Introdução à Teoria de Subvariedades

F. Fontenele

Conteúdo

1 Difeomorfismos e Isometrias **1**

2 Fórmulas Básicas das Imersões Isométricas **5**

3 Equações Fundamentais das Subvariedades **9**

4 Curvatura de Subvariedades **13**

5 Subvariedades Umbílicas **20**

6 Teoremas de Comparação da Hessiana e do Laplaciano **22**

7 Uma Caracterização de Curvatura Seccional Constante **28**

8 Hipersuperfícies Convexas **30**

9 O Princípio do Máximo de Omori e Yau **35**

10 Teoremas de Não-Imersibilidade **42**

11 Campos Tensoriais **48**

12 Fórmula de Simons **52**

1 Difeomorfismos e Isometrias

Apresentaremos nesta seção alguns resultados básicos acerca de difeomorfismos e isometrias que usaremos em seções subsequentes. Em particular, mostraremos que um difeomorfismo entre variedades diferenciáveis preserva o colchete de campos vetoriais e que uma isometria entre variedades Riemannianas preserva a conexão Riemanniana e o tensor curvatura. Começaremos a discussão com o seguinte resultado.

Proposição 1.1. *Seja $\phi : M \to N$ uma aplicação diferenciável entre variedades diferenciáveis, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\overline{X} \in \mathfrak{X}(N)$. Então $d\phi_p(X_p) = \overline{X}_{\phi(p)}$ para todo $p \in M$ se, e somente se,*

$$X(g \circ \phi) = (\overline{X}g) \circ \phi, \quad \forall g \in C^\infty(N).$$

Demonstração. As seguintes igualdades são equivalentes:

$$\begin{gathered} X(g \circ \phi) = (\overline{X}g) \circ \phi, \quad g \in C^\infty(N), \\ X(g \circ \phi)(p) = \big((\overline{X}g) \circ \phi\big)(p), \quad p \in M,\ g \in C^\infty(N), \\ X_p(g \circ \phi) = (\overline{X}g)(\phi(p)), \quad p \in M,\ g \in C^\infty(N), \\ d\phi_p(X_p)(g) = \overline{X}_{\phi(p)}(g), \quad p \in M,\ g \in C^\infty(N), \\ d\phi_p(X_p) = \overline{X}_{\phi(p)}, \quad p \in M. \end{gathered}$$

□

Como consequência da Proposição 1.1 temos o corolário abaixo. Recorde que o colchete de dois campos X e Y em uma variedade diferenciável M é o campo $[X, Y]$ em M que satisfaz

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf), \quad \forall f \in C^\infty(M). \tag{1.1}$$

Corolário 1.2. *Seja $\phi : M \to N$ uma aplicação diferenciável entre variedades diferenciáveis, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\overline{X}, \overline{Y} \in \mathfrak{X}(N)$. Se $d\phi_p(X_p) = \overline{X}_{\phi(p)}$ e $d\phi_p(Y_p) = \overline{Y}_{\phi(p)}$ para todo $p \in M$, então*

$$d\phi_p([X, Y]_p) = [\overline{X}, \overline{Y}]_{\phi(p)}, \quad p \in M. \tag{1.2}$$

Demonstração. Pela Proposição 1.1,

$$\begin{aligned} [X, Y](g \circ \phi) &= X(Y(g \circ \phi)) - Y(X(g \circ \phi)) \\ &= X((\overline{Y}g) \circ \phi) - Y((\overline{X}g) \circ \phi) \\ &= \{\overline{X}(\overline{Y}g) - \overline{Y}(\overline{X}g)\} \circ \phi \\ &= ([\overline{X}, \overline{Y}]g) \circ \phi, \end{aligned}$$

para todo $g \in C^\infty(N)$. Usando novamente a Proposição 1.1, obtém-se (1.2). □

Dados um difeomorfismo $\phi : M \to N$ entre variedades diferenciáveis e um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, denotaremos por $d\phi(X)$ o campo em $\mathfrak{X}(N)$ definido por

$$d\phi(X)_{\phi(p)} = d\phi_p(X_p). \tag{1.3}$$

O campo $d\phi(X)$ é de fato diferenciável, pois, pela Proposição 1.1,

$$d\phi(X)g = X(g \circ \phi) \circ \phi^{-1} \in C^\infty(N), \quad g \in C^\infty(N).$$

De (1.3) e Corolário 1.2 obtemos imediatamente o seguinte resultado:

Corolário 1.3. *Se $\phi : M \to N$ é um difeomorfismo, então*

$$[d\phi(X), d\phi(Y)] = d\phi([X, Y]), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{1.4}$$

Seja (M, g_M) e (N, g_N) variedades Riemannianas. Uma *isometria* entre M e N é um difeomorfismo $\phi : M \to N$ que preserva a métrica, ou seja, $\phi^\star(g_N) = g_M$. Como ϕ é um difeomorfismo, cada aplicação diferencial $d\phi_p : T_pM \to T_{\phi(p)}N$ é um isomorfismo linear. Assim, a condição métrica significa que cada $d\phi_p$ é uma isometria linear.

Uma propriedade importante das isometrias é que elas preservam a conexão de Levi-Civita:

Proposição 1.4. *Se $\phi : M \to N$ é uma isometria, então*

$$d\phi(\nabla_V W) = \nabla_{d\phi(V)} d\phi(W), \quad V, W \in \mathfrak{X}(M), \tag{1.5}$$

onde estamos usando o mesmo símbolo, ∇, para denotar as conexões Riemannianas de ambos M e N.

Demonstração. Denote tanto a métrica Riemanniana de M quanto a de N pelo símbolo $\langle , \rangle$. Como ϕ é uma isometria, temos por (1.3)

$$\langle d\phi(W), d\phi(X)\rangle(\phi(p)) = \langle d\phi_p(W_p), d\phi_p(X_p)\rangle = \langle W_p, X_p\rangle = \langle W, X\rangle(p),$$

para todos $W, X \in \mathfrak{X}(M)$ e todo $p \in M$. Assim,

$$\langle W, X\rangle = \langle d\phi(W), d\phi(X)\rangle \circ \phi, \quad W, X \in \mathfrak{X}(M). \tag{1.6}$$

Logo,

$$\begin{aligned} d\phi(V)\langle d\phi(W), d\phi(X)\rangle(\phi(p)) &= d\phi(V)_{\phi(p)}(\langle d\phi(W), d\phi(X)\rangle) \\ &= d\phi_p(V_p)(\langle d\phi(W), d\phi(X)\rangle) \\ &= V_p(\langle d\phi(W), d\phi(X)\rangle \circ \phi) \\ &= V_p(\langle W, X\rangle) \\ &= (V\langle W, X\rangle)(p), \end{aligned}$$

e, então,

$$V\langle W, X\rangle = (d\phi(V)\langle d\phi(W), d\phi(X)\rangle) \circ \phi, \quad V, W, X \in \mathfrak{X}(M). \tag{1.7}$$

Por outro lado, por (1.6) e Corolário 1.3 temos

$$\langle V, [W, X]\rangle = \langle d\phi(V), d\phi([W, X])\rangle \circ \phi = \langle d\phi(V), [d\phi(W), d\phi(X)]\rangle \circ \phi. \tag{1.8}$$

Logo, por (1.6), (1.7), (1.8) e a fórmula de Koszul,

$$\begin{aligned} 2\langle d\phi(\nabla_V W), d\phi(X)\rangle \circ \phi &= 2\langle \nabla_V W, X\rangle \\ &= V\langle W, X\rangle + W\langle X, V\rangle - X\langle V, W\rangle \\ &\quad -\langle V, [W, X]\rangle + \langle W, [X, V]\rangle + \langle X, [V, W]\rangle \\ &= \{d\phi(V)\langle d\phi(W), d\phi(X)\rangle + d\phi(W)\langle d\phi(X), d\phi(V)\rangle \\ &\quad -d\phi(X)\langle d\phi(V), d\phi(W)\rangle - \langle d\phi(V), [d\phi(W), d\phi(X)]\rangle \\ &\quad +\langle d\phi(W), [d\phi(X), d\phi(V)]\rangle + \langle d\phi(X), [d\phi(V), d\phi(W)]\rangle\} \circ \phi \\ &= 2\langle \nabla_{d\phi(V)} d\phi(W), d\phi(X)\rangle \circ \phi. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle d\phi(\nabla_V W), d\phi(X)\rangle = \langle \nabla_{d\phi(V)} d\phi(W), d\phi(X)\rangle.$$

Como a igualdade acima vale para todos $X, V, W \in \mathfrak{X}(M)$, conclui-se que

$$d\phi(\nabla_V W) = \nabla_{d\phi(V)} d\phi(W), \quad V, W \in \mathfrak{X}(M).$$

□

Como consequência do Corolário 1.3 e Proposição 1.4 temos o seguinte resultado:

Proposição 1.5. *Se $\phi : M \to N$ é uma isometria entre variedades Riemannianas, então*

$$\mathcal{R}_N(d\phi(X), d\phi(Y))d\phi(Z) = d\phi(\mathcal{R}_M(X, Y)Z), \tag{1.9}$$

onde $\mathcal{R}_N$ e $\mathcal{R}_M$ são os tensores curvatura de N e de M, respectivamente.

Definição 1.6. Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável definida em uma variedade Riemanniana $(M, \langle , \rangle)$. A *Hessiana* de f é a aplicação $\operatorname{Hess} f : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ dada por

$$\operatorname{Hess} f(X, Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y\rangle, \tag{1.10}$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M e ∇f é o gradiente de f.

Como claramente $\operatorname{Hess} f$ é bilinear sobre $C^\infty(M)$, para todo $p \in M$ e todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, o valor de $\operatorname{Hess} f(X, Y)$ em p depende apenas de X_p e Y_p. Assim, em cada ponto $p \in M$ temos uma aplicação bilinear $\operatorname{Hess} f_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$, chamada a *Hessiana de f em p*. A proposição a seguir mostra que essa aplicação é simétrica.

Proposição 1.7. *Se $(M, \langle , \rangle)$ é uma variedade Riemanniana e $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então* $\operatorname{Hess} f$ *é simétrica.*

Demonstração. Para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\operatorname{Hess} f(Y, X) = \langle \nabla_X \nabla f, Y\rangle = X\langle \nabla f, Y\rangle - \langle \nabla f, \nabla_X Y\rangle = X(Yf) - \langle \nabla f, \nabla_X Y\rangle.$$

Analogamente, temos

$$\operatorname{Hess} f(X, Y) = Y(Xf) - \langle \nabla f, \nabla_Y X\rangle.$$

Das duas igualdades cima, obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{Hess} f(Y, X) - \operatorname{Hess} f(X, Y) &= X(Yf) - Y(Xf) - \langle \nabla f, \nabla_X Y - \nabla_Y X\rangle. \\ &= [X, Y]f - \langle \nabla f, [X, Y]\rangle \\ &= 0. \end{aligned} \tag{1.11}$$

□

Encerraremos esta seção com o seguinte resultado, que informalmente diz que o gradiente e a Hessiana de uma função são preservados por uma isometria.

Proposição 1.8. *Seja $\phi : M \to N$ uma isometria e $f \in C^\infty(N)$. Então*

(i) $\nabla f = d\phi(\nabla(f \circ \phi))$.

(ii) $\text{Hess}\,(f \circ \phi)_p(v, w) = \text{Hess}\, f_{\phi(p)}(d\phi_p(v), d\phi_p(w)), \quad p \in M, \;\; v, w \in T_pM$.

Demonstração. (i) Usaremos o símbolo $\langle , \rangle$ para indicar as métricas Riemannianas de ambos M e N. Como ϕ é uma isometria, para todos $p \in M$ e $v \in T_pM$ temos

$$\begin{aligned} \langle d\phi_p(\nabla(f \circ \phi)(p)), d\phi_p(v)\rangle &= \langle \nabla(f \circ \phi)(p), v\rangle = v(f \circ \phi) \\ &= d\phi_p(v)(f) = \langle \nabla f(\phi(p)), d\phi_p(v)\rangle. \end{aligned}$$

Logo

$$d\phi(\nabla(f \circ \phi))(\phi(p)) = d\phi_p(\nabla(f \circ \phi)(p)) = \nabla f(\phi(p)), \quad p \in M,$$

o que prova (i).

(ii) Seja $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ tais que $X(p) = v$ e $Y(p) = w$. Por (i) e Proposição 1.4,

$$\begin{aligned} \text{Hess}\,(f \circ \phi)(X, Y) &= \langle \nabla_Y \nabla(f \circ \phi), X\rangle = \langle d\phi(\nabla_Y \nabla(f \circ \phi)), d\phi(X)\rangle \circ \phi \\ &= \langle \nabla_{d\phi(Y)} \nabla f, d\phi(X)\rangle \circ \phi = (\text{Hess}\, f(d\phi(X), d\phi(Y))) \circ \phi. \end{aligned}$$

Avaliando a igualdade acima em p, obtemos (ii). □

2 Fórmulas Básicas das Imersões Isométricas

Apresentaremos nesta seção os conceitos elementares e as fórmulas básicas da teoria de subvariedades que serão usados ao longo destas notas.

Definição 2.1. Uma imersão $\phi : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ entre variedades Riemannianas é chamada *isométrica* se

$$\langle d\phi_p(v), d\phi_p(w)\rangle = \langle v, w\rangle, \tag{2.1}$$

para todo $p \in M^n$ e todos $v, w \in T_pM$, onde o símbolo $\langle , \rangle$ designa as métricas Riemannianas de ambos M^n e $\overline{M}^{n+k}$.

Se $\phi : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ é uma imersão de uma variedade diferenciável M^n em uma variedade Riemanniana $\overline{M}^{n+k}$, a igualdade (2.1) define uma métrica em M^n, isto é, um produto interno em cada espaço tangente T_pM que varia diferenciavelmente com $p \in M$. Munindo M^n com essa métrica, chamada a *métrica induzida* por ϕ, a imersão torna-se isométrica.

No que segue relacionaremos a conexão Riemanniana de M^n com a de $\overline{M}^{n+k}$, e definiremos a segunda forma fundamental de M^n. Como essa discussão é local, para simplificar

a notação assumiremos que M^n está mergulhada em $\overline{M}^{n+k}$ e que ϕ é a aplicação de inclusão $j : M \to \overline{M}$.

Para cada $p \in M$, a aplicação diferencial $dj_p : T_pM \to T_p\overline{M}$ é um isomorfismo linear. Identificando T_pM com sua imagem $dj_p(T_pM)$ por esse isomorfismo, T_pM torna-se um subespaço linear de $T_p\overline{M}$. Denotando por $T_pM^\perp$ o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$, cada vetor $v \in T_p\overline{M}$ pode ser escrito de maneira única como a soma

$$v = v^T + v^\perp, \tag{2.2}$$

onde $v^T \in T_pM$ e $v^\perp \in T_pM^\perp$.

Definição 2.2. Um *campo ao longo de* M é uma aplicação $V : M \to T\overline{M}$ tal que $V_p = V(p) \in T_p\overline{M}$, para todo $p \in M$. Dizemos que V é diferenciável se $f \in C^\infty(\overline{M})$ implica $Vf \in C^\infty(M)$, onde Vf é a função definida por $(Vf)(p) = V_p(f)$.

Como se pode verificar facilmente, o conjunto $\overline{\mathfrak{X}}(M)$ de todos os campos diferenciáveis ao longo de M é um módulo sobre $C^\infty(M)$.

Para todo $Y \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, a restrição $Y|_M = Y \circ j$ de Y a M pertence a $\overline{\mathfrak{X}}(M)$, uma vez que $(Y|_M)f = (Yf)|_M$ para todo $f \in C^\infty(\overline{M})$. Todo campo $V \in \mathfrak{X}(M)$ pertence a $\overline{\mathfrak{X}}(M)$, pois $Vf = V(f|_M) \in C^\infty(M)$ para todo $f \in C^\infty(\overline{M})$. Assim, $\mathfrak{X}(M)$ é um submódulo de $\overline{\mathfrak{X}}(M)$.

Um campo vetorial $Z \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$ é *normal* a M se $Z_p \in T_pM^\perp$ para todo $p \in M$. É fácil ver que o conjunto $\mathfrak{X}(M)^\perp$ de todos os tais campos é um submódulo de $\overline{\mathfrak{X}}(M)$.

Dado um campo $Z \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$, tomando em cada ponto as componentes tangente e normal a M obtemos campos $Z^T \in \mathfrak{X}(M)$ e $Z^\perp \in \mathfrak{X}(M)^\perp$. Um cálculo utilizando sistemas de coordenadas adaptados mostra que Z^T e $Z^\perp$ são de fato diferenciáveis. As projeções ortogonais resultantes $\overline{\mathfrak{X}}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ e $\overline{\mathfrak{X}}(M) \to \mathfrak{X}(M)^\perp$ são $C^\infty(M)$-lineares.

A conexão Riemanniana $\overline{\nabla}$ de $\overline{M}$ fornece de maneira natural uma aplicação

$$\overline{\nabla} : \mathfrak{X}(M) \times \overline{\mathfrak{X}}(M) \to \overline{\mathfrak{X}}(M),$$

chamada a *conexão induzida* em $M \subset \overline{M}$. Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Z \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$, então $\overline{\nabla}_X Z$ não tem ainda significado, pois X e Z não estão em $\mathfrak{X}(\overline{M})$. Contudo, para cada $p \in M$ podemos considerar extensões locais diferenciáveis $\overline{X}$ e $\overline{Z}$ de X e Z a uma vizinhança U de p em $\overline{M}$, e definir $\overline{\nabla}_X Z$ em $U \cap M$ como a restrição de $\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z}$ a $U \cap M$.

Lema 2.3. *$\overline{\nabla}_X Z$ está bem definido e pertence a $\overline{\mathfrak{X}}(M)$.*

Demonstração. Seja $\overline{Z} = \sum_i f^i \partial_i$ a expressão de $\overline{Z}$ em termos de um sistema de coordenadas em U. Então

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z} = \sum_i (\overline{X} f^i)\partial_i + \sum_i f^i \overline{\nabla}_{\overline{X}} \partial_i.$$

Em $q \in U \cap M$, temos

$$(\overline{X} f^i)(q) = \overline{X}_q(f^i) = X_q(f^i) = X_q(f^i|_{U\cap M})$$

e

$$\overline{\nabla}_{\overline{X}}\partial_i(q) = \overline{\nabla}_{\overline{X}_q}\partial_i = \overline{\nabla}_{X_q}\partial_i.$$

As três igualdades anteriores mostram que a restrição de $\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z}$ a $U \cap M$ depende somente de X e Z. Logo, $\overline{\nabla}_X Z$ está bem definida.

Sendo a restrição do campo (diferenciável) $\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Z}$ a $U \cap M$, $(\overline{\nabla}_X Z)|_{U\cap M}$ é diferenciável. Como U é arbitrário, $\overline{\nabla}_X Z$ é diferenciável. □

A proposição a seguir diz que a conexão induzida $\overline{\nabla} : \mathfrak{X}(M) \times \overline{\mathfrak{X}}(M) \to \overline{\mathfrak{X}}(M)$ em $M \subset \overline{M}$ pela conexão Riemanniana de $\overline{M}$ possui as cinco propriedades de uma conexão de Levi-Civita.

Proposição 2.4. *Se $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ e $X, Y \in \overline{\mathfrak{X}}(M)$, então*

(1) $\overline{\nabla}_V X$ é $C^\infty(M)$-linear em V.
(2) $\overline{\nabla}_V X$ é $\mathbb{R}$-linear em X.
(3) $\overline{\nabla}_V(fX) = (Vf)X + f\overline{\nabla}_V X, \quad \forall f \in C^\infty(M)$.
(4) $[V, W] = \overline{\nabla}_V W - \overline{\nabla}_W V$.
(5) $V\langle X, Y\rangle = \langle \overline{\nabla}_V X, Y\rangle + \langle X, \overline{\nabla}_V Y\rangle$.

Demonstração. Dado $p \in M$, estenda todos os campos vetoriais e funções a uma vizinhança de p em $\overline{M}$. As cinco propriedades acima decorrem das correspondentes propriedades da conexão Riemanniana de $\overline{M}$ e do Corolário 1.2. □

Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, a derivada covariante $\overline{\nabla}_X Y$ não necessariamente é tangente a M. Assim, é natural perguntar o que são $\{\overline{\nabla}_X Y\}^T$ e $\{\overline{\nabla}_X Y\}^\perp$.

Proposição 2.5. *Seja M uma subvariedade de uma variedade Riemanniana $\overline{M}$. Denote por $\overline{\nabla}$ a conexão Riemanniana de $\overline{M}$ e por ∇ a conexão Riemanniana de M com a métrica induzida de $\overline{M}$. Então, para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,*

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^T.$$

Demonstração. Dados um campo vetorial arbitrário $Z \in \mathfrak{X}(M)$ e um ponto $p \in M$, estenda localmente X, Y, Z a campos $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ em uma vizinhança aberta U de p em $\overline{M}$. Pela fórmula de Koszul,

$$\begin{aligned} 2\langle \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}, \overline{Z}\rangle &= \overline{X}\langle \overline{Y}, \overline{Z}\rangle + \overline{Y}\langle \overline{Z}, \overline{X}\rangle - \overline{Z}\langle \overline{X}, \overline{Y}\rangle \\ &\quad -\langle \overline{X}, [\overline{Y}, \overline{Z}]\rangle + \langle \overline{Y}, [\overline{Z}, \overline{X}]\rangle + \langle \overline{Z}, [\overline{X}, \overline{Y}]\rangle. \end{aligned}$$

Cada termo no lado direito da equação acima é uma extensão local do correspondente termo envolvendo X, Y e Z. Então, restringindo a $U \cap M$ os dois lados da igualdade acima obtemos

$$\begin{aligned} 2\langle \overline{\nabla}_X Y, Z\rangle &= X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle X, [Y, Z]\rangle + \langle Y, [Z, X]\rangle + \langle Z, [X, Y]\rangle \\ &= 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle. \end{aligned}$$

Como Z é tangente a M, conclui-se que $(\overline{\nabla}_X Y)^T = \nabla_X Y$ em $U \cap M$. Como p é arbitrário, a proposição está demonstrada. □

Proposição 2.6. *A aplicação* $\sigma : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)^\perp$ *definida por*

$$\sigma(X, Y) = (\overline{\nabla}_X Y)^\perp \tag{2.3}$$

é $C^\infty(M)$*-bilinear e simétrica.*

Demonstração. Como $\overline{\nabla}_X Y$ é $C^\infty(M)$-linear em X, $\sigma(X, Y)$ também o é. A linearidade em Y decorre do item (3) da Proposição 2.4:

$$\sigma(X, fY) = \{\overline{\nabla}_X(fY)\}^\perp = \{(Xf)Y + f\overline{\nabla}_X Y\}^\perp = f\{\overline{\nabla}_X Y\}^\perp = f\sigma(X, Y).$$

Que σ é simétrica é uma consequência imediata do item (4) da Proposição 2.4:

$$\sigma(X, Y) - \sigma(Y, X) = \{\overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X\}^\perp = \{[X, Y]\}^\perp = 0.$$

□

Definição 2.7. A aplicação σ dada por (2.3) é chamada a *segunda forma fundamental* de $M \subset \overline{M}$.

Embora σ não seja um tensor na verdadeira acepção da palavra, pois toma valores em $\mathfrak{X}(M)^\perp$ e não em $\mathfrak{X}(M)$, sua bilinearidade sobre $C^\infty(M)$ implica que para todo $p \in M$ e todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\sigma(X, Y)(p)$ depende somente de X_p e Y_p. Assim σ determina, em cada ponto $p \in M$, uma aplicação bilinear simétrica

$$\sigma_p : T_pM \times T_pM \to T_pM^\perp, \tag{2.4}$$

chamada a *segunda forma fundamental de* $M \subset \overline{M}$ *em* p.

De (2.3) e Proposição 2.5 obtemos a igualdade

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sigma(X, Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M), \tag{2.5}$$

a qual é conhecida como a *fórmula de Gauss*.

As duas proposições anteriores referem-se às componentes tangente e normal a M do campo $\overline{\nabla}_X Y$, no caso em que X e Y são ambos tangentes a M. Consideraremos agora as componentes tangente e normal de $\overline{\nabla}_X \xi$ quando $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi \in \mathfrak{X}(M)^\perp$.

Definição 2.8. A aplicação $\nabla^\perp : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^\perp \to \mathfrak{X}(M)^\perp$ definida por

$$\nabla^\perp_X \xi = (\overline{\nabla}_X \xi)^\perp, \tag{2.6}$$

é chamada a *conexão normal* de $M \subset \overline{M}$.

A proposição a seguir, que decorre diretamente da Proposição 2.4, justifica o nome dado a $\nabla^\perp$.

Proposição 2.9. *A aplicação $\nabla^\perp : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^\perp \to \mathfrak{X}(M)^\perp$ possui as seguintes propriedades:*

(1) $\nabla^\perp_X \xi$ é $C^\infty(M)$-linear em X.
(2) $\nabla^\perp_X \xi$ é $\mathbb{R}$-linear em ξ.
(3) $\nabla^\perp_X (f\xi) = (Xf)\xi + f\nabla^\perp_X \xi$, para todo $f \in C^\infty(M)$.
(4) $X\langle \xi, \eta\rangle = \langle \nabla^\perp_X \xi, \eta\rangle + \langle \xi, \nabla^\perp_X \eta\rangle$, para todos $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)^\perp$.

Definição 2.10. Dado um campo $\xi \in \mathfrak{X}(M)^\perp$, a aplicação $A_\xi : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ definida por

$$A_\xi X = -(\overline{\nabla}_X \xi)^T, \tag{2.7}$$

é chamada o *operador de forma* de $M \subset \overline{M}$ relativo a ξ.

De (2.6) e (2.7) obtemos a igualdade

$$\overline{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla^\perp_X \xi, \quad X \in \mathfrak{X}(M),\ \xi \in \mathfrak{X}(M)^\perp, \tag{2.8}$$

a qual é conhecida como a *fórmula de Weingarten*.

É fácil relacionar a segunda forma fundamental σ de uma subvariedade $M \subset \overline{M}$ com o operador de forma A_ξ relativo a um campo normal ξ. De fato, para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ temos, pela Proposição 2.4 e definições de σ e A_ξ,

$$\begin{aligned} 0 = X\langle \xi, Y\rangle = \langle \overline{\nabla}_X \xi, Y\rangle + \langle \xi, \overline{\nabla}_X Y\rangle &= \langle (\overline{\nabla}_X \xi)^T, Y\rangle + \langle \xi, (\overline{\nabla}_X Y)^\perp\rangle \\ &= \langle -A_\xi X, Y\rangle + \langle \xi, \sigma(X,Y)\rangle, \end{aligned}$$

de onde obtemos

$$\langle \sigma(X,Y), \xi\rangle = \langle A_\xi X, Y\rangle. \tag{2.9}$$

Segue imediatamente da igualdade acima e da bilinearidade de σ sobre $C^\infty(M)$ (cf. Proposição 2.6) que, para todos $p \in M$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi \in \mathfrak{X}(M)^\perp$, $(A_\xi X)(p)$ depende somente de X_p e ξ_p. Logo, para cada $p \in M$ e cada $\xi_0 \in T_pM^\perp$, podemos definir uma aplicação linear $A_{\xi_0} : T_pM \to T_pM$ por $A_{\xi_0}(v) = (A_\xi X)(p)$, onde $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi \in \mathfrak{X}(M)^\perp$ são quaisquer campos tais que $X_p = v$ e $\xi_p = \xi_0$. Por (2.9) e simetria de σ, A_{ξ_0} é um operador linear auto-adjunto.

3 Equações Fundamentais das Subvariedades

Nesta seção usaremos as fórmulas de Gauss e de Weingarten (cf. formulas (2.5) e (2.8)) para deduzir as três equações fundamentais de uma imersão isométrica $\phi : M^n \to \overline{M}^{n+k}$, a saber, as equações de Gauss, Codazzi e Ricci. Como na seção anterior, para simplificar a notação assumiremos que M^n está mergulhada em $\overline{M}^{n+k}$ e que ϕ é a inclusão de M^n em $\overline{M}^{n+k}$.

Seja $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Pela fórmula de Gauss,

$$\overline{\nabla}_Y Z = \nabla_Y Z + \sigma(Y, Z),$$

onde ∇ e $\overline{\nabla}$ são as conexões Riemannianas de M e $\overline{M}$, respectivamente, e σ é a segunda forma fundamental de M. Derivando em $\overline{M}$ a igualdade acima em relação a X, e usando as fórmulas de Gauss e Weingarten, obtemos

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z &= \overline{\nabla}_X \nabla_Y Z + \overline{\nabla}_X \sigma(Y, Z) \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z + \sigma(X, \nabla_Y Z) - A_{\sigma(Y,Z)} X + \nabla^\perp_X \sigma(Y, Z). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Da mesma forma, prova-se que

$$\overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z = \nabla_Y \nabla_X Z + \sigma(Y, \nabla_X Z) - A_{\sigma(X,Z)} Y + \nabla^\perp_Y \sigma(X, Z). \tag{3.2}$$

Usando novamente a fórmula de Gauss, obtemos

$$\overline{\nabla}_{[X,Y]} Z = \nabla_{[X,Y]} Z + \sigma([X, Y], Z). \tag{3.3}$$

Denote por R e $\overline{R}$ os tensores curvatura de M e $\overline{M}$, respectivamente. Por (3.1), (3.2) e (3.3),

$$\begin{aligned} \overline{R}(X, Y)Z &= \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_{[X,Y]} Z \\ &= R(X, Y)Z + \sigma(X, \nabla_Y Z) - A_{\sigma(Y,Z)} X + \nabla^\perp_X \sigma(Y, Z) \\ &\quad -\sigma(Y, \nabla_X Z) + A_{\sigma(X,Z)} Y - \nabla^\perp_Y \sigma(X, Z) - \sigma([X, Y], Z). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Tomando a componente tangente a M nos dois lados da igualdade acima, obtemos

$$\{\overline{R}(X, Y)Z\}^T = R(X, Y)Z - A_{\sigma(Y,Z)} X + A_{\sigma(X,Z)} Y. \tag{3.5}$$

Fazendo o produto interno com um campo $W \in \mathfrak{X}(M)$, e usando (2.9), concluimos que

$$\langle \overline{R}(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(X, Y)Z, W \rangle - \langle \sigma(X, W), \sigma(Y, Z) \rangle + \langle \sigma(X, Z), \sigma(Y, W) \rangle. \tag{3.6}$$

Qualquer uma das fórmulas (3.5) e (3.6) é chamada a *equação de Gauss*.

Segue de (3.6) que, para todo $p \in M$ e todo par ortonormal v, w em $T_p M$,

$$K(v, w) = \overline{K}(v, w) + \langle \sigma(v, v), \sigma(w, w) \rangle - ||\sigma(v, w)||^2, \tag{3.7}$$

onde $K(v, w)$ e $\overline{K}(v, w)$ denotam as curvaturas seccionais de M e $\overline{M}$, respectivamente, segundo o plano gerado por v e w.

Tomando a componente normal a M nos dois lados de (3.4), obtemos

$$\begin{aligned} \{\overline{R}(X, Y)Z\}^\perp &= \sigma(X, \nabla_Y Z) + \nabla^\perp_X \sigma(Y, Z) - \sigma(Y, \nabla_X Z) - \nabla^\perp_Y \sigma(X, Z) - \sigma([X, Y], Z) \\ &= (\nabla^\perp_X \sigma)(Y, Z) - (\nabla^\perp_Y \sigma)(X, Z), \end{aligned} \tag{3.8}$$

onde

$$(\nabla^\perp_X \sigma)(Y,Z) = \nabla^\perp_X \sigma(Y,Z) - \sigma(\nabla_X Y, Z) - \sigma(Y, \nabla_X Z). \tag{3.9}$$

A igualdade (3.8) é chamada a *equação de Codazzi*. Segue facilmente da bilinearidade de σ sobre $C^\infty(M)$ que $\nabla\sigma(Y,Z,X) := (\nabla^\perp_X \sigma)(Y,Z)$ é trilinear sobre $C^\infty(M)$.

Para deduzir a terceira equação fundamental das imersões isométricas, considere campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi \in \mathfrak{X}(M)^\perp$. Pela fórmula de Weingarten (cf. (2.8))

$$\overline{\nabla}_Y \xi = -A_\xi Y + \nabla^\perp_Y \xi.$$

Derivando em relação a X, e usando as fórmulas de Gauss e de Weingarten, obtemos

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y \xi &= -\overline{\nabla}_X A_\xi Y + \overline{\nabla}_X \nabla^\perp_Y \xi \\ &= -\nabla_X A_\xi Y - \sigma(X, A_\xi Y) + \nabla^\perp_X \nabla^\perp_Y \xi - A_{\nabla^\perp_Y \xi} X. \end{aligned}$$

Analogamente, prova-se que

$$\overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X \xi = -\nabla_Y A_\xi X - \sigma(Y, A_\xi X) + \nabla^\perp_Y \nabla^\perp_X \xi - A_{\nabla^\perp_X \xi} Y.$$

Usando novamente a fórmula de Weingarten, obtém-se

$$\overline{\nabla}_{[X,Y]} \xi = \nabla^\perp_{[X,Y]} \xi - A_\xi [X,Y].$$

Das três igualdades anteriores, obtemos

$$\begin{aligned} \overline{R}(X,Y)\xi &= \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y \xi - \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X \xi - \overline{\nabla}_{[X,Y]} \xi \\ &= R^\perp(X,Y)\xi - \nabla_X A_\xi Y - \sigma(X, A_\xi Y) - A_{\nabla^\perp_Y \xi} X \\ &\quad + \nabla_Y A_\xi X + \sigma(Y, A_\xi X) + A_{\nabla^\perp_X \xi} Y + A_\xi [X,Y], \end{aligned} \tag{3.10}$$

onde

$$R^\perp(X,Y)\xi := \nabla^\perp_X \nabla^\perp_Y \xi - \nabla^\perp_Y \nabla^\perp_X \xi - \nabla^\perp_{[X,Y]} \xi \tag{3.11}$$

é chamado o *tensor curvatura do fibrado normal* de M. Segue facilmente das propriedades da conexão normal $\nabla^\perp$ (cf. Proposição 2.9) que $R^\perp$ é trilinear sobre $C^\infty(M)$.

Tomando a componente normal a M em cada lado de (3.10), obtemos

$$\{\overline{R}(X,Y)\xi\}^\perp = R^\perp(X,Y)\xi - \sigma(X, A_\xi Y) + \sigma(Y, A_\xi X). \tag{3.12}$$

Fazendo o produto interno com um campo $\eta \in \mathfrak{X}(M)^\perp$, concluimos que

$$\begin{aligned} \langle \overline{R}(X,Y)\xi, \eta \rangle &= \langle R^\perp(X,Y)\xi, \eta \rangle + \langle A_\eta A_\xi X, Y \rangle - \langle A_\xi A_\eta X, Y \rangle \\ &= \langle R^\perp(X,Y)\xi, \eta \rangle - \langle [A_\xi, A_\eta] X, Y \rangle, \end{aligned} \tag{3.13}$$

onde $[A_\xi, A_\eta] = A_\xi A_\eta - A_\eta A_\xi$. Qualquer uma das igualdades (3.12) e (3.13) é chamada a *equação de Ricci*.

Se tomarmos a componente tangente a M em cada lado de (3.10) reobteremos a equação de Codazzi. De fato, como

$$\langle\{\overline{R}(X,Y)\xi\}^T, Z\rangle = -\langle\{\overline{R}(X,Y)Z\}^\perp, \xi\rangle,$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi \in \mathfrak{X}(M)^\perp$, toda informação contida em $\{\overline{R}(X,Y)\xi\}^T$ já é fornecida por $\{\overline{R}(X,Y)Z\}^\perp$.

Por conveniência, reunimos a seguir as três equações fundamentais das imersões isométricas.

Equações de Gauss, Codazzi e Ricci (caso geral):

$$\begin{cases} \langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle\overline{R}(X,Y)Z,W\rangle + \langle\sigma(X,W),\sigma(Y,Z)\rangle - \langle\sigma(X,Z),\sigma(Y,W)\rangle, \\ \{\overline{R}(X,Y)Z\}^\perp = (\nabla^\perp_X\sigma)(Y,Z) - (\nabla^\perp_Y\sigma)(X,Z), \\ \langle\overline{R}(X,Y)\xi,\eta\rangle = \langle R^\perp(X,Y)\xi,\eta\rangle - \langle[A_\xi,A_\eta]X,Y\rangle. \end{cases} \tag{3.14}$$

No caso em que o ambiente $\overline{M}^{n+k}$ tem curvatura seccional constante c, o tensor curvatura $\overline{R}$ de $\overline{M}$ é dado por

$$\overline{R}(X,Y)Z = c\{\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y\}. \tag{3.15}$$

Nesse caso, as equações (3.14) tornam-se:

Equações de Gauss, Codazzi e Ricci (ambiente com curvatura constante c):

$$\begin{cases} \langle R(X,Y)Z,W\rangle = c\{\langle Y,Z\rangle\langle X,W\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle\} + \langle\sigma(X,W),\sigma(Y,Z)\rangle \\ \qquad\qquad -\langle\sigma(X,Z),\sigma(Y,W)\rangle, \\ (\nabla^\perp_X\sigma)(Y,Z) = (\nabla^\perp_Y\sigma)(X,Z), \\ \langle R^\perp(X,Y)\xi,\eta\rangle = \langle[A_\xi,A_\eta]X,Y\rangle. \end{cases} \tag{3.16}$$

No caso de hipersuperfícies (i.e., imersões isométricas com codimensão 1), a equação de Ricci é trivial e a equação de Codazzi pode ser escrita de uma forma ainda mais simples. Seja ξ um campo normal unitário e $A = A_\xi$ o operador de forma relativo a ξ. Derivando a igualdade $|\xi|^2 = 1$ em relação a um campo tangente X, conclui-se que $\overline{\nabla}_X\xi$ é tangente a M, e então $\nabla^\perp_X\xi = 0$. Portanto, no caso de hipersuperfícies (e $|\xi| = 1$) a fórmula de Weingarten (cf. (2.8)) transforma-se em

$$\overline{\nabla}_X\xi = -AX. \tag{3.17}$$

Usando (3.17) e a definição de $\nabla^\perp_X\sigma$ (cf. (3.9)), prova-se que

$$\langle(\nabla^\perp_X\sigma)(Y,Z),\xi\rangle = \langle(\nabla_X A)Y,Z\rangle, \quad X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M), \tag{3.18}$$

onde $(\nabla_X A)Y = \nabla_X(AY) - A(\nabla_X Y)$. Como

$$\langle\{\overline{R}(X,Y,Z)\}^\perp,\xi\rangle = -\langle\{\overline{R}(X,Y)\xi\}^T, Z\rangle,$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, segue de (3.18) que a equação de Codazzi no caso de hipersuperfícies pode ser escrita como

$$\{\overline{R}(X,Y)\xi\}^T = (\nabla_Y A)X - (\nabla_X A)Y. \tag{3.19}$$

Em particular, se o ambiente tiver curvatura seccional constante, a equação de Codazzi escreve-se simplesmente como

$$(\nabla_Y A)X = (\nabla_X A)Y. \tag{3.20}$$

4 Curvatura de Subvariedades

Apresentaremos nesta seção diversas medidas de curvatura extrínseca de uma subvariedade de uma variedade Riemanniana, relacionando-as com as medidas de curvatura intrínseca da subvariedade munida da métrica induzida pela aplicação de inclusão. Começaremos a discussão com uma importante definição:

Definição 4.1. O *vetor curvatura média* de uma imersão isométrica $\phi : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ em um ponto $p \in M$ é dado por

$$\overrightarrow{H}(p) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sigma(e_i, e_i), \tag{4.1}$$

onde σ é a segunda forma fundamental da imersão e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal de T_pM.

A definição acima é consistente, pois

$$\langle \sum_{i=1}^{n} \sigma(e_i, e_i), \xi_0 \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \sigma(e_i, e_i), \xi_0 \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle A_{\xi_0} e_i, e_i \rangle = \mathrm{tr}(A_{\xi_0}), \tag{4.2}$$

para todo vetor $\xi_0 \in T_pM^{\perp}$, mostrando que o lado direito de (4.1) não depende da base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de T_pM escolhida. Assim, a aplicação $p \mapsto \overrightarrow{H}(p)$ é um campo normal definido globalmente em M.

Definição 4.2. Dizemos que uma imersão isométrica $\phi : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ é *mínima* (resp. *totalmente geodésica*) em $p \in M$ quando $\overrightarrow{H}(p) = 0$ (resp. $\sigma_p = 0$). Se isso ocorrer em todo ponto, dizemos que a imersão é *mínima* (resp. *totalmente geodésica).*

Utilizando o tensor curvatura de uma variedade Riemanniana pode-se definir um importante campo tensorial do tipo $(0, 2)$ na variedade:

Definição 4.3. O *tensor de Ricci* de uma variedade Riemanniana M^n é a aplicação $\mathrm{Ric} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ dada por

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \frac{1}{n-1}\text{traço}\{Z \in \mathfrak{X}(M) \mapsto \mathcal{R}(Z, X)Y\}. \tag{4.3}$$

Segue imediatamente da definição acima e do fato de $\mathcal{R}$ ser trilinear sobre $C^\infty(M)$ que Ric é de fato um campo tensorial do tipo $(0,2)$ em M^n. Logo, para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, o valor de $\mathrm{Ric}(X,Y)$ em um ponto $p \in M$ depende apenas de X_p e Y_p. Das propriedades do tensor curvatura obtém-se que Ric é um campo tensorial simétrico.

Definição 4.4. A *curvatura de Ricci* de uma variedade Riemanniana M^n em um ponto p na direção de um vetor $v \in T_pM - \{0\}$ é o número

$$\mathrm{Ric}_p(v) = \frac{\mathrm{Ric}_p(v,v)}{|v|^2}. \tag{4.4}$$

A *curvatura escalar* de M^n em p é o número

$$R(p) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ric}_p(e_i), \tag{4.5}$$

onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base ortonormal de T_pM.

Note que $\mathrm{Ric}_p(v)$ depende apenas da direção de v, e não do vetor v propriamente dito. De fato, de (4.4) obtemos imediatamente que se $w = \lambda v$ com $\lambda \neq 0$, então $\mathrm{Ric}_p(w) = \mathrm{Ric}_p(v)$.

Conforme pode-se verificar facilmente, a definição de curvatura escalar $R(p)$ de M em p é consistente, ou seja, não depende da base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de T_pM escolhida. Além disso, por (4.3), (4.4) e (4.5) temos a seguinte igualdade, que mostra que a curvatura escalar é uma média de curvaturas seccionais:

$$R(p) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i,j}\langle R(e_j,e_i)e_i, e_j\rangle = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i\neq j} K(e_i,e_j). \tag{4.6}$$

Definiremos agora outra importante medida de curvatura extrínseca de uma subvariedade de uma variedade Riemanniana.

Definição 4.5. A *norma da segunda forma fundamental* de uma imersão isométrica $\phi : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ em um ponto p é o número

$$|\sigma|(p) = \left(\sum_{i,j} |\sigma(e_i,e_j)|^2\right)^{1/2}, \tag{4.7}$$

onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é qualquer base ortonormal de T_pM.

A definição acima de $|\sigma|(p)$ não depende da base ortonormal de T_pM escolhida. De fato, para qualquer base ortonormal $\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$ de $T_pM^\perp$, temos por (4.7)

$$\begin{aligned} |\sigma|^2(p) &= \sum_{i,j}\Big\langle \sum_{\alpha}\langle\sigma(e_i,e_j),\xi_\alpha\rangle\xi_\alpha, \sum_{\beta}\langle\sigma(e_i,e_j),\xi_\beta\rangle\xi_\beta\Big\rangle \\ &= \sum_{i,j,\alpha,\beta}\langle\sigma(e_i,e_j),\xi_\alpha\rangle\langle\sigma(e_i,e_j),\xi_\beta\rangle\delta_{\alpha\beta} \\ &= \sum_{i,j,\alpha}\langle\sigma(e_i,e_j),\xi_\alpha\rangle^2 = \sum_{i,j,\alpha}\langle A_{\xi_\alpha}e_i, e_j\rangle^2 = \sum_{\alpha}|A_{\xi_\alpha}|^2. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Para imersões isométricas em espaços de curvatura seccional constante, existe uma identidade bastante útil relacionando as quantidades extrínsecas $|\overrightarrow{H}|$ e $|\sigma|$ com a curvatura escalar R da subvariedade:

Proposição 4.6. *Se $\phi : M^n \to \overline{M}_c^{n+k}$ é uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana M^n em um espaço de curvatura seccional constante c, então*

$$n^2|\overrightarrow{H}|^2 = |\sigma|^2 + n(n-1)(R-c). \tag{4.9}$$

Demonstração. Seja $p \in M$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal de T_pM. Para todo vetor unitário $v \in T_pM$, temos, por definição de curvatura de Ricci,

$$(n-1)\mathrm{Ric}_p(v) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(e_i, v)v, e_i\rangle. \tag{4.10}$$

Logo, pela equação de Gauss e definição do vetor curvatura média,

$$\begin{aligned}(n-1)\mathrm{Ric}_p(v) &= \sum_{i=1}^{n}\{\langle \overline{R}(e_i, v)v, e_i\rangle + \langle \sigma(e_i, e_i), \sigma(v, v)\rangle - |\sigma(e_i, v)|^2\} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\langle \overline{R}(e_i, v)v, e_i\rangle + n\langle \overrightarrow{H}(p), \sigma(v, v)\rangle - \sum_{i=1}^{n}|\sigma(e_i, v)|^2. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Em particular, para todo $j = 1, \ldots, n$ temos

$$\mathrm{Ric}_p(e_j) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\langle \overline{R}(e_i, e_j)e_j, e_i\rangle + \frac{n}{n-1}\langle \overrightarrow{H}(p), \sigma(e_j, e_j)\rangle - \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}|\sigma(e_i, e_j)|^2.$$

Somando em j e usando a definição de curvatura escalar, obtemos

$$nR(p) = \frac{1}{n-1}\sum_{i\neq j}\langle \overline{R}(e_i, e_j)e_j, e_i\rangle + \frac{n^2}{n-1}|\overrightarrow{H}(p)|^2 - \frac{1}{n-1}|\sigma|^2(p),$$

e então

$$n^2|\overrightarrow{H}(p)|^2 = |\sigma|^2(p) + n(n-1)R(p) - \sum_{i\neq j}\overline{K}(e_i, e_j). \tag{4.12}$$

Usando na igualdade acima a hipótese de que $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante c, conclui-se que

$$n^2|\overrightarrow{H}(p)|^2 = |\sigma|^2(p) + n(n-1)(R(p)-c). \tag{4.13}$$

Como p é arbitrário, (4.9) está demonstrada. □

Se uma imersão isométrica $\phi : M^n \to \overline{M}_c^{n+k}$ é mínima em um ponto p, então $R(p) \leq c$ pela Proposição 4.6. Além disso, $R(p) = c$ se, e somente se, a imersão é totalmente geodésica em p. A proposição a seguir estabelece um resultado mais forte do que esse.

Proposição 4.7. *Seja $\phi : M^n \to \overline{M}_c^{n+k}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana M^n em um espaço de curvatura seccional constante c. Se ϕ é mínima em um ponto $p \in M$, então $Ric_p(v) \leq c$ para todo vetor não-nulo $v \in T_pM$. Vale a igualdade identicamente se, e somente se, ϕ é totalmente geodésica em p.*

Demonstração. Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal de T_pM. Como $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante c, temos

$$\overline{R}(e_i, v)v = c\{|v|^2 e_i - \langle e_i, v\rangle v\},$$

para todo $i = 1, \ldots, n$ e todo $v \in T_pM$. Usando a igualdade anterior e a hipótese $\overrightarrow{H}(p) = 0$ em (4.11), obtemos

$$\mathrm{Ric}_p(v) = c - \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} |\sigma(e_i, v)|^2 \leq c, \quad v \in T_pM,\ |v| = 1. \tag{4.14}$$

Se $\mathrm{Ric}_p(v) = c$ para todo vetor unitário $v \in T_pM$, então $\sigma(e_i, e_j) = 0$ para $i, j = 1, \ldots, n$. Logo, σ é totalmente geodésica em p. A recíproca segue imediatamente de (4.14). □

Corolário 4.8. *Seja $\phi : M_c^n \to \overline{M}_{\overline{c}}^{n+k}$ uma imersão isométrica. Se ϕ é mínima em um ponto $p \in M$, então $c \leq \overline{c}$. Além disso, $c = \overline{c}$ se, e somente se, ϕ é totalmente geodésica em p.*

Demonstração. Como M^n tem curvatura seccional constante c, tem-se $\mathrm{Ric}_p(v) = c$ para todo vetor unitário $v \in T_pM$. Como ϕ é mínima em p por hipótese, tem-se pela proposição anterior que

$$c = \mathrm{Ric}_p(v) \leq \overline{c}, \quad v \in T_pM,\ ||v|| = 1. \tag{4.15}$$

Se $c = \overline{c}$, tem-se por (4.15) que $\mathrm{Ric}_p(v) = \overline{c}$ para todo vetor unitário $v \in T_pM$. Logo, pela proposição anterior, ϕ é totalmente geodésica em p. Reciprocamente, se ϕ é totalmente geodésica em p, então, pela proposição anterior, $\mathrm{Ric}_p(v) = \overline{c}$ para todo vetor unitário $v \in T_pM$. Usando essa informação em (4.15), conclui-se que $c = \overline{c}$. □

Corolário 4.9. *Se $\phi : M_c^n \to \overline{M}_c^{n+k}$ é uma imersão isométrica mínima, então ϕ é totalmente geodésica.*

A proposição a seguir, que será utilizada nas demonstrações de vários resultados destas notas, relaciona o gradiente e a Hessiana de uma função definida em uma variedade Riemanniana com o gradiente e a Hessiana da restrição da função a uma subvariedade. Em seu enunciado utilizaremos o símbolo ∇ para denotar o gradiente de qualquer função envolvida.

Proposição 4.10. *Seja $\phi : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ uma imersão isométrica e $g : \overline{M} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Então, para todo $p \in M$ e todos $v, w \in T_pM$,*

$$d\phi_p(\nabla(g \circ \phi)(p)) = \nabla g(\phi(p))^T, \tag{4.16}$$

$$\operatorname{Hess}(g \circ \phi)_p(v, w) = \operatorname{Hess} g_{\phi(p)}(d\phi_p(v), d\phi_p(w)) + \langle \nabla g(\phi(p)), \sigma_p(v, w) \rangle, \tag{4.17}$$

onde σ_p é a segunda forma fundamental de M^n em p e $\nabla g(\phi(p))^T$ é a projeção ortogonal de $\nabla g(\phi(p))$ em $d\phi_p(T_pM)$.

Demonstração. Como toda imersão isométrica é localmente uma isometria sobre a sua imagem, e o gradiente e a Hessiana de uma função são preservados por uma isometria (cf. Proposição 1.8), podemos supor que M^n está mergulhada em $\overline{M}^{n+k}$ e que ϕ é a inclusão $j : M \to \overline{M}$.

Para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\langle \nabla(g \circ j), X \rangle = X(g \circ j) = X(g) = \langle \nabla g, X \rangle = \langle (\nabla g)^T, X \rangle,$$

e então $\nabla(g \circ j) = (\nabla g)^T$. Isso prova (4.16).

Denote por ∇ e $\overline{\nabla}$ as conexões Riemannianas de M e $\overline{M}$, respectivamente. Usando o que acabamos de provar, temos, para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hess}(g \circ j)(X, Y) &= \langle \nabla_X \nabla(g \circ j), Y \rangle = \langle \overline{\nabla}_X \nabla(g \circ j), Y \rangle = \langle \overline{\nabla}_X (\nabla g)^T, Y \rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_X \nabla g, Y \rangle - \langle \overline{\nabla}_X (\nabla g)^\perp, Y \rangle = \langle \overline{\nabla}_X \nabla g, Y \rangle + \langle (\nabla g)^\perp, \overline{\nabla}_X Y \rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_X \nabla g, Y \rangle + \langle (\nabla g)^\perp, \sigma(X, Y) \rangle = \operatorname{Hess} g(X, Y) + \langle \nabla g, \sigma(X, Y) \rangle,
\end{aligned}$$

o que prova (4.17). □

Corolário 4.11. *Seja $g : \overline{M} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em uma variedade Riemanniana $\overline{M}$ e $c \in g(\overline{M})$ um valor regular de g. Se $M = g^{-1}(c)$, então, para todo $p \in M$ e todos $v, w \in T_pM$,*

$$\langle \sigma_p(v, w), \nabla g(p) \rangle = -\operatorname{Hess} g_p(v, w). \tag{4.18}$$

Demonstração. Seja $j : M \to \overline{M}$ a inclusão de M em $\overline{M}$. A igualdade (4.18) é obtida aplicando (4.17) para $\phi = j$ e observando que $g \circ j$ é constante. □

Um caso particular importante do corolário anterior acontece quando se considera g como a função distância a um ponto fixo. Seja $\overline{M}$ uma variedade Riemanniana, $p \in \overline{M}$, $a > 0$ e $S = S_a(p) = \{x \in \overline{M} : d(x, p) = a\}$. Denotando por r a função distância ao ponto p, tem-se que $S = r^{-1}(a)$. É um fato bem conhecido da geometria Riemanniana que se $q \in S - \operatorname{Cut}(p)$, então r é diferenciável e $\nabla r \neq 0$ em uma vizinhança U de q em $\overline{M}$. Logo, a é um valor regular da restrição $r|_U$ de r a U e, portanto, $S \cap U = (r|_U)^{-1}(a)$ é uma subvariedade de $\overline{M}$.

Corolário 4.12. *Com a notação acima, para todo $q \in S - \mathrm{Cut}(p)$ e todos $v, w \in T_qS$ vale a igualdade*

$$\langle \sigma_q(v,w), -\nabla r(q)\rangle = \mathrm{Hess}\, r_q(v,w), \tag{4.19}$$

onde σ_q é a segunda forma fundamental de S em q.

Um resultado bem conhecido da teoria local de curvas e superfícies diz que toda superfície compacta em $\mathbb{R}^3$ possui um ponto elíptico, ou seja, um ponto no qual a curvatura Gaussiana é positiva. A proposição a seguir é uma generalização de longo alcance desse resultado. Na Seção 6 estabeleceremos um resultado mais geral (cf. Proposição 6.6).

Proposição 4.13. *Seja $\phi : M^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana compacta M^n. Então existem um ponto $p \in M$ e um vetor $\xi_0 \perp d\phi_p(T_pM)$ tais que $A_{\xi_0} : T_pM \to T_pM$ é definida positiva.*

Demonstração. Fixe $p_0 \in \mathbb{R}^{n+k}$ e seja $g : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = ||x - p_0||^2/2$. É fácil ver que

$$\nabla g(x) = x - p_0, \quad \mathrm{Hess}\, g_x(v,w) = \langle v, w\rangle, \quad x, v, w \in \mathbb{R}^{n+k}. \tag{4.20}$$

Como $g \circ \phi$ é contínua e M é compacta, existe $p \in M$ tal que $(g \circ \phi)(p) = \max_M(g \circ \phi)$. Logo, por (4.20) e Proposição 4.10,

$$\{\phi(p) - p_0\}^T = \{\nabla g(\phi(p)\}^T = d\phi_p(\nabla(g \circ \phi)(p)) = d\phi_p(0) = 0, \tag{4.21}$$

o que mostra que $\phi(p) - p_0$ é ortogonal a $d\phi_p(T_pM)$. Como p é ponto de máximo de $g \circ \phi$, usando novamente (4.20) e a Proposição 4.10, obtemos

$$\begin{aligned} 0 \geq \mathrm{Hess}\,(g \circ \phi)_p(v,v) &= \mathrm{Hess}\, g_{\phi(p)}(d\phi_p(v), d\phi_p(v)) + \langle \nabla g(\phi(p)), \sigma(v,v)\rangle \\ &= \langle d\phi_p(v), d\phi_p(v)\rangle + \langle \nabla g(\phi(p)), \sigma(v,v)\rangle \\ &= ||v||^2 + \langle \nabla g(\phi(p)), \sigma(v,v)\rangle, \end{aligned}$$

para todo $v \in T_pM$. Logo, pela desigualdade acima, o operador de forma da imersão com respeito ao vetor normal $\xi_0 = p_0 - \phi(p) = -\nabla g(\phi(p))$ satisfaz

$$\langle A_{\xi_0} v, v\rangle = \langle \sigma(v,v), \xi_0\rangle = \langle \sigma(v,v), -\nabla g(\phi(p))\rangle \geq ||v||^2, \quad v \in T_pM. \tag{4.22}$$

□

Corolário 4.14. *Não existe subvariedade mínima compacta no espaço Euclidiano.*

Demonstração. Seja $\phi : M^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana compacta M^n. Pela proposição anterior, existem $p \in M$ e $\xi_o \perp d\phi_p(T_pM)$ tais que $\langle A_{\xi_0} v, v\rangle > 0$ para todo vetor não-nulo $v \in T_pM$. Logo, para qualquer base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de T_pM, tem-se

$$\langle \overrightarrow{H}(p), \xi_0\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \langle \sigma(e_i, e_i), \xi_0\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \langle A_{\xi_0} e_i, e_i\rangle > 0.$$

Em particular $\overrightarrow{H}(p) \neq 0$ e, portanto, ϕ não é imersão mínima. □

No caso de hipersuperfícies, ou seja, imersões isométricas $\phi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ de codimensão 1, existem formas bastante naturais de medir a curvatura extrínseca de M^n. Seja $A = A_\xi$ o operador de forma da imersão relativo a um campo normal unitário ξ definido em um aberto U de M. Como, para cada $p \in U$, $A_p = A_{\xi(p)}$ é um operador linear auto-adjunto, existem uma base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de T_pM e números reais $\lambda_1 = \lambda_1(p), \ldots, \lambda_n = \lambda_n(p)$ tais que

$$A_p e_i = \lambda_i e_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4.23}$$

Definição 4.15. Os números $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ que verificam (4.23) são chamados de *curvaturas principais* de M em p.

Se $e_1, \ldots, e_n$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são como acima, então, pela equação de Gauss,

$$K_{ij} = \overline{K}_{ij} + \langle Ae_i, e_i\rangle\langle Ae_j, e_j\rangle - \langle Ae_i, e_j\rangle^2 = \overline{K}_{ij} + \lambda_i\lambda_j, \tag{4.24}$$

para todos $i \neq j$, onde $K_{ij} = K(e_i, e_j)$ e $\overline{K}_{ij} = \overline{K}(e_i, e_j)$ são as curvaturas seccionais de M e $\overline{M}$, respectivamente, segundo o plano gerado por e_i e e_j. Além disso, o vetor curvatura média $\overrightarrow{H}(p)$ de M^n em p satisfaz

$$\langle \overrightarrow{H}(p), \xi(p)\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\langle \sigma_p(e_i, e_i), \xi(p)\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\langle A_p e_i, e_i\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(p). \tag{4.25}$$

Definição 4.16. O número $H(p) := \langle \overrightarrow{H}(p), \xi(p)\rangle$ é chamado a *curvatura média* de M^n em p relativa a $\xi(p)$.

A curvatura média é provavelmente a mais importante medida de curvatura extrínseca de uma hipersuperfície. Usando as curvaturas principais, podemos definir outras:

Definição 4.17. Seja $\phi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica e $A = A_\xi$ o operador de forma da imersão com respeito a um campo normal unitário ξ definido em um aberto U de M. Para $r = 1, \ldots, n$, a *r-ésima curvatura média* de M em $p \in U$ é o número

$$H_r(p) = \frac{1}{\binom{n}{r}}\sum_{i_1<\cdots<i_r}\lambda_{i_1}(p)\cdots\lambda_{i_r}(p), \tag{4.26}$$

onde $\lambda_1(p), \ldots, \lambda_n(p)$ são as curvaturas principais de M em p.

Observe que $H_1 = H$ por (4.26) e Definição 4.16. Quando $\overline{M}^{n+1} = \overline{M}_c^{n+1}$ tem curvatura seccional constante c, a 2-ésima curvatura média H_2 é a menos de uma constante a curvatura escalar de M^n. De fato, nesse caso a equação (4.24) transforma-se em

$$K_{ij} = c + \lambda_i\lambda_j.$$

Logo, por (4.6) e (4.26),

$$n(n-1)R = \sum_{i\neq j}K_{ij} = \sum_{i\neq j}(c + \lambda_i\lambda_j) = n(n-1)c + n(n-1)H_2,$$

e então

$$R = c + H_2. \tag{4.27}$$

Como a curvatura escalar é uma quantidade intrínseca, a igualdade acima mostra que, ao contrário das curvaturas principais e da curvatura média, o valor de H_2 em qualquer ponto não depende da escolha do vetor normal unitário. Portanto, a função H_2 está definida globalmente em M^n, mesmo no caso em que M^n não é orientável. O mesmo ocorre para qualquer H_r em que r é par. De fato, como as curvaturas principais mudam de sinal quando trocamos ξ por $-\xi$, segue diretamente de (4.26) que H_r não depende da escolha de ξ quando r é par.

5 Subvariedades Umbílicas

Um ponto p de uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é chamado umbílico quando as curvaturas principais de S em p são iguais, ou equivalentemente, quando o operador de forma de S em p for um múltiplo da aplicação identidade $I_p : T_pM \to T_pM$. Estendemos a seguir essa definição para imersões isométricas de qualquer dimensão e qualquer codimensão.

Definição 5.1. Uma imersão isométrica $\phi : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ é chamada *umbílica em um ponto* $p \in M$ se, para todo $\xi \in T_pM^\perp$, existe um número $\lambda_\xi \in \mathbb{R}$ tal que $A_\xi = \lambda_\xi I$, onde I é a aplicação identidade de T_pM. A imersão é chamada *umbílica* quando for umbílica em todo ponto.

Proposição 5.2. *Seja $\phi : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ uma imersão isométrica. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) ϕ é umbílica em $p \in M$.

(ii) $A_\xi = \langle \overrightarrow{H}(p), \xi \rangle I, \quad \forall \xi \in T_pM^\perp$.

(iii) $\sigma_p(v, w) = \langle v, w \rangle \overrightarrow{H}(p), \quad \forall v, w \in T_pM$.

Demonstração. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal de T_pM. Para todo $\xi \in T_pM^\perp$, tem-se

$$\langle \sigma(e_i, e_i), \xi \rangle = \langle A_\xi e_i, e_i \rangle = \langle \lambda_\xi e_i, e_i \rangle = \lambda_\xi.$$

Somando em (i), obtemos

$$n \langle \overrightarrow{H}(p), \xi \rangle = n\lambda_\xi,$$

de onde se conclui que $A_\xi = \lambda_\xi I = \langle \overrightarrow{H}(p), \xi \rangle I$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Seja $\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$ uma base ortonormal de $T_pM^\perp$. Para todos $v, w \in T_pM$, tem-se

$$\begin{aligned} \sigma_p(v, w) &= \sum_{\alpha=1}^{k} \langle \sigma_p(v, w), \xi_\alpha \rangle \xi_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{k} \langle A_{\xi_\alpha} v, w \rangle \xi_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{k} \langle \overrightarrow{H}(p), \xi_\alpha \rangle \langle v, w \rangle \xi_\alpha \\ &= \langle v, w \rangle \sum_{\alpha=1}^{k} \langle \overrightarrow{H}(p), \xi_\alpha \rangle \xi_\alpha = \langle v, w \rangle \overrightarrow{H}(p). \end{aligned}$$

(iii) $\implies$ (ii): Para todo $\xi \in T_pM^\perp$ e todos $v, w \in T_pM$, temos

$$\langle A_\xi v, w\rangle = \langle \sigma_p(v,w), \xi\rangle = \langle v, w\rangle \langle \overrightarrow{H}(p), \xi\rangle = \langle \langle \overrightarrow{H}(p), \xi\rangle v, w\rangle.$$

Logo, $A_\xi = \langle \overrightarrow{H}(p), \xi\rangle I$ para todo $\xi \in T_pM^\perp$.

(ii) $\implies$ (i): Imediato. □

Definição 5.3. Dizemos que uma imersão isométrica $\phi : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ tem *vetor curvatura média paralelo* quando $\nabla^\perp_v \overrightarrow{H} = 0$, para todos $p \in M$ e $v \in T_pM$.

Se uma imersão isométrica $\phi : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ tem vetor curvatura média paralelo, então $\nabla|\overrightarrow{H}|^2 = 0$, pois

$$v\langle \overrightarrow{H}, \overrightarrow{H}\rangle = 2\langle \nabla^\perp_v \overrightarrow{H}, \overrightarrow{H}\rangle = 0,$$

para todos $p \in M$ e $v \in T_pM$. Logo, $|\overrightarrow{H}|$ é constante se M^n for conexa. No caso de hipersuperfícies (ou seja, quando $k = 1$), vale a recíproca. De fato, se $|\overrightarrow{H}|$ é constante, então

$$0 = v\langle \overrightarrow{H}, \overrightarrow{H}\rangle = 2\langle \nabla^\perp_v \overrightarrow{H}, \overrightarrow{H}\rangle,$$

e, portanto, $\nabla^\perp_v \overrightarrow{H} = 0$ para todos $p \in M$ e $v \in T_pM$.

Da teoria local de curvas e superfícies em $\mathbb{R}^3$ sabemos que toda superfície conexa e umbílica $S \subset \mathbb{R}^3$ tem curvatura seccional constante (pois é um aberto de um plano ou de uma esfera). A proposição a seguir diz em particular que esse fato vale para subvariedades (de qualquer codimensão) de qualquer espaço de curvatura seccional constante.

Proposição 5.4. *Seja $\phi : M^n \to \overline{M}^{n+k}_c$, $n \geq 2$, uma imersão umbílica de uma variedade M^n em um espaço de curvatura seccional constante c. Então $\overrightarrow{H}$ é paralelo e $R^\perp = 0$. Se M^n é conexa, temos também que M^n tem curvatura seccional constante $c + |\overrightarrow{H}|^2$.*

Demonstração. Como ϕ é umbílica, tem-se pela Proposição 5.2 que

$$\sigma(X,Y) = \langle X, Y\rangle \overrightarrow{H}, \tag{5.1}$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Logo,

$$\begin{aligned}
(\nabla^\perp_X \sigma)(Y,Z) &= \nabla^\perp_X \sigma(Y,Z) - \sigma(\nabla_X Y, Z) - \sigma(Y, \nabla_X Z) \\
&= \nabla^\perp_X (\langle Y, Z\rangle \overrightarrow{H}) - \sigma(\nabla_X Y, Z) - \sigma(Y, \nabla_X Z) \\
&= X\langle Y, Z\rangle \overrightarrow{H} + \langle Y, Z\rangle \nabla^\perp_X \overrightarrow{H} - \langle \nabla_X Y, Z\rangle \overrightarrow{H} - \langle Y, \nabla_X Z\rangle \overrightarrow{H} \\
&= \langle Y, Z\rangle \nabla^\perp_X \overrightarrow{H}.
\end{aligned}$$

Como $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante, $\{\overline{R}(X,Y)Z\}^\perp = 0$, para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Logo, pela equação de Codazzi (cf. (3.8)) e igualdade anterior,

$$\langle Y, Z\rangle \nabla^\perp_X \overrightarrow{H} = (\nabla^\perp_X \sigma)(Y,Z) = (\nabla^\perp_Y \sigma)(X,Z) = \langle X, Z\rangle \nabla^\perp_Y \overrightarrow{H}.$$

Fazendo $Y = Z \perp X$ na igualdade acima, conclui-se que $\nabla^{\perp}_X \overrightarrow{H} = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Logo, $\overrightarrow{H}$ é paralelo.

Como $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante, a equação de Ricci (cf. (3.12)) nos diz que

$$R^{\perp}(X,Y)\xi = \sigma(X, A_\xi Y) - \sigma(A_\xi X, Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M),\ \xi \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}.$$

Logo, pela Proposição 5.2 e hipótese de que ϕ é umbílica,

$$R^{\perp}(X,Y)\xi = \langle X, A_\xi Y\rangle \overrightarrow{H} - \langle A_\xi X, Y\rangle \overrightarrow{H} = 0,$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$. Portanto $R^{\perp} = 0$. A última afirmação segue imediatamente de (5.1) e da equação de Gauss. □

6 Teoremas de Comparação da Hessiana e do Laplaciano

Nesta seção enunciaremos e demonstraremos o teorema de comparação da Hessiana e o teorema de comparação do Laplaciano, duas ferramentas cruciais para a demonstração de vários resultados em geometria diferencial. Nas demonstrações dos referidos resultados, utilizaremos os seguintes lemas.

Lema 6.1. *Seja M uma variedade Riemanniana, $\gamma : [0, a] \to M$ uma geodésica minimizante normalizada e V um campo paralelo ao longo de γ tal que $|V| = 1$ e $V \perp \gamma'$. Denote por r a função distância ao ponto $\gamma(0)$. Então, para todo $t \in (0, a)$,*

$$K(V(t), \gamma'(t)) + \frac{d}{dt} \operatorname{Hess} r\big(V(t), V(t)\big) + |\nabla_{V(t)} \nabla r|^2 = 0, \tag{6.1}$$

onde $K(V(t), \gamma'(t))$ é a curvatura seccional de M segundo o plano gerado por $V(t)$ e $\gamma'(t)$.

Demonstração. Como γ é minimizante, r é diferenciável em $\gamma(t)$ e $\nabla r(\gamma(t)) = \gamma'(t)$ para todo $t \in (0, a)$. Dado $t_0 \in (0, a)$ denote por X o campo, definido em uma vizinhança U de $\gamma(t_0)$, obtido pelo transporte paralelo de $V(t_0)$ ao longo das geodésicas que emanam de $\gamma(t_0)$. Então $X(\gamma(t)) = V(t)$ em algum intervalo centrado em t_0 (pois V é paralelo ao longo de γ) e $\nabla_v X = 0$ para todo $v \in T_{\gamma(t_0)}M$. Pela simetria da Hessiana de uma função, temos ao longo de U que

$$\langle \nabla |\nabla r|^2, X\rangle = X\langle \nabla r, \nabla r\rangle = 2\langle \nabla_X \nabla r, \nabla r\rangle = 2\langle \nabla_{\nabla r} \nabla r, X\rangle.$$

Denote por $\mathcal{R}$ o tensor curvatura de M. Por $|\nabla r| \equiv 1$ e igualdade acima, temos em $\gamma(t_0)$

$$\begin{aligned}
0 = \frac{1}{2}\operatorname{Hess}|\nabla r|^2(X,X) &= \frac{1}{2}\langle \nabla_X \nabla |\nabla r|^2, X\rangle = \frac{1}{2} X\langle \nabla |\nabla r|^2, X\rangle = X\langle \nabla_{\nabla r}\nabla r, X\rangle \\
&= \langle \nabla_X \nabla_{\nabla r}\nabla r, X\rangle \\
&= \langle \mathcal{R}(X, \nabla r)\nabla r, X\rangle + \langle \nabla_{\nabla r}\nabla_X \nabla r, X\rangle + \langle \nabla_{[X,\nabla r]}\nabla r, X\rangle \\
&= \langle \mathcal{R}(X, \nabla r)\nabla r, X\rangle + \nabla r\langle \nabla_X \nabla r, X\rangle + \langle \nabla_X \nabla r, [X, \nabla r]\rangle \\
&= \langle \mathcal{R}(X, \nabla r)\nabla r, X\rangle + \nabla r(\operatorname{Hess} r(X,X)) + |\nabla_X \nabla r|^2.
\end{aligned}$$

Como $X(\gamma(t_0)) = V(t_0)$, $\nabla r(\gamma(t_0)) = \gamma'(t_0)$ e $\{\gamma'(t_0), V(t_0)\}$ é um par ortonormal, a igualdade acima nos diz que

$$K(V(t_0), \gamma'(t_0)) + \gamma'(t_0)(\operatorname{Hess} r(X, X)) + |\nabla_{V(t_0)} \nabla r|^2 = 0. \tag{6.2}$$

Como $X(\gamma(t)) = V(t)$ para todo t em uma vizinhança de t_0, o segundo termo no lado esquerdo da igualdade acima vale

$$\gamma'(t_0)(\operatorname{Hess} r(X, X)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \operatorname{Hess} r(X, X)(\gamma(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \operatorname{Hess} r(V(t), V(t)). \tag{6.3}$$

Substituindo (6.3) em (6.2), obtemos (6.1) para $t = t_0$. Como $t_0 \in (0, a)$ é arbitrário, a proposição está demonstrada. □

Lema 6.2. *Seja M^n uma variedade Riemanniana, $\gamma : [0, a) \to M$ uma geodésica normalizada, V um campo contínuo ao longo de γ tal que $|V(t)| = 1$ e $V(t) \perp \gamma'(t)$ para todo $t \in [0, a)$. Denote por r a função distância ao ponto $\gamma(0)$. Então*

$$\lim_{t \to 0^+} \big\{ t \operatorname{Hess} r\big(V(t), V(t)\big) \big\} = 1. \tag{6.4}$$

Demonstração. Dado $w \in T_{\gamma(0)} M$, $|w| = 1$, seja $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ a geodésica que satisfaz $\sigma(0) = \gamma(0)$ e $\sigma'(0) = w$. Lembrando que r^2 é diferenciável em uma vizinhança de $\gamma(0)$, e que toda geodésica é localmente minimizante, temos

$$\operatorname{Hess}(r^2)_{\gamma(0)}(w, w) = \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} r^2(\sigma(t)) = \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} t^2 = 2. \tag{6.5}$$

Por outro lado, em todo ponto $q \in M$ onde r é diferenciável temos

$$\begin{aligned} \operatorname{Hess}(r^2)_q(v, w) &= \big\langle \nabla_v \nabla(r^2), w \big\rangle = \big\langle \nabla_v (2r \nabla r), w \big\rangle \\ &= 2\langle \nabla r, v \rangle \langle \nabla r, w \rangle + 2r \operatorname{Hess} r_q(v, w). \end{aligned}$$

Como $V(t)$ é ortogonal a $\gamma'(t)$ para todo $t \in [0, a)$, e $\nabla r(\gamma(t)) = \gamma'(t)$ para todo $t > 0$ suficientemente pequeno, segue da equação acima que

$$\operatorname{Hess}(r^2)\big(V(t), V(t)\big) = 2t \operatorname{Hess} r\big(V(t), V(t)\big),$$

para todo $t > 0$ suficientemente pequeno. Tomando o limite quando $t \to 0^+$, e usando (6.5), obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0^+} \big\{ t \operatorname{Hess} r\big(V(t), V(t)\big) \big\} &= \frac{1}{2} \lim_{t \to 0^+} \big\{ \operatorname{Hess}(r^2)\big(V(t), V(t)\big) \big\} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Hess}(r^2)\big(V(0), V(0)\big) = 1. \end{aligned}$$

□

Teorema 6.3 (Teorema de comparação da Hessiana)**.** *Seja M^n uma variedade Riemanniana com curvatura seccional limitada inferiormente por uma constante c, e seja $\gamma : [0, a] \to M$ uma geodésica minimizante normalizada. Denote por r a função distância ao ponto $\gamma(0)$ e assuma que r é diferenciável em $\gamma(a)$. Se $c > 0$, assuma também que $a < \pi/\sqrt{c}$. Então, para todo $v \in T_{\gamma(a)}M$ tal que $v \perp \gamma'(a)$ e $|v| = 1$,*

$$\operatorname{Hess} r_{\gamma(a)}(v, v) \leq \begin{cases} \sqrt{c}\,\cot(a\sqrt{c}), & c > 0, \\ 1/a, & c = 0, \\ \sqrt{-c}\coth(a\sqrt{-c}), & c < 0. \end{cases}$$

Demonstração. Dado $v \in T_{\gamma(a)}M$ tal que $v \perp \gamma'(a)$ e $|\,v| = 1$, denote por $V(t)$ o campo paralelo ao longo de γ tal que $V(a) = v$. Pelo Lema 6.1 e desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\frac{d}{dt}\operatorname{Hess} r\big(V(t), V(t)\big) + \operatorname{Hess} r\big(V(t), V(t)\big)^2 + K(V(t), \gamma'(t)) \leq 0, \tag{6.6}$$

para todo $t \in (0, a]$. Seja $f : (0, a] \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(t) = \operatorname{Hess} r\big(V(t), V(t)\big)$. Como, por hipótese, a curvatura seccional de M é maior ou igual a c, temos pela desigualdade anterior

$$f' + f^2 + c \leq 0. \tag{6.7}$$

Seja

$$\Psi(t) = \begin{cases} \sqrt{c}\,\cot(t\sqrt{c}), & c > 0,\ 0 < t < \pi/\sqrt{c}, \\ 1/t, & c = 0, \\ \sqrt{-c}\,\coth(t\sqrt{-c}), & c < 0. \end{cases} \tag{6.8}$$

Queremos provar que $f(a) \leq \Psi(a)$. É fácil ver que, qualquer que seja o valor de c, Ψ é estritamente decrescente e satisfaz a seguinte equação diferencial não-linear de primeira ordem

$$\Psi' + \Psi^2 + c = 0. \tag{6.9}$$

Podemos supor $f(a) > 0$ no caso $c = 0$, e $f(a) > \sqrt{-c}$ no caso $c < 0$; do contrário, não há nada para provar. Segue então de (6.7) que $f > 0$ no caso $c = 0$ e $f > \sqrt{-c}$ no caso $c < 0$. Assim, a composta $\theta = \Psi^{-1} \circ f$ está definida e é diferenciável em $(0, a]$, qualquer que seja o valor de c. Como, pelo Lema 6.2, $\lim_{t\to 0^+} f(t) = +\infty$, temos

$$\lim_{t\to 0^+} \theta(t) = 0. \tag{6.10}$$

De (6.7), (6.9) e $f = \Psi \circ \theta$, obtém-se

$$f'(t) + \Psi^2(\theta(t)) + c \leq 0 = \Psi'(\theta(t)) + \Psi^2(\theta(t)) + c,$$

o que implica $\Psi'(\theta(t)) \geq f'(t) = \Psi'(\theta(t))\,\theta'(t)$. Como Ψ' é negativo, segue que $\theta'(t) \geq 1$, para todo $t \in (0, a]$. Logo, para todo $0 < \varepsilon < a$,

$$\theta(a) - \theta(\varepsilon) = \int_\varepsilon^a \theta'(t)dt \geq \int_\varepsilon^a dt = a - \varepsilon.$$

Tomando o limite quando $\varepsilon \to 0^+$, e usando (6.10), obtemos $\theta(a) \geq a$. Usando novamente que Ψ é decrescente, obtemos

$$f(a) = \Psi(\theta(a)) \leq \Psi(a),$$

o que conclui a prova do teorema. □

Observação 6.4. O teorema de comparação da Hessiana também vale para variedades Riemannianas com curvatura seccional limitada superiormente (com a conclusão invertida). Mais precisamente, se M^n é uma variedade Riemanniana com curvatura seccional limitada superiormente por uma constante c, então, nas mesmas condições do Teorema 6.3,

$$\operatorname{Hess} r_{\gamma(a)}(v, v) \geq \begin{cases} \sqrt{c}\,\cot(a\sqrt{c}), & c > 0, \\ 1/a, & c = 0, \\ \sqrt{-c}\coth(a\sqrt{-c}), & c < 0. \end{cases}$$

Teorema 6.5 (Teorema de comparação do Laplaciano)**.** *Seja M^n uma variedade Riemanniana com curvatura de Ricci limitada inferiormente por uma constante c, e seja $\gamma : [0, a] \to M$ uma geodésica minimizante normalizada. Denote por r a função distância ao ponto $\gamma(0)$ e assuma que r é diferenciável em $\gamma(a)$. Se $c > 0$, assuma também que $a < \pi/\sqrt{c}$. Então,*

$$\Delta r(\gamma(a)) \leq \begin{cases} (n-1)\sqrt{c}\,\cot(a\sqrt{c}), & c > 0, \\ (n-1)/a, & c = 0, \\ (n-1)\sqrt{-c}\,\coth(a\sqrt{-c}), & c < 0. \end{cases}$$

Demonstração. Seja $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ uma base ortonormal do complemento ortogonal de $\gamma'(a)$ em $T_{\gamma(a)}M$. Para cada $i = 1, \ldots, n-1$, denote por V_i o campo paralelo ao longo de γ tal que $V_i(a) = v_i$. Como $\nabla_{\gamma'(t)}\nabla r = 0$, temos

$$\Delta r(\gamma(t)) = \sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{Hess} r(V_i(t), V_i(t)), \quad t \in (0, a]. \tag{6.9}$$

Pelo Lema 6.1, para $i = 1, \ldots, n-1$ temos

$$K(V_i(t), \gamma'(t)) + \frac{d}{dt}\operatorname{Hess} r(V_i(t), V_i(t)) + |\nabla_{V_i(t)}\nabla r|^2 = 0, \quad t \in (0, a]. \tag{6.10}$$

Somando em i e usando (6.9), obtemos

$$(n-1)\mathrm{Ric}(\gamma'(t)) + \frac{d}{dt}\Delta r(\gamma(t)) + |\mathrm{Hess}\, r|^2(\gamma(t)) = 0, \quad t \in (0, a]. \tag{6.11}$$

Como $(\Delta r)^2 \leq (n-1)|\mathrm{Hess}\, r|^2$ pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue que

$$\frac{\Delta r(\gamma(t))^2}{n-1} + \frac{d}{dt}\Delta r(\gamma(t)) + (n-1)\mathrm{Ric}(\gamma'(t)) \leq 0. \tag{6.12}$$

Fazendo $g(t) = \Delta r(\gamma(t))$ e usando a hipótese de que a curvatura de Ricci de M é maior ou igual a c, obtemos

$$g' + \frac{g^2}{n-1} + (n-1)c \leq 0. \tag{6.13}$$

Seja $\zeta = (n-1)\Psi$, onde Ψ é a função definida por (6.8). Queremos provar que $g(a) \leq \zeta(a)$. Por (6.9),

$$\zeta' + \frac{\zeta^2}{n-1} + (n-1)c = 0. \tag{6.14}$$

Podemos supor $g(a) > 0$ no caso $c = 0$, e $g(a) > (n-1)\sqrt{-c}$ no caso $c < 0$; do contrário, não há nada para provar. Então, por (6.13), $g > 0$ no caso $c = 0$ e $g > (n-1)\sqrt{-c}$ no caso $c < 0$. Assim a composta $\theta = \zeta^{-1} \circ g$ está definida e é diferenciável em $(0, a]$, qualquer que seja o valor de c. Raciocinando como na prova do Teorema 6.3, prova-se que $\theta(a) \geq a$. Logo, como ζ é decrescente,

$$g(a) = \zeta(\theta(a)) \leq \zeta(a), \tag{6.15}$$

como queríamos demonstrar. □

Encerraremos esta seção apresentando extensões da Proposição 4.13 e Corolário 4.14 para variedades de Hadamard. Recorde que uma variedade de Hadamard é uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa, com curvatura seccional não-positiva.

Proposição 6.6. *Seja $\phi : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana compacta M^n em uma variedade de Hadamard $\overline{M}^{n+k}$. Então existem um ponto $p \in M$ e um vetor $\xi_0 \perp d\phi_p(T_pM)$ tais que $A_{\xi_0} : T_pM \to T_pM$ é definida positiva.*

Demonstração. Seja r a função distância a um ponto $p_0 \in \overline{M}$ fixado. Como $\overline{M}$ é uma variedade de Hadamard, a função r é diferenciável em $\overline{M} - \{p_0\}$. Como $r \circ \phi$ é contínua e M é compacta, existe $p \in M$ tal que $(r \circ \phi)(p) = \max_M(r \circ \phi)$. Logo, pela Proposição 4.10,

$$\nabla r(\phi(p))^T = d\phi_p(\nabla(r \circ \phi)(p)) = 0, \tag{6.16}$$

de onde se conclui que $\xi_0 := -\nabla r(\phi(p)) \perp d\phi_p(T_pM)$. Como p é ponto de máximo de $r \circ \phi$, usando novamente a Proposição 4.10, obtemos

$$0 \geq \text{Hess}\,(r \circ \phi)_p(v,v) \;\; = \;\; \text{Hess}\, r_{\phi(p)}(d\phi_p(v), d\phi_p(v)) + \langle \nabla r(\phi(p)), \sigma_p(v,v)\rangle,$$

para todo $v \in T_pM$, onde σ_p é a segunda forma fundamental de M em p. Então

$$\langle A_{\xi_0} v, v\rangle = \langle \sigma_p(v,v), \xi_0\rangle = \langle \sigma_p(v,v), -\nabla r(\phi(p))\rangle \geq \text{Hess}\, r_{\phi(p)}(d\phi_p(v), d\phi_p(v)).$$

Como $d\phi_p(v)$ é tangente à esfera geodésica de $\overline{M}$ que tem centro em p_0 e passa por $\phi(p)$, e a curvatura seccional de $\overline{M}$ é menor ou igual a zero por hipótese, segue da desigualdade acima e do teorema de comparação da Hessiana que

$$\langle A_{\xi_0} v, v\rangle \geq \frac{1}{r(\phi(p))}||d\phi_p(v)||^2 = \frac{1}{r(\phi(p))}||v||^2, \quad v \in T_pM.$$

□

Imitando a demonstração do Corolário 4.14, usando a proposição anterior no lugar da Proposição 4.13, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 6.7. *Não existe subvariedade mínima compacta em uma variedade de Hadamard.*

A Proposição 6.6 e o Corolário 6.7 não são verdadeiros em um espaço ambiente arbitrário. Por exemplo, no caso em que $\overline{M}$ é a esfera unitária $S^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$, o equador $\{x \in S^{n+1} : x_{n+2} = 0\}$ é uma subvariedade compacta mínima (de fato, totalmente geodésica) de S^{n+1}. Um exemplo menos trivial é o seguinte:

Exemplo 1 (Toro de Clifford)**.** Seja $M^n = S^{n_1}(r_1) \times S^{n_2}(r_2)$, onde $n_1 + n_2 = n$ e r_1, r_2 são dois números positivos tais que $r_1^2 + r_2^2 = 1$. Então M^n é uma hipersuperfície compacta da esfera unitária $S^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$. Dado $(x,y) \in S^{n_1}(r_1) \times S^{n_2}(r_2)$, é fácil ver que $(x,0)$ e $(0,y)$ são vetores linearmente independentes de $\mathbb{R}^{n+2}$ que são ortogonais a M^n no ponto (x,y). Como $\dim(M) = n$, esses vetores geram então o espaço normal a $M^n \subset \mathbb{R}^{n+2}$ no ponto (x,y). Seja ξ_0 um vetor unitário de $\mathbb{R}^{n+2}$ que é ortogonal a $T_{(x,y)}M$ e tangente a S^{n+1}. Então existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$\xi_0 = a(x,0) + b(0,y) = (ax, by).$$

Como ξ_0 é tangente a S^{n+1}, temos

$$0 = \langle (ax, by), (x,y)\rangle = a||x||^2 + b||y||^2 = ar_1^2 + br_2^2.$$

Usando agora que $||\xi_0|| = 1$, obtemos

$$1 = ||\xi_0||^2 = a^2||x||^2 + b^2||y||^2 = a^2 r_1^2 + b^2 r_2^2.$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} ar_1^2 + br_2^2 & = 0, \\ a^2 r_1^2 + b^2 r_2^2 & = 1, \end{cases}$$

obtemos

$$a = \pm\frac{r_2}{r_1}, \qquad b = \mp\frac{r_1}{r_2}.$$

Logo, um campo normal unitário a $M^n \subset S^{n+1}$ é dado por

$$\xi = \left(\frac{r_2}{r_1}x, -\frac{r_1}{r_2}y\right).$$

Denote por A o operador de forma de $M^n \subset S^{n+1}$ com respeito a ξ. Pela igualdade acima, para todo $v \in T_x S^{n_1}(r_1)$ e todo $w \in T_y S^{n_2}(r_2)$, temos

$$A_{(x,y)}(v,0) = -\frac{r_2}{r_1}(v,0), \qquad A_{(x,y)}(0,w) = \frac{r_1}{r_2}(0,w).$$

Logo, as curvaturas principais de M^n em qualquer ponto (x,y) são dadas por

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n_1} = -\frac{r_2}{r_1}, \qquad \lambda_{n_1+1} = \cdots = \lambda_n = \frac{r_1}{r_2}, \tag{6.17}$$

de onde se conclui que $M^n \subset S^{n+1}$ tem curvatura média constante

$$H = \frac{1}{n}\left\{-n_1\frac{r_2}{r_1} + n_2\frac{r_1}{r_2}\right\}.$$

Então M^n é mínima se, e somente se, $r_2^2/r_1^2 = n_2/n_1$. Como $r_1^2 + r_2^2 = 1$ e $n_1 + n_2 = n$, essa condição ocorre se, e somente se, $r_1 = \sqrt{n_1/n}$. Nesse caso, M^n é chamado um *toro de Clifford* de dimensão n. Para utilização futura, vamos determinar a norma de sua segunda forma fundamental. Por (6.17) e $r_2^2/r_1^2 = n_2/n_1$,

$$|A|^2 = n_1\frac{r_2^2}{r_1^2} + n_2\frac{r_1^2}{r_2^2} = n_1\frac{n_2}{n_1} + n_2\frac{n_1}{n_2} = n_2 + n_1 = n.$$

7 Uma Caracterização de Curvatura Seccional Constante

Um resultado básico em geometria Riemanniana diz que dados um ponto p em uma variedade Riemanniana M e um vetor $v \in T_pM$, existe uma única geodésica de M passando por p com velocidade v. Tendo em vista esse fato, é então natural perguntar se dado um subespaço vetorial $L \subset T_pM$, com $\dim L \geq 2$, existe uma subvariedade de M contendo p que seja totalmente geodésica e tenha L como espaço tangente em p. A resposta a esta pergunta em geral é não. De fato, como veremos no Teorema 7.2 abaixo, devido a Cartan [4], a existência de tais subvariedades é uma condição bastante restritiva, já que ela implica que M tem curvatura seccional constante.

Definição 7.1. Dizemos que uma variedade Riemanniana M^n satisfaz o *axioma dos r-planos* para algum r fixo, $2 \leq r \leq n-1$, se, para todo $p \in M$ e todo subespaço vetorial $L \subset T_pM$ de dimensão r, existe uma subvariedade totalmente geodésica $S \subset M$ contendo p tal que $T_pS = L$.

Teorema 7.2. *Se uma variedade Riemanniana M^n, $n \geq 3$, satisfaz o axioma dos r-planos para algum r, $2 \leq r \leq n-1$, então M^n tem curvatura seccional constante.*

Demonstração. Pelo teorema de Schur, basta mostrar que a curvatura seccional de M é pontualmente constante. Seja $p \in M$ e $\{u, v, w\}$ um conjunto ortonormal de vetores de T_pM. Como M^n satisfaz o axioma dos r-planos por hipótese, existe uma subvariedade totalmente geodésica $S \subset M$ contendo p tal que $u, v \in T_pS$ e $w \in T_pS^{\perp}$. Como S é totalmente geodésica, a equação de Codazzi (cf. (3.8)) nos diz que $\{R(u,v)u\}^{\perp} = 0$, onde R é o tensor curvatura de M e "$\perp$"significa a componente ortogonal a S. Logo,

$$\langle R(u,v)w, u\rangle = -\langle R(u,v)u, w\rangle = 0,$$

para qualquer conjunto ortonormal $\{u, v, w\}$ de vetores de T_pM. Como $\{u, \frac{v+w}{\sqrt{2}}, \frac{v-w}{\sqrt{2}}\}$ é um conjunto ortonormal se $\{u, v, w\}$ o for, tem-se pela igualdade anterior que

$$0 = \left\langle R\left(u, \frac{v+w}{\sqrt{2}}\right)\frac{v-w}{\sqrt{2}}, u\right\rangle = \frac{1}{2}\{\langle R(u,v)v, u\rangle - \langle R(u,w)w, u\rangle\},$$

o que implica

$$K(u,v) = K(u,w).$$

Assim, as curvaturas secionais de quaisquer dois planos $P, Q \subset T_pM$ que se intersectam ortogonalmente são iguais.

Considere agora dois planos distintos quaisquer $P, Q \subset T_pM$. Se $P \cap Q \neq \{0\}$, então existe um terceiro plano $L \subset T_pM$ que é ortogonal a ambos. Logo, pelo que já foi provado, $K(P) = K(L) = K(Q)$. Se $P \cap Q = \{0\}$, considere um plano R tal que $P \cap R \neq \{0\}$ e $R \cap Q \neq \{0\}$. Pelo caso anterior, $K(P) = K(R) = K(Q)$. □

Definição 7.3. Uma *esfera extrínseca* de uma variedade Riemanniana é uma subvariedade umbílica que possui vetor curvatura média paralelo.

Pela Proposição 5.4, subvariedades umbílicas de variedades com curvatura seccional constante são esferas extrínsecas.

Definição 7.4. Dizemos que uma variedade Riemanniana M^n, $n \geq 3$, satisfaz o *axioma das r-esferas* para algum r fixo, $2 \leq r \leq n-1$, se, para todo $p \in M$ e todo subespaço vetorial $L \subset T_pM$ de dimensão r, existe uma esfera extrínseca S contendo p tal que $T_pS = L$.

A seguinte generalização do teorema de Cartan foi obtida por Leung e Nomizu [24]. A demonstração é análoga a do teorema de Cartan, e por isso será omitida.

Teorema 7.5. *Se uma variedade Riemanniana M^n, $n \geq 3$, satisfaz o axioma das r-esferas para algum r, $2 \leq r \leq n-1$, então M^n tem curvatura seccional constante.*

Para outras caracterizações de espaços com curvatura seccional constante, veja, por exemplo, [2, 7, 26, 32, 36].

8 Hipersuperfícies Convexas

Toda imersão $\phi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ admite um campo normal unitário em uma vizinhança de qualquer ponto de M. Quando M^n é orientável, esse campo pode ser definido globalmente. De fato, escolhendo uma orientação para M^n (e, portanto, para cada espaço tangente T_pM) pode-se definir um campo normal unitário $\xi : M^n \to S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ da seguinte forma. Se $p \in M$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base positiva de T_pM, então

$$\xi(p) = \frac{d\phi_p(e_1) \times \cdots \times d\phi_p(e_n)}{||d\phi_p(e_1) \times \cdots \times d\phi_p(e_n)||},$$

onde $d\phi_p(e_1) \times \cdots \times d\phi_p(e_n)$ é o produto vetorial em $\mathbb{R}^{n+1}$ dos vetores $d\phi_p(e_1), \ldots, d\phi_p(e_n)$. Segue das propriedades do produto vetorial que $\xi(p) \perp d\phi_p(T_pM)$ e que $\xi(p)$ não depende da escolha da base positiva de T_pM. Fazendo $e_i = \partial_i,\ i = 1, \ldots, n$, na igualdade acima, onde $\partial_1, \ldots, \partial_n$ são os campos coordenados de uma carta $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ do atlas orientável maximal de M^n, conclui-se que ξ é diferenciável.

Definição 8.1. A aplicação $\xi : M^n \to S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ acima definida é chamada a *aplicação normal de Gauss* da imersão $\phi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$.

Proposição 8.2. *Seja $\phi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana orientável M^n em $\mathbb{R}^{n+1}$. Denote por A o operador de forma da imersão relativo a um campo normal unitário $\xi : M^n \to S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Então, para todos $p \in M$ e $v \in T_pM$,*

$$d\phi_p(A_p v) = -d\xi_p(v). \tag{8.1}$$

Demonstração. Dado $p \in M$, considere uma vizinhança aberta U de p em M tal que $\phi|_U : U \to \phi(U)$ seja um difeomorfismo (e, portanto, uma isometria). Defina um campo normal unitário η em $\phi(U)$ por $\eta(\phi(x)) = \xi(x),\ x \in U$. Dado $v \in T_pM$, considere uma curva diferenciável $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Então $\phi \circ \gamma$ é uma curva diferenciável em $\phi(U)$ que satisfaz $(\phi \circ \gamma)(0) = \phi(p)$ e $(\phi \circ \gamma)'(0) = d\phi_p(v)$. Denotando por $\overline{\nabla}$ a conexão Riemanniana de $\mathbb{R}^{n+1}$, temos

$$\begin{aligned} d\phi_p(A_p v) = -\{\overline{\nabla}_{d\phi_p(v)}\eta\}^T &= -\overline{\nabla}_{d\phi_p(v)}\eta = -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\eta((\phi \circ \gamma)(t)) \\ &= -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\xi(\gamma(t)) = -d\xi_p(v). \end{aligned}$$

□

É um fato bem conhecido da teoria de superfícies em $\mathbb{R}^3$ que se $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície conexa e umbílica, então S é um aberto de um plano ou de uma esfera. A proposição a seguir é uma generalização desse fato.

Proposição 8.3. *Seja $\phi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão umbílica de uma variedade conexa M^n. Então $\phi(M)$ é um subconjunto aberto de um hiperplano ou de uma hiperesfera de $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Demonstração. Dado $p \in M$, considere um campo normal unitário ξ em uma vizinhança conexa U de p restrita a qual ϕ é um mergulho. Como ϕ é umbílica, existe uma função $\lambda : U \to \mathbb{R}$ tal que $A_{\xi(x)} = \lambda(x) I_x,\ x \in U$, onde I_x é a aplicação identidade de T_xM. A função λ é diferenciável, pois $\lambda = \langle \overrightarrow{H}, \xi \rangle$ pela Proposição 5.2. Denotando $A = A_\xi$, para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ temos

$$(\nabla_Y A)X = \nabla_Y(AX) - A(\nabla_Y X) = \nabla_Y(\lambda X) - \lambda \nabla_Y X = Y(\lambda)X. \tag{8.2}$$

Similarmente,

$$(\nabla_X A)Y = X(\lambda)Y. \tag{8.3}$$

Por (8.2), (8.3) e a equação de Codazzi (cf. (3.20)),

$$Y(\lambda)X = X(\lambda)Y, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(U).$$

Tomando X e Y linearmente independentes na igualdade acima, obtemos $X(\lambda) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(U)$, de onde se conclui que $\nabla\lambda = 0$. Segue agora da conexidade de U que λ é constante.

Suponha $\lambda = 0$. Dado $q \in U$, considere uma curva diferenciável $\gamma : [0,1] \to U$ ligando p e q. Pela Proposição 8.2,

$$\begin{aligned} \xi(q) - \xi(p) = (\xi \circ \gamma)(1) - (\xi \circ \gamma)(0) &= \int_0^1 (\xi \circ \gamma)'(t)dt = \int_0^1 d\xi_{\gamma(t)}(\gamma'(t))dt \\ &= -\int_0^1 d\phi_{\gamma(t)}(A\gamma'(t))dt = 0. \end{aligned} \tag{8.4}$$

Como $q \in U$ é arbitrário, conclui-se que ξ é constante. Seja $h : U \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$h(x) = \langle \phi(x) - \phi(p), \xi(p) \rangle.$$

Se q e γ são como acima, então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} h(\gamma(t)) = \frac{d}{dt} \langle \phi(\gamma(t)) - \phi(p), \xi(p) \rangle &= \langle d\phi_{\gamma(t)}(\gamma'(t)), \xi(p) \rangle \\ &= \langle d\phi_{\gamma(t)}(\gamma'(t)), \xi(\gamma(t)) \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

para todo $t \in [0,1]$. Logo $h \circ \gamma$ é constante, e como $h(\gamma(0)) = 0$, essa constante é nula. Portanto $h(q) = 0$ para todo $q \in U$, o que significa que $\phi(U)$ está contido no hiperplano de $\mathbb{R}^{n+1}$ que contém $\phi(p)$ e é ortogonal a $\xi(p)$.

Suponha agora $\lambda \neq 0$ e seja $f : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ a função definida por

$$f(x) = \phi(x) + \frac{1}{\lambda}\xi(x). \tag{8.5}$$

Seja $\gamma : [0,1] \to U$ uma curva diferenciável ligando p a um dado ponto $q \in U$. Por (8.5) e Proposição 8.2,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(\gamma(t)) &= \frac{d}{dt}\left\{\phi(\gamma(t)) + \frac{1}{\lambda}\xi(\gamma(t))\right\} = d\phi(\gamma'(t)) + \frac{1}{\lambda}d\xi(\gamma'(t)) \\ &= d\phi(\gamma'(t)) - \frac{1}{\lambda}d\phi(A\gamma'(t)) = d\phi(\gamma'(t)) - \frac{1}{\lambda}d\phi(\lambda\gamma'(t)) = 0,\end{aligned}$$

de onde segue que $f(q) = f(\gamma(1)) = f(\gamma(0)) = f(p)$. Como $q \in U$ é arbitrário, conclui-se que f é constante. Assim, existe $p_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que

$$\phi(x) + \frac{1}{\lambda}\xi(x) = p_0, \quad \forall x \in U,$$

de onde se conclui que $||\phi(x) - p_0|| = 1/|\lambda|$. Portanto $\phi(M)$ está contido na hiperesfera de $\mathbb{R}^{n+1}$ com centro p_0 e raio $1/|\lambda|$.

Provamos até aqui que cada ponto de M possui uma vizinhança cuja imagem por ϕ está contida ou em um hiperplano ou em uma hiperesfera de $\mathbb{R}^{n+1}$. Fixe $p \in M$ e admita que existe uma vizinhança U de p tal que $\phi(U)$ está contido em um hiperplano H. Seja $\mathcal{A}$ o conjunto de todos os pontos de M que possuem alguma vizinhança cuja imagem está contida em H. O conjunto $\mathcal{A}$ é não-vazio, pois $p \in \mathcal{A}$, e é obviamente aberto. Para provar que $\mathcal{A}$ é também fechado, considere uma sequência $(x_k) \subset \mathcal{A}$ tal que $x_k \to x$. Pelo que já foi demonstrado, existe uma vizinhança V de x tal que $\phi(V)$ está contido em um hiperplano L ou em uma hiperesfera S. Como $x_k \to x$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \in V$. Como $x_k \in \mathcal{A}$, existe uma vizinhança W de x_k tal que $\phi(W) \subset H$. Logo,

$$\phi(W \cap V) \subset H \cap L \text{ ou } \phi(W \cap V) \subset H \cap S.$$

Como ϕ é uma imersão, a segunda possibilidade não pode ocorrer, e a primeira só pode ocorrer se $L = H$. Logo $\phi(V) \subset H$, o que mostra que $x \in \mathcal{A}$. Assim $\mathcal{A}$ é também fechado, e como M é conexo, segue que $\mathcal{A} = M$. Portanto $\phi(M) \subset H$.

No caso em que p possui uma vizinhança U tal que $\phi(U)$ está contido em uma hiperesfera S de $\mathbb{R}^{n+1}$, um raciocínio análogo ao que acabamos de fazer prova que $\phi(M) \subset S$. □

Definição 8.4. Seja $\phi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão e $p \in M$. O *hiperplano tangente* à imersão em p é o subespaço afim $\phi(p) + d\phi_p(T_pM)$. Dizemos que a imersão é *localmente convexa em p* quando existe uma vizinhança U de p tal que $\phi(U)$ está contido em um dos semi-espaços fechados determinados pelo hiperplano H tangente à imersão em p. Se $\phi(U) \cap H = \{\phi(p)\}$, dizemos que a imersão é *estritamente localmente convexa em p*. A imersão é chamada *localmente convexa* (resp. *estritamente localmente convexa*) se for localmente convexa (resp. estritamente localmente convexa) em todo ponto.

O cilindro circular e a esfera são exemplos de superfícies localmente convexas (de fato, convexas), sendo que a segunda é estritamente convexa e a primeira não.

Proposição 8.5. *Seja $\phi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica cuja segunda forma fundamental é definida em um ponto $p \in M$, isto é, $\sigma_p(v,v) \neq 0$ para todo vetor não-nulo $v \in T_pM$. Então ϕ é estritamente localmente convexa em p. Em particular, qualquer hipersuperfície compacta de $\mathbb{R}^{n+1}$ é estritamente localmente convexa em algum ponto.*

Demonstração. Escolha um vetor unitário $\xi_0 \perp d\phi_p(T_pM)$ e defina $g : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = \langle x - \phi(p), \xi_0 \rangle.$$

Um cálculo simples mostra que, para todo $x \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\nabla g(x) = \xi_0, \quad \operatorname{Hess} g_x = 0.$$

Logo, pela Proposição 4.10,

$$\nabla(g \circ \phi)(p) = d\phi_p^{-1}\left(\{\nabla g(\phi(p)\}^T\right) = d\phi_p^{-1}(\xi_0^T) = d\phi_p^{-1}(0) = 0, \tag{8.6}$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{Hess}(g \circ \phi)_p(v,v) &= \operatorname{Hess} g_{\phi(p)}(d\phi_p(v), d\phi_p(v)) + \langle \sigma_p(v,v), \nabla g(\phi(p)) \\ &= \langle \sigma_p(v,v), \xi_0 \rangle. \end{aligned} \tag{8.7}$$

Como σ_p é definida por hipótese, tem-se por (8.7) que $\operatorname{Hess}(g \circ \phi)_p(v,v) > 0$ para todo $v \in T_pM - \{0\}$ ou $\operatorname{Hess}(g \circ \phi)_p(v,v) < 0$ para todo $v \in T_pM - \{0\}$. Logo, como p é um ponto crítico de $g \circ \phi$ por (8.6), existe uma vizinhança U de p tal que $g \circ \phi > 0$ em $U - \{p\}$ ou $g \circ \phi < 0$ em $U - \{p\}$. Em qualquer caso, tem-se $\phi(U) \cap H = \{\phi(p)\}$, onde H é o hiperplano tangente a ϕ em p. Portanto ϕ é estritamente localmente convexa em p. □

O teorema a seguir é usualmente associado ao nome de Hadamard.

Teorema 8.6. *Seja $\phi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana compacta e conexa M^n em $\mathbb{R}^{n+1}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) A segunda forma fundamental é definida em todo ponto de M.

(ii) M é orientável e a aplicação de Gauss é um difeomorfismo.

(iii) A curvatura de Gauss-Kronecker é não-nula em todo ponto de M.

Além disso, qualquer uma das afirmações acima implica que ϕ é um mergulho e que $\phi(M)$ é a fronteira de um aberto convexo.

Demonstração. (i) $\implies$ (ii) Para cada ponto $x \in M$ existe um único vetor unitário $\xi(x) \in T_xM^\perp$ tal que

$$\langle A_{\xi(x)}v, v\rangle = \langle \sigma_x(v,v), \xi(x)\rangle > 0, \quad \forall v \in T_xM - \{0\}. \tag{8.8}$$

É fácil ver que a aplicação $\xi : M^n \to S^n$ definida por (8.8) é diferenciável. Logo M^n é orientável.

Por (8.8), $A_{\xi(x)} : T_xM \to T_xM$ é um isomorfismo. Como $d\xi_x = -d\phi_x \circ A_{\xi(x)}$ (cf. Proposition 8.2) e $d\phi_x$ é injetiva, tem-se que $d\xi_x : T_xM \to T_{\xi(x)}S^n$ é um isomorfismo, para todo $x \in M$. Logo, pelo teorema da função inversa, $\xi : M^n \to S^n$ é um difeomorfismo local. Como M^n é compacta, ξ é uma aplicação de recobrimento. A conclusão de que ξ é um difeomorfismo é agora consequência do fato de S^n ser simplesmente conexo quando $n \geq 2$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Como a aplicação de Gauss $\xi : M^n \to S^n$ é um difeomorfismo, para cada $x \in M$ a aplicação diferencial $d\xi_x : T_xM \to T_{\xi(x)}S^n$ é um isomorfismo. Como $d\xi_x = -d\phi_x \circ A_{\xi(x)}$, conclui-se que $A_{\xi(x)} : T_xM \to T_xM$ é um isomorfismo, para todo $x \in M$. Logo $H_n(x) = \det A_{\xi(x)} \neq 0$, para todo $x \in M$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Como a curvatura de Gauss-Kronecker nunca se anula, as curvaturas principais em qualquer ponto são todas diferentes de zero. Seja $\mathcal{A}$ o conjunto dos pontos de M nos quais há curvaturas principais de ambos os sinais e seja $\mathcal{B} = M - \mathcal{A}$. Por continuidade das curvaturas principais, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são ambos abertos. Como M é compacta, a Proposição 4.13 assegura que M possui um ponto onde a segunda forma fundamental σ é definida, o que mostra que $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Segue então da conexidade de M que $\mathcal{A} = \emptyset$. Logo $\mathcal{B} = M$ e, portanto, σ é definida em todo ponto.

Admita agora que vale uma das afirmações (i), (ii) e (iii), e seja $\xi : M^n \to S^n$ o campo normal unitário tal que A_ξ é definido positivo em todo ponto.

Afirmação. Para cada $p \in M$, a função $h : M \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \langle \phi(x) - \phi(p), \xi(p) \rangle,$$

satisfaz $h(x) > 0$ para todo $x \neq p$.

Para provar a afirmação, observe inicialmente que $h = g \circ \phi$, onde $g : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ é a função definida por $g(y) = \langle y - \phi(p), \xi(p) \rangle$. É fácil ver que

$$\nabla g(y) = \xi(p), \qquad \operatorname{Hess} g_y = 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^{n+1}. \tag{8.9}$$

Seja $q \in M$ um ponto de mínimo global de h (tal ponto existe porque M é compacta). Por (8.9) e Proposição 4.10,

$$0 = d\phi_q(\nabla h(q)) = \{\nabla g(\phi(q))\}^T = \xi(p)^T,$$

onde $\xi(p)^T$ é a projeção ortogonal de $\xi(p)$ em $d\phi_q(T_qM)$. Então $\xi(p) \perp d\phi_q(T_qM)$, de onde se obtém $\xi(q) = \pm\xi(p)$. Como q é ponto de mínimo global de h, usando novamente (8.9) e a Proposição 4.10 obtemos, para todo $v \in T_qM$,

$$\begin{aligned} 0 \leq \operatorname{Hess} h_q(v,v) &= \operatorname{Hess} g_{\phi(q)}(d\phi_q(v), d\phi_q(v)) + \langle \sigma_q(v,v), \nabla g(\phi(q)) \rangle \\ &= \langle \sigma_q(v,v), \xi(p) \rangle. \end{aligned}$$

Como $\langle \sigma_q(v,v), \xi(q) \rangle > 0$ para todo $v \in T_qM - \{0\}$ (pela escolha de ξ), e $\xi(q) = \pm\xi(p)$, segue da desigualdade anterior que $\xi(q) = \xi(p)$. Como $\xi : M^n \to S^n$ é um difeomorfismo, conclui-se que $q = p$. Isso prova que p é o único ponto de mínimo global de h. Portanto, $h(x) > h(p) = 0$ para todo $x \neq p$, como afirmado.

Pela afirmação anterior, se $q \neq p$ então $h(q) > 0$ e, portanto, $\phi(q) \neq \phi(p)$. Provamos assim que $\phi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ é injetiva. A conclusão de que ϕ é um mergulho segue agora da compacidade de M^n.

Como consequência da afirmação anterior, temos:

(†) Para cada $p \in M$, $\phi(M)$ está contido em um dos semi-espaços fechados determinados pelo hiperplano H tangente à imersão em p.

Como M^n é compacta e conexa, e ϕ é um mergulho, tem-se pelo teorema da separação de Jordan-Brouwer que $\phi(M)$ separa $\mathbb{R}^{n+1}$ em duas componentes conexas. Ambas as componentes têm $\phi(M)$ como fronteira, e uma delas, digamos B, é limitada. Para concluir a prova do teorema, resta mostrar que B é convexo.

Suponha, por contradição, que existem $y_1, y_2 \in B$ tais que o segmento de reta fechado $\overline{y_1y_2}$ com extremos em y_1 e y_2 não está contido em B. Então existe $p \in M$ tal que $\phi(p) \in \overline{y_1y_2}$. Seja r_1, r_2 as semirretas abertas, com origem em $\phi(p)$, da reta r que passa por y_1 e y_2. Como B é limitado, tanto r_1 quanto r_2 intersecta $\phi(M) = \partial B$. Logo, por (†), r está contida no hiperplano H que é tangente à imersão em p. Seja s a reta de $\mathbb{R}^{n+1}$ que passa por y_1 e é ortogonal a H. Como B é limitado, cada uma das semirretas de s com origem em y_1 intersecta $\phi(M) = \partial B$. Isso implica que existem pontos de $\phi(M)$ em ambos os lados de H, contrariando (†). Essa contradição prova que B é convexo.

□

Como caso particular do Teorema 8.6 tem-se que toda hipersuperfície compacta e conexa em $\mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura seccional $K > 0$ é a fronteira de um corpo convexo. Esse resultado permanece válido se a hipótese $K > 0$ for enfraquecida para $K \geq 0$. Isso foi provado por Chern e Lashof [11] para $n = 2$, e segue de resultados de van Heijenoort [35] e de Sacksteder [31] para n arbitrário (uma prova direta pode ser encontrada em [12]). Para resultados dessa natureza em outros espaços ambientes veja [1, 13, 14, 16] e os artigos neles citados.

9 O Princípio do Máximo de Omori e Yau

Se M^n é uma variedade Riemanniana e $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 que atinge um máximo (local ou global) em um ponto $p \in M$, então

$$||\nabla f(p)|| = 0 \ \text{ e } \ \operatorname{Hess} f(p)(v, v) \leq 0, \ \ \forall v \in T_pM. \tag{9.1}$$

Um tal ponto p sempre existe quando M^n é compacta, mas claramente pode não existir no caso em que M é não-compacta, mesmo se M for completa e f for limitada superiormente.

O que pode ser dito então, em substituição a (9.1), de uma função $f : M^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 que é limitada superiormente mas não atinge um máximo em nenhum ponto? Um dos objetivos desta seção é provar o Teorema 9.1 abaixo, devido a Omori [25], que fornece uma resposta bastante satisfatória a essa pergunta.

Teorema 9.1. *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional limitada inferiormente e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 limitada superiormente. Então existe uma sequência (p_k) em M tal que*

$$f(p_k) \to \sup f, \quad ||\nabla f(p_k)|| \to 0, \quad \limsup_{k\to\infty} \operatorname{Hess} f(p_k) \leq 0. \tag{9.2}$$

A desigualdade em (9.2) é no sentido das formas quadráticas. Mais precisamente, ela significa que dado $\varepsilon > 0$ existe $k_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$\operatorname{Hess} f(p_k)(v,v) < \varepsilon ||v||^2, \quad v \in T_{p_k}M,\ k > k_o. \tag{9.3}$$

Complementando o teorema acima, Yau [6, 37] obteve mais tarde o seguinte resultado para variedades Riemannianas completas com curvatura de Ricci limitada inferiormente:

Teorema 9.2. *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa com curvatura de Ricci limitada inferiormente e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 limitada superiormente. Então existe uma sequência (p_k) em M tal que*

$$f(p_k) \to \sup_M f, \quad ||\nabla f(p_k)|| \to 0, \quad \limsup_{k\to\infty} \Delta f(p_k) \leq 0. \tag{9.4}$$

Os Teoremas 9.1 e 9.2, que combinados são conhecidos na literatura como o princípio do máximo de Omori e Yau, são hoje ferramentas bastante utilizadas em análise geométrica e em teoria de subvariedades.

Examinando os enunciados dos Teoremas 9.1 e 9.2, uma pergunta natural que surge é se esses teoremas seriam válidos para variedades Riemannianas arbitrárias, ou seja, se a mesma conclusão poderia ser obtida sem a hipótese de que a variedade tem curvatura limitada inferiormente. Conforme mostra o exemplo a seguir, a resposta a essa pergunta é não:

Exemplo 2. Seja M o plano $\mathbb{R}^2$ munido da métrica expressa em coordenadas polares por $dr^2 + h(r)^2 d\theta^2$, onde $h \in C^\infty([0,+\infty))$ satisfaz $h(r) > 0$ para $r > 0$ e é tal que a métrica é suave em todo $\mathbb{R}^2$. Fazendo $x_1 = r$, $x_2 = \theta$ e $g_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle$, temos

$$g = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h(r)^2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad g^{-1} = (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/h(r)^2 \end{pmatrix}. \tag{9.5}$$

Denote por Γ_{ij}^k os símbolos de Christoffel da conexão Riemanniana determinada pela métrica acima. Usando (9.5) e a fórmula (veja, por exemplo, [23, pag. 70])

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km}, \tag{9.6}$$

obtemos

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0, \ \ \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{h'(r)}{h(r)}, \ \ \Gamma_{22}^1 = -h(r)h'(r). \tag{9.7}$$

Denote por $\mathcal{R}$ o tensor curvatura de M. Por (9.7),

$$\left\langle \mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle = -h(r)h''(r). \tag{9.8}$$

Como, por (9.5),

$$\left|\frac{\partial}{\partial r}\wedge\frac{\partial}{\partial\theta}\right|^2=\left|\frac{\partial}{\partial r}\right|^2\left|\frac{\partial}{\partial\theta}\right|^2-\left\langle\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial\theta}\right\rangle^2=h(r)^2,$$

a curvatura Gaussiana de M será então dada por

$$K=\frac{\left\langle\mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial r}\right\rangle}{\left|\frac{\partial}{\partial r}\wedge\frac{\partial}{\partial\theta}\right|^2}=-\frac{h''(r)}{h(r)}. \tag{9.9}$$

Em coordenadas locais, o Laplaciano de uma função $f\in C^2(M)$ é dado por [5, pag. 5]

$$\Delta f=\frac{1}{\sqrt{\det g}}\sum_{j,k}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(g^{jk}\sqrt{\det g}\frac{\partial}{\partial x_k}f\right). \tag{9.10}$$

No caso em que f depende apenas de r, temos por (9.5) e (9.10) que

$$\Delta f=\frac{1}{h(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(h(r)\frac{\partial f}{\partial r}\right). \tag{9.11}$$

Em particular, se

$$f(x)=f(r(x))=\int_0^{r(x)}\left(\frac{1}{h(t)}\int_0^t h(s)ds\right)dt, \tag{9.12}$$

temos

$$\Delta f=\frac{1}{h(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(\int_0^r h(s)ds\right)=1. \tag{9.13}$$

Escolha h de forma que

$$\sup f<+\infty,\qquad\frac{h''(r)}{h(r)}\to+\infty\qquad\text{quando}\qquad r\to+\infty. \tag{9.14}$$

Por (9.9) e (9.14), $K(r)\to-\infty$ quando $r\to+\infty$. Por (9.13), não existe nenhuma sequência (p_k) em M que satisfaça (9.4). Isso mostra que o princípio de Omori e Yau não é válido sem a hipótese de que a curvatura da variedade é limitada inferiormente.

Como exemplo de uma função h que satisfaz (9.14), temos

$$h(r)=\begin{cases}r, & 0\le r\le 1,\\ 3r^2e^{r^3}, & r\ge 3.\end{cases} \tag{9.15}$$

□

O resultado abaixo [17, Theorem 3.4] é um fortalecimento conceitual do princípio do máximo de Omori e Yau. A demonstração que faremos aqui é uma ligeira modificação da que foi apresentada em [17].

Teorema 9.3. *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa com curvatura seccional (resp. curvatura de Ricci) limitada inferiormente e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 limitada superiormente. Então, para toda sequência (p_k) em M^n tal que $f(p_k) \to \sup_M f$, existe uma sequência (q_k) em M tal que*

$$d(p_k, q_k) \to 0, \quad f(q_k) \to \sup_M f, \quad ||\nabla f(q_k)|| \to 0, \tag{9.16}$$

$$\limsup_{k\to\infty} \mathrm{Hess} f(q_k) \leq 0 \quad (\textit{resp. } \limsup_{k\to\infty} \Delta f(q_k) \leq 0). \tag{9.17}$$

Demonstração. Faremos a demonstração da metade do teorema que se refere à Hessiana. A outra metade é provada de forma análoga e, por isso, será deixada a cargo do leitor.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ seja

$$\lambda_k = \sup_M f - f(p_k), \quad \varepsilon_k = \lambda_k^{1/2}, \quad \delta_k = \lambda_k^{1/4}. \tag{9.18}$$

Construiremos uma sequência (q_k) em M satisfazendo, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$d(p_k, q_k) \leq \delta_k, \quad f(q_k) \geq f(p_k), \quad ||\nabla f(q_k)|| \leq 2\lambda_k^{3/4}, \tag{9.19}$$

$$\mathrm{Hess}\, f(q_k)(v, v) \leq C\varepsilon_k ||v||^2, \quad v \in T_{q_k} M, \tag{9.20}$$

onde $C > 2$ é uma constante que depende da sequência (p_k) e da cota inferior da curvatura seccional de M. Seguirá imediatamente de (9.19), (9.20) e da hipótese $f(p_k) \to \sup_M f$ que a sequência (q_k) satisfaz (9.16) e (9.17).

Se $f(p_k) = \sup_M f$, então $\delta_k = \varepsilon_k = \lambda_k = 0$ por (9.18). Nesse caso, segue do princípio do máximo usual que (9.19) e (9.20) são satisfeitas se tomarmos $q_k = p_k$.

Se $f(p_k) < \sup_M f$, defina uma função $f_k : M \to \mathbb{R}$ por

$$f_k(x) = f(x) - \varepsilon_k r_k^2(x), \tag{9.21}$$

onde $r_k(x) = d(p_k, x)$. Como f é limitada superiormente e $\varepsilon_k > 0$, $f_k(x) \to -\infty$ quando $x \to \infty$ em M, o que implica que f_k atinge um máximo global em M. Escolha q_k como qualquer ponto que satisfaça $f_k(q_k) = \sup_M f_k$. Por (9.18) e (9.21), para qualquer $x \notin \overline{B}_{\delta_k}(p_k)$ temos

$$f_k(x) < f(x) - \varepsilon_k \delta_k^2 = f(x) - \lambda_k = f(x) - \sup_M f + f(p_k) \leq f(p_k) = f_k(p_k) \leq f_k(q_k),$$

o que mostra que $q_k \in \overline{B}_{\delta_k}(p_k)$. Assim, a primeira desigualdade de (9.19) é satisfeita. A segunda desigualdade decorre diretamente de (9.21):

$$f(p_k) = f_k(p_k) \leq f_k(q_k) = f(q_k) - \varepsilon_k r_k^2(q_k) \leq f(q_k).$$

Para verificar (9.20) e a terceira desigualdade de (9.19), consideraremos três casos:

1) $q_k = p_k$.

Como $\nabla(r_k^2)(p_k) = 0$ e $\mathrm{Hess}\,(r_k^2)(p_k)(v,v) = 2||v||^2$ para todo $v \in T_{p_k}M$, tem-se pelo princípio do máximo usual que

$$0 = \nabla f_k(q_k) = \nabla f(q_k) - \varepsilon_k \nabla(r_k^2)(q_k) = \nabla f(q_k). \tag{9.22}$$

$$\begin{aligned} 0 \geq \mathrm{Hess}\, f_k(q_k)(v,v) &= \mathrm{Hess}\, f(q_k)(v,v) - \varepsilon_k \mathrm{Hess}\,(r_k^2)(q_k)(v,v) \\ &= \mathrm{Hess}\, f(q_k)(v,v) - 2\varepsilon_k ||v||^2. \end{aligned} \tag{9.23}$$

Por (9.22) tem-se que a terceira desigualdade de (9.19) é satisfeita, e por (9.23) tem-se que (9.20) é satisfeita para qualquer $C > 2$.

2) $q_k \neq p_k$ e $q_k \notin \mathrm{Cut}(p_k)$.

Pelo princípio do máximo usual e definição de f_k,

$$0 = \nabla f_k(q_k) = \nabla f(q_k) - 2\varepsilon_k r_k(q_k) \nabla r_k(q_k).$$

Lembrando que $q_k \in \overline{B}_{\delta_k}(p_k)$ e que $||\nabla r_k(x)|| = 1$ em todo ponto no complementar do conjunto $\{p_k\} \cup \mathrm{Cut}(p_k)$, segue da igualdade anterior que

$$||\nabla f(q_k)|| = 2\varepsilon_k d(p_k, q_k) \leq 2\varepsilon_k \delta_k = 2\lambda_k^{3/4}. \tag{9.24}$$

Usando novamente o princípio do máximo usual e a definição de f_k, obtemos

$$0 \geq \mathrm{Hess}\, f_k(q_k)(v,v) = \mathrm{Hess}\, f(q_k)(v,v) - \varepsilon_k \mathrm{Hess}\,(r_k^2)(q_k)(v,v),$$

e então

$$\mathrm{Hess}\, f(q_k)(v,v) \leq \varepsilon_k \mathrm{Hess}\,(r_k^2)(q_k)(v,v), \quad v \in T_{q_k}M. \tag{9.25}$$

Com o intuito de estimar o lado direito de (9.25), dado $v \in T_{q_k}M$ denote por v_R a componente de v que é paralela a $\nabla r_k(q_k)$, e por v_T a componente de v que é ortogonal a $\nabla r_k(q_k)$ (ou seja, tangente à esfera geodésica de M com centro em p_k que passa por q_k). Como $\nabla_{\nabla r_k} \nabla r_k = 0$ e $||\nabla r_k|| \equiv 1$, temos

$$\begin{aligned} \mathrm{Hess}\,(r_k^2)(q_k)(v,v) &= \langle \nabla_v \nabla(r_k^2), v\rangle = \langle \nabla_v (2r_k \nabla r_k), v\rangle \\ &= 2\langle \nabla r_k(q_k), v\rangle^2 + 2r_k(q_k)\langle \nabla_v \nabla r_k, v\rangle \\ &= 2||v_R||^2 + 2r_k(q_k)\langle \nabla_{v_T} \nabla r_k, v_T\rangle \\ &= 2||v_R||^2 + 2r_k(q_k)\mathrm{Hess}\, r_k(q_k)(v_T, v_T). \end{aligned}$$

Seja k_0 um número real positivo tal que $K_M \geq -k_0^2$. Pelo teorema de comparação da Hessiana (cf. Teorema 6.3) e igualdade acima,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hess}\,(r_k^2)(q_k)(v,v) &\leq 2||v_R||^2 + 2k_0 r_k(q_k)\coth(k_0 r_k(q_k))||v_T||^2 \\ &\leq 2||v_R||^2 + 2k_0\delta_k \coth(k_0\delta_k)||v_T||^2, \end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos que $r_k(q_k) = d(p_k, q_k) \leq \delta_k$ e que a função $t \mapsto t\coth(t)$ é crescente. Como $t\coth(t) > 1$ para todo $t > 0$, segue da desigualdade acima que

$$\begin{aligned} \mathrm{Hess}\,(r_k^2)(q_k)(v,v) &\leq 2k_0\delta_k \coth(k_0\delta_k)(||v_R||^2 + ||v_T||^2) \\ &= 2k_0\delta_k \coth(k_0\delta_k)||v||^2, \end{aligned} \tag{9.26}$$

para todo $v \in T_{q_k}M$. Como $2k_0\delta_k \coth(k_0\delta_k) \to 2$ quando $k \to \infty$ (pois $\delta_k \to 0$ e $t\coth(t) \to 1$ quando $t \to 0^+$), existe uma constante $C > 2$ tal que $2k_0\delta_k \coth(k_0\delta_k) \leq C$ para todo $k \in \mathbb{N}$. A constante C depende apenas de k_0 e da sequência (δ_k) (ou seja, C depende apenas de k_0 e da sequência maximizante (p_k)). Usando essa informação em (9.26), obtemos

$$\mathrm{Hess}\,(r_k^2)(q_k)(v,v) \leq C||v||^2, \quad v \in T_{q_k}M. \tag{9.27}$$

Substituindo (9.27) em (9.25), conclui-se que

$$\mathrm{Hess}\, f(q_k)(v,v) \leq C\varepsilon_k||v||^2, \quad v \in T_{q_k}M. \tag{9.28}$$

3) $q_k \in \mathrm{Cut}(p_k)$.

Como demonstrado em [17], esse caso de fato não existe, mas como a prova de que q_k não pertence ao cut locus de p_k é longa e técnica, preferimos provar (9.20) e a terceira desigualdade de (9.19) usando um truque que é atribuido a Calabi.

Considere uma geodésica minimizante (normalizada) $\gamma : [0, r_k(q_k)] \to M$ ligando p_k a q_k, e um ponto $z_k = \gamma(a)$, onde $0 < a < r_k(q_k)$. Como γ é minimizante, q_k não pertence ao cut locus $\mathrm{Cut}(z_k)$ de z_k. Logo a função $\overline{r}_k : M \to \mathbb{R}$, $\overline{r}_k(x) = d(z_k, x)$, é diferenciável em q_k. Temos

$$r_k(q_k) = \overline{r}_k(q_k) + a, \tag{9.29}$$

e, pela desigualdade triangular,

$$r_k(x) = d(p_k, x) \leq d(p_k, z_k) + d(z_k, x) = a + \overline{r}_k(x), \quad x \in M. \tag{9.30}$$

Seja $\overline{f}_k : M \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$\overline{f}_k(x) = f(x) - \varepsilon_k(\overline{r}_k(x) + a)^2. \tag{9.31}$$

Por (9.29), (9.30) e (9.31), temos, para todo $x \in M$,

$$\begin{aligned} \overline{f}_k(q_k) &= f(q_k) - \varepsilon_k(\overline{r}_k(q_k) + a)^2 = f(q_k) - \varepsilon_k r_k^2(q_k) = f_k(q_k) \\ &\geq f_k(x) = f(x) - \varepsilon_k r_k^2(x) \geq f(x) - \varepsilon_k(\overline{r}_k(x) + a)^2 = \overline{f}_k(x), \end{aligned} \tag{9.32}$$

o que mostra que q_k é também um ponto de máximo global de $\overline{f}_k$. Logo, por (9.29), (9.31) e o princípio do máximo usual,

$$0 = \nabla\overline{f}_k(q_k) = \nabla f(q_k) - 2\varepsilon_k r_k(q_k)\nabla\overline{r}_k(q_k), \tag{9.33}$$

e

$$\begin{aligned} 0 &\geq \operatorname{Hess} \overline{f}_k(q_k)(v,v) \\ &= \operatorname{Hess} f(q_k)(v,v) - \varepsilon_k \operatorname{Hess} (\overline{r}_k + a)^2(q_k)(v,v), \quad v \in T_{q_k}M. \end{aligned} \tag{9.34}$$

Como $r_k(q_k) = d(p_k, q_k) \leq \delta_k$ e $||\nabla \overline{r}_k(q_k)|| = 1$, segue de (9.18) e (9.33) que

$$||\nabla f(q_k)|| = 2\varepsilon_k r_k(q_k) \leq 2\varepsilon_k \delta_k = 2\lambda_k^{3/4}, \tag{9.35}$$

que é precisamente a terceira desigualdade de (9.19).

Resta provar que (9.20) é também válida nesse caso. Por (9.34),

$$\operatorname{Hess} f(q_k)(v,v) \leq \varepsilon_k \operatorname{Hess} (\overline{r}_k + a)^2(q_k)(v,v), \quad v \in T_{q_k}M. \tag{9.36}$$

Vamos agora estimar o termo no lado direito da desigualdade acima. Por (9.29),

$$\begin{aligned} \operatorname{Hess} (\overline{r}_k + a)^2(q_k)(v,v) &= \left\langle \nabla_v \nabla (\overline{r}_k + a)^2, v \right\rangle = 2 \left\langle \nabla_v (\overline{r}_k + a) \nabla \overline{r}_k, v \right\rangle \\ &= 2\langle \nabla \overline{r}_k(q_k), v\rangle^2 + 2\{\overline{r}_k(q_k) + a\} \operatorname{Hess} \overline{r}_k(q_k)(v,v) \\ &= 2||v_R||^2 + 2\{\overline{r}_k(q_k) + a\} \operatorname{Hess} \overline{r}_k(q_k)(v_T, v_T), \end{aligned} \tag{9.37}$$

para todo $v \in T_{q_k}M$, onde v_R é a componente de v paralela a $\nabla \overline{r}_k(q_k)$, e v_T é a componente de v ortogonal a $\nabla \overline{r}_k(q_k)$. Como, pelo teorema de comparação da Hessiana,

$$\operatorname{Hess} \overline{r}_k(q_k)(v_T, v_T) \leq k_0 \coth(k_0 \overline{r}_k(q_k)) ||v_T||^2,$$

tem-se por (9.37) que

$$\operatorname{Hess} (\overline{r}_k + a)^2(q_k)(v,v) \leq 2||v_R||^2 + 2k_0\{\overline{r}_k(q_k) + a\} \coth(k_0 \overline{r}_k(q_k)) ||v_T||^2. \tag{9.38}$$

Como $\overline{r}_k(q_k) = d(z_k, q_k) < d(p_k, q_k) \leq \delta_k$ e a função $t \mapsto t \coth(t)$ é crescente, segue que

$$\operatorname{Hess} (\overline{r}_k + a)^2(q_k)(v,v) \leq 2||v_R||^2 + 2k_0\delta_k \coth(k_0\delta_k)||v_T||^2 + 2k_0 a \coth(k_0 \overline{r}_k(q_k))||v_T||^2.$$

Usando na desigualdade acima que $t \coth(t) > 1$ para todo $t > 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{Hess} (\overline{r}_k + a)^2(q_k)(v,v) &\leq 2k_0\delta_k \coth(k_0\delta_k)||v||^2 + 2k_0 a \coth(k_0 \overline{r}_k(q_k))||v||^2 \\ &\leq C||v||^2 + 2k_0 a \coth(k_0 \overline{r}_k(q_k))||v||^2, \end{aligned} \tag{9.39}$$

onde C é a mesma constante do caso 2). Usando (9.39) em (9.36), obtemos

$$\operatorname{Hess} f(q_k)(v,v) \leq C\varepsilon_k ||v||^2 + 2\varepsilon_k k_0 a \coth(k_0 \overline{r}_k(q_k))||v||^2. \tag{9.40}$$

Como a desigualdade anterior vale para todo $0 < a < r_k(q_k)$, fazendo $a \to 0$ conclui-se que

$$\operatorname{Hess} f(q_k)(v,v) \leq C\varepsilon_k ||v||^2, \quad v \in T_{q_k}M, \tag{9.41}$$

o que encerra a demonstração do teorema.

□

O princípio do máximo de Omori e Yau garante a existência de uma sequência maximizante com propriedades especiais. Em contraste, o Teorema 9.3 garante a existência de uma sequência maximizante especial assintoticamente próxima a qualquer sequência maximizante dada. Seguindo a terminologia introduzida em [17], referir-nos-emos a qualquer sequência que tem as propriedades de (q_k) no teorema mencionado como sendo uma *boa sombra* da sequência maximizante (p_k).

10 Teoremas de Não-Imersibilidade

Um teorema famoso de Nash estabelece que qualquer variedade Riemanniana pode ser mergulhada isometricamente em algum espaço Euclidiano. Uma questão natural que surge é determinar a menor dimensão possível do espaço Euclidiano recebedor. Por exemplo, Blanusa [3] construiu um mergulho isométrico do plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$ em $\mathbb{R}^6$, mas é um problema em aberto se um mergulho com codimensão menor do que 4 pode ser construido. O que se sabe é que a codimensão é no mínimo 2, uma vez que um teorema clássico de Hilbert estabelece que $\mathbb{H}^2$ não pode ser imerso isometricamente em $\mathbb{R}^3$.

O objetivo desta seção é apresentar alguns resultados que ilustram de maneira simples o papel da curvatura na questão da existência ou não-existência de uma imersão/mergulho isométrico de uma dada variedade Riemanniana em um espaço Euclidiano específico, ou mais geralmente, em uma outra variedade Riemanniana.

Começaremos nossa discussão com o seguinte lema, que foi conjecturado por Chern e Kuiper [10] e demonstrado por Otsuki [29].

Lema 10.1. *Seja V^n e W^k espaços vetoriais reais com produto interno e $\alpha : V \times V \to W$ uma aplicação bilinear simétrica. Suponha que*

(i) $\langle \alpha(v,v), \alpha(w,w)\rangle - ||\alpha(v,w)||^2 \leq 0$, *para todo par ortonormal* $v, w \in V$,

(ii) $\alpha(v,v) \neq 0$, $v \in V - \{0\}$.

Então $k \geq n$.

Demonstração. Seja $S = \{v \in V : ||v|| = 1\}$ e $f : S \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(v) = ||\alpha(v,v)||^2$. Como S é compacta, f atinge um valor mínimo em algum $v_0 \in S$. Dado $w \in S$ com $w \perp v_0$, considere a curva $\gamma : \mathbb{R} \to S$ dada por

$$\gamma(t) = (\cos t)v_0 + (\sin t)w.$$

Como se pode verificar facilmente,

$$\gamma(0) = v_0, \quad \gamma'(0) = w, \quad \gamma''(0) = -v_0. \tag{10.1}$$

Além disso,

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = 4\langle \alpha(\gamma'(t), \gamma(t)), \alpha(\gamma(t), \gamma(t))\rangle, \tag{10.2}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} f(\gamma(t)) = 4\langle \alpha(\gamma''(t), \gamma(t)), \alpha(\gamma(t), \gamma(t))\rangle &+ 4\langle \alpha(\gamma'(t), \gamma'(t)), \alpha(\gamma(t), \gamma(t))\rangle \\ &+ 8||\alpha(\gamma'(t), \gamma(t))||^2. \end{aligned} \tag{10.3}$$

Como 0 é ponto de mínimo de $f \circ \gamma$ (pois v_0 é ponto de mínimo de f), segue de (10.1), (10.2) e (10.3) que

$$0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\gamma(t)) = 4\langle \alpha(w, v_0), \alpha(v_0, v_0)\rangle, \tag{10.4}$$

$$0 \leq \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} f(\gamma(t)) = 4\langle \alpha(-v_0, v_0), \alpha(v_0, v_0)\rangle \quad + \quad 4\langle \alpha(w, w), \alpha(v_0, v_0)\rangle$$
$$+ \quad 8||\alpha(w, v_0)||^2. \tag{10.5}$$

A igualdade (10.4) e a desigualdade (10.5) valem para todo $w \in V$ que satisfaça $||w|| = 1$ e $w \perp v_0$.

Seja $[v_0]^\perp$ o subespaço de V que é ortogonal a v_0 e seja $L : [v_0]^\perp \to W$ a aplicação linear definida por $L(w) = \alpha(v_0, w)$. Por (10.4) e hipótese (ii), temos $\dim \mathrm{Im}(L) \leq k - 1$. Logo, pelo teorema do núcleo e da imagem,

$$\dim \mathrm{Ker}(L) = \dim [v_0]^\perp - \dim \mathrm{Im}(L) \geq (n-1) - (k-1) = n - k.$$

Suponha, por contradição, que $k < n$. Então, pela desigualdade acima, existe um vetor unitário $w_0 \in V$ tal que $w_0 \perp v_0$ e $L(w_0) = \alpha(v_0, w_0) = 0$. Usando (10.5) e a hipótese (ii), obtemos

$$\langle \alpha(v_0, v_0), \alpha(w_0, w_0)\rangle - ||\alpha(v_0, w_0)||^2 = \langle \alpha(v_0, v_0), \alpha(w_0, w_0)\rangle \geq ||\alpha(v_0, v_0)||^2 > 0,$$

contrariando (i). Essa contradição prova que $k \geq n$. □

Como preestabelecido por Chern e Kuiper [10], como consequência do Lema 10.1 temos o seguinte resultado.

Teorema 10.2. *Seja $\phi : M^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana compacta M^n em $\mathbb{R}^{n+k}$. Se, para todo $x \in M$, T_xM contém um subespaço $L(x)$ de dimensão m tal que $K(\sigma) \leq 0$ para todo plano $\sigma \subset L(x)$, então $k \geq m$.*

Demonstração. Pela Proposição 4.13, existe $p \in M$ tal que $\sigma_p(v, v) \neq 0$, para todo vetor não-nulo $v \in T_pM$. Considere a restrição de σ_p a $L(p) \times L(p)$. Como, por hipótese, $K(\sigma) \leq 0$ para todo plano $\sigma \subset L(p)$, temos pela equação de Gauss

$$\langle \sigma_p(v, v), \sigma_p(w, w)\rangle - ||\sigma_p(v, w)||^2 = K(v, w) \leq 0, \tag{10.6}$$

para todo par ortonormal $\{v, w\}$ de $L(p)$. A conclusão $k \geq m$ é agora uma consequência do Lema 10.1. □

Corolário 10.3. *Uma variedade Riemanniana compacta n-dimensional com curvatura seccional não-positiva não pode ser imersa isometricamente em $\mathbb{R}^{2n-1}$.*

Em particular, temos o seguinte resultado de Tompkins [34]:

Corolário 10.4. *Uma variedade Riemanniana compacta n-dimensional com curvatura seccional identicamente nula não pode ser imersa isometricamente em $\mathbb{R}^{2n-1}$.*

A seguinte generalização do Corolário 10.3 foi obtida por O'Neill [28]:

Teorema 10.5. *Seja $\phi : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana compacta M^n em uma variedade de Hadamard $\overline{M}^{n+k}$. Denote por K e $\overline{K}$ as curvaturas seccionais de M e $\overline{M}$, respectivamente. Se $K \leq \overline{K}$, então $k \geq n$.*

Demonstração. A prova é praticamente a mesma do Teorema 10.2. Pela Proposição 6.6, existe $p \in M$ tal que $\sigma_p(v, v) \neq 0$, para todo vetor não-nulo $v \in T_pM$. Da hipótese $K \leq \overline{K}$ e equação de Gauss (cf. (3.7)), obtemos

$$\langle \sigma_p(v, v), \sigma_p(w, w) \rangle - ||\sigma_p(v, w)||^2 = K(v, w) - \overline{K}(v, w) \leq 0, \tag{10.7}$$

para todo par ortonormal $\{v, w\}$ de T_pM. A conclusão do teorema segue agora do Lema 10.1. □

Modificando ligeiramente a demonstração do Lema 10.1, obtemos o seguinte resultado:

Lema 10.6. *Seja V^n e W^k espaços vetoriais reais com produto interno e $\alpha : V \times V \to W$ uma aplicação bilinear simétrica. Se*

$$\langle \alpha(v, v), \alpha(w, w) \rangle - ||\alpha(v, w)||^2 < 0,$$

para todo par ortonormal $\{v, w\}$ em V, então $k \geq n - 1$.

Demonstração. Podemos supor que existe um vetor unitário $v_0 \in V$ tal que $\alpha(v_0, v_0) = 0$, pois se $\alpha(v, v) \neq 0$ para todo $v \in V - \{0\}$, tem-se pelo Lema 10.1 que $k \geq n > n-1$. Seja $L : [v_0]^\perp \to W$ a aplicação linear definida por $L(w) = \alpha(v_0, w)$. Pelo teorema do núcleo e da imagem,

$$\dim \operatorname{Ker}(L) = \dim [v_0]^\perp - \dim \operatorname{Im}(L) = (n-1) - \dim \operatorname{Im}(L) \geq n - 1 - k.$$

Supondo por contradição que $k < n - 1$, tem-se pela desigualdade acima que existe um vetor unitário $w_0 \in V$ tal que $w_0 \perp v_0$ e $L(w_0) = \alpha(v_0, w_0) = 0$. Segue dessa informação e de $\alpha(v_0, v_0) = 0$ que

$$\langle \alpha(v_0, v_0), \alpha(w_0, w_0) \rangle - ||\alpha(v_0, w_0)||^2 = 0,$$

contrariando a hipótese. Essa contradição prova que $k \geq n - 1$. □

Observação 10.7. Segue da demonstração acima que se $\alpha : V^n \times V^n \to W^k$, $k < n - 1$, é uma aplicação bilinear simétrica, então ou α é definida ou existe um par ortonormal $\{v_0, w_0\}$ em V tal que $\alpha(v_0, v_0) = 0$ e $\alpha(v_0, w_0) = 0$.

Como uma aplicação do Lema 10.6, temos o seguinte resultado:

Teorema 10.8. *Seja $\phi : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ uma imersão isométrica. Se existem um ponto $p \in M$ e um subespaço $L \subset T_pM$ de dimensão m, $2 \leq m \leq n$, tal que $K(\sigma) < \overline{K}(\sigma)$ para todo plano $\sigma \subset L$, então $k \geq m - 1$.*

Demonstração. Como $K(\sigma) < \overline{K}(\sigma)$ para todo plano $\sigma \subset L$ por hipótese, temos pela equação de Gauss (cf. (3.7))

$$\langle \sigma_p(v,v), \sigma_p(w,w)\rangle - ||\sigma_p(v,w)||^2 = K(v,w) - \overline{K}(v,w) < 0, \tag{10.8}$$

para quaisquer vetores ortonormais $v, w \in L$. Aplicando o Lema 10.6 para a restrição de σ_p a $L \times L$, obtemos $k \geq m-1$. □

Na demonstração de alguns resultados, como o Teorema 10.10 abaixo, a seguinte versão do lema de Otsuki desempenha um papel fundamental (para uma prova veja, por exemplo, [21, pag. 28]).

Lema 10.9. *Seja V^n e W^k espaços vetoriais reais com produto interno e $\alpha : V \times V \to W$ uma aplicação bilinear simétrica tal que $\alpha(v,v) \neq 0$, para todo $v \neq 0$ em V. Se $k < n$, então existe um par de vetores $v_0, w_0 \in V$ linearmente independentes tais que*

$$\alpha(v_0, v_0) = \alpha(w_0, w_0) \neq 0, \;\; \alpha(v_0, w_0) = 0.$$

O teorema a seguir, devido a Jorge e Koutroufiotis [19], é uma generalização do Corolário 10.3, Corolário 10.4 e Teorema 10.5.

Teorema 10.10. *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa com curvatura escalar limitada inferiormente e $\phi : M^n \to \overline{M}^{n+k}$, $k \leq n-1$, uma imersão isométrica cuja imagem está contida em uma bola normal fechada $\overline{B}_\lambda(p_o)$ de centro p_o e raio λ. Denote por K e $\overline{K}$ as curvaturas seccionais de M e $\overline{M}$, respectivamente, e seja $c = \sup_{\overline{B}_\lambda(p_o)} \overline{K}$. No caso $c > 0$, admita também que $\lambda < \pi/2\sqrt{c}$. Então*

$$\sup_M K \geq \inf_{\overline{B}_\lambda(p_o)} \overline{K} + \begin{cases} c\cot^2(\lambda\sqrt{c}), & c > 0, \\ 1/\lambda^2, & c = 0, \\ -c\coth^2(\lambda\sqrt{-c}), & c < 0. \end{cases} \tag{10.9}$$

Demonstração. Podemos supor que a curvatura seccional K de M é limitada inferiormente, pois, do contrário, a conclusão do teorema segue trivialmente de (4.6) e da hipótese de limitação inferior da curvatura escalar de M.

Seja $r : \overline{M} \to \mathbb{R}$ a função distância ao ponto p_0. Como, por hipótese, $\phi(M)$ está contido na bola normal fechada $\overline{B}_\lambda(p_o)$, a função $f := r \circ \phi$ é limitada (pela constante λ) e diferenciável no complementar do conjunto $f^{-1}(0) = \phi^{-1}(p_0)$. Pelo Teorema 9.1, para todo $\varepsilon > 0$ existe um ponto $x_\varepsilon \in M$ tal que

$$f(x_\varepsilon) > \sup_M f - \varepsilon, \quad ||\nabla f(x_\varepsilon)|| < \varepsilon, \quad \text{Hess}\, f_{x_\varepsilon}(v,v) < \varepsilon||v||^2 \quad \forall v \in T_{x_\varepsilon}M. \tag{10.10}$$

Denotando por $\{\nabla r(\phi(x_\varepsilon))\}^T$ a projeção ortogonal de $\nabla r(\phi(x_\varepsilon))$ em $d\phi_{x_\varepsilon}(T_{x_\varepsilon}M)$, tem-se pela Proposição 4.10 e segunda desigualdade de (10.10),

$$||\{\nabla r(\phi(x_\varepsilon))\}^T|| = ||d\phi_{x_\varepsilon}(\nabla f(x_\varepsilon))|| = ||\nabla f(x_\varepsilon)|| < \varepsilon. \tag{10.11}$$

Pela Proposição 4.10, tem-se também

$$\operatorname{Hess} f_{x_\varepsilon}(v,v) = \operatorname{Hess} r_{\phi(x_\varepsilon)}(d\phi_{x_\varepsilon}(v), d\phi_{x_\varepsilon}(v)) + \langle \sigma(v,v), \nabla r(\phi(x_\varepsilon))\rangle, \tag{10.12}$$

para todo $v \in T_{x_\varepsilon}M$. Como a Hessiana de r anula-se na direção de ∇r, vale que

$$\operatorname{Hess} r_{\phi(x_\varepsilon)}(d\phi_{x_\varepsilon}(v), d\phi_{x_\varepsilon}(v)) = \operatorname{Hess} r_{\phi(x_\varepsilon)}(\tilde{v}, \tilde{v}),$$

onde $\tilde{v}$ é a componente de $d\phi_{x_\varepsilon}(v)$ que é tangente à esfera geodésica de $\overline{M}$ centrada em p_0 que passa por $\phi(x_\varepsilon)$. Logo, por (10.10), (10.12) e teorema de comparação da Hessiana,

$$\begin{aligned} \langle \sigma(v,v), -\nabla r(\phi(x_\varepsilon))\rangle &= -\operatorname{Hess} f_{x_\varepsilon}(v,v) + \operatorname{Hess} r_{\phi(x_\varepsilon)}(\tilde{v},\tilde{v}) \\ &> -\varepsilon||v||^2 + \mu_c(f(x_\varepsilon))||\tilde{v}||^2, \quad v \in T_{x_\varepsilon}M, \end{aligned} \tag{10.13}$$

onde

$$\mu_c(t) = \begin{cases} \sqrt{c}\,\cot(t\sqrt{c}), & c > 0, \\ 1/t, & c = 0, \\ \sqrt{-c}\,\coth(t\sqrt{-c}), & c < 0. \end{cases} \tag{10.14}$$

Como $\mu_c(t)$ é decrescente em t, segue de (10.13) que

$$\langle \sigma(v,v), -\nabla r(\phi(x_\varepsilon))\rangle > -\varepsilon||v||^2 + \mu_c(\lambda)||\tilde{v}||^2, \quad v \in T_{x_\varepsilon}M. \tag{10.15}$$

Por (10.11) e desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} ||\tilde{v}||^2 &= ||d\phi_{x_\varepsilon}(v)||^2 - \langle d\phi_{x_\varepsilon}(v), \nabla r(\phi(x_\varepsilon))\rangle^2 \\ &= ||d\phi_{x_\varepsilon}(v)||^2 - \langle d\phi_{x_\varepsilon}(v), \{\nabla r(\phi(x_\varepsilon))\}^T\rangle^2 \\ &\geq ||d\phi_{x_\varepsilon}(v)||^2 - ||d\phi_{x_\varepsilon}(v)||^2\,||\{\nabla r(\phi(x_\varepsilon))\}^T||^2 \\ &= ||v||^2 - ||v||^2\,||\{\nabla r(\phi(x_\varepsilon))\}^T||^2 \\ &\geq (1-\varepsilon^2)||v||^2. \end{aligned}$$

Usando essa informação em (10.15), obtemos

$$\langle \sigma(v,v), -\nabla r(\phi(x_\varepsilon))\rangle > \{\mu_c(\lambda) - \varepsilon^2\mu_c(\lambda) - \varepsilon\}||v||^2. \tag{10.16}$$

Logo,

$$\frac{||\sigma(v,v)||}{||v||^2} \geq \frac{\langle \sigma(v,v), -\nabla r(\phi(x_\varepsilon))\rangle}{||v||^2} > \mu_c(\lambda) - \varepsilon^2\mu_c(\lambda) - \varepsilon, \tag{10.17}$$

para todo $v \in T_{x_\varepsilon}M - \{0\}$. Como $\mu_c(\lambda) > 0$ (aqui estamos usando que $\lambda < \pi/2\sqrt{c}$ no caso $c > 0$), o lado direito da desigualdade anterior é positivo para todo ε positivo suficientemente pequeno, digamos $\varepsilon < \varepsilon_0$. Logo $\sigma(v,v) \neq 0$ para todo $v \neq 0$ em $T_{x_\varepsilon}M$

e todo $\varepsilon < \varepsilon_0$. Como $k \leq n-1$, o Lema 10.9 assegura que, para cada $\varepsilon < \varepsilon_0$, existem vetores $v, w \in T_{x_\varepsilon}M$ linearmente independentes tais que

$$\sigma(v,v) = \sigma(w,w) \neq 0, \quad \sigma(v,w) = 0. \tag{10.18}$$

Denotando por $K(v,w)$ e $\overline{K}(v,w)$ as curvaturas seccionais de M e $\overline{M}$, respectivamente, segundo o plano gerado por v e w, temos por (10.18) e equação de Gauss,

$$\begin{aligned} K(v,w) &= \frac{\langle \mathcal{R}(v,w)w, v\rangle}{||v||^2||w||^2 - \langle v,w\rangle^2} \\ &= \frac{\langle \overline{\mathcal{R}}(v,w)w, v\rangle}{||v||^2||w||^2 - \langle v,w\rangle^2} + \frac{\langle \sigma(v,v), \sigma(w,w)\rangle - ||\sigma(v,w)||^2}{||v||^2||w||^2 - \langle v,w\rangle^2} \\ &= \overline{K}(v,w) + \frac{||\sigma(v,v)||\,||\sigma(w,w)||}{||v||^2||w||^2 - \langle v,w\rangle^2} \\ &\geq \overline{K}(v,w) + \frac{||\sigma(v,v)||}{||v||^2}\,\frac{||\sigma(w,w)||}{||w||^2}, \end{aligned} \tag{10.19}$$

onde $\mathcal{R}$ e $\overline{\mathcal{R}}$ são os tensores curvatura de M e $\overline{M}$, respectivamente. Usando (10.17) na desigualdade anterior, obtemos

$$\sup_M K \geq K(v,w) > \inf_{\overline{B}_\lambda(p_o)} \overline{K} + \{\mu_c(\lambda) - \varepsilon^2\mu_c(\lambda) - \varepsilon\}^2.$$

Como a desigualdade acima vale para todo $\varepsilon < \varepsilon_0$, fazendo $\varepsilon \to 0$ conclui-se que

$$\sup_M K \geq \inf_{\overline{B}_\lambda(p_o)} \overline{K} + \mu_c(\lambda)^2. \tag{10.20}$$

A desigualdade (10.9) segue agora de (10.14) e (10.20).

□

Corolário 10.11. *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa com curvatura escalar limitada inferiormente e $\phi : M^n \to Q_c^{n+k}$, $k \leq n-1$, uma imersão isométrica de M^n na forma espacial $(n+k)$-dimensional de curvatura seccional constante c. Suponha que $\phi(M)$ esteja contido em uma bola normal fechada $\overline{B}_\lambda(p_o)$ de centro p_o e raio λ. Se $c > 0$, suponha também que $\lambda < \pi/2\sqrt{c}$. Então*

$$\sup_M K \geq \begin{cases} c\,\mathrm{cosec}^2(\lambda\sqrt{c}), & c > 0, \\ 1/\lambda^2, & c = 0, \\ -c\,\mathrm{cosech}^2(\lambda\sqrt{-c}), & c < 0. \end{cases} \tag{10.21}$$

Observação 10.12. Da demonstração do Teorema 10.10 (mais precisamente, de (10.19)) obtém-se que existem um ponto $x \in M$ e um plano $\sigma \subset T_xM$ tais que $K(\sigma) > \overline{K}(\sigma)$. Isso mostra que o Teorema 10.10 é de fato uma generalização do Teorema 10.5.

O teorema a seguir, devido a Jorge e Xavier [20], traz uma estimativa do supremo da norma do vetor curvatura média de uma subvariedade limitada. Note que, ao contrário do Teorema 10.10, a estimativa é feita sem nenhuma restrição na codimensão da subvariedade.

Teorema 10.13. *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa com curvatura escalar limitada inferiormente, $\phi : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ uma imersão isométrica cuja imagem está contida em uma bola normal fechada $\overline{B}_\lambda(p_o)$ de centro p_o e raio λ, $c = \sup_{\overline{B}_\lambda(p_o)} \overline{K}$. No caso $c > 0$, admita que $\lambda < \pi/2\sqrt{c}$. Então*

$$\sup_M |\overrightarrow{H}| \geq \begin{cases} \sqrt{c}\cot(\lambda\sqrt{c}), & c > 0, \\ 1/\lambda, & c = 0, \\ \sqrt{-c}\,\coth(\lambda\sqrt{-c}), & c < 0. \end{cases} \tag{10.22}$$

Demonstração. Podemos supor que $|\overrightarrow{H}|$ é limitada, pois, do contrário, (10.22) valeria trivialmente. Usando a equação de Gauss e o fato que $\overline{K} \leq c$ na bola fechada $\overline{B}_\lambda(p_0)$, prova-se facilmente que (cf. equação (4.12) na demonstração da Proposição 4.6)

$$|\sigma|^2 \leq n^2|\overrightarrow{H}|^2 - n(n-1)R + n(n-1)c, \tag{10.23}$$

onde R é a curvatura escalar de M^n. Como $|\overrightarrow{H}|$ é limitado, e R é limitado inferiormente por hipótese, segue da desigualdade acima que $|\sigma|$ é limitado. Em particular, a curvatura seccional de M^n é limitada.

Da demonstração do Teorema 10.10 (mais precisamente, da desigualdade (10.16)) obtemos, para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, um ponto $x_\varepsilon \in M$ tal que

$$\langle \sigma(v,v), -\nabla r(\phi(x_\varepsilon))\rangle > \mu_c(\lambda) - \varepsilon^2\mu_c(\lambda) - \varepsilon, \quad v \in T_{x_\varepsilon}M,\ |v| = 1.$$

Tomando o traço na desigualdade acima, obtemos

$$\sup_M |\overrightarrow{H}| \geq |\overrightarrow{H}(x_\varepsilon)| \geq \langle \overrightarrow{H}(x_\varepsilon), -\nabla r(\phi(x_\varepsilon))\rangle > \mu_c(\lambda) - \varepsilon^2\mu_c(\lambda) - \varepsilon.$$

Como a desigualdade anterior vale para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, fazendo $\varepsilon \to 0$ concluimos que $\sup_M |\overrightarrow{H}| \geq \mu_c(\lambda)$. □

11 Campos Tensoriais

Definição 11.1. Seja M uma variedade diferenciável. Dados inteiros $r \geq 0$ e $s \geq 0$, não ambos nulos, um campo tensorial de ordem contravariante r e ordem covariante s, ou simplesmente um campo tensorial do tipo (r,s) sobre M, é uma aplicação

$$T : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \to C^\infty(M),$$

que é multilinear sobre $C^\infty(M)$.

É fácil ver que o conjunto $\mathcal{T}_s^r(M)$ de todos os campos tensoriais do tipo (r,s) sobre M, munido das operações usuais de adição funcional e multiplicação por um elemento de $C^\infty(M)$, é um módulo sobre $C^\infty(M)$. Por conveniência, convencionamos que um campo tensorial do tipo $(0,0)$ sobre M é um elemento de $C^\infty(M)$. Assim, $\mathcal{T}_0^0(M) = C^\infty(M)$.

Por definição, um campo tensorial do tipo $(0,1)$ sobre M é uma aplicação $T : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ que é linear sobre $C^\infty(M)$, ou seja, é uma 1-forma diferencial em M. Assim, $\mathcal{T}_1^0(M) = \mathfrak{X}^*(M)$.

Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, a aplicação $T : \mathfrak{X}^*(M) \to C^\infty(M)$ definida por $T(\omega) = \omega(X)$ é claramente linear sobre $C^\infty(M)$. Assim, T é um campo tensorial do tipo $(1,0)$ sobre M. Pode-se mostrar que todo campo tensorial do tipo $(1,0)$ sobre M surge desta forma a partir de um único $X \in \mathfrak{X}(M)$. Assim, $\mathcal{T}_0^1(M) \cong \mathfrak{X}(M)$.

Se $T : \mathfrak{X}(M)^s \to \mathfrak{X}(M)$ é uma aplicação multilinear sobre $C^\infty(M)$, podemos definir uma aplicação $\widetilde{T} : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M)^s \to C^\infty(M)$ por

$$\widetilde{T}(\omega, X_1, \ldots, X_s) = \omega(T(X_1, \ldots, X_s)). \tag{11.1}$$

Claramente $\widetilde{T}$ é uma aplicação multilinear sobre $C^\infty(M)$, e então é um campo tensorial do tipo $(1,s)$ sobre M.

Um exemplo de uma aplicação do tipo considerado no parágrafo anterior é o tensor curvatura $\mathcal{R} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ de uma variedade Riemanniana M. Por ser trilinear sobre $C^\infty(M)$, podemos considerá-lo como um campo tensorial do tipo $(1,3)$ sobre M. Outro exemplo é o operador de forma $A : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ de uma imersão isométrica $\phi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ relativo a um campo normal ξ em M. Por ser uma aplicação linear sobre $C^\infty(M)$, podemos considerá-lo como um campo tensorial do tipo $(1,1)$ sobre M.

Campos tensoriais do tipo $(0,s)$ (por exemplo, as formas diferenciais) são chamados *covariantes*, enquanto que os do tipo $(r,0)$ (por exemplo, os campos vetoriais) são chamados *contravariantes*. Um campo tensorial do tipo (r,s) em que r e s são ambos não-nulos é chamado *misto*.

Nosso objetivo agora é mostrar que, a exemplo dos campos vetoriais, qualquer campo tensorial T em uma variedade diferenciável M pode de fato ser visto como um campo em M, que associa a cada ponto $p \in M$ uma aplicação $T_p : (T_pM^*)^r \times (T_pM)^s \to \mathbb{R}$ que é multilinear sobre $\mathbb{R}$. O fato essencial é que para quaisquer 1-formas $\omega_1, \ldots, \omega_r$ e quaisquer campos vetoriais $X_1, \ldots, X_s$ em M, o valor da função $T(\omega_1, \ldots, \omega_r, X_1, \ldots, X_s)$ em um ponto p depende apenas dos valores de $\omega_1, \ldots, \omega_r, X_1, \ldots, X_s$ em p (cf. Proposição 11.4). Na prova desse fato usaremos os dois lemas a seguir. Recorde que o *suporte* $\operatorname{supp} f$ de uma função $f : M \to \mathbb{R}$ é o fecho em M do conjunto $\{x \in M : f(x) \neq 0\}$.

Lema 11.2 (Bump Function)**.** *Dados uma variedade diferenciável M, um ponto $p \in M$ e uma vizinhança U de p, existe uma função $f \in C^\infty(M)$, chamada uma bump function em p, satisfazendo*

i) $0 \leq f \leq 1$ *em* M.

ii) $f = 1$ *em uma vizinhança de* p.

iii) $\operatorname{supp} f$ *é compacto e está contido em* U.

Demonstração. Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$h(t) = \begin{cases} e^{-1/t}, \ t > 0, \\ 0, \ t \leq 0. \end{cases} \tag{11.2}$$

Segue das propriedades da aplicação exponencial que h é de classe C^∞ e que $0 \leq h < 1$. Agora defina uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$g(t) = \frac{h(4\varepsilon^2 - t)}{h(4\varepsilon^2 - t) + h(t - \varepsilon^2)}. \tag{11.3}$$

Como h é de classe C^∞, e o denominador no lado direito de (11.3) é sempre positivo, tem-se que g é de classe C^∞. Segue diretamente de (11.2) e (11.3) que

$$\begin{cases} g(t) = 1, & t \leq \varepsilon^2, \\ g(t) = 0, & t \geq 4\varepsilon^2, \\ 0 < g(t) < 1, & \varepsilon^2 < t < 4\varepsilon^2. \end{cases} \tag{11.4}$$

Seja $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ uma carta em M tal que $\varphi(p) = 0$ e $V \subset U$. Escolha $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B}_{2\varepsilon}(0) \subset \varphi(V)$ e defina $f : M \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} g(||\varphi(x)||^2), & x \in V, \\ 0, & x \notin V. \end{cases} \tag{11.5}$$

O item i) é consequência imediata de (11.4) e (11.5), e ii) segue do fato que $f = 1$ em $\varphi^{-1}(\overline{B}_\varepsilon(0))$. De

$$\{x \in M : f(x) \neq 0\} \subset \varphi^{-1}(\overline{B}_{2\varepsilon}(0)) \subset V \subset U,$$

obtemos $\operatorname{supp} f \subset \varphi^{-1}(\overline{B}_{2\varepsilon}(0)) \subset V \subset U$, o que prova iii). Como g é de classe C^∞, segue de (11.5) que $f|_V$ é de classe C^∞. Que f é C^∞ é agora uma consequência da inclusão $\operatorname{supp} f \subset V$. □

Lema 11.3. *Seja T um campo tensorial do tipo (r, s) em uma variedade diferenciável M^n, $p \in M$. Se alguma das 1-formas $\omega_1, \ldots, \omega_r$ ou algum dos campos $X_1, \ldots, X_s$ anula-se em p, então*

$$T(\omega_1, \ldots, \omega_r, X_1, \ldots, X_s)(p) = 0. \tag{11.6}$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponha $X_s(p) = 0$. Seja $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ uma carta em uma vizinhança U de p, e seja $X_s = \sum_{i=1}^n a_i \partial_i$ a expressão local de X_s relativa a φ. Como $X_s \in \mathfrak{X}(M)$, temos $a_i \in C^\infty(U)$, $i = 1, \ldots, n$. Seja f uma bump function em p com suporte contido em U. Então, para cada $i = 1, \ldots, n$, $fa_i \in C^\infty(M)$ e $f\partial_i \in \mathfrak{X}(M)$ (definindo-os como 0 em qualquer ponto no complementar de U). Como T é multilinear sobre $C^\infty(M)$, temos

$$\begin{aligned} f^2 T(\omega_1, \ldots, X_s) = T(\omega_1, \ldots, f^2 X_s) &= T\big(\omega_1, \ldots, \sum_i (fa_i)(f\partial_i)\big) \\ &= \sum_i fa_i T\big(\omega_1, \ldots, f\partial_i\big). \end{aligned} \tag{11.7}$$

Como $f(p) = 1$ e $a_i(p) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$ (pois $X_s(p) = 0$), avaliando a igualdade acima em p conclui-se que $T(\omega_1, \ldots, X_s)(p) = 0$. □

Proposição 11.4. *Seja T um campo tensorial do tipo (r, s) em uma variedade diferenciável M^n, $p \in M$. Seja $\omega_1, \ldots, \omega_r$ e $\overline{\omega}_1, \ldots, \overline{\omega}_r$ 1-formas tais que $\omega_i(p) = \overline{\omega}_i(p)$ para $i = 1, \ldots, r$, e seja $X_1, \ldots, X_s$ e $\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_s$ campos vetoriais tais que $X_j(p) = \overline{X}_j(p)$ para $j = 1, \ldots, s$. Então*

$$T(\omega_1, \ldots, \omega_r, X_1, \ldots, X_s)(p) = T(\overline{\omega}_1, \ldots, \overline{\omega}_r, \overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_s)(p). \tag{11.8}$$

Demonstração. Por simplicidade, faremos a demonstração no caso $r = 1$ e $s = 2$. A demonstração no caso geral é fortemente sugerida pela deste caso particular. Temos

$$\begin{aligned} T(\overline{\omega}_1, \overline{X}_1, \overline{X}_2) - T(\omega_1, X_1, X_2) = T(\overline{\omega}_1 - \omega_1, \overline{X}_1, \overline{X}_2) &+ T(\omega_1, \overline{X}_1 - X_1, \overline{X}_2) \\ &+ T(\omega_1, X_1, \overline{X}_2 - X_2). \end{aligned}$$

Como, por hipótese, $\overline{\omega}_1 - \omega_1$, $\overline{X}_1 - X_1$ e $\overline{X}_2 - X_2$ anulam-se em p, segue do Lema 11.3 que cada termo no lado direito da igualdade acima anula-se em p, o que prova (11.8). □

Dado um campo tensorial $T \in \mathcal{T}^r_s(M)$, para cada ponto $p \in M$ podemos definir uma aplicação multilinear

$$T_p : (T_pM^*)^r \times (T_pM)^s \to \mathbb{R}$$

da seguinte maneira. Se $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in T_pM^*$ e $v_1, \ldots, v_s \in T_pM$, então

$$T_p(\alpha_1, \ldots, \alpha_r, v_1, \ldots, v_s) = T(\omega_1, \ldots, \omega_r, X_1, \ldots, X_s)(p),$$

onde $\omega_1, \ldots, \omega_r$ são quaisquer 1-formas em M tais que $\omega_i(p) = \alpha_i$ para $i = 1, \ldots, r$, e $X_1, \ldots, X_s$ são quaisquer campos vetoriais diferenciáveis tais que $X_j(p) = v_j$ para $j = 1, \ldots, s$. Pela proposição anterior, T_p está bem definida. Assim, podemos considerar $T \in \mathcal{T}^r_s(M)$ como um campo, que associa de maneira suave a cada ponto $p \in M$, não um elemento de T_pM, e sim uma aplicação multilinear $(T_pM^*)^r \times (T_pM)^s \to \mathbb{R}$. Isso explica o porque do nome "campo tensorial"dado aos elementos de $\mathcal{T}^r_s(M)$.

Reciprocamente, dado um campo suave $p \to T_p$ que associa a cada ponto $p \in M$ uma aplicação multilinear $T_p : (T_pM^*)^r \times (T_pM)^s \to \mathbb{R}$, podemos definir um campo tensorial $T \in \mathcal{T}^r_s(M)$ por

$$T(\omega_1, \ldots, \omega_r, X_1, \ldots, X_s)(p) = T_p(\omega_1(p), \ldots, \omega_r(p), X_1(p), \ldots, X_s(p)). \tag{11.9}$$

Dizer que o campo $p \mapsto T_p$ é suave significa precisamente que, para quaisquer 1-formas diferenciais $\omega_1, \ldots, \omega_r$ em M e quaisquer campos vetoriais $X_1, \ldots, X_s \in \mathfrak{X}(M)$, a função $T(\omega_1, \ldots, \omega_r, X_1, \ldots, X_s)$ definida pela igualdade acima é de classe C^∞. A mesma igualdade mostra que T é multilinear sobre $C^\infty(M)$, ou seja, T é um elemento de $\mathcal{T}^r_s(M)$.

A interpretação de campos tensoriais dada nos dois parágrafos anteriores mostra que se $T \in \mathcal{T}^r_s(M)$, então, para qualquer aberto $U \subset M$, a restrição $T|_U$ de T a U é um campo tensorial bem definido em U.

No caso de variedades Riemannianas, podemos gerar de maneira muito natural novos campos tensoriais a partir de um campo tensorial covariante dado, através de uma operação chamada derivada covariante, que definimos a seguir.

Definição 11.5. Seja T um campo tensorial do tipo $(0,s)$ em uma variedade Riemanniana M e X um campo diferenciável em M. A *derivada covariante* de T em relação a X é a aplicação $\nabla_X T : \mathfrak{X}(M)^s \to C^\infty(M)$ definida por

$$(\nabla_X T)(X_1,\ldots,X_s) = X(T(X_1,\ldots,X_s)) - \sum_{i=1}^{s} T(X_1,\ldots,\nabla_X X_i,\ldots,X_s), \quad (11.10)$$

onde o símbolo ∇ no lado direito de (11.10) é a conexão Riemanniana de M.

Um cálculo simples mostra que $\nabla_X T$ é multilinear sobre $C^\infty(M)$, ou seja, $\nabla_X T$ é um campo tensorial do tipo $(0,s)$ em M. Claramente, a aplicação $X \in \mathfrak{X}(M) \mapsto \nabla_X T$ é linear sobre $C^\infty(M)$. Isso nos permite fazer a seguinte definição.

Definição 11.6. Seja T um campo tensorial do tipo $(0,s)$ em uma variedade Riemanniana M. A *diferencial covariante* de T é o campo tensorial ∇T do tipo $(0,s+1)$ definido por

$$(\nabla T)(X_1,\ldots,X_s,X) = (\nabla_X T)(X_1,\ldots,X_s). \quad (11.11)$$

12 Fórmula de Simons

Nosso objetivo nesta seção é obter uma fórmula para o Laplaciano do quadrado da norma da segunda forma fundamental de uma hipersuperfície em um espaço de curvatura seccional constante. Para facilitar o enunciado e a demonstração da referida fórmula, fixaremos algumas notações e estabeleceremos alguns lemas auxiliares que podem ser úteis em demonstrações de outros resultados.

Seja $\phi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica e A o operador de forma da imersão com respeito a um campo normal unitário ξ em um aberto U de M. Seja h o campo tensorial do tipo $(0,2)$ em U definido por $h(X,Y) = \langle \sigma(X,Y), \xi\rangle$, onde σ é a segunda forma fundamental da imersão. Então

$$h(X,Y) = \langle AX, Y\rangle, \quad X,Y \in \mathfrak{X}(U). \quad (12.1)$$

Ao longo desta seção usaremos a notação h_{ij}, h_{ijk} e h_{ijkl} para indicar as coordenadas de h, ∇h e $\nabla^2 h := \nabla(\nabla h)$, respectivamente, relativas a um referencial ortonormal $\{E_1,\ldots,E_n\}$ em U.

Lema 12.1. *Para todo referencial ortonormal local $\{E_1,\ldots,E_n\}$, temos*

$$\sum_{i=1}^{n} h_{iik} = nH_k, \quad k = 1,\ldots,n, \quad (12.2)$$

onde H é a curvatura média da imersão com respeito a ξ e $H_k = E_k(H)$.

Demonstração. Como os termos envolvidos em (12.2) são de natureza tensorial (ou seja, o valor de cada termo em um dado ponto depende apenas dos valores de $E_1, \ldots, E_n$ no ponto), para provar que (12.2) vale em um dado ponto p podemos supor que $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$ para $i, j = 1, \ldots, n$. Essa suposição será adotada também em lemas subsequentes, sem maiores comentários.

Por (12.1) e definição de diferencial covariante, temos em p

$$\nabla h(E_i, E_i, E_k) = (\nabla_{E_k} h)(E_i, E_i) = E_k(h(E_i, E_i)) = E_k\langle AE_i, E_i\rangle.$$

Somando em i, obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} \nabla h(E_i, E_i, E_k) = \sum_{i=1}^{n} E_k\langle AE_i, E_i\rangle = E_k(nH) = nE_k(H),$$

o que verifica (12.2) em p. Como p foi escolhido arbitrariamente, o lema está demonstrado. □

Lema 12.2. *Para todo referencial ortonormal local $\{E_1, \ldots, E_n\}$, temos*

$$\sum_{i=1}^{n} h_{iikl} = nH_{kl}, \quad k, l = 1, \ldots, n, \tag{12.3}$$

onde $H_{kl} = \operatorname{Hess} H(E_k, E_l)$.

Demonstração. Para verificar (12.3) em um ponto arbitrário p podemos supor, pelas razões explicitadas na demonstração do lema anterior, que $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$ para $i, j = 1, \ldots, n$. Derivando (12.2) em relação a E_l, obtemos em p

$$\sum_{i=1}^{n} E_l(h_{iik}) = nE_l\langle \nabla H, E_k\rangle = n\langle \nabla_{E_l} \nabla H, E_k\rangle = n\operatorname{Hess} H(E_k, E_l). \tag{12.4}$$

Mas em p temos

$$E_l(h_{iik}) = E_l(\nabla h(E_i, E_i, E_k)) = (\nabla_{E_l} \nabla h)(E_i, E_i, E_k) = \nabla^2 h(E_i, E_i, E_k, E_l) = h_{iikl}.$$

Substituindo em (12.4) obtemos (12.3). □

Lema 12.3. *Para todo campo X tem-se que $\nabla_X A$ é simétrico, isto é*

$$\langle (\nabla_X A)Y, Z\rangle = \langle Y, (\nabla_X A)Z\rangle,$$

para quaisquer campos Y, Z.

Demonstração. A demonstração é consequência da simetria de A e definição de $\nabla_X A$:

$$\begin{aligned}
\langle(\nabla_X A)Y, Z\rangle &= \langle\nabla_X AY, Z\rangle - \langle A(\nabla_X Y), Z\rangle \\
&= X\langle AY, Z\rangle - \langle AY, \nabla_X Z\rangle - \langle\nabla_X Y, AZ\rangle \\
&= X\langle Y, AZ\rangle - \langle Y, A(\nabla_X Z)\rangle - \langle\nabla_X Y, AZ\rangle \\
&= \langle\nabla_X Y, AZ\rangle + \langle Y, \nabla_X AZ\rangle - \langle Y, A(\nabla_X Z)\rangle - \langle\nabla_X Y, AZ\rangle \\
&= \langle Y, \nabla_X AZ - A(\nabla_X Z)\rangle \\
&= \langle Y, (\nabla_X A)Z\rangle.
\end{aligned}$$

□

Lema 12.4. *Se o espaço ambiente $\overline{M}^{n+1}$ tem curvatura seccional constante, então ∇h é simétrico.*

Demonstração. Para quaisquer campos X, Y, Z temos, por definição de diferencial covariante,

$$\begin{aligned}
\nabla h(X, Y, Z) &= (\nabla_Z h)(X, Y) \\
&= Z(h(X, Y)) - h(\nabla_Z X, Y) - h(X, \nabla_Z Y) \\
&= Z\langle AX, Y\rangle - \langle A(\nabla_Z X), Y\rangle - \langle AX, \nabla_Z Y\rangle \\
&= \langle\nabla_Z AX, Y\rangle + \langle AX, \nabla_Z Y\rangle - \langle A(\nabla_Z X), Y\rangle - \langle AX, \nabla_Z Y\rangle \\
&= \langle\nabla_Z AX - A(\nabla_Z X), Y\rangle \\
&= \langle(\nabla_Z A)X, Y\rangle.
\end{aligned}$$

Logo, pelo Lema 12.3,

$$\nabla h(X, Y, Z) = \langle X, (\nabla_Z A)Y\rangle.$$

Analogamente, temos

$$\nabla h(X, Z, Y) = \langle X, (\nabla_Y A)Z\rangle.$$

Segue agora das duas igualdades anteriores e da equação de Codazzi (cf. (3.20) que $\nabla h(X, Y, Z) = \nabla h(X, Z, Y)$. Assim ∇h é simétrico nas duas últimas entradas. A simetria de ∇h nas duas primeiras entradas decorre diretamente da simetria de h e definição de diferencial covariante. □

Do lema anterior e definição de diferencial covariante obtemos que $\nabla^2 h$ é simétrico nas três primeiras entradas. O lema a seguir diz o que ocorre quando permutamos os vetores das terceira e quarta entradas.

Lema 12.5. *Para todo referencial ortonormal local $\{E_1, \ldots, E_n\}$, temos*

$$h_{ijkl} - h_{ijlk} = \sum_m R_{klim} h_{mj} + \sum_m R_{kljm} h_{im}, \tag{12.5}$$

onde, por exemplo, $R_{klim} = \langle R(E_k, E_l)E_i, E_m\rangle$.

Demonstração. Para verificar (12.5) em um dado ponto p, podemos supor sem perda de generalidade que $\nabla_{E_i}E_j(p) = 0$, para $i, j = 1, \ldots, n$. Por definição de diferencial covariante, temos em p

$$\begin{aligned} h_{ijkl} &= \nabla^2 h(E_i, E_j, E_k, E_l) = (\nabla_{E_l}\nabla h)(E_i, E_j, E_k) = E_l(\nabla h(E_i, E_j, E_k)) \\ &= E_l\big(E_k(h(E_i, E_j)) - h(\nabla_{E_k}E_i, E_j) - h(E_i, \nabla_{E_k}E_j)\big) \\ &= E_lE_k(h(E_i, E_j)) - E_l(h(\nabla_{E_k}E_i, E_j)) - E_l(h(E_i, \nabla_{E_k}E_j)) \\ &= E_lE_k(h(E_i, E_j)) - h(\nabla_{E_l}\nabla_{E_k}E_i, E_j) - h(E_i, \nabla_{E_l}\nabla_{E_k}E_j). \end{aligned} \tag{12.6}$$

Analogamente, prova-se que

$$h_{ijlk} = E_kE_l(h(E_i, E_j)) - h(\nabla_{E_k}\nabla_{E_l}E_i, E_j) - h(E_i, \nabla_{E_k}\nabla_{E_l}E_j). \tag{12.7}$$

Como $E_lE_k(h(E_i, E_j)) = E_kE_l(h(E_i, E_j))$ em p (pois ambos são iguais à Hessiana da função $h(E_i, E_j)$ aplicada aos vetores $E_k(p)$ e $E_l(p)$), subtraindo (12.7) de (12.6), obtemos em p

$$\begin{aligned} h_{ijkl} - h_{ijlk} &= h(\nabla_{E_k}\nabla_{E_l}E_i, E_j) - h(\nabla_{E_l}\nabla_{E_k}E_i, E_j) \\ &\quad + h(E_i, \nabla_{E_k}\nabla_{E_l}E_j) - h(E_i, \nabla_{E_l}\nabla_{E_k}E_j) \\ &= h(R(E_k, E_l)E_i, E_j) + h(E_i, R(E_k, E_l)E_j). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} h_{ijkl} - h_{ijlk} &= \sum_m \langle R(E_k, E_l)E_i, E_m\rangle h(E_m, E_j) + \sum_m \langle R(E_k, E_l)E_j, E_m\rangle h(E_i, E_m) \\ &= \sum_m R_{klim}h_{mj} + \sum_m R_{kljm}h_{im}. \end{aligned}$$

□

Lema 12.6. *Para todo referencial ortonormal local $\{E_1, \ldots, E_n\}$, temos*

(i) $\langle \nabla|\sigma|^2, E_k\rangle = 2\sum_{i,j} h_{ij}h_{ijk}, \quad k = 1, \ldots, n.$

(ii) $\operatorname{Hess}|\sigma|^2(E_k, E_l) = 2\sum_{i,j} h_{ijk}h_{ijl} + 2\sum_{i,j} h_{ij}h_{ijkl}, \quad k, l = 1, \ldots, n.$

Demonstração. (i) Seja p um ponto arbitrário. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\nabla_{E_i}E_j(p) = 0$, para $i, j = 1, \ldots, n$. Por (12.1) e definição de $|\sigma|$,

$$|\sigma|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}^2. \tag{12.8}$$

Derivando em relação a E_k, obtemos em p

$$\langle \nabla|\sigma|^2, E_k\rangle = E_k\big(\sum_{i,j} h_{ij}^2\big) = 2\sum_{i,j} h_{ij}E_k(h_{ij}) = 2\sum_{i,j} h_{ij}h_{ijk}. \tag{12.9}$$

Como p é arbitário, (i) está demonstrado.

(ii) Dado um ponto p, podemos como antes supor que $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$, para $i, j = 1, \ldots, n$. Derivando (12.9) em relação a E_l, obtemos em p

$$\begin{aligned} \operatorname{Hess} |\sigma|^2(E_k, E_l) = E_l\langle \nabla |\sigma|^2, E_k\rangle &= 2\sum_{i,j} E_l(h_{ij}) h_{ijk} + 2\sum_{i,j} h_{ij} E_l(h_{ijk}) \\ &= 2\sum_{i,j} h_{ijl} h_{ijk} + 2\sum_{i,j} h_{ij} h_{ijkl}, \end{aligned}$$

o que encerra a prova do lema. □

O teorema a seguir estabelece uma expressão local para o Laplaciano do quadrado da norma da segunda forma fundamental σ de uma hipersuperfície em uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante c. Em seu enunciado, A é o operador de forma da imersão com respeito a um campo normal unitário ξ, H é a curvatura média da hipersuperfície relativa a ξ e h é o campo tensorial definido por (12.1).

Teorema 12.7 (Fórmula de Simons)**.** *Seja $\phi : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ uma imersão isométrica e $\{E_1, \ldots, E_n\}$ um referencial ortonormal local. Então*

$$\frac{1}{2}\Delta |\sigma|^2 = \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + n\sum_{i,j} h_{ij} H_{ij} + nc(|\sigma|^2 - nH^2) + nH\operatorname{tr}(A^3) - |\sigma|^4, \quad (12.10)$$

onde $h_{ij} = h(E_i, E_j)$, $h_{ijk} = \nabla h(E_i, E_j, E_k)$, $H_{ij} = \operatorname{Hess} H(E_i, E_j)$ e $\operatorname{tr}(A^3)$ é o traço de A^3.

Demonstração. Pelo Lema 12.6 (ii),

$$\frac{1}{2}\operatorname{Hess} |\sigma|^2(E_k, E_k) = \sum_{i,j} h_{ijk}^2 + \sum_{i,j} h_{ij} h_{ijkk}, \quad k = 1, \ldots, n. \quad (12.11)$$

Pelos Lemas 12.4 e 12.5,

$$h_{ijkk} = h_{kijk} = h_{kkij} + \sum_m R_{jkkm} h_{mi} + \sum_m R_{jkim} h_{km}.$$

Substituindo em (12.11) a expressão para h_{ijkk} acima, obtemos

$$\frac{1}{2}\operatorname{Hess} |\sigma|^2(E_k, E_k) = \sum_{i,j} h_{ijk}^2 + \sum_{i,j} h_{ij} h_{kkij} + \sum_{i,j,m} h_{ij} h_{mi} R_{jkkm} + \sum_{i,j,m} h_{ij} h_{km} R_{jkim}.$$

Somando em k, e usando o Lema 12.2, obtemos

$$\frac{1}{2}\Delta |\sigma|^2 = \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + n\sum_{i,j} h_{ij} H_{ij} + \sum_{i,j,k,m} h_{ij} h_{mi} R_{jkkm} + \sum_{i,j,k,m} h_{ij} h_{km} R_{jkim}. \quad (12.12)$$

Determinaremos agora os dois últimos termos no lado direito da igualdade acima. Como o ambiente tem curvatura seccional constante c, temos pela equação de Gauss que

$$R_{jkkm} = \overline{R}_{jkkm} + h_{jm}h_{kk} - h_{jk}h_{km} = c(\delta_{jm} - \delta_{jk}\delta_{km}) + h_{jm}h_{kk} - h_{jk}h_{km}.$$

Usando a igualdade acima, obtemos a seguinte expressão para o terceiro termo no lado direito de (12.12)

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j,k,m} h_{ij}h_{mi}R_{jkkm} &= c\sum_{i,j,k,m} h_{ij}h_{mi}\delta_{jm} - c\sum_{i,j,k,m} h_{ij}h_{mi}\delta_{jk}\delta_{km} \\
&\quad + \sum_{i,j,k,m} h_{ij}h_{mi}h_{jm}h_{kk} - \sum_{i,j,k,m} h_{ij}h_{mi}h_{jk}h_{km} \\
&= nc|\sigma|^2 - c|\sigma|^2 + nH\sum_{i,j,m} h_{ij}h_{jm}h_{mi} - \sum_{i,j,k,m} h_{ij}h_{jk}h_{km}h_{mi} \\
&= nc|\sigma|^2 - c|\sigma|^2 + nH\mathrm{tr}(A^3) - \mathrm{tr}(A^4). \qquad (12.13)
\end{aligned}$$

Usando novamente a equação de Gauss e o fato de que o ambiente tem curvatura seccional constante c, temos

$$R_{jkim} = \overline{R}_{jkim} + h_{jm}h_{ki} - h_{ji}h_{km} = c(\delta_{ki}\delta_{jm} - \delta_{ji}\delta_{km}) + h_{jm}h_{ki} - h_{ji}h_{km}.$$

Pela igualdade anterior, o quarto termo no lado direito de (12.12) escreve-se como

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j,k,m} h_{ij}h_{km}R_{jkim} &= c\sum_{i,j,k,m} h_{ij}h_{km}\delta_{ki}\delta_{jm} - c\sum_{i,j,k,m} h_{ij}h_{km}\delta_{ji}\delta_{km} \\
&\quad + \sum_{i,j,k,m} h_{ij}h_{km}h_{jm}h_{ki} - \sum_{i,j,k,m} h_{ij}h_{km}h_{ji}h_{km} \\
&= c|\sigma|^2 - n^2cH^2 + \mathrm{tr}(A^4) - |\sigma|^4. \qquad (12.14)
\end{aligned}$$

Substituindo (12.13) e (12.14) em (12.12), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|\sigma|^2 &= \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + n\sum_{i,j} h_{ij}H_{ij} + nc|\sigma|^2 + nH\mathrm{tr}(A^3) - n^2cH^2 - |\sigma|^4 \\
&= \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + n\sum_{i,j} h_{ij}H_{ij} + nc(|\sigma|^2 - nH^2) + nH\mathrm{tr}(A^3) - |\sigma|^4.
\end{aligned}$$

□

Corolário 12.8. *Se $\phi : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ é uma imersão isométrica mínima, então*

$$\frac{1}{2}\Delta|\sigma|^2 = \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + |\sigma|^2(nc - |\sigma|^2).$$

Corolário 12.9. *Seja $\phi : M^n \to S^{n+1}$ uma imersão isométrica mínima de uma variedade Riemanniana compacta M^n na esfera unitária S^{n+1}. Se $|\sigma|^2 \leq n$ ao longo de M^n, então $|\sigma|^2 \equiv 0$ (e M^n é totalmente geodésica) ou $|\sigma|^2 \equiv n$.*

Demonstração. Pelo Corolário 12.8 e teorema da divergência,

$$0 = \frac{1}{2}\int_M \Delta|\sigma|^2 \geq \int_M |\sigma|^2(n - |\sigma|^2). \tag{12.15}$$

Como $|\sigma|^2 \leq n$ por hipótese, segue da desigualdade acima que $|\sigma|^2(n - |\sigma|^2) \equiv 0$. Logo, pela conexidade de M^n, $|\sigma|^2 \equiv 0$ ou $|\sigma|^2 \equiv n$. □

Observação 12.10. O Corolário 12.9 é devido a Simons [33]. Foi provado independentemente por Chern, do Carmo e Kobayashi [9] e por Lawson [22] que $|\sigma|^2 = n$ se, e somente se, M^n é um toro de Clifford (cf. Exemplo 1).

O segundo termo no lado direito de (12.10) pode ser escrito de uma maneira que é conveniente em muitas situações. Dado $p \in M$, considere um referencial ortonormal $\{E_1, \ldots, E_n\}$ em uma vizinhança de p tal que $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$, para $i, j = 1, \ldots, n$. Então

$$\sum_{i,j} h_{ij}H_{ij} = \sum_{i,j}\langle AE_i, E_j\rangle\langle \nabla_{E_i}\nabla H, E_j\rangle = \sum_i \langle \nabla_{E_i}\nabla H, AE_i\rangle.$$

Logo, em p tem-se

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} h_{ij}H_{ij} &= \sum_i E_i\langle \nabla H, AE_i\rangle - \sum_i \langle \nabla H, \nabla_{E_i} AE_i\rangle \\
&= \sum_i E_i\langle A\nabla H, E_i\rangle - \sum_i \langle \nabla H, (\nabla_{E_i} A)E_i\rangle \\
&= \sum_i \langle \nabla_{E_i} A\nabla H, E_i\rangle - \sum_i \langle \nabla H, (\nabla_{E_i} A)E_i\rangle \\
&= \operatorname{div}(A\nabla H) - \sum_i \langle \nabla H, (\nabla_{E_i} A)E_i\rangle.
\end{aligned}$$

Usando o Lema 12.1, o Lema 12.3 e a equação de Codazzi, prova-se facilmente que $\sum_i (\nabla_{E_i} A)E_i = n\nabla H$. Usando essa informação na igualdade anterior, obtemos

$$\sum_{i,j} h_{ij}H_{ij} = \operatorname{div}(A\nabla H) - n|\nabla H|^2. \tag{12.16}$$

A igualdade acima foi obtida no ponto p, mas como esse ponto foi escolhido arbitrariamente, ela vale em todo ponto. Usando (12.16) em (12.10), obtemos a seguinte versão da fórmula de Simons.

Teorema 12.11. *Se $\phi : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ é uma imersão isométrica, então*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|\sigma|^2 &= \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + n\operatorname{div}(A\nabla H) - n^2|\nabla H|^2 + nc(|\sigma|^2 - nH^2) \\
&\quad + nH\operatorname{tr}(A^3) - |\sigma|^4.
\end{aligned} \tag{12.17}$$

Em muitas aplicações, a fórmula de Simons torna-se mais interessante quando envolve as curvaturas principais da hipersuperfície. Fixe $p \in M$ e considere uma base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de T_pM tal que $Ae_i = \lambda_i e_i$. Como $\mathrm{tr}(A^3) = \sum_i \lambda_i^3$, temos

$$\begin{aligned} nH\mathrm{tr}(A^3) - |\sigma|^4 = (\sum_i \lambda_i)(\sum_j \lambda_j^3) - \sum_{i,j} \lambda_i^2 \lambda_j^2 &= \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j (\lambda_j^2 - \lambda_i \lambda_j) \\ &= \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j (\lambda_i - \lambda_j)^2. \end{aligned}$$

Como, pela equação de Gauss, a curvatura seccional de M segundo o plano gerado por e_i e e_j vale $K_{ij} = c + \lambda_i \lambda_j$, segue da igualdade anterior que

$$nH\mathrm{tr}(A^3) - |\sigma|^4 = \sum_{i<j} K_{ij}(\lambda_i - \lambda_j)^2 - c \sum_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2.$$

O segundo termo no lado direito da equação acima vale

$$\begin{aligned} -c \sum_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 &= -\frac{c}{2} \sum_{i,j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 = -\frac{c}{2} \sum_{i,j} (\lambda_i^2 - 2\lambda_i \lambda_j + \lambda_j^2) \\ &= -\frac{c}{2}(2n|\sigma|^2 - 2n^2 H^2) = -nc(|\sigma|^2 - nH^2). \end{aligned}$$

Logo, pelas duas igualdades anteriores,

$$nH\mathrm{tr}(A^3) - |\sigma|^4 + nc(|\sigma|^2 - nH^2) = \sum_{i<j} K_{ij}(\lambda_i - \lambda_j)^2. \tag{12.18}$$

Usando (12.18) em (12.17), obtemos mais uma versão da fórmula de Simons:

Teorema 12.12. *Se $\phi : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ é uma imersão isométrica, então*

$$\frac{1}{2}\Delta|\sigma|^2 = \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + n\mathrm{div}(A\nabla H) - n^2|\nabla H|^2 + \sum_{i<j} K_{ij}(\lambda_i - \lambda_j)^2. \tag{12.19}$$

Ilustraremos a utilização da fórmula de Simons demonstrando o seguinte teorema, que é um caso particular do Teorema 2 em [8].

Teorema 12.13. *Seja M^n uma variedade Riemanniana compacta conexa com curvatura seccional $K \geq 0$ e curvatura escalar R constante. Se $\phi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ é uma imersão isométrica, então $\phi(M)$ é uma hiperesfera de $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Aprimorando o teorema acima, Ros [30] provou que as hiperesferas são as únicas hipersuperfícies compactas conexas com curvatura escalar constante mergulhadas no espaço Euclidiano. Que esse resultado é um aprimoramento do Teorema 12.13 segue do fato de que toda hipersuperfície compacta conexa orientável imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura seccional não-negativa é mergulhada (cf. comentário no final da Seção 8). Por outro lado, é

um problema em aberto saber se a hipótese $K \geq 0$ no Teorema 12.13 pode ser retirada (veja [38, Problema 31, pag. 677]). No caso completo, Cheng e Yau [8] provaram que uma hipersuperfície completa conexa imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura seccional não-negativa e curvatura escalar constante positiva é um cilindro generalizado $S^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, $2 \leq k \leq n$. Esse resultado foi estendido para qualquer r-ésima curvatura média por Hartman [18].

Na demonstração do Teorema 12.13 usaremos o seguinte lema.

Lema 12.14. *Seja M^n uma variedade Riemanniana com curvatura escalar R constante e $\phi : M^n \to \overline{M}_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de M^n em um espaço de curvatura seccional constante c. Se $R \geq c$, então*

$$\sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 \geq n^2 |\nabla H|^2. \tag{12.20}$$

Demonstração. Dado $p \in M$ considere um referencial ortonormal $\{E_1, \ldots, E_n\}$ em uma vizinhança de p tal que $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$, para $i, j = 1, \ldots, n$. Derivando a igualdade (cf. Proposição 4.6)

$$n^2 H^2 = |\sigma|^2 + n(n-1)(R-c) = \sum_{i,j} h_{ij}^2 + n(n-1)(R-c) \tag{12.21}$$

em relação a E_k, e usando a hipótese de que a curvatura escalar R é constante, obtemos em p

$$n^2 H E_k(H) = \sum_{i,j} h_{ij} h_{ijk}.$$

Elevando ao quadrado e usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$n^4 H^2 E_k(H)^2 \leq \left(\sum_{i,j} h_{ij}^2 \right) \left(\sum_{i,j} h_{ijk}^2 \right) = |\sigma|^2 \sum_{i,j} h_{ijk}^2, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Somando em k, obtemos

$$n^4 H^2 |\nabla H|^2 \leq |\sigma|^2 \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2. \tag{12.22}$$

De (12.21) e da hipótese $R \geq c$, obtemos $|\sigma|^2 \leq n^2 H^2$. Usando essa informação em (12.22), obtemos (12.20). □

Demonstração do Teorema 12.13. Como M^n é compacta e a curvatura escalar de M^n é constante, o vetor curvatura média da imersão nunca se anula (cf. Proposição 4.6 e Proposição 4.13). Em particular, temos que M^n é orientável.

Seja A o operador de forma da imersão com respeito a um campo normal unitário global ξ, e seja L o operador de segunda ordem agindo em $C^\infty(M)$ definido por

$$L(f) = \operatorname{div}(nH\nabla f - A\nabla f), \tag{12.23}$$

onde H é a curvatura média de M^n relativa a ξ. Segue da igualdade

$$\mathrm{div}(gX) = g\mathrm{div}(X) + \langle \nabla g, X\rangle,$$

a qual é válida para todos $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $g \in C^\infty(M)$, que

$$L(f) = nH\Delta f + n\langle \nabla H, \nabla f\rangle - \mathrm{div}(A\nabla f).$$

Fazendo $f = nH$ na igualdade acima, obtemos

$$L(nH) = n^2 H\Delta H + n^2|\nabla H|^2 - n\mathrm{div}(A\nabla H). \tag{12.24}$$

Por outro lado, aplicando o operador Laplaciano em (12.21), obtemos

$$2n^2 H\Delta H + 2n^2|\nabla H|^2 = \Delta|\sigma|^2 + n(n-1)\Delta R.$$

Segue de (12.24) e da igualdade acima que

$$L(nH) = \frac{1}{2}\Delta|\sigma|^2 + \frac{n(n-1)}{2}\Delta R - n\mathrm{div}(A\nabla H).$$

Usando a fórmula de Simons (12.19) na igualdade anterior, concluimos que

$$L(nH) = \frac{n(n-1)}{2}\Delta R + |\nabla h|^2 - n^2|\nabla H|^2 + \sum_{i<j} K_{ij}(\lambda_i - \lambda_j)^2,$$

onde $|\nabla h|^2 = \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2$. Como M^n é compacta, integrando em M^n e usando o teorema da divergência, obtemos

$$\int_M \{|\nabla h|^2 - n^2|\nabla H|^2\}dM + \int_M \Big\{\sum_{i<j} K_{ij}(\lambda_i - \lambda_j)^2\Big\}dM = 0.$$

O primeiro integrando acima é não-negativo pelo Lema 12.14, e o segundo é não-negativo porque $K \geq 0$. Logo, ambos os integrandos são nulos. Em particular, como $K_{ij} = \lambda_i\lambda_j$, temos

$$(\lambda_i - \lambda_j)^2\lambda_i\lambda_j \equiv 0, \quad 1 \leq i < j \leq n. \tag{12.25}$$

Como M^n é compacta, a Proposição 4.13 assegura que existem um ponto p em M e um vetor unitário $\xi_0 \in T_pM^\perp$ tais que A_{ξ_0} é definida positiva. Trocando ξ por $-\xi$ se necessário, podemos supor que $\xi(p) = \xi_0$. Então as curvaturas principais de M^n em p são todas positivas.

Seja $\mathcal{A} = \{x \in M : \lambda_i(x) > 0,\ i = 1, \ldots, n\}$. O conjunto $\mathcal{A}$ é não-vazio (pois $p \in \mathcal{A}$) e aberto (pois as funções curvaturas principais são contínuas). Por (12.25), todo ponto pertencente a $\mathcal{A}$ é umbílico. Como a curvatura escalar R é uma constante positiva, conclui-se que

$$\lambda_1(x) = \cdots = \lambda_n(x) = \sqrt{R}, \quad x \in \mathcal{A}. \tag{12.26}$$

Pela igualdade acima e continuidade das funções curvaturas principais, $\mathcal{A}$ é também fechado. Segue agora da conexidade de M^n que $\mathcal{A} = M$. Logo, por (12.26), todos os pontos de M são umbílicos. A conclusão do teorema segue agora da Proposição 8.3 e da compacidade de M^n.

Referências

[1] L. J. Alías, T. Kurose and G. Solanes, *Hadamard-type theorems for hypersurfaces in hyperbolic spaces*, Differ. Geom. Appl., **24** (2006), 492-502.

[2] M. Berger, P. Gauduchon and E. Mazet, *Le spectre d'une variété Riemannienne.* Lecture Notes in Mathematics, vol. 194. Springer, Berlin (1971).

[3] D. Blanusa, *Über die einbettung hyperbolischer Räume in euklidische Räume*, Monatsh. Math., **59** (1955), 217-229.

[4] E. Cartan, *Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, Paris, (1951).

[5] I. Chavel, *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Academic Press, Inc., 1984.

[6] S. Y. Cheng and S. T. Yau, *Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications*, Comm. Pure Appl. Math., **28** (1975), 333-354.

[7] X. Chen, F. Fontenele and F. Xavier, *A conformal characterization of manifolds of constant sectional curvature*, Arch. Math., https://doi.org/10.1007/s00013-020-01542-4.

[8] S. Y. Cheng and S. T. Yau, *Hypersurfaces with constant scalar curvature*, Math. Ann., **225** (1977), 195-204.

[9] S. S. Chern, M. do Carmo and S. Kobayashi, *Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length*, Functional Analysis and Related Fields (1970), 59-75.

[10] S. S. Chern and N. Kuiper, *Some theorems on the isometric imbedding of compact Riemann manifolds in Euclidean space*, Ann. of Math., **56** (1952), 422-430.

[11] S. S. Chern and R. K. Lashof, *On the total curvature of immersed manifolds II*, Michigan Math. J., **5** (1958), 5-12.

[12] M. P. do Carmo and E. Lima, *Isometric immersions with semi-definite second quadratic forms*, Arch. Math. (Basel), **20** (1969), 173-175.

[13] M. P. do Carmo and F. W. Warner, *Rigidity and convexity of hypersurfaces in spheres*, J. Differential Geom., **4** (1970), 133-144.

[14] R. J. Currier, *On Hypersurfaces of hyperbolic space infinitesimally supported by horospheres*, Trans. Amer. Math. Soc., **313** (1989), 419-431.

[15] M. Dajczer et al, *Submanifolds and Isometric Immersions*, Houston, Publish or Perish, 1990.

[16] J. M. Espinar, J. A. Gálvez & H. Rosenberg, *Some remarks on convex surfaces in simply connected homogeneous three manifolds*, Milan J. Math., **78** (2010), 279-288.

[17] F. Fontenele and F. Xavier, *Good shadows, dynamics and convex hulls of complete submanifolds*, Asian J. Math., **15** (2011), 9-32.

[18] P. Hartman, *On Complete hypersurfaces of nonnegative sectional curvatures and constant m-th mean curvature*, Trans. Amer. Math. Soc., **245** (1978), 363-374.

[19] L. Jorge and D. Koutroufiotis, *An estimate for the curvature of bounded submanifolds*, Amer. J. Math., **103** (1981), 711-725.

[20] L. Jorge and F. Xavier, *An inequality between the exterior diameter and the mean curvature of bounded immersions*, Math. Z., **178** (1981), 77-82.

[21] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry, Vol. II*, Interscience Publishers, (1969).

[22] H.B. Lawson, *Local rigidity theorems for minimal hypersurfaces*, Ann. of Math., **89** (1969), 187-197.

[23] J. M. Lee, *Riemannian manifolds, an introduction to curvature*, Springer-Verlag, New York, Inc., 1997.

[24] D. Leung and K. Nomizu, *The axiom of spheres in Riemannian Geometry*, J. Differential Geom., **5** (1971), 487-489.

[25] H. Omori, *Isometric immersions of Riemannians manifolds*, J. Math. Soc. Japan, **19** (1967), 205-214.

[26] M. Obata, *Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere*, J. Math. Soc. Jpn., **14** (1962), 333-340.

[27] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry, with applications to relativity*, Academic Press, 1983.

[28] B. O'Neill, *Immersion of manifolds of non-positive curvature*, Proc. Amer. Math. Soc., **11** (1960), 132-134.

[29] T. Otsuki, *On the existence of solutions of a system of quadratic equations and its geometrical application*, Proc. Japan Acad., **29** (1953), 99-100.

[30] A. Ros, *Compact hypersurfaces with constant scalar curvature and a congruence theorem*, J. Differential Geom., **27** (1988), 215-220.

[31] R. Sacksteder, *On hypersurfaces with no negative sectional curvatures*, Amer. J. Math., **82** (1960), 609-630.

[32] L.C.B. da Silva and J.D. da Silva, *Characterization of manifolds of constant curvature by spherical curves*, Ann. di Mat. Pura ed Appl., **199** (2020), 217-229.

[33] J. Simons, *Minimal varieties in riemannian manifolds*, Ann. of Math., **88** (1968), 62-105.

[34] C. Tompkins, *Isometric imbedding of flat manifolds in Euclidean space*, Duke Math. J., **5** (1939), 58-61.

[35] J. van Heijenoort, *On locally convex manifolds*, Comm. Pure Appl. Math., **5** (1952), 223-242.

[36] G. Wu and R. Ye, *A note on Obata's rigidity theorem*, Commun. Math. Stat., **2** (2014), 231-252.

[37] S. T. Yau, *Harmonic functions on complete Riemannian manifolds*, Comm. Pure Appl. Math., **28** (1975), 201-228.

[38] S. T. Yau, *Problem section*, Seminar on Differential Geometry, Ann. of Math. Stud. 102, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1982.