

para todo $q \in [1, 1^*)$.



Demonstração do Teorema 6.0.2

Pelo último resultado e pelas imersões de $BV(\Omega)$, segue que existe $u \in BV(\Omega)$ tal que

$$u_k \to u \quad \text{em } L^q(\Omega), \quad \text{quando } k \to +\infty, \tag{23}$$

para todo $q \in [1, 1^*)$.

De agora em diante, para mostrar que a função u é de fato uma solução de (1), seguiremos os argumentos constantes em [6].

Vamos estudar o comportamento da sequência de campo de vetores $(\mathbf{z}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em $L^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Primeiramente, note que é uma sequência limitada em $L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Então, existe $\mathbf{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ (que de fato satisfaz $|\mathbf{z}|_\infty \leq 1$), tal que

$$\int_\Omega \mathbf{z}_k \cdot \psi dx \to \int_\Omega \mathbf{z} \cdot \psi dx, \quad \text{quando } k \to +\infty. \tag{24}$$

Demonstração do Teorema 6.0.2

Note que, para todo $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, como $\nabla\varphi \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$, por (24), temos que

$$\int_\Omega \mathbf{z}_k \cdot \nabla\phi dx \to \int_\Omega z \cdot \nabla\phi dx, \quad \text{as } k \to +\infty,$$

de onde segue que

$$\operatorname{div} \mathbf{z}_k \to \operatorname{div} \mathbf{z}, \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{25}$$



Demonstração do Teorema 6.0.2

Lema 6.3.2

O campo vetorial $\mathbf{z}$ pertence a $\mathcal{DM}_\infty(\Omega)$.



Demonstração do Teorema 6.0.2

Lema 6.3.2

O campo vetorial $\mathbf{z}$ pertence a $\mathcal{DM}_\infty(\Omega)$.

Demonstração

De (21), (23), (25) e da semicontinuidade inferior da norma de $BV(\Omega)$ com respeito à convergência de $L^1(\Omega)$, segue que

$$-\operatorname{div}\mathbf{z} + |Du| \leq \tilde{f}(x,u) \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{26}$$

Assim, $\mathbf{z} \in \mathcal{DM}_\infty(\Omega)$.



Demonstração do Teorema 6.0.2

Lema 6.3.3

A função u satisfaz

$$-\operatorname{div} \mathbf{z} + |Du| = f(x,u) \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{27}$$



Demonstração do Teorema 6.0.2

Lema 6.3.3

A função u satisfaz

$$-\operatorname{div}\mathbf{z} + |Du| = f(x,u) \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{27}$$

Demonstração

Primeiramente, vamos descobrir que problema a função $e^{-u_{k+1}}$ satisfaz. Note que, pela Regra da Cadeia para $BV(\Omega)$, como $t \mapsto e^{-t}$ é diferenciável,

$$D(e^{-u_{k+1}}) = (e^{-u_{k+1}})^* Du_{k+1}.$$



Demonstração do Teorema 6.0.2

Então, $e^{-u_{k+1}} \in BV(\Omega)$. Ainda, do fato de que u_k é uma função não-negativa, vemos que $e^{-u_{k+1}} \in L^\infty(\Omega)$. Então podemos aplicar a fórmula do produto (6), de forma que

$$-\operatorname{div}(e^{-u_{k+1}}\mathbf{z}_{k+1}) \quad = \quad \operatorname{div}((1-e^{-u_{k+1}})\mathbf{z}_{k+1}) - \operatorname{div}\mathbf{z}_{k+1}$$

Demonstração do Teorema 6.0.2

Então, $e^{-u_{k+1}} \in BV(\Omega)$. Ainda, do fato de que u_k é uma função não-negativa, vemos que $e^{-u_{k+1}} \in L^\infty(\Omega)$. Então podemos aplicar a fórmula do produto (6), de forma que

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(e^{-u_{k+1}}\mathbf{z}_{k+1}) &= \operatorname{div}((1-e^{-u_{k+1}})\mathbf{z}_{k+1}) - \operatorname{div}\mathbf{z}_{k+1} \\ &= \left(\mathbf{z}_{k+1}, D(1-e^{-u_{k+1}})\right) + (1-e^{-u_{k+1}})^* \operatorname{div}\mathbf{z}_{k+1} \end{aligned}$$

Demonstração do Teorema 6.0.2

Então, $e^{-u_{k+1}} \in BV(\Omega)$. Ainda, do fato de que u_k é uma função não-negativa, vemos que $e^{-u_{k+1}} \in L^\infty(\Omega)$. Então podemos aplicar a fórmula do produto (6), de forma que

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(e^{-u_{k+1}}\mathbf{z}_{k+1}) &= \operatorname{div}((1-e^{-u_{k+1}})\mathbf{z}_{k+1}) - \operatorname{div}\mathbf{z}_{k+1} \\ &= \left(\mathbf{z}_{k+1}, D(1-e^{-u_{k+1}})\right) + (1-e^{-u_{k+1}})^* \operatorname{div}\mathbf{z}_{k+1} \\ &\quad -\operatorname{div}\mathbf{z}_{k+1} \end{aligned}$$

Demonstração do Teorema 6.0.2

Então, $e^{-u_{k+1}} \in BV(\Omega)$. Ainda, do fato de que u_k é uma função não-negativa, vemos que $e^{-u_{k+1}} \in L^\infty(\Omega)$. Então podemos aplicar a fórmula do produto (6), de forma que

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(e^{-u_{k+1}}\mathbf{z}_{k+1}) &= \operatorname{div}((1-e^{-u_{k+1}})\mathbf{z}_{k+1}) - \operatorname{div}\mathbf{z}_{k+1} \\ &= \left(\mathbf{z}_{k+1}, D(1-e^{-u_{k+1}})\right) + (1-e^{-u_{k+1}})^*\operatorname{div}\mathbf{z}_{k+1} \\ &\quad -\operatorname{div}\mathbf{z}_{k+1} \\ &= \left|D(1-e^{-u_{k+1}})\right| - (e^{-u_{k+1}})^*\operatorname{div}\mathbf{z}_{k+1} \end{aligned}$$

Demonstração do Teorema 6.0.2

Então, $e^{-u_{k+1}} \in BV(\Omega)$. Ainda, do fato de que u_k é uma função não-negativa, vemos que $e^{-u_{k+1}} \in L^\infty(\Omega)$. Então podemos aplicar a fórmula do produto (6), de forma que

$$\begin{aligned}
-\operatorname{div}(e^{-u_{k+1}}\mathbf{z}_{k+1}) &= \operatorname{div}((1-e^{-u_{k+1}})\mathbf{z}_{k+1}) - \operatorname{div}\mathbf{z}_{k+1} \\
&= \left(\mathbf{z}_{k+1}, D(1-e^{-u_{k+1}})\right) + (1-e^{-u_{k+1}})^*\operatorname{div}\mathbf{z}_{k+1} \\
&\quad -\operatorname{div}\mathbf{z}_{k+1} \\
&= \left|D(1-e^{-u_{k+1}})\right| - (e^{-u_{k+1}})^*\operatorname{div}\mathbf{z}_{k+1} \\
&= (e^{-u_{k+1}})^*|Du_{k+1}| + (e^{-u_{k+1}})^*\left(\tilde{f}(x,u_k) - |Du_{k+1}|\right)
\end{aligned}$$

Demonstração do Teorema 6.0.2

Então, $e^{-u_{k+1}} \in BV(\Omega)$. Ainda, do fato de que u_k é uma função não-negativa, vemos que $e^{-u_{k+1}} \in L^\infty(\Omega)$. Então podemos aplicar a fórmula do produto (6), de forma que

$$\begin{aligned}
-\operatorname{div}(e^{-u_{k+1}}\mathbf{z}_{k+1}) &= \operatorname{div}((1-e^{-u_{k+1}})\mathbf{z}_{k+1}) - \operatorname{div}\mathbf{z}_{k+1} \\
&= \left(\mathbf{z}_{k+1}, D(1-e^{-u_{k+1}})\right) + (1-e^{-u_{k+1}})^*\operatorname{div}\mathbf{z}_{k+1} \\
&\quad -\operatorname{div}\mathbf{z}_{k+1} \\
&= \left|D(1-e^{-u_{k+1}})\right| - (e^{-u_{k+1}})^*\operatorname{div}\mathbf{z}_{k+1} \\
&= (e^{-u_{k+1}})^*|Du_{k+1}| + (e^{-u_{k+1}})^*\left(\tilde{f}(x,u_k) - |Du_{k+1}|\right) \\
&= (e^{-u_{k+1}})\tilde{f}(x,u_k), \qquad (28)
\end{aligned}$$

em $\mathcal{D}'(\Omega)$ (na igualdade acima, usamos o fato de que $(\mathbf{z}_{k+1}, D(1-e^{-u_{k+1}})) = |D(1-e^{-u_{k+1}})|$, o que pode ser provado como em [6][Remark 3.4]).

Demonstração do Teorema 6.0.2

Agora, calculando o limite quando $k \to +\infty$ em ambos os lados de (28), temos que, no sentido das distribuições

$$-\operatorname{div}\left(e^{-u_{k+1}}\mathbf{z}_{k+1}\right) \to -\operatorname{div}\left(e^{-u}\mathbf{z}\right), \tag{29}$$

como $u_k \to u$ in $L^1(\Omega)$ e $\mathbf{z}_{k+1} \rightharpoonup \mathbf{z}$ in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$.



Demonstração do Teorema 6.0.2

Agora, calculando o limite quando $k \to +\infty$ em ambos os lados de (28), temos que, no sentido das distribuições

$$-\operatorname{div}\left(e^{-u_{k+1}}\mathbf{z}_{k+1}\right) \to -\operatorname{div}\left(e^{-u}\mathbf{z}\right), \tag{29}$$

como $u_k \to u$ in $L^1(\Omega)$ e $\mathbf{z}_{k+1} \rightharpoonup \mathbf{z}$ in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Além disso,

$$(e^{-u_{k+1}})\tilde{f}(x, u_k) \to (e^{-u})\tilde{f}(x, u), \tag{30}$$

uma vez que $u_k \to u$ em $L^1(\Omega)$.



Demonstração do Teorema 6.0.2

Agora, calculando o limite quando $k \to +\infty$ em ambos os lados de (28), temos que, no sentido das distribuições

$$-\operatorname{div}\left(e^{-u_{k+1}}\mathbf{z}_{k+1}\right) \to -\operatorname{div}\left(e^{-u}\mathbf{z}\right), \tag{29}$$

como $u_k \to u$ in $L^1(\Omega)$ e $\mathbf{z}_{k+1} \rightharpoonup \mathbf{z}$ in $L^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$. Além disso,

$$(e^{-u_{k+1}})\tilde{f}(x, u_k) \to (e^{-u})\tilde{f}(x, u), \tag{30}$$

uma vez que $u_k \to u$ em $L^1(\Omega)$.
Assim, por (28), (29) e (30), temos que

$$-\operatorname{div}\left(e^{-u}\mathbf{z}\right) = (e^{-u})\tilde{f}(x, u) \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{31}$$



Demonstração do Teorema 6.0.2

Levando em conta (26), (31) e pela Regra da Cadeia (4), temos que, em $\mathcal{D}'(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
-\operatorname{div}(e^{-u}\mathbf{z}) &= -(e^{-u})^{\sharp}\operatorname{div}\mathbf{z} - \left(z, D(e^{-u})^{\sharp}\right) \\
&\leq (e^{-u})\tilde{f}(x,u) - (e^{-u})^{\sharp}|Du| - \left(z, D(e^{-u})^{\sharp}\right) \\
&\leq (e^{-u})\tilde{f}(x,u) - (e^{-u})^{\sharp}|Du| + \left|D(e^{-u})\right| \\
&= (e^{-u})\tilde{f}(x,u) \\
&= -\operatorname{div}(e^{-u}\mathbf{z}).
\end{aligned}$$

Então todas essas desigualdades são, em verdade, igualdades.



Demonstração do Teorema 6.0.2

Em particular,

$$-(e^{-u})^{\sharp}\operatorname{div}\mathbf{z} - \left(z, D(e^{-u})^{\sharp}\right) = (e^{-u})\tilde{f}(x,u) - (e^{-u})^{\sharp}|Du| - \left(z, D(e^{-u})^{\sharp}\right)$$

e então

$$(e^{-u})^{\sharp}\left(-\operatorname{div}\mathbf{z} + |Du|\right) = (e^{-u})\tilde{f}(x,u) \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Isso, por outro lado, implica que

$$-\operatorname{div}\mathbf{z} + |Du| = \tilde{f}(x,u) = f(x,u) \quad \text{em } \mathcal{D}'(\Omega)$$

e isso finaliza a demonstração.



Demonstração do Teorema 6.0.2

Lema 6.3.4

A função u e o campo vetorial $\mathbf{z}$ satisfazem a seguinte igualdade, no sentido das medidas em Ω,

$$(\mathbf{z}, Du) = |Du|.$$



Demonstração do Teorema 6.0.2

Lema 6.3.4

A função u e o campo vetorial $\mathbf{z}$ satisfazem a seguinte igualdade, no sentido das medidas em Ω,

$$(\mathbf{z}, Du) = |Du|.$$

Demonstração

Seja $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi \geq 0$. Primeiramente, note que

$$\int_\Omega \varphi u^\sharp |Du| \leq \liminf_{k\to+\infty} \int_\Omega \varphi u_{k+1} |Du_{k+1}|. \tag{32}$$

Em (21), consideremos φu_{k+1} como função teste. Então

Demonstração do Teorema 6.0.2

$$-\int_\Omega u_{k+1}\varphi \operatorname{div} \mathbf{z}_{k+1} + \int_\Omega u_{k+1}\varphi |Du_{k+1}| = \int_\Omega \tilde{f}(x, u_k)u_{k+1}\varphi dx.$$



Demonstração do Teorema 6.0.2

$$-\int_\Omega u_{k+1}\varphi \operatorname{div} \mathbf{z}_{k+1} + \int_\Omega u_{k+1}\varphi |Du_{k+1}| = \int_\Omega \tilde{f}(x,u_k)u_{k+1}\varphi dx.$$

Por (6),

$$\begin{aligned}\langle (\mathbf{z}_{k+1}, Du_{k+1}), \varphi\rangle + \int_\Omega u_{k+1}\varphi |Du_{k+1}| &= \int_\Omega \varphi \operatorname{div}(u_{k+1}\mathbf{z}_{k+1}) \\ &\quad + \int_\Omega \tilde{f}(x,u_k)u_{k+1}\varphi dx.\end{aligned}$$



Demonstração do Teorema 6.0.2

$$-\int_\Omega u_{k+1}\varphi \operatorname{div} \mathbf{z}_{k+1} + \int_\Omega u_{k+1}\varphi |Du_{k+1}| = \int_\Omega \tilde{f}(x,u_k)u_{k+1}\varphi dx.$$

Por (6),

$$\begin{aligned}\langle (\mathbf{z}_{k+1}, Du_{k+1}), \varphi\rangle + \int_\Omega u_{k+1}\varphi |Du_{k+1}| &= \int_\Omega \varphi \operatorname{div}(u_{k+1}\mathbf{z}_{k+1}) \\ &\quad + \int_\Omega \tilde{f}(x,u_k)u_{k+1}\varphi dx.\end{aligned}$$

Como $(\mathbf{z}_{k+1}, Du_{k+1}) = |Du_{k+1}|$, calculando o limite, quando $k \to +\infty$, usando a semicontinuidade inferior da norma de $BV(\Omega)$ com respeito à convergência de $L^1(\Omega)$ e por (32), segue que



Demonstração do Teorema 6.0.2

$$\int_\Omega \varphi |Du| \leq \int_\Omega \tilde{f}(x,u)u\varphi dx + \int_\Omega \varphi \text{div}\,(u\mathbf{z}) - \int_\Omega u\varphi |Du|$$



Demonstração do Teorema 6.0.2

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi|Du| &\leq \int_\Omega \tilde{f}(x,u)u\varphi dx + \int_\Omega \varphi \text{div}\,(u\mathbf{z}) - \int_\Omega u\varphi|Du| \\ &= \int_\Omega \varphi\left(\text{div}\,(u\mathbf{z}) - u\text{div}\,(\mathbf{z})\right) + \int_\Omega u\varphi|Du| - \int_\Omega u^\sharp\varphi|Du|\end{aligned}$$



Demonstração do Teorema 6.0.2

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi|Du| &\leq \int_\Omega \tilde{f}(x,u)u\varphi dx + \int_\Omega \varphi \text{div}\,(u\mathbf{z}) - \int_\Omega u\varphi|Du| \\ &= \int_\Omega \varphi\left(\text{div}\,(u\mathbf{z}) - u\text{div}\,(\mathbf{z})\right) + \int_\Omega u\varphi|Du| - \int_\Omega u^\sharp\varphi|Du| \\ &= \langle(\mathbf{z}, Du), \varphi\rangle,\end{aligned}$$

onde foi usado que $u^\sharp$ é igual ao representante preciso de u (lembre-se que $g(w)^\sharp$ coincide com o representante preciso se g é uma função afim).



Demonstração do Teorema 6.0.2

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi|Du| &\leq \int_\Omega \tilde{f}(x,u)u\varphi dx + \int_\Omega \varphi \text{div}\,(u\mathbf{z}) - \int_\Omega u\varphi|Du| \\ &= \int_\Omega \varphi\left(\text{div}\,(u\mathbf{z}) - u\text{div}\,(\mathbf{z})\right) + \int_\Omega u\varphi|Du| - \int_\Omega u^\sharp\varphi|Du| \\ &= \langle(\mathbf{z}, Du), \varphi\rangle,\end{aligned}$$

onde foi usado que $u^\sharp$ é igual ao representante preciso de u (lembre-se que $g(w)^\sharp$ coincide com o representante preciso se g é uma função afim). Então

$$|Du| \leq (\mathbf{z}, Du), \quad \text{em } \mathcal{M}(\Omega),$$

o que implica que de fato $(\mathbf{z}, Du) = |Du|$, já que a desigualdade contrária segue de [6][Proposition 2.1] e do fato de que $|\mathbf{z}|_\infty \leq 1$.



Demonstração do Teorema 6.0.2

Lema 6.3.5

A função u satisfaz

$$D^j u = 0.$$

Como $D^j u$ é absolutamente contínuo com respeito à medida $\mathcal{H}^{N-1}$, por [3][Section 5.9], existe uma quantidade enumerável de hipersuperfícies de classe C^1, $\{\Gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, tais que

$$\mathcal{H}^{N-1}\left(J_u \setminus \cup_{k=1}^{\infty} \Gamma_k\right) = 0.$$

Então, é suficiente mostrarmos que

$$|D^j u|(\Gamma_k) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{33}$$

Demonstração do Teorema 6.0.2

Para isso, é suficiente provar que, para todo $x_0 \in \Gamma_k$, existe um aberto U, tal que $x_0 \in U$ e

$$|D^j u|(U \cap \Gamma_k) = 0. \tag{34}$$

De fato, supondo (34), segue que, para todo compacto $K \subset \Gamma_k$, $|D^j u|(K) = 0$, o que implica em (33).

Demonstração do Teorema 6.0.2

Para isso, é suficiente provar que, para todo $x_0 \in \Gamma_k$, existe um aberto U, tal que $x_0 \in U$ e

$$|D^j u|(U \cap \Gamma_k) = 0. \tag{34}$$

De fato, supondo (34), segue que, para todo compacto $K \subset \Gamma_k$, $|D^j u|(K) = 0$, o que implica em (33).

Para mostrar (34), vamos escolher um vetor normal ν, tal que $\nu(x) = \nu_u(x)$, q.s. em $\Gamma_k \cap J_u$, com respeito à medida $\mathcal{H}^{N-1}$. Então, considere U um aberto com fronteira suave, tal que $x_0 \in U$ e $\overline{U \cap \Gamma_k} \subset \Omega$. Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x + t\nu(x) \notin \partial\Omega$, para todo $x \in U \cap \Gamma_k$ e $t \in (-1/n_0, 1/n_0)$.

Demonstração do Teorema 6.0.2

Para isso, é suficiente provar que, para todo $x_0 \in \Gamma_k$, existe um aberto U, tal que $x_0 \in U$ e

$$|D^j u|(U \cap \Gamma_k) = 0. \tag{34}$$

De fato, supondo (34), segue que, para todo compacto $K \subset \Gamma_k$, $|D^j u|(K) = 0$, o que implica em (33).

Para mostrar (34), vamos escolher um vetor normal ν, tal que $\nu(x) = \nu_u(x)$, q.s. em $\Gamma_k \cap J_u$, com respeito à medida $\mathcal{H}^{N-1}$. Então, considere U um aberto com fronteira suave, tal que $x_0 \in U$ e $\overline{U \cap \Gamma_k} \subset \Omega$. Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x + t\nu(x) \notin \partial\Omega$, para todo $x \in U \cap \Gamma_k$ e $t \in (-1/n_0, 1/n_0)$. Agora, para cada $n \geq n_0$, seja

$$U_n = \left\{ x + t\nu(x);\, x \in U \cap \Gamma_k,\, |t| < \frac{1}{n} \right\},$$

e note que

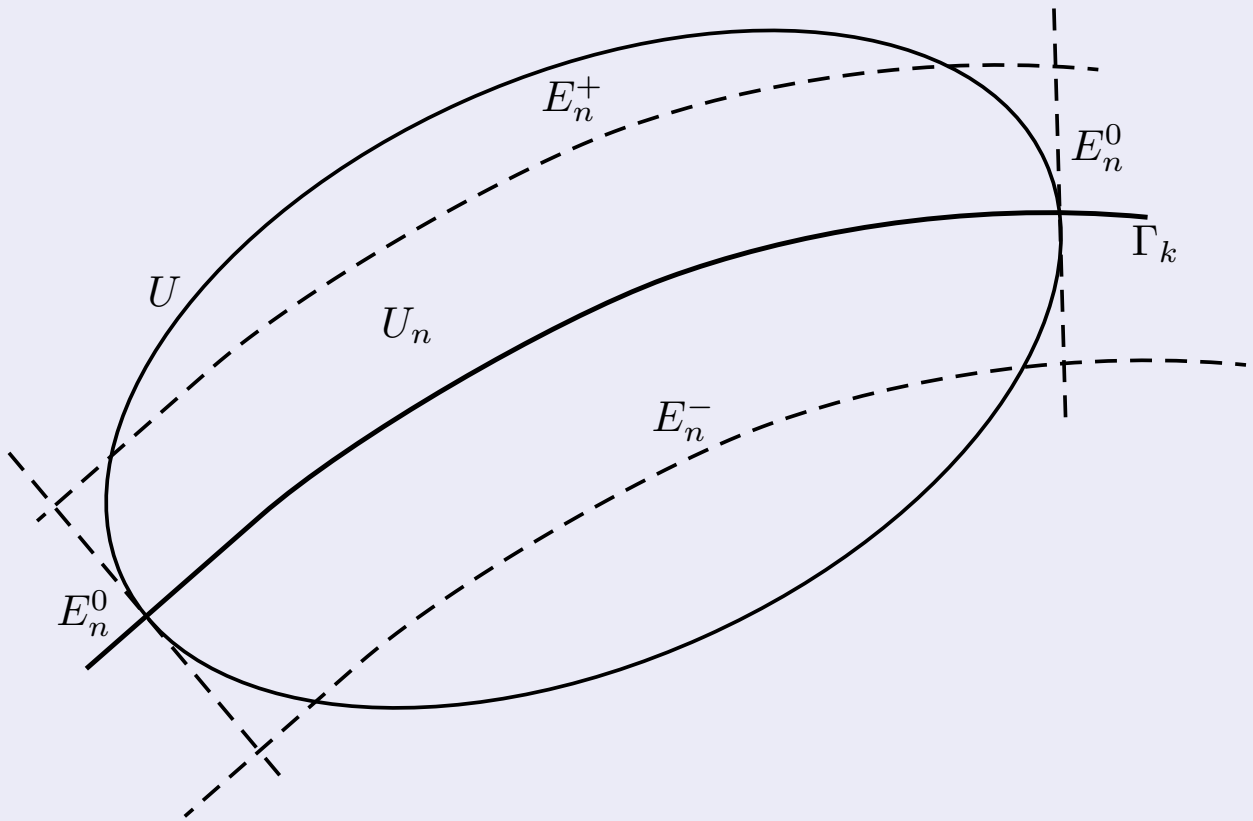
$$\bigcap_{n \geq n_0} U_n = U \cap \Gamma_k.$$

Demonstração do Teorema 6.0.2

Além disso, para uso futuro, vamos dividir ∂U_n em três partes

$$\partial U_n = E_n^+ \cup E_n^- \cup E_n^0,$$

onde $E_n^\pm \subset \left\{x \pm \frac{1}{n}\nu(x);\ x \in U \cap \Gamma_k\right\}$.



Demonstração do Teorema 6.0.2

Como a igualdade em (27) pode ser vista no sentido das medidas, segue que, depois de multiplicar ambos os lados por u^*,

$$-\int_{U_n} u^* \mathrm{div}(\mathbf{z}) + \int_{U_n} u^* |Du| = \int_{U_n} f(x,u)u dx.$$

Demonstração do Teorema 6.0.2

Como a igualdade em (27) pode ser vista no sentido das medidas, segue que, depois de multiplicar ambos os lados por u^*,

$$-\int_{U_n} u^* \mathrm{div}(\mathbf{z}) + \int_{U_n} u^* |Du| = \int_{U_n} f(x,u)u dx.$$

Pela Fórmula de Green (5) e pelo Lema 6.3.4, segue que

$$\int_{U_n} |Du| - \int_{\partial U_n} u[\mathbf{z},\eta] d\mathcal{H}^{N-1} + \int_{U_n} u^* |Du| = \int_{U_n} f(x,u)u dx,$$

Demonstração do Teorema 6.0.2

Como a igualdade em (27) pode ser vista no sentido das medidas, segue que, depois de multiplicar ambos os lados por u^*,

$$-\int_{U_n} u^* \mathrm{div}(\mathbf{z}) + \int_{U_n} u^* |Du| = \int_{U_n} f(x,u)u dx.$$

Pela Fórmula de Green (5) e pelo Lema 6.3.4, segue que

$$\int_{U_n} |Du| - \int_{\partial U_n} u[\mathbf{z},\eta] d\mathcal{H}^{N-1} + \int_{U_n} u^* |Du| = \int_{U_n} f(x,u)u dx,$$

o que implica que

$$\int_{U_n} (1+u^*)|Du| - \int_{\partial U_n} u[\mathbf{z},\eta] d\mathcal{H}^{N-1} = \int_{U_n} f(x,u)u dx, \qquad (35)$$

onde η denota o vetor normal exterior a ∂U_n.

Demonstração do Teorema 6.0.2

Para calcular o limite, quando $n \to +\infty$, vamos analisar

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\partial U_n} u[\mathbf{z}, \eta] d\mathcal{H}^{N-1},$$

uma vez que, trivialmente, vemos que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{U_n} (1+u^*)|Du| = \int_{U\cap\Gamma_k} (1+u^*)|Du| \tag{36}$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{U_n} f(x,u)u dx = \int_{U\cap\Gamma_k} f(x,u)u dx = 0. \tag{37}$$

Demonstração do Teorema 6.0.2

Para calcular o limite, quando $n \to +\infty$, vamos analisar

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\partial U_n} u[\mathbf{z}, \eta] d\mathcal{H}^{N-1},$$

uma vez que, trivialmente, vemos que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{U_n} (1+u^*)|Du| = \int_{U\cap\Gamma_k} (1+u^*)|Du| \tag{36}$$

e

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{U_n} f(x,u)udx = \int_{U\cap\Gamma_k} f(x,u)udx = 0. \tag{37}$$

Note que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{E_n^{\pm}} u[\mathbf{z}, \eta] d\mathcal{H}^{N-1} = \pm \int_{U\cap\Gamma_k} u^{\pm}[\mathbf{z}, \eta] d\mathcal{H}^{N-1},$$

Demonstração do Teorema 6.0.2

enquanto

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{E_n^0} u[\mathbf{z},\eta]d\mathcal{H}^{N-1}=0,$$

uma vez que

$$\bigcap_{n\geq n_0} E_n^0=\partial(U\cap\Gamma_k)\quad \text{e}\quad \mathcal{H}^{N-1}(\partial(U\cap\Gamma_k))=0.$$

Demonstração do Teorema 6.0.2

enquanto

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{E_n^0} u[\mathbf{z},\eta]d\mathcal{H}^{N-1}=0,$$

uma vez que

$$\bigcap_{n\geq n_0} E_n^0=\partial(U\cap\Gamma_k)\quad \text{e}\quad \mathcal{H}^{N-1}(\partial(U\cap\Gamma_k))=0.$$

Assim, segue que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\partial U_n} u[\mathbf{z},\eta]d\mathcal{H}^{N-1}=\int_{U\cap\Gamma_k}(u^+-u^-)[\mathbf{z},\eta]d\mathcal{H}^{N-1}. \tag{38}$$

Demonstração do Teorema 6.0.2

enquanto

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{E_n^0} u[\mathbf{z},\eta]d\mathcal{H}^{N-1}=0,$$

uma vez que

$$\bigcap_{n\geq n_0} E_n^0=\partial(U\cap\Gamma_k)\quad \text{e}\quad \mathcal{H}^{N-1}(\partial(U\cap\Gamma_k))=0.$$

Assim, segue que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\partial U_n} u[\mathbf{z},\eta]d\mathcal{H}^{N-1}=\int_{U\cap\Gamma_k}(u^+-u^-)[\mathbf{z},\eta]d\mathcal{H}^{N-1}. \tag{38}$$

Considerando (35), (36), (37) e (38), segue que

$$\int_{U\cap\Gamma_k}(1+u^*)|Du|=\int_{U\cap\Gamma_k}(u^+-u^-)[\mathbf{z},\eta]d\mathcal{H}^{N-1}. \tag{39}$$

Demonstração do Teorema 6.0.2

No lado esquerdo de (39), podemos substituir $|Du|$ por $|D^j u|$ uma vez que, por [1][Proposition 3.92], $D^a u$ e $D^c u$ se anulam em Γ_k. Então, (39) implica que

$$\int_{U\cap\Gamma_k}(1+u^*)|D^j u| \;=\; \int_{U\cap\Gamma_k}(1+u^*)|Du|$$

Demonstração do Teorema 6.0.2

No lado esquerdo de (39), podemos substituir $|Du|$ por $|D^j u|$ uma vez que, por [1][Proposition 3.92], $D^a u$ e $D^c u$ se anulam em Γ_k. Então, (39) implica que

$$\begin{aligned}\int_{U\cap\Gamma_k}(1+u^*)|D^j u| &= \int_{U\cap\Gamma_k}(1+u^*)|Du| \\ &\leq \left|\int_{U\cap\Gamma_k}(u^+-u^-)[\mathbf{z},\eta]d\mathcal{H}^{N-1}\right|\end{aligned}$$

Demonstração do Teorema 6.0.2

No lado esquerdo de (39), podemos substituir $|Du|$ por $|D^j u|$ uma vez que, por [1][Proposition 3.92], $D^a u$ e $D^c u$ se anulam em Γ_k. Então, (39) implica que

$$\begin{aligned}\int_{U\cap\Gamma_k}(1+u^*)|D^j u| &= \int_{U\cap\Gamma_k}(1+u^*)|Du| \\ &\leq \left|\int_{U\cap\Gamma_k}(u^+-u^-)[\mathbf{z},\eta]d\mathcal{H}^{N-1}\right| \\ &\leq \int_{U\cap\Gamma_k}|u^+-u^-|d\mathcal{H}^{N-1}\end{aligned}$$

Demonstração do Teorema 6.0.2

No lado esquerdo de (39), podemos substituir $|Du|$ por $|D^j u|$ uma vez que, por [1][Proposition 3.92], $D^a u$ e $D^c u$ se anulam em Γ_k. Então, (39) implica que

$$\begin{aligned}
\int_{U\cap\Gamma_k}(1+u^*)|D^j u| &= \int_{U\cap\Gamma_k}(1+u^*)|Du| \\
&\leq \left|\int_{U\cap\Gamma_k}(u^+-u^-)[\mathbf{z},\eta]d\mathcal{H}^{N-1}\right| \\
&\leq \int_{U\cap\Gamma_k}|u^+-u^-|d\mathcal{H}^{N-1} \\
&= \int_{U\cap\Gamma_k}|D^j u|,
\end{aligned}$$

o que implica que $\int_{U\cap\Gamma_k} u^*|D^j u| \leq 0$.

Demonstração do Teorema 6.0.2

No lado esquerdo de (39), podemos substituir $|Du|$ por $|D^j u|$ uma vez que, por [1][Proposition 3.92], $D^a u$ e $D^c u$ se anulam em Γ_k. Então, (39) implica que

$$\begin{aligned}\int_{U\cap\Gamma_k}(1+u^*)|D^j u| &= \int_{U\cap\Gamma_k}(1+u^*)|Du| \\ &\leq \left|\int_{U\cap\Gamma_k}(u^+-u^-)[\mathbf{z},\eta]d\mathcal{H}^{N-1}\right| \\ &\leq \int_{U\cap\Gamma_k}|u^+-u^-|d\mathcal{H}^{N-1} \\ &= \int_{U\cap\Gamma_k}|D^j u|,\end{aligned}$$

o que implica que $\int_{U\cap\Gamma_k} u^*|D^j u| \leq 0$. Como o integrando é não-negativo, segue que

$$u^*|D^j u|\lfloor(U\cap\Gamma_k) = 0. \tag{40}$$

Demonstração do Teorema 6.0.2

Por outro lado, levando em conta que $u^* = \frac{1}{2}(u^+ + u^-)$ em J_u, segue que

$$u^*|D^j u| = \frac{1}{2}(u^+ + u^-)(u^+ - u^-)\mathcal{H}^{N-1}\lfloor(U \cap \Gamma_k \cap J_u)$$



Demonstração do Teorema 6.0.2

Por outro lado, levando em conta que $u^* = \frac{1}{2}(u^+ + u^-)$ em J_u, segue que

$$\begin{aligned} u^*|D^j u| &= \frac{1}{2}(u^+ + u^-)(u^+ - u^-)\mathcal{H}^{N-1}\lfloor(U \cap \Gamma_k \cap J_u) \\ &= \frac{1}{2}((u^+)^2 - (u^-)^2)\mathcal{H}^{N-1}\lfloor(U \cap \Gamma_k \cap J_u). \end{aligned} \tag{41}$$



Demonstração do Teorema 6.0.2

Por outro lado, levando em conta que $u^* = \frac{1}{2}(u^+ + u^-)$ em J_u, segue que

$$\begin{aligned} u^*|D^j u| &= \frac{1}{2}(u^+ + u^-)(u^+ - u^-)\mathcal{H}^{N-1}\lfloor(U \cap \Gamma_k \cap J_u) \\ &= \frac{1}{2}((u^+)^2 - (u^-)^2)\mathcal{H}^{N-1}\lfloor(U \cap \Gamma_k \cap J_u). \end{aligned} \tag{41}$$

Finalmente, por (40) e (41) segue que $u^+ = u^-$ q.s. em $U \cap \Gamma_k \cap J_u$, com respeito à medida $\mathcal{H}^{N-1}$. Assim, pela definição de $D^j u$, temos (34).



Demonstração do Teorema 6.0.2

Lema 6.3.6

A função u se anula q.s. em $\partial\Omega$, com respeito à medida $\mathcal{H}^{N-1}$.



Demonstração do Teorema 6.0.2

Lema 6.3.6

A função u se anula q.s. em $\partial\Omega$, com respeito à medida $\mathcal{H}^{N-1}$.

Demonstração

Primeiramente, vamos usar $u^\sharp_{k+1}$ como função teste em (21), do que segue que

$$-\int_\Omega u^\sharp_{k+1}\text{div } \mathbf{z}_{k+1} + \int_\Omega u^\sharp_{k+1}|Du_{k+1}| = \int_\Omega \tilde{f}(x,u_k)u_{k+1} + o_k(1).$$

Demonstração do Teorema 6.0.2

Lema 6.3.6

A função u se anula q.s. em $\partial\Omega$, com respeito à medida $\mathcal{H}^{N-1}$.

Demonstração

Primeiramente, vamos usar $u_{k+1}^{\sharp}$ como função teste em (21), do que segue que

$$-\int_{\Omega} u_{k+1}^{\sharp}\text{div } \mathbf{z}_{k+1} + \int_{\Omega} u_{k+1}^{\sharp}|Du_{k+1}| = \int_{\Omega} \tilde{f}(x,u_k)u_{k+1} + o_k(1).$$

Pela Fórmula de Green (5) e levando em conta que $u_{k+1} = 0$ q.s. em $\partial\Omega$ com respeito à medida $\mathcal{H}^{N-1}$ e $(\mathbf{z}_{k+1}, u_{k+1}) = |Du_{k+1}|$, temos que

$$\int_{\Omega} |Du_{k+1}| + \int_{\Omega} u_{k+1}^{\sharp}|Du_{k+1}| = \int_{\Omega} \tilde{f}(x,u_k)u_{k+1} + o_k(1).$$

Demonstração do Teorema 6.0.2

Como os funcionais $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2 : BV(\Omega) \to \mathbb{R}$, dados por $\mathcal{J}_1(w) = \int_\Omega |Dw| + \int_{\partial\Omega} |w| d\mathcal{H}^{N-1}$ e $\mathcal{J}_2(w) = \int_\Omega w^\sharp |Dw| + \int_{\partial\Omega} \frac{w^2}{2} d\mathcal{H}^{N-1}$ são semicontínuos inferiormente com respeito à convergência de $L^1(\Omega)$ e $u_{k+1} \to u$ em $L^1(\Omega)$, pela Fórmula de Green (5) e (27), segue que

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1} \\ + \int_\Omega u^\sharp |Du| + \int_{\partial\Omega} \frac{u^2}{2} d\mathcal{H}^{N-1} &\leq \int_\Omega \tilde{f}(x,u) u dx \end{aligned}$$

Demonstração do Teorema 6.0.2

Como os funcionais $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2 : BV(\Omega) \to \mathbb{R}$, dados por $\mathcal{J}_1(w) = \int_\Omega |Dw| + \int_{\partial\Omega} |w| d\mathcal{H}^{N-1}$ e $\mathcal{J}_2(w) = \int_\Omega w^\sharp |Dw| + \int_{\partial\Omega} \frac{w^2}{2} d\mathcal{H}^{N-1}$ são semicontínuos inferiormente com respeito à convergência de $L^1(\Omega)$ e $u_{k+1} \to u$ em $L^1(\Omega)$, pela Fórmula de Green (5) e (27), segue que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1} & \\ + \int_\Omega u^\sharp |Du| + \int_{\partial\Omega} \frac{u^2}{2} d\mathcal{H}^{N-1} &\leq \int_\Omega \tilde{f}(x,u) u dx \\ &= -\int_\Omega u^\sharp \text{div } \mathbf{z} + \int_\Omega u^\sharp |Du| \end{aligned}$$

Demonstração do Teorema 6.0.2

Como os funcionais $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2 : BV(\Omega) \to \mathbb{R}$, dados por $\mathcal{J}_1(w) = \int_\Omega |Dw| + \int_{\partial\Omega} |w| d\mathcal{H}^{N-1}$ e $\mathcal{J}_2(w) = \int_\Omega w^\sharp |Dw| + \int_{\partial\Omega} \frac{w^2}{2} d\mathcal{H}^{N-1}$ são semicontínuos inferiormente com respeito à convergência de $L^1(\Omega)$ e $u_{k+1} \to u$ em $L^1(\Omega)$, pela Fórmula de Green (5) e (27), segue que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1} & \\ + \int_\Omega u^\sharp |Du| + \int_{\partial\Omega} \frac{u^2}{2} d\mathcal{H}^{N-1} &\leq \int_\Omega \tilde{f}(x,u) u dx \\ &= -\int_\Omega u^\sharp \text{div } \mathbf{z} + \int_\Omega u^\sharp |Du| \\ &= \int_\Omega |Du| - \int_{\partial\Omega} [\mathbf{z}, \nu] u^\sharp d\mathcal{H}^{N-1} \\ &\quad + \int_\Omega u^\sharp |Du|. \end{aligned}$$

Demonstração do Teorema 6.0.2

Então, temos que

$$\int_{\partial\Omega} \left(|u| + [\mathbf{z}, \nu] u^\sharp \right) d\mathcal{H}^{N-1} + \int_{\partial\Omega} \frac{u^2}{2} d\mathcal{H}^{N-1} \leq 0.$$

A segunda integral acima é claramente positiva, enquanto a primeira é também positiva, uma vez que

$$|[\mathbf{z}, \nu]|_\infty \leq |\mathbf{z}|_\infty \leq 1.$$

Assim, $u = 0$ q.s. em $\partial\Omega$, com respeito à medida $\mathcal{H}^{N-1}$.



Demonstração do Teorema 6.0.2

Então, temos que

$$\int_{\partial\Omega} \left(|u| + [\mathbf{z}, \nu] u^\sharp \right) d\mathcal{H}^{N-1} + \int_{\partial\Omega} \frac{u^2}{2} d\mathcal{H}^{N-1} \leq 0.$$

A segunda integral acima é claramente positiva, enquanto a primeira é também positiva, uma vez que

$$|[\mathbf{z}, \nu]|_\infty \leq |\mathbf{z}|_\infty \leq 1.$$

Assim, $u = 0$ q.s. em $\partial\Omega$, com respeito à medida $\mathcal{H}^{N-1}$.

Pelos Lemas 6.3.3, 6.3.4, 6.3.5 e 6.3.6, segue que u de fato é uma solução de (1). Assim, o Teorema 6.0.2 está demonstrado.



Table of Contents

1. Método de sub-supersolução para problemas envolvendo o operador 1-laplaciano
2. Decomposição de Du e a Regra da Cadeia
3. Resultados técnicos
4. Demonstração do Teorema 6.0.2
5. Referências bibliográficas



Bibliografia I

- L. Ambrosio, N. Fusco and D. Pallara, *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*, Oxford University Press., Oxford (2000).
- G. Anzellotti, Pairings between measures and bounded functions and compensated compactness, Ann. Mat. Pura Appl., 4, No. 135, 293 - 318 (1983).
- L. C. Evans and R. F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, Boca Raton, (1992).
- G. M. Figueiredo and M. T. O. Pimenta, *Sub-supersolution method for a quasilinear elliptic problem involving the* $1-$*Laplacian operator and a gradient term*, J. Funct. Anal., 278, No. 3, 108325 (2020).



Bibliografia II


M. Latorre and S. Segura de León, *Existence and Comparison results for an elliptic equation involving 1-Laplacian and L^1-data*, J. Evol. Equ., Vol. 18, 1-28 (2018).


J.M. Mazón and S. Segura de León, *The Dirichlet problem fo a singular elliptic equation arising in the level set formulation of the inverse mean curvature flow*, Adv. Calc.Var., Vol. 6, 123-164 (2013).


K. Perera and E.A.B. Silva, *Existence and multiplicity of positive solutions for singular quasilinear problems*, J. Math. Anal. Appl., Vol. 323, 1238 - 1252 (2006).

