Espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev
Primeira Aula: Espaços de Orlicz

Prof. Jefferson Abrantes

(Universidade Federal de Campina Grande)

Curso de Verão 2021

DM-UFSCAR

São Carlos-SP

Introdução

O primeiro trabalho onde aparecem os espaços de Orlicz, que são generalizações naturais dos espaços de funções de Lebesgue, é um artigo do matemático polonês Wladyslaw Roman Orlicz (ver [1][1]), em 1932.

[1] ORLICZ, W. R., *Theory of Orlicz spaces*, Monographs and textbooks in pure and applied Mathematics, Inc. New York, 1991.

Introdução

O primeiro trabalho onde aparecem os espaços de Orlicz, que são generalizações naturais dos espaços de funções de Lebesgue, é um artigo do matemático polonês Wladyslaw Roman Orlicz (ver [1][1]), em 1932.



Figure: Wladyslaw Roman Orlicz

[1] ORLICZ, W. R., *Theory of Orlicz spaces*, Monographs and textbooks in pure and applied Mathematics, Inc. New York, 1991.

Inicialmente, foram definidos utilizando-se uma condição que hoje denotamos por condição Δ_2.

Inicialmente, foram definidos utilizando-se uma condição que hoje denotamos por condição Δ_2. Em 1936, definiu-se tais espaços sob a generalidade hoje estudada. Da mesma forma que os espaços de Sobolev são definidos a partir dos espaços de Lebesgue, define-se os **espaços de Orlicz-Sobolev** a partir dos **espaços de Orlicz**.

Inicialmente, foram definidos utilizando-se uma condição que hoje denotamos por condição Δ_2. Em 1936, definiu-se tais espaços sob a generalidade hoje estudada. Da mesma forma que os espaços de Sobolev são definidos a partir dos espaços de Lebesgue, define-se os **espaços de Orlicz-Sobolev** a partir dos **espaços de Orlicz**. Devido a sua boa estrutura topológica e geométrica, estes espaços vem ganhando notoriedade e sendo bastante utilizados nas últimas décadas em diversas áreas da matemática.

Motivação

Estes espaços é um ambiente ideal para se trabalhar variacionalmente com a seguinte classe de equações quasilineares:

$$-\Delta_{\Phi} u := -div\left(\frac{\Phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|}\nabla u\right) = f(x,u) \text{ em } \Omega,$$

onde

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio com fronteira regular, $N \geq 1$;
- $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua;
- $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ é uma função de classe C^1.

Sobre Φ, pedimos ainda que a mesma seja par, convexa e cumpra as seguintes hipóteses:

(Φ_1) existem $l, m \geq 1$ tais que

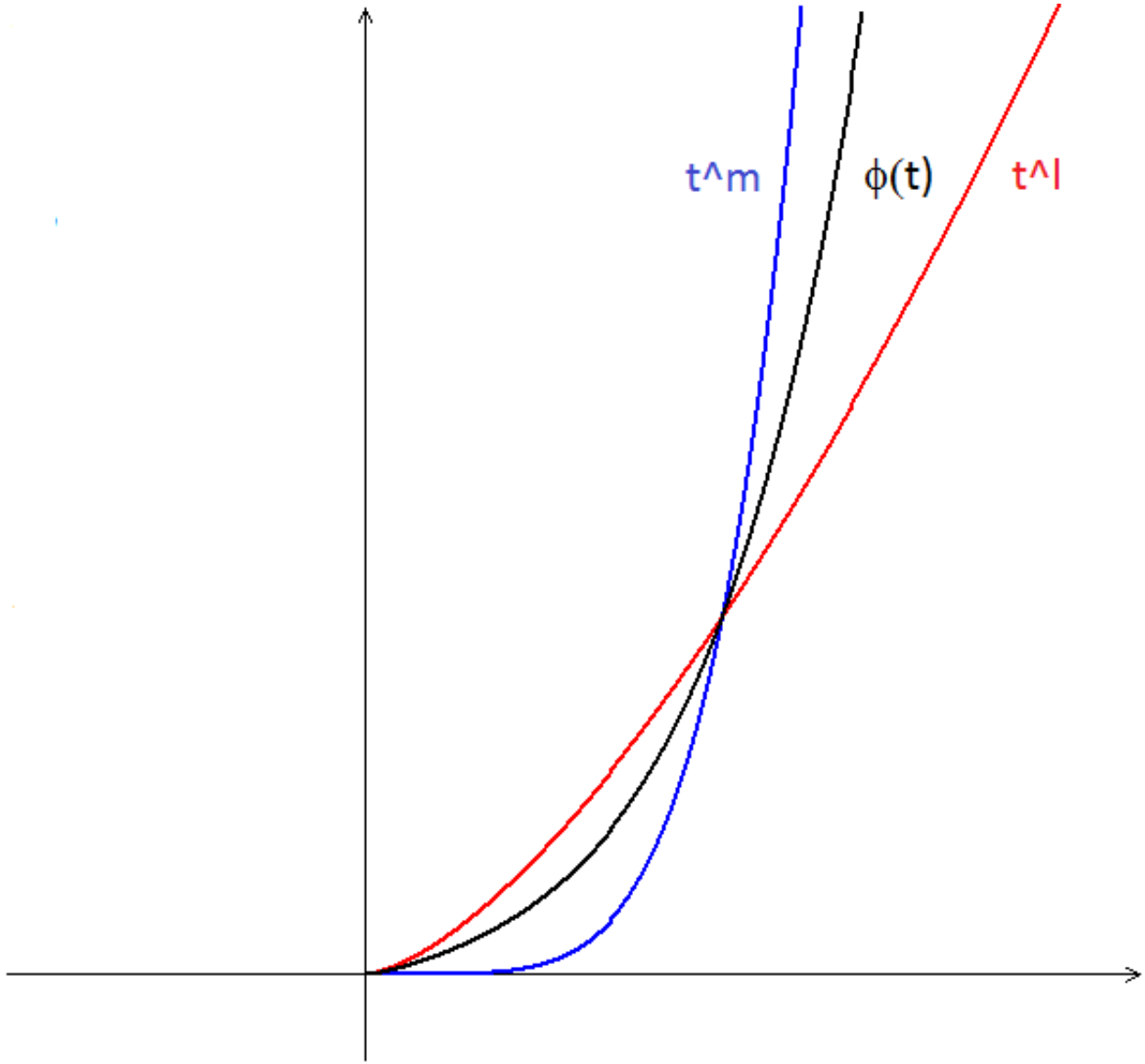
$$l \leq \frac{\Phi'(t)t}{\Phi(t)} \leq m, \quad t > 0.$$

Sobre Φ, pedimos ainda que a mesma seja par, convexa e cumpra as seguintes hipóteses:

(Φ_1) existem $l, m \geq 1$ tais que

$$l \leq \frac{\Phi'(t)t}{\Phi(t)} \leq m, \quad t > 0.$$

Esta condição pode ser interpretada geometricamente da seguinte forma:


t^m
ϕ(t)
t^l

Uma vez que a função $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ é dado de forma bem geral, esta classe de problemas pode modelar diversos problemas físicos, como por exemplo:

(*a*) Elasticidade não-linear (ver Fukagai, N. and Narukawa, K., Hiroshima Math., 1995.):Se

$$\Phi(t) = (1 + t^2)^\gamma - 1, \ \gamma \geq 1;$$

Uma vez que a função $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ é dado de forma bem geral, esta classe de problemas pode modelar diversos problemas físicos, como por exemplo:

(*a*) Elasticidade não-linear (ver Fukagai, N. and Narukawa, K., Hiroshima Math., 1995.):Se

$$\Phi(t) = (1 + t^2)^\gamma - 1, \ \gamma \geq 1;$$

então

$$\Delta_\Phi u = div \left(2\gamma(1 + |\nabla u|^2)^{\gamma - 1} \nabla u \right).$$

(*b*) Plasticidade (Fuchs, M. and Li, G., Abstr. Appl. Anal., 1998.): Se

$$\Phi(t) = t^p ln(1+t),\ 1 < \frac{-1+\sqrt{1+4N}}{2} < p < N-1.$$

(*b*) Plasticidade (Fuchs, M. and Li, G., Abstr. Appl. Anal., 1998.): Se

$$\Phi(t) = t^p ln(1+t),\ 1 < \frac{-1+\sqrt{1+4N}}{2} < p < N-1.$$

então

$$\Delta_\Phi u = div\left(\left[p|\nabla u|^{p-2}\ln(1+|\nabla u|) + \frac{|\nabla u|^{p-1}}{|\nabla u|+1}\right]\nabla u\right).$$

(*c*) Fluidos não Newtonianos generalizados (Fuchs, M. and Osmolovski, V., Z. Anal., 1998.): Se

$$\Phi(t) = \int_0^t s^{1-\alpha}(senh^{-1}s)^{\beta} ds,\ 0 \leq \alpha \leq 1,\ \beta > 0,$$

(*c*) Fluidos não Newtonianos generalizados (Fuchs, M. and Osmolovski, V., Z. Anal., 1998.): Se

$$\Phi(t) = \int_0^t s^{1-\alpha}(senh^{-1}s)^{\beta} ds,\ 0 \leq \alpha \leq 1,\ \beta > 0,$$

então

$$\Delta_\Phi u = div\left(\frac{(senh^{-1}|\nabla u|)^{\beta}}{|\nabla u|^{\alpha}}\nabla u\right).$$

Veremos mais adiante que é possível associar a Φ um espaço de Banach $L_\Phi(\Omega)$, chamado de espaço de Orlicz, e consequentemente ao espaço de Orlicz-Sobolev $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

Veremos mais adiante que é possível associar a Φ um espaço de Banach $L_\Phi(\Omega)$, chamado de espaço de Orlicz, e consequentemente ao espaço de Orlicz-Sobolev $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.
A partir disto, é possível mostrar que o funcional Euler-Lagrange para o problema:

$$\begin{cases} Q(x,u,\nabla u) := \Delta_\Phi u + f(x,u) = 0 \ \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

Veremos mais adiante que é possível associar a Φ um espaço de Banach $L_\Phi(\Omega)$, chamado de espaço de Orlicz, e consequentemente ao espaço de Orlicz-Sobolev $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.
A partir disto, é possível mostrar que o funcional Euler-Lagrange para o problema:

$$\begin{cases} Q(x,u,\nabla u) := \Delta_\Phi u + f(x,u) = 0 \ \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

é dado por:

$$J(u) := \int_\Omega \Phi(|\nabla u|) - F(x,u)\,dx, \ u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega),$$

Veremos mais adiante que é possível associar a Φ um espaço de Banach $L_\Phi(\Omega)$, chamado de espaço de Orlicz, e consequentemente ao espaço de Orlicz-Sobolev $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.
A partir disto, é possível mostrar que o funcional Euler-Lagrange para o problema:

$$\begin{cases} Q(x,u,\nabla u) := \Delta_\Phi u + f(x,u) = 0 \ \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

é dado por:

$$J(u) := \int_\Omega \Phi(|\nabla u|) - F(x,u)\,dx, \ u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega),$$

onde

$$F(x,t) := \int_0^t f(x,s)\,ds.$$

Função de Young e N-função

Definição

Dizemos que $\Phi : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ é uma **função de Young**

Função de Young e N-função

Definição

Dizemos que $\Phi : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ é uma **função de Young** se:

(i) Φ é uma função convexa e contínua;

Função de Young e N-função

Definição

Dizemos que $\Phi : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ é uma **função de Young** se:

(i) Φ é uma função convexa e contínua;

(ii) $\Phi(t) = 0$ se, e só se, $t = 0$;

Função de Young e N-função

Definição

Dizemos que $\Phi : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ é uma **função de Young** se:

(i) Φ é uma função convexa e contínua;

(ii) $\Phi(t) = 0$ se, e só se, $t = 0$;

(iii) Φ é par (*ou seja* $\Phi(t) = \Phi(-t)$).

Função de Young e N-função

Definição

Dizemos que $\Phi : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ é uma **função de Young** se:

(i) Φ é uma função convexa e contínua;

(ii) $\Phi(t) = 0$ se, e só se, $t = 0$;

(iii) Φ é par (*ou seja* $\Phi(t) = \Phi(-t)$).

Além disso, diremos que Φ é uma **N-função** se Φ é uma função de Young e verifica as seguintes condições de crescimento:

$$(iv) \quad \frac{\Phi(t)}{t} \xrightarrow{t \to 0} 0 \text{ e } \frac{\Phi(t)}{t} \xrightarrow{t \to +\infty} +\infty.$$

As funções a seguir são exemplos de N-funções:

1. $\Phi_1(t) = \mid t \mid^p,\ p \in (1, +\infty)$ e $t \in \mathbb{R}$

As funções a seguir são exemplos de N-funções:

1. $\Phi_1(t) = \mid t \mid^p,\ p \in (1, +\infty)$ e $t \in \mathbb{R}$
   (para $p = 1$, Φ é apenas uma função de Young);

As funções a seguir são exemplos de N-funções:

1. $\Phi_1(t) = \mid t \mid^p,\ p \in (1, +\infty)$ e $t \in \mathbb{R}$
   (para $p = 1$, Φ é apenas uma função de Young);
2. $\Phi_2(t) = e^{t^2} - 1,\ t \in \mathbb{R}$;

As funções a seguir são exemplos de N-funções:

1. $\Phi_1(t) = \mid t \mid^p,\ p \in (1, +\infty)$ e $t \in \mathbb{R}$
   (para $p = 1$, Φ é apenas uma função de Young);
2. $\Phi_2(t) = e^{t^2} - 1,\ t \in \mathbb{R}$;
3. $\Phi_3(t) = e^{|t|} - \mid t \mid - 1,\ t \in \mathbb{R}$;

As funções a seguir são exemplos de N-funções:

1. $\Phi_1(t) = \mid t \mid^p,\ p \in (1, +\infty)$ e $t \in \mathbb{R}$
   (para $p = 1$, Φ é apenas uma função de Young);
2. $\Phi_2(t) = e^{t^2} - 1,\ t \in \mathbb{R}$;
3. $\Phi_3(t) = e^{|t|} - \mid t \mid - 1,\ t \in \mathbb{R}$;
4. $\Phi_4(t) = (1 + \mid t \mid) \ln(1 + \mid t \mid) - \mid t \mid,\ t \in \mathbb{R}$.

Lema 1.1

Seja $\Phi : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ dado por

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)\, ds,$$

Lema 1.1

Seja $\Phi : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ dado por

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)\, ds,$$

onde

$$\varphi(t) = \begin{cases} \phi(t), \ t \geq 0; \\ -\phi(-t), \ t < 0, \end{cases}$$

Lema 1.1

Seja $\Phi : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ dado por

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)\, ds,$$

onde

$$\varphi(t) = \begin{cases} \phi(t), & t \geq 0; \\ -\phi(-t), & t < 0, \end{cases}$$

com $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ satisfazendo:

(I) ϕ é contínua à direita e não-decrescente em $\mathbb{R}_+$;

Lema 1.1

Seja $\Phi : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ dado por

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)\, ds,$$

onde

$$\varphi(t) = \begin{cases} \phi(t), & t \geq 0; \\ -\phi(-t), & t < 0, \end{cases}$$

com $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ satisfazendo:

(I) ϕ é contínua à direita e não-decrescente em $\mathbb{R}_+$;

(II) $\phi(t) = 0$ se, e só se $t = 0$;

Lema 1.1

Seja $\Phi : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ dado por

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)\, ds,$$

onde

$$\varphi(t) = \begin{cases} \phi(t), & t \geq 0; \\ -\phi(-t), & t < 0, \end{cases}$$

com $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ satisfazendo:

(I) ϕ é contínua à direita e não-decrescente em $\mathbb{R}_+$;

(II) $\phi(t) = 0$ se, e só se $t = 0$;

(III) $\phi(t) \overset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$;

Lema 1.1

Seja $\Phi : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ dado por

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)\, ds,$$

onde

$$\varphi(t) = \begin{cases} \phi(t), & t \geq 0; \\ -\phi(-t), & t < 0, \end{cases}$$

com $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ satisfazendo:

(I) ϕ é contínua à direita e não-decrescente em $\mathbb{R}_+$;

(II) $\phi(t) = 0$ se, e só se $t = 0$;

(III) $\phi(t) \overset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$;

(IV) $\phi(t) > 0$, $t > 0$.

Lema 1.1

Seja $\Phi : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ dado por

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)\, ds,$$

onde

$$\varphi(t) = \begin{cases} \phi(t), & t \geq 0; \\ -\phi(-t), & t < 0, \end{cases}$$

com $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ satisfazendo:

- **(I)** ϕ é contínua à direita e não-decrescente em $\mathbb{R}_+$;
- **(II)** $\phi(t) = 0$ se, e só se $t = 0$;
- **(III)** $\phi(t) \overset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$;
- **(IV)** $\phi(t) > 0$, $t > 0$.

Então, Φ é uma N-função.

Observação

A função Φ definida no Lema 1.1 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} \phi(s)\, ds,\ t \in \mathbb{R}.$$

Observação

A função Φ definida no Lema 1.1 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} \phi(s)\, ds,\ t \in \mathbb{R}.$$

O resultado a seguir, mostra que também vale a recíproca do Lema 1.1.

Observação

A função Φ definida no Lema 1.1 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} \phi(s)\, ds, \ \ t \in \mathbb{R}.$$

O resultado a seguir, mostra que também vale a recíproca do Lema 1.1.

Lema 1.2

Seja $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma N-função. Existe $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ verificando as hipóteses do Lema 1.1 tal que

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} \phi(s)\, ds$$

define uma N-função.

Espaços de Orlicz

A ideia agora é construir um espaço que generalize os espaços de Lebesgue, chamado de espaço de Orlicz.

Espaços de Orlicz

A ideia agora é construir um espaço que generalize os espaços de Lebesgue, chamado de espaço de Orlicz.
No que segue considere $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e conexo.

Espaços de Orlicz

A ideia agora é construir um espaço que generalize os espaços de Lebesgue, chamado de espaço de Orlicz.
No que segue considere $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e conexo.

Definição:

Seja Φ uma N-função. Definamos o conjunto $K_\Phi(\Omega)$, dado por:

$$K_\Phi(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável}; \int_\Omega \Phi(u)dx < +\infty \right\}$$

como **classe de Orlicz**.

Verificaremos a seguir que $K_\Phi(\Omega)$ é convexo e em geral não define um espaço vetorial.

Verificaremos a seguir que $K_\Phi(\Omega)$ é convexo e em geral não define um espaço vetorial.

Lema 1.3

$K_\Phi(\Omega)$ é convexo.

Verificaremos a seguir que $K_\Phi(\Omega)$ é convexo e em geral não define um espaço vetorial.

Lema 1.3

$K_\Phi(\Omega)$ é convexo.

Demonstração: De fato, dados $u, v \in K_\Phi(\Omega)$,

$$\int_\Omega \Phi(tu+(1-t)v)dx \leq t\int_\Omega \Phi(u)dx+(1-t)\int_\Omega \Phi(v)dx < +\infty,\ t \in [0,1],$$

Verificaremos a seguir que $K_\Phi(\Omega)$ é convexo e em geral não define um espaço vetorial.

Lema 1.3

$K_\Phi(\Omega)$ é convexo.

Demonstração: De fato, dados $u, v \in K_\Phi(\Omega)$,

$$\int_\Omega \Phi(tu+(1-t)v)dx \leq t\int_\Omega \Phi(u)dx+(1-t)\int_\Omega \Phi(v)dx < +\infty,\ t \in [0,1],$$

mostrando que $tu + (1-t)v \in K_\Phi(\Omega),\ t \in [0,1]$. ■

Lema 1.4

$K_\Phi(\Omega)$ nem sempre define um espaço vetorial.

Lema 1.4

$K_\Phi(\Omega)$ nem sempre define um espaço vetorial.

Demonstração: Considere a N-função

$$\Phi(t) = e^{t^2} - 1, \ t \in (0,1) \text{ (neste caso } \Omega = (0,1))$$

Lema 1.4

$K_\Phi(\Omega)$ nem sempre define um espaço vetorial.

Demonstração: Considere a N-função

$$\Phi(t) = e^{t^2} - 1, \ t \in (0,1) \text{ (neste caso } \Omega = (0,1))$$

e seja

$$u(x) = \ln^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right).$$

Lema 1.4

$K_\Phi(\Omega)$ nem sempre define um espaço vetorial.

Demonstração: Considere a N-função

$$\Phi(t) = e^{t^2} - 1, \ t \in (0,1) \text{ (neste caso } \Omega = (0,1))$$

e seja

$$u(x) = \ln^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right).$$

Afirmamos que

$$u \in K_\Phi(\Omega), \text{ mas } \sqrt{2}u \notin K_\Phi(\Omega).$$

Lema 1.4

$K_\Phi(\Omega)$ nem sempre define um espaço vetorial.

Demonstração: Considere a N-função

$$\Phi(t) = e^{t^2} - 1, \ t \in (0,1) \text{ (neste caso } \Omega = (0,1))$$

e seja

$$u(x) = \ln^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right).$$

Afirmamos que

$$u \in K_\Phi(\Omega), \text{ mas } \sqrt{2}u \notin K_\Phi(\Omega).$$

De fato,

$$\int_\Omega \Phi(u)dx = \int_0^1 (e^{u^2} - 1)dx$$

Lema 1.4

$K_\Phi(\Omega)$ nem sempre define um espaço vetorial.

Demonstração: Considere a N-função

$$\Phi(t) = e^{t^2} - 1, \ t \in (0,1) \text{ (neste caso } \Omega = (0,1))$$

e seja

$$u(x) = \ln^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Afirmamos que

$$u \in K_\Phi(\Omega), \text{ mas } \sqrt{2}u \notin K_\Phi(\Omega).$$

De fato,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Phi(u)dx &= \int_0^1 (e^{u^2} - 1)dx \\ &= \int_0^1 (e^{\ln(1/\sqrt{x})} - 1)dx \end{aligned}$$

Lema 1.4

$K_\Phi(\Omega)$ nem sempre define um espaço vetorial.

Demonstração: Considere a N-função

$$\Phi(t) = e^{t^2} - 1, \ t \in (0,1) \text{ (neste caso } \Omega = (0,1))$$

e seja

$$u(x) = \ln^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Afirmamos que

$$u \in K_\Phi(\Omega), \text{ mas } \sqrt{2}u \notin K_\Phi(\Omega).$$

De fato,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi(u)dx &= \int_0^1 (e^{u^2} - 1)dx \\ &= \int_0^1 (e^{\ln(1/\sqrt{x})} - 1)dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)dx = 1,\end{aligned}$$

Lema 1.4

$K_\Phi(\Omega)$ nem sempre define um espaço vetorial.

Demonstração: Considere a N-função

$$\Phi(t) = e^{t^2} - 1, \ t \in (0,1) \text{ (neste caso } \Omega = (0,1))$$

e seja

$$u(x) = \ln^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Afirmamos que

$$u \in K_\Phi(\Omega), \text{ mas } \sqrt{2}u \notin K_\Phi(\Omega).$$

De fato,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Phi(u)dx &= \int_0^1 (e^{u^2} - 1)dx \\ &= \int_0^1 (e^{\ln(1/\sqrt{x})} - 1)dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)dx = 1, \end{aligned}$$

mostrando que $u \in K_\Phi(\Omega)$.

mas

$$\int_{\Omega} \Phi(u\sqrt{2})dx \quad = \quad \int_{\Omega} \left(e^{2\ln(1/\sqrt{x})} - 1 \right) dx$$

mas

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi(u\sqrt{2})dx &= \int_\Omega \left(e^{2\ln(1/\sqrt{x})} - 1\right)dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{x} - 1\right)dx = -\infty,\end{aligned}$$

mas

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi(u\sqrt{2})dx &= \int_\Omega \left(e^{2\ln(1/\sqrt{x})} - 1\right)dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{x} - 1\right)dx = -\infty,\end{aligned}$$

isto é, $\sqrt{2}u \notin K_\Phi(\Omega)$. ■

Observe que $K_\Phi(\Omega)$ é uma generalização natural dos espaços de Lebesgue.

Observe que $K_\Phi(\Omega)$ é uma generalização natural dos espaços de Lebesgue.
No entanto, vimos que a mesma precisa ser melhorada, tendo em vista que $K_\Phi(\Omega)$ não possui estrutura de espaço vetorial.

Observe que $K_\Phi(\Omega)$ é uma generalização natural dos espaços de Lebesgue.
No entanto, vimos que a mesma precisa ser melhorada, tendo em vista que $K_\Phi(\Omega)$ não possui estrutura de espaço vetorial. Seguindo este raciocínio, construímos um novo conjunto $L_\Phi(\Omega)$, dado por:

$$L_\Phi(\Omega) := \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mens. } ; \int_\Omega \Phi\left(\frac{u}{\lambda}\right) dx < +\infty, \text{ para algum } \lambda > 0 \right\}.$$

Observe que $K_\Phi(\Omega)$ é uma generalização natural dos espaços de Lebesgue.
No entanto, vimos que a mesma precisa ser melhorada, tendo em vista que $K_\Phi(\Omega)$ não possui estrutura de espaço vetorial. Seguindo este raciocínio, construímos um novo conjunto $L_\Phi(\Omega)$, dado por:

$$L_\Phi(\Omega) := \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mens. } ; \int_\Omega \Phi\left(\frac{u}{\lambda}\right) dx < +\infty, \text{ para algum } \lambda > 0 \right\}.$$

Verificaremos agora que o mesmo define um espaço vetorial.

De fato, basta observar que:

- $u, v \in L_\Phi(\Omega),$ implica $u + v \in L_\Phi(\Omega)$.

De fato, basta observar que:

- $u, v \in L_\Phi(\Omega),$ implica $u + v \in L_\Phi(\Omega)$.
  Existem $\lambda_u, \lambda_v > 0$, tais que

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\lambda_u}\Big) dx < +\infty$$

De fato, basta observar que:

- $u, v \in L_\Phi(\Omega),$ implica $u + v \in L_\Phi(\Omega)$.
  Existem $\lambda_u, \lambda_v > 0$, tais que

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\lambda_u}\Big)dx < +\infty \text{ e } \int_\Omega \Phi\Big(\frac{v}{\lambda_v}\Big)dx < +\infty.$$

De fato, basta observar que:

- $u, v \in L_\Phi(\Omega),$ implica $u + v \in L_\Phi(\Omega)$.
  Existem $\lambda_u, \lambda_v > 0$, tais que

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\lambda_u}\Big)dx < +\infty \text{ e } \int_\Omega \Phi\Big(\frac{v}{\lambda_v}\Big)dx < +\infty.$$

  Daí, uma vez que

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u+v}{\lambda_u+\lambda_v}\Big)dx = \int_\Omega \Phi\Big(\frac{\lambda_u u}{\lambda_u(\lambda_u+\lambda_v)} + \frac{\lambda_v v}{\lambda_v(\lambda_u+\lambda_v)}\Big)dx$$

De fato, basta observar que:

- $u, v \in L_\Phi(\Omega),$ implica $u + v \in L_\Phi(\Omega)$.
  Existem $\lambda_u, \lambda_v > 0$, tais que

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\lambda_u}\Big)dx < +\infty \text{ e } \int_\Omega \Phi\Big(\frac{v}{\lambda_v}\Big)dx < +\infty.$$

  Daí, uma vez que

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u+v}{\lambda_u+\lambda_v}\Big)dx = \int_\Omega \Phi\Big(\frac{\lambda_u u}{\lambda_u(\lambda_u+\lambda_v)} + \frac{\lambda_v v}{\lambda_v(\lambda_u+\lambda_v)}\Big)dx$$

  e

$$1 - \frac{\lambda_u}{\lambda_u+\lambda_v} = \frac{\lambda_v}{\lambda_u+\lambda_v}.$$

De fato, basta observar que:

- $u, v \in L_\Phi(\Omega),$ implica $u + v \in L_\Phi(\Omega)$.
  Existem $\lambda_u, \lambda_v > 0$, tais que

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\lambda_u}\Big)dx < +\infty \text{ e } \int_\Omega \Phi\Big(\frac{v}{\lambda_v}\Big)dx < +\infty.$$

  Daí, uma vez que

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u+v}{\lambda_u+\lambda_v}\Big)dx = \int_\Omega \Phi\Big(\frac{\lambda_u u}{\lambda_u(\lambda_u+\lambda_v)} + \frac{\lambda_v v}{\lambda_v(\lambda_u+\lambda_v)}\Big)dx$$

  e

$$1 - \frac{\lambda_u}{\lambda_u+\lambda_v} = \frac{\lambda_v}{\lambda_u+\lambda_v}.$$

  temos pela convexidade de Φ que

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u+v}{\lambda_u+\lambda_v}\Big)dx \leq \frac{\lambda_u}{\lambda_u+\lambda_v}\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\lambda_u}\Big)dx$$

De fato, basta observar que:

- $u, v \in L_\Phi(\Omega),$ implica $u + v \in L_\Phi(\Omega)$.
  Existem $\lambda_u, \lambda_v > 0$, tais que

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\lambda_u}\Big)dx < +\infty \text{ e } \int_\Omega \Phi\Big(\frac{v}{\lambda_v}\Big)dx < +\infty.$$

  Daí, uma vez que

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u+v}{\lambda_u+\lambda_v}\Big)dx = \int_\Omega \Phi\Big(\frac{\lambda_u u}{\lambda_u(\lambda_u+\lambda_v)} + \frac{\lambda_v v}{\lambda_v(\lambda_u+\lambda_v)}\Big)dx$$

  e

$$1 - \frac{\lambda_u}{\lambda_u+\lambda_v} = \frac{\lambda_v}{\lambda_u+\lambda_v}.$$

  temos pela convexidade de Φ que

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u+v}{\lambda_u+\lambda_v}\Big)dx \leq \frac{\lambda_u}{\lambda_u+\lambda_v}\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\lambda_u}\Big)dx + \frac{\lambda_v}{\lambda_u+\lambda_v}\int_\Omega \Phi\Big(\frac{v}{\lambda_v}\Big)dx$$

De fato, basta observar que:

- $u, v \in L_\Phi(\Omega),$ implica $u + v \in L_\Phi(\Omega)$.
  Existem $\lambda_u, \lambda_v > 0$, tais que

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\lambda_u}\Big)dx < +\infty \text{ e } \int_\Omega \Phi\Big(\frac{v}{\lambda_v}\Big)dx < +\infty.$$

  Daí, uma vez que

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u+v}{\lambda_u+\lambda_v}\Big)dx = \int_\Omega \Phi\Big(\frac{\lambda_u u}{\lambda_u(\lambda_u+\lambda_v)} + \frac{\lambda_v v}{\lambda_v(\lambda_u+\lambda_v)}\Big)dx$$

  e

$$1 - \frac{\lambda_u}{\lambda_u+\lambda_v} = \frac{\lambda_v}{\lambda_u+\lambda_v}.$$

  temos pela convexidade de Φ que

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u+v}{\lambda_u+\lambda_v}\Big)dx \leq \frac{\lambda_u}{\lambda_u+\lambda_v}\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\lambda_u}\Big)dx + \frac{\lambda_v}{\lambda_u+\lambda_v}\int_\Omega \Phi\Big(\frac{v}{\lambda_v}\Big)dx$$

  mostrando que $u + v \in L_\Phi(\Omega)$.

A pergunta que surge agora é: $L_\Phi(\Omega)$ é o espaço vetorial mais refinado para generalizar os espaços de Lebesgue?

A pergunta que surge agora é: $L_\Phi(\Omega)$ é o espaço vetorial mais refinado para generalizar os espaços de Lebesgue? A resposta para esta pergunta é sim e sua justificativa é dada pelo lema a seguir.

A pergunta que surge agora é: $L_\Phi(\Omega)$ é o espaço vetorial mais refinado para generalizar os espaços de Lebesgue? A resposta para esta pergunta é sim e sua justificativa é dada pelo lema a seguir.

Lema 1.4

$L_\Phi(\Omega)$ é o menor subespaço vetorial que contém $K_\Phi(\Omega)$.

A pergunta que surge agora é: $L_\Phi(\Omega)$ é o espaço vetorial mais refinado para generalizar os espaços de Lebesgue? A resposta para esta pergunta é sim e sua justificativa é dada pelo lema a seguir.

Lema 1.4

$L_\Phi(\Omega)$ é o menor subespaço vetorial que contém $K_\Phi(\Omega)$.

***D*emonstração:** Seja V um subespaço vetorial qualquer que contém $K_\Phi(\Omega)$.

A pergunta que surge agora é: $L_\Phi(\Omega)$ é o espaço vetorial mais refinado para generalizar os espaços de Lebesgue? A resposta para esta pergunta é sim e sua justificativa é dada pelo lema a seguir.

Lema 1.4

$L_\Phi(\Omega)$ é o menor subespaço vetorial que contém $K_\Phi(\Omega)$.

Demonstração: Seja V um subespaço vetorial qualquer que contém $K_\Phi(\Omega)$. Dado $u \in L_\Phi(\Omega)$, existe $\lambda > 0$ tal que $\dfrac{u}{\lambda} \in K_\Phi(\Omega)$

A pergunta que surge agora é: $L_\Phi(\Omega)$ é o espaço vetorial mais refinado para generalizar os espaços de Lebesgue? A resposta para esta pergunta é sim e sua justificativa é dada pelo lema a seguir.

Lema 1.4

$L_\Phi(\Omega)$ é o menor subespaço vetorial que contém $K_\Phi(\Omega)$.

***D*emonstração:** Seja V um subespaço vetorial qualquer que contém $K_\Phi(\Omega)$. Dado $u \in L_\Phi(\Omega)$, existe $\lambda > 0$ tal que $\frac{u}{\lambda} \in K_\Phi(\Omega)$, segue pelo fato de $K_\Phi(\Omega) \subset V$ que

$$\frac{u}{\lambda} \in V,$$

A pergunta que surge agora é: $L_\Phi(\Omega)$ é o espaço vetorial mais refinado para generalizar os espaços de Lebesgue? A resposta para esta pergunta é sim e sua justificativa é dada pelo lema a seguir.

Lema 1.4

$L_\Phi(\Omega)$ é o menor subespaço vetorial que contém $K_\Phi(\Omega)$.

Demonstração: Seja V um subespaço vetorial qualquer que contém $K_\Phi(\Omega)$. Dado $u \in L_\Phi(\Omega)$, existe $\lambda > 0$ tal que $\frac{u}{\lambda} \in K_\Phi(\Omega)$, segue pelo fato de $K_\Phi(\Omega) \subset V$ que

$$\frac{u}{\lambda} \in V,$$

mostrando que $L_\Phi(\Omega) \subset V$. ■

A pergunta que surge agora é: $L_\Phi(\Omega)$ é o espaço vetorial mais refinado para generalizar os espaços de Lebesgue? A resposta para esta pergunta é sim e sua justificativa é dada pelo lema a seguir.

Lema 1.4

$L_\Phi(\Omega)$ é o menor subespaço vetorial que contém $K_\Phi(\Omega)$.

***D*emonstração:** Seja V um subespaço vetorial qualquer que contém $K_\Phi(\Omega)$. Dado $u \in L_\Phi(\Omega)$, existe $\lambda > 0$ tal que $\frac{u}{\lambda} \in K_\Phi(\Omega)$, segue pelo fato de $K_\Phi(\Omega) \subset V$ que

$$\frac{u}{\lambda} \in V,$$

mostrando que $L_\Phi(\Omega) \subset V$. ■

Definição:

Definimos o espaço vetorial $L_\Phi(\Omega)$ como **espaço de Orlicz**.

Definição:

Definimos como **norma de Luxemburg** a aplicação $|\ .\ |_\Phi : L_\Phi(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por

$$|\ u\ |_\Phi = \inf\left\{\lambda > 0; \int_\Omega \Phi\left(\frac{u}{\lambda}\right) dx \leq 1\right\},\ u \in L_\Phi(\Omega).$$

Definição:

Definimos como **norma de Luxemburg** a aplicação $|\ .\ |_\Phi : L_\Phi(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por

$$|\ u\ |_\Phi = \inf\left\{\lambda > 0; \int_\Omega \Phi\left(\frac{u}{\lambda}\right) dx \leq 1\right\},\ u \in L_\Phi(\Omega).$$

Lema 1.5

A norma de Luxemburg $|\ .\ |_\Phi$ define uma norma sobre o espaço $L_\Phi(\Omega)$.

Definição:

Definimos como **norma de Luxemburg** a aplicação $|\,.\,|_\Phi : L_\Phi(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por

$$|\,u\,|_\Phi = \inf\left\{\lambda > 0; \int_\Omega \Phi\left(\frac{u}{\lambda}\right) dx \leq 1\right\},\ u \in L_\Phi(\Omega).$$

Lema 1.5

A norma de Luxemburg $|\,.\,|_\Phi$ define uma norma sobre o espaço $L_\Phi(\Omega)$.

Observação:

Além da norma de Luxemburg, é conhecido as seguintes normas:

- $\|u\|_{\Phi,O} := \sup\left\{\left|\int_\Omega uv\,dx\right| :\ v \in L_{\tilde{\Phi}}(\Omega) \text{ e } \int_\Omega \tilde{\Phi}(v)\,dx \leq 1\right\}$ **Norma de Orlicz**

Definição:

Definimos como **norma de Luxemburg** a aplicação $|\ .\ |_\Phi \colon L_\Phi(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por

$$|\ u\ |_\Phi = \inf\left\{\lambda > 0; \int_\Omega \Phi\left(\frac{u}{\lambda}\right) dx \leq 1\right\},\ u \in L_\Phi(\Omega).$$

Lema 1.5

A norma de Luxemburg $|\ .\ |_\Phi$ define uma norma sobre o espaço $L_\Phi(\Omega)$.

Observação:

Além da norma de Luxemburg, é conhecido as seguintes normas:

- $\|u\|_{\Phi,O} := \sup\left\{\left|\int_\Omega uv\, dx\right| :\ v \in L_{\tilde{\Phi}}(\Omega) \text{ e } \int_\Omega \tilde{\Phi}(v)\, dx \leq 1\right\}$ **Norma de Orlicz**
- $\|u\|_{\Phi,A} := \inf\limits_{k>0}\left\{\frac{1}{k}\left(1 + \int_\Omega \Phi(ku)\, dx\right)\right\}$ **Norma de Amemiya**

Para provar que $L_\Phi(\Omega)$ munido da aplicação $|\ .\ |_\Phi$ define um espaço de Banach se faz necessário o seguinte lema:

Lema 1.6

A N-função Φ, satisfaz:

(a) $\Phi(\alpha t) \leq \alpha\Phi(t)$, $\alpha \in [0,1]$ e $t \in \mathbb{R}$;

Para provar que $L_\Phi(\Omega)$ munido da aplicação $|\ .\ |_\Phi$ define um espaço de Banach se faz necessário o seguinte lema:

Lema 1.6

A N-função Φ, satisfaz:

(a) $\Phi(\alpha t) \leq \alpha\Phi(t)$, $\alpha \in [0,1]$ e $t \in \mathbb{R}$;

(b) $\Phi(\beta t) > \beta\Phi(t)$, $\beta \in (1,+\infty)$ *e* $t \in \mathbb{R}$.

Para provar que $L_\Phi(\Omega)$ munido da aplicação $|\ .\ |_\Phi$ define um espaço de Banach se faz necessário o seguinte lema:

Lema 1.6

A N-função Φ, satisfaz:

(a) $\Phi(\alpha t) \leq \alpha\Phi(t)$, $\alpha \in [0,1]$ e $t \in \mathbb{R}$;

(b) $\Phi(\beta t) > \beta\Phi(t)$, $\beta \in (1,+\infty)$ *e* $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

Verificação do item (a)**:** Desde que Φ é convexa

Para provar que $L_\Phi(\Omega)$ munido da aplicação $|\ .\ |_\Phi$ define um espaço de Banach se faz necessário o seguinte lema:

Lema 1.6

A N-função Φ, satisfaz:

(*a*) $\Phi(\alpha t) \leq \alpha\Phi(t)$, $\alpha \in [0,1]$ e $t \in \mathbb{R}$;

(*b*) $\Phi(\beta t) > \beta\Phi(t)$, $\beta \in (1,+\infty)$ *e* $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

Verificação do item (*a*)**:** Desde que Φ é convexa, temos

$$\Phi(\alpha t) = \Phi(\alpha t + (1-\alpha)0)$$

Para provar que $L_\Phi(\Omega)$ munido da aplicação $|\ .\ |_\Phi$ define um espaço de Banach se faz necessário o seguinte lema:

Lema 1.6

A N-função Φ, satisfaz:

(a) $\Phi(\alpha t) \leq \alpha\Phi(t)$, $\alpha \in [0,1]$ e $t \in \mathbb{R}$;

(b) $\Phi(\beta t) > \beta\Phi(t)$, $\beta \in (1,+\infty)$ *e* $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

Verificação do item (a)**:** Desde que Φ é convexa, temos

$$\Phi(\alpha t) = \Phi(\alpha t + (1-\alpha)0) \leq \alpha\Phi(t),\ \alpha \in [0,1];$$

Para provar que $L_\Phi(\Omega)$ munido da aplicação $|\ .\ |_\Phi$ define um espaço de Banach se faz necessário o seguinte lema:

Lema 1.6

A N-função Φ, satisfaz:

(a) $\Phi(\alpha t) \leq \alpha\Phi(t)$, $\alpha \in [0,1]$ e $t \in \mathbb{R}$;

(b) $\Phi(\beta t) > \beta\Phi(t)$, $\beta \in (1, +\infty)$ *e* $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

Verificação do item (a)**:** Desde que Φ é convexa, temos

$$\Phi(\alpha t) = \Phi(\alpha t + (1-\alpha)0) \leq \alpha\Phi(t),\ \alpha \in [0,1];$$

Verificação do item (b)**:** Sem perda de generalidade tome $t > 0$ (já que Φ é par)

Para provar que $L_\Phi(\Omega)$ munido da aplicação $|\ .\ |_\Phi$ define um espaço de Banach se faz necessário o seguinte lema:

Lema 1.6

A N-função Φ, satisfaz:

(*a*) $\Phi(\alpha t) \leq \alpha\Phi(t)$, $\alpha \in [0,1]$ e $t \in \mathbb{R}$;

(*b*) $\Phi(\beta t) > \beta\Phi(t)$, $\beta \in (1, +\infty)$ *e* $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

Verificação do item (*a*)**:** Desde que Φ é convexa, temos

$$\Phi(\alpha t) = \Phi(\alpha t + (1-\alpha)0) \leq \alpha\Phi(t),\ \alpha \in [0,1];$$

Verificação do item (*b*)**:** Sem perda de generalidade tome $t > 0$ (já que Φ é par), logo

$$\Phi\left(\frac{1}{\beta}t\right) \leq \frac{1}{\beta}\Phi(t).$$

Para provar que $L_\Phi(\Omega)$ munido da aplicação $|\ .\ |_\Phi$ define um espaço de Banach se faz necessário o seguinte lema:

Lema 1.6

A N-função Φ, satisfaz:

(a) $\Phi(\alpha t) \leq \alpha\Phi(t)$, $\alpha \in [0,1]$ e $t \in \mathbb{R}$;

(b) $\Phi(\beta t) > \beta\Phi(t)$, $\beta \in (1, +\infty)$ *e* $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

Verificação do item (a)**:** Desde que Φ é convexa, temos

$$\Phi(\alpha t) = \Phi(\alpha t + (1-\alpha)0) \leq \alpha\Phi(t),\ \alpha \in [0,1];$$

Verificação do item (b)**:** Sem perda de generalidade tome $t > 0$ (já que Φ é par), logo

$$\Phi\left(\frac{1}{\beta}t\right) \leq \frac{1}{\beta}\Phi(t).$$

Fazendo $s = \left(\frac{1}{\beta}\right)t$, obtemos

$$\Phi(\beta s) \geq \beta\Phi(s),\ \text{para } s > 0. \blacksquare$$

Lema 1.7

Se $u \in L_\Phi(\Omega)$ é uma função não trivial, então

$$| u |_\Phi = \min \left\{ \lambda > 0; \int_\Omega \Phi\left(\frac{u}{\lambda}\right) dx \leq 1 \right\}.$$

Lema 1.7

Se $u \in L_\Phi(\Omega)$ é uma função não trivial, então

$$| u |_\Phi = \min \left\{ \lambda > 0; \int_\Omega \Phi\left(\frac{u}{\lambda}\right) dx \leq 1 \right\}.$$

Lema 1.8

Sejam $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função mensurável e $k_0 > 0$.

Lema 1.7

Se $u \in L_\Phi(\Omega)$ é uma função não trivial, então

$$| u |_\Phi = \min \left\{ \lambda > 0; \int_\Omega \Phi\left(\frac{u}{\lambda}\right) dx \leq 1 \right\}.$$

Lema 1.8

Sejam $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função mensurável e $k_0 > 0$. Então

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{u}{k_0}\right) dx = 1,$$

se, e somente se, $| u |_\Phi = k_0$.

Fixado $p \geq 1$, seja $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ uma função dada por:

$$\Phi(t) = \frac{|\ t\ |^p}{p}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Fixado $p \geq 1$, seja $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ uma função dada por:

$$\Phi(t) = \frac{|\ t\ |^p}{p}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Afirmamos que

$$K_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega) = L^p(\Omega)$$

Fixado $p \geq 1$, seja $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ uma função dada por:

$$\Phi(t) = \frac{|\ t\ |^p}{p}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Afirmamos que

$$K_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega) = L^p(\Omega)$$

e

$$|\ .\ |_\Phi = p^{-\frac{1}{p}}\ |\ .\ |_p,$$

Fixado $p \geq 1$, seja $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ uma função dada por:

$$\Phi(t) = \frac{|\ t\ |^p}{p}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Afirmamos que

$$K_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega) = L^p(\Omega)$$

e

$$|\ .\ |_\Phi = p^{-\frac{1}{p}}\ |\ .\ |_p,$$

onde $|\ .\ |_p$ é a norma usual do espaço de lebesgue $L^p(\Omega)$.

De fato, note que $u \in K_\Phi(\Omega)$ se, e só se

$$\int_\Omega \Phi(u)dx < +\infty,$$

De fato, note que $u \in K_\Phi(\Omega)$ se, e só se

$$\int_\Omega \Phi(u)dx < +\infty,$$

equivalentemente

$$\frac{1}{p}\int_\Omega \mid u \mid^p dx < +\infty,$$

De fato, note que $u \in K_\Phi(\Omega)$ se, e só se

$$\int_\Omega \Phi(u)dx < +\infty,$$

equivalentemente

$$\frac{1}{p}\int_\Omega \mid u \mid^p dx < +\infty,$$

ou seja, $u \in L^p(\Omega)$.

De fato, note que $u \in K_\Phi(\Omega)$ se, e só se

$$\int_\Omega \Phi(u)dx < +\infty,$$

equivalentemente

$$\frac{1}{p}\int_\Omega \mid u \mid^p dx < +\infty,$$

ou seja, $u \in L^p(\Omega)$. E portanto, $K_\Phi(\Omega) = L^p(\Omega)$.

De fato, note que $u \in K_\Phi(\Omega)$ se, e só se

$$\int_\Omega \Phi(u)dx < +\infty,$$

equivalentemente

$$\frac{1}{p}\int_\Omega \mid u \mid^p dx < +\infty,$$

ou seja, $u \in L^p(\Omega)$. E portanto, $K_\Phi(\Omega) = L^p(\Omega)$.
Suponha agora que $u \in L_\Phi(\Omega)$, equivalentemente temos

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\lambda}\Big)dx < +\infty,$$

para algum $\lambda > 0$

De fato, note que $u \in K_\Phi(\Omega)$ se, e só se

$$\int_\Omega \Phi(u)dx < +\infty,$$

equivalentemente

$$\frac{1}{p}\int_\Omega \mid u \mid^p dx < +\infty,$$

ou seja, $u \in L^p(\Omega)$. E portanto, $K_\Phi(\Omega) = L^p(\Omega)$.
Suponha agora que $u \in L_\Phi(\Omega)$, equivalentemente temos

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\lambda}\Big)dx < +\infty,$$

para algum $\lambda > 0$, ou seja

$$\frac{1}{p\lambda^p}\int_\Omega \mid u \mid^p dx < +\infty,$$

De fato, note que $u \in K_\Phi(\Omega)$ se, e só se

$$\int_\Omega \Phi(u)dx < +\infty,$$

equivalentemente

$$\frac{1}{p}\int_\Omega \mid u \mid^p \, dx < +\infty,$$

ou seja, $u \in L^p(\Omega)$. E portanto, $K_\Phi(\Omega) = L^p(\Omega)$.
Suponha agora que $u \in L_\Phi(\Omega)$, equivalentemente temos

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\lambda}\Big)dx < +\infty,$$

para algum $\lambda > 0$, ou seja

$$\frac{1}{p\lambda^p}\int_\Omega \mid u \mid^p \, dx < +\infty,$$

onde isto acontece se, e só se, $u \in L^p(\Omega)$

De fato, note que $u \in K_\Phi(\Omega)$ se, e só se

$$\int_\Omega \Phi(u)dx < +\infty,$$

equivalentemente

$$\frac{1}{p}\int_\Omega \mid u \mid^p dx < +\infty,$$

ou seja, $u \in L^p(\Omega)$. E portanto, $K_\Phi(\Omega) = L^p(\Omega)$.
Suponha agora que $u \in L_\Phi(\Omega)$, equivalentemente temos

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\lambda}\Big)dx < +\infty,$$

para algum $\lambda > 0$, ou seja

$$\frac{1}{p\lambda^p}\int_\Omega \mid u \mid^p dx < +\infty,$$

onde isto acontece se, e só se, $u \in L^p(\Omega)$. Logo, $L_\Phi(\Omega) = L^p(\Omega)$.

Sabendo disto, segue que

$$K_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega) = L^p(\Omega).$$

Sabendo disto, segue que

$$K_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega) = L^p(\Omega).$$

Observe agora que

$$| u |_\Phi = \inf \left\{ \lambda > 0; \int_\Omega \Phi\left(\frac{u}{\lambda}\right) dx \leq 1 \right\}$$

Sabendo disto, segue que

$$K_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega) = L^p(\Omega).$$

Observe agora que

$$\begin{aligned} |\, u \,|_\Phi &= \inf\left\{\lambda > 0; \int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\lambda}\Big)dx \leq 1\right\} \\ &= \inf\left\{\lambda > 0; \frac{1}{p^{\frac{1}{p}}}\Big(\int_\Omega |\, u \,|^p \, dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \lambda\right\} \end{aligned}$$

Sabendo disto, segue que

$$K_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega) = L^p(\Omega).$$

Observe agora que

$$\begin{aligned} |\, u \,|_\Phi &= \inf\left\{\lambda > 0; \int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{\lambda}\Big)dx \leq 1\right\} \\ &= \inf\left\{\lambda > 0; \frac{1}{p^{\frac{1}{p}}}\Big(\int_\Omega |\, u \,|^p \, dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \lambda\right\} \\ &= p^{-\frac{1}{p}} \,|\, u \,|_p \,. \end{aligned}$$

Proposição 1.1

Se Ω é limitado, então $L_\Phi(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^1(\Omega)$.

Proposição 1.1

Se Ω é limitado, então $L_\Phi(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^1(\Omega)$.

Proposição 1.2

O espaço de Orlicz $L_\Phi(\mathbb{R}^N)$ está imerso continuamente em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Proposição 1.1

Se Ω é limitado, então $L_\Phi(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^1(\Omega)$.

Proposição 1.2

O espaço de Orlicz $L_\Phi(\mathbb{R}^N)$ está imerso continuamente em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração: Dividiremos esta prova em dois casos:

Proposição 1.1

Se Ω é limitado, então $L_\Phi(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^1(\Omega)$.

Proposição 1.2

O espaço de Orlicz $L_\Phi(\mathbb{R}^N)$ está imerso continuamente em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração: Dividiremos esta prova em dois casos:

1^o **caso:** Para todo $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto, $L_\Phi(\mathbb{R}^N) \subset L^1(K)$.

Proposição 1.1

Se Ω é limitado, então $L_\Phi(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^1(\Omega)$.

Proposição 1.2

O espaço de Orlicz $L_\Phi(\mathbb{R}^N)$ está imerso continuamente em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração: Dividiremos esta prova em dois casos:

1^o **caso:** Para todo $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto, $L_\Phi(\mathbb{R}^N) \subset L^1(K)$.

Dado $u \in L_\Phi(\mathbb{R}^N)$,

Proposição 1.1

Se Ω é limitado, então $L_\Phi(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^1(\Omega)$.

Proposição 1.2

O espaço de Orlicz $L_\Phi(\mathbb{R}^N)$ está imerso continuamente em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração: Dividiremos esta prova em dois casos:

1^o **caso:** Para todo $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto, $L_\Phi(\mathbb{R}^N) \subset L^1(K)$.

Dado $u \in L_\Phi(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi\left(\frac{|u|}{\lambda}\right) dx < +\infty, \tag{1}$$

para algum $\lambda > 0$.

Desde que

$$\frac{\Phi(t)}{t} \xrightarrow{t\to+\infty} +\infty,$$

Desde que

$$\frac{\Phi(t)}{t} \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

tome $R > 0$ suficientemente grande tal que

$$\frac{\Phi(t)}{t} \geq 1, \ t \geq R,$$

Desde que

$$\frac{\Phi(t)}{t} \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

tome $R > 0$ suficientemente grande tal que

$$\frac{\Phi(t)}{t} \geq 1,\ t \geq R,$$

donde

$$\Phi(\mid t \mid) \geq \mid t \mid,\ \mid t \mid \geq R. \tag{2}$$

Fixado $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto

Fixado $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto, segue de (1) e (2)

$$\int_{\{u\in K;|u|\geq\lambda R\}} \frac{|u|}{\lambda} dx \quad \leq \quad \int_{\{u\in K;|u|\geq\lambda R\}} \Phi\Big(\frac{|u|}{\lambda}\Big) dx$$

Fixado $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto, segue de (1) e (2)

$$\begin{aligned}\int_{\{u\in K;|u|\geq\lambda R\}} \frac{|u|}{\lambda}dx &\leq \int_{\{u\in K;|u|\geq\lambda R\}} \Phi\Big(\frac{|u|}{\lambda}\Big)dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \Phi\Big(\frac{|u|}{\lambda}\Big)dx < +\infty,\end{aligned}$$

Fixado $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto, segue de (1) e (2)

$$\begin{aligned}\int_{\{u\in K;|u|\geq\lambda R\}} \frac{|\,u\,|}{\lambda}dx &\leq \int_{\{u\in K;|u|\geq\lambda R\}} \Phi\Big(\frac{|\,u\,|}{\lambda}\Big)dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \Phi\Big(\frac{|\,u\,|}{\lambda}\Big)dx < +\infty,\end{aligned}$$

e portanto

$$\int_{\{u\in K;|u|\geq\lambda R\}} |\,u\,|\,dx < +\infty.$$

Fixado $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto, segue de (1) e (2)

$$\begin{aligned}\int_{\{u\in K;|u|\geq\lambda R\}} \frac{|\,u\,|}{\lambda}dx &\leq \int_{\{u\in K;|u|\geq\lambda R\}} \Phi\Big(\frac{|\,u\,|}{\lambda}\Big)dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \Phi\Big(\frac{|\,u\,|}{\lambda}\Big)dx < +\infty,\end{aligned}$$

e portanto

$$\int_{\{u\in K;|u|\geq\lambda R\}} |\,u\,|\,dx < +\infty.$$

Sabendo disto, temos

$$\int_K |\,u\,|\,dx = \int_{\{u\in K;|u|<\lambda R\}} |\,u\,|\,dx + \int_{\{u\in K;|u|\geq\lambda R\}} |\,u\,|\,dx$$

Fixado $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto, segue de (1) e (2)

$$\begin{aligned}\int_{\{u\in K;|u|\geq\lambda R\}} \frac{|\,u\,|}{\lambda}dx &\leq \int_{\{u\in K;|u|\geq\lambda R\}} \Phi\Big(\frac{|\,u\,|}{\lambda}\Big)dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \Phi\Big(\frac{|\,u\,|}{\lambda}\Big)dx < +\infty,\end{aligned}$$

e portanto

$$\int_{\{u\in K;|u|\geq\lambda R\}} |\,u\,|\,dx < +\infty.$$

Sabendo disto, temos

$$\begin{aligned}\int_K |\,u\,|\,dx &= \int_{\{u\in K;|u|<\lambda R\}} |\,u\,|\,dx + \int_{\{u\in K;|u|\geq\lambda R\}} |\,u\,|\,dx \\ &\leq \lambda R\,|\,\{u\in K;|\,u\,|<\lambda R\}\,| + \int_{\{u\in K;|u|\geq\lambda R\}} |\,u\,|\,dx\end{aligned}$$

Fixado $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto, segue de (1) e (2)

$$\begin{aligned}\int_{\{u\in K;|u|\geq\lambda R\}} \frac{|\,u\,|}{\lambda}dx &\leq \int_{\{u\in K;|u|\geq\lambda R\}} \Phi\Big(\frac{|\,u\,|}{\lambda}\Big)dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \Phi\Big(\frac{|\,u\,|}{\lambda}\Big)dx < +\infty,\end{aligned}$$

e portanto

$$\int_{\{u\in K;|u|\geq\lambda R\}} |\,u\,|\,dx < +\infty.$$

Sabendo disto, temos

$$\begin{aligned}\int_K |\,u\,|\,dx &= \int_{\{u\in K;|u|<\lambda R\}} |\,u\,|\,dx + \int_{\{u\in K;|u|\geq\lambda R\}} |\,u\,|\,dx \\ &\leq \lambda R\,|\,\{u\in K;|\,u\,|<\lambda R\}\,| + \int_{\{u\in K;|u|\geq\lambda R\}} |\,u\,|\,dx \\ &\leq \lambda R\,|\,K\,| + \int_{\{u\in K;|u|\geq\lambda R\}} |\,u\,|\,dx < +\infty\end{aligned}$$

Fixado $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto, segue de (1) e (2)

$$\begin{aligned}\int_{\{u\in K;|u|\geq\lambda R\}} \frac{|\,u\,|}{\lambda}dx &\leq \int_{\{u\in K;|u|\geq\lambda R\}} \Phi\Big(\frac{|\,u\,|}{\lambda}\Big)dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \Phi\Big(\frac{|\,u\,|}{\lambda}\Big)dx < +\infty,\end{aligned}$$

e portanto

$$\int_{\{u\in K;|u|\geq\lambda R\}} |\,u\,|\,dx < +\infty.$$

Sabendo disto, temos

$$\begin{aligned}\int_K |\,u\,|\,dx &= \int_{\{u\in K;|u|<\lambda R\}} |\,u\,|\,dx + \int_{\{u\in K;|u|\geq\lambda R\}} |\,u\,|\,dx \\ &\leq \lambda R\,|\,\{u\in K;|\,u\,|<\lambda R\}\,| + \int_{\{u\in K;|u|\geq\lambda R\}} |\,u\,|\,dx \\ &\leq \lambda R\,|\,K\,| + \int_{\{u\in K;|u|\geq\lambda R\}} |\,u\,|\,dx < +\infty,\end{aligned}$$

mostrando que $u \in L^1(K)$. Logo, $L_\Phi(\Omega) \subset L^1(K)$.

2^o **caso:** Se K é um compacto de $\mathbb{R}^N$

2^o caso: Se K é um compacto de $\mathbb{R}^N$ e $j : L_\Phi(\mathbb{R}^N) \to L^1(K)$ é o operador identidade

2^o caso: Se K é um compacto de $\mathbb{R}^N$ e $j : L_\Phi(\mathbb{R}^N) \to L^1(K)$ é o operador identidade, então j é linear e limitado.

2^o caso: Se K é um compacto de $\mathbb{R}^N$ e $j : L_\Phi(\mathbb{R}^N) \to L^1(K)$ é o operador identidade, então j é linear e limitado.

Primeiramente, afirmamos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\, u \,|)dx \leq |\, u \,|_\Phi, \text{ para } |\, u \,|_\Phi \leq 1 \text{ e } u \in L_\Phi(\mathbb{R}^N). \tag{3}$$

2^o caso: Se K é um compacto de $\mathbb{R}^N$ e $j : L_\Phi(\mathbb{R}^N) \to L^1(K)$ é o operador identidade, então j é linear e limitado.

Primeiramente, afirmamos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\, u\,|)dx \leq |\, u\,|_\Phi, \text{ para } |\, u\,|_\Phi \leq 1 \text{ e } u \in L_\Phi(\mathbb{R}^N). \tag{3}$$

De fato, seja $u \in L_\Phi(\mathbb{R}^N)$, $u \neq 0$, tal que $|\, u\,|_\Phi \leq 1$

2^o caso: Se K é um compacto de $\mathbb{R}^N$ e $j : L_\Phi(\mathbb{R}^N) \to L^1(K)$ é o operador identidade, então j é linear e limitado.

Primeiramente, afirmamos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\, u\,|)dx \leq |\, u\,|_\Phi, \text{ para } |\, u\,|_\Phi \leq 1 \text{ e } u \in L_\Phi(\mathbb{R}^N). \tag{3}$$

De fato, seja $u \in L_\Phi(\mathbb{R}^N)$, $u \neq 0$, tal que $|\, u\,|_\Phi \leq 1$. Segue da convexidade de Φ

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\, u\,|)dx = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi\Big(|\, u\,|_\Phi \frac{|\, u\,|}{|\, u\,|_\Phi}\Big)dx$$

2^o caso: Se K é um compacto de $\mathbb{R}^N$ e $j : L_\Phi(\mathbb{R}^N) \to L^1(K)$ é o operador identidade, então j é linear e limitado.

Primeiramente, afirmamos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\, u\,|)dx \leq |\, u\,|_\Phi, \text{ para } |\, u\,|_\Phi \leq 1 \text{ e } u \in L_\Phi(\mathbb{R}^N). \tag{3}$$

De fato, seja $u \in L_\Phi(\mathbb{R}^N)$, $u \neq 0$, tal que $|\, u\,|_\Phi \leq 1$. Segue da convexidade de Φ

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\, u\,|)dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \Phi\Big(|\, u\,|_\Phi \frac{|\, u\,|}{|\, u\,|_\Phi}\Big)dx \\ &\leq |\, u\,|_\Phi \int_{\mathbb{R}^N} \Phi\Big(\frac{|\, u\,|}{|\, u\,|_\Phi}\Big)dx, \end{aligned}$$

2^o caso: Se K é um compacto de $\mathbb{R}^N$ e $j : L_\Phi(\mathbb{R}^N) \to L^1(K)$ é o operador identidade, então j é linear e limitado.

Primeiramente, afirmamos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\, u\,|)dx \leq |\, u\,|_\Phi, \text{ para } |\, u\,|_\Phi \leq 1 \text{ e } u \in L_\Phi(\mathbb{R}^N). \tag{3}$$

De fato, seja $u \in L_\Phi(\mathbb{R}^N)$, $u \neq 0$, tal que $|\, u\,|_\Phi \leq 1$. Segue da convexidade de Φ

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\, u\,|)dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \Phi\Big(|\, u\,|_\Phi \frac{|\, u\,|}{|\, u\,|_\Phi}\Big)dx \\ &\leq |\, u\,|_\Phi \int_{\mathbb{R}^N} \Phi\Big(\frac{|\, u\,|}{|\, u\,|_\Phi}\Big)dx, \end{aligned}$$

donde segue-se pelo Lema 1.7 que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\, u\,|)dx \leq |\, u\,|_\Phi, \; |\, u\,|_\Phi \leq 1 \text{ e } u \in L_\Phi(\mathbb{R}^N).$$

2^o caso: Se K é um compacto de $\mathbb{R}^N$ e $j : L_\Phi(\mathbb{R}^N) \to L^1(K)$ é o operador identidade, então j é linear e limitado.

Primeiramente, afirmamos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\, u\,|)dx \leq |\, u\,|_\Phi, \text{ para } |\, u\,|_\Phi \leq 1 \text{ e } u \in L_\Phi(\mathbb{R}^N). \tag{3}$$

De fato, seja $u \in L_\Phi(\mathbb{R}^N)$, $u \neq 0$, tal que $|\, u\,|_\Phi \leq 1$. Segue da convexidade de Φ

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\, u\,|)dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \Phi\Big(|\, u\,|_\Phi \frac{|\, u\,|}{|\, u\,|_\Phi}\Big)dx \\ &\leq |\, u\,|_\Phi \int_{\mathbb{R}^N} \Phi\Big(\frac{|\, u\,|}{|\, u\,|_\Phi}\Big)dx, \end{aligned}$$

donde segue-se pelo Lema 1.7 que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\, u\,|)dx \leq |\, u\,|_\Phi, \; |\, u\,|_\Phi \leq 1 \text{ e } u \in L_\Phi(\mathbb{R}^N).$$

como queríamos mostrar.

Agora, fixado $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto e dado $u \in L_\Phi(\mathbb{R}^N)$

Agora, fixado $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto e dado $u \in L_\Phi(\mathbb{R}^N)$, temos de (2)

$$\int_K |u| \, dx = \int_{\{u \in K; |u| \leq R\}} |u| \, dx + \int_{\{u \in K; |u| > R\}} |u| \, dx$$

Agora, fixado $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto e dado $u \in L_\Phi(\mathbb{R}^N)$, temos de (2)

$$\begin{aligned}\int_K |\, u \,|\, dx &= \int_{\{u\in K;|u|\leq R\}} |\, u \,|\, dx + \int_{\{u\in K;|u|>R\}} |\, u \,|\, dx \\ &\leq R \,|\, \{u \in K;|\, u \,|\leq R\} \,|\, + \int_{\{u\in K;|u|>R\}} \Phi(|\, u \,|)dx,\end{aligned}$$

Agora, fixado $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto e dado $u \in L_\Phi(\mathbb{R}^N)$, temos de (2)

$$\begin{aligned}
\int_K |\, u \,|\, dx &= \int_{\{u\in K;|u|\leq R\}} |\, u \,|\, dx + \int_{\{u\in K;|u|>R\}} |\, u \,|\, dx \\
&\leq R \mid \{u \in K; \mid u \mid \leq R\} \mid + \int_{\{u\in K;|u|>R\}} \Phi(\mid u \mid) dx, \\
&\leq R \mid K \mid + \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(\mid u \mid) dx,
\end{aligned}$$

Agora, fixado $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto e dado $u \in L_\Phi(\mathbb{R}^N)$, temos de (2)

$$\begin{aligned}
\int_K |\, u \,|\, dx &= \int_{\{u\in K;|u|\leq R\}} |\, u \,|\, dx + \int_{\{u\in K;|u|>R\}} |\, u \,|\, dx \\
&\leq R \,|\, \{u \in K; |\, u \,| \leq R\} \,| + \int_{\{u\in K;|u|>R\}} \Phi(|\, u \,|) dx, \\
&\leq R \,|\, K \,| + \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\, u \,|) dx,
\end{aligned}$$

assim, para $|\, u \,|_\Phi \leq 1$

Agora, fixado $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto e dado $u \in L_\Phi(\mathbb{R}^N)$, temos de (2)

$$\begin{aligned}
\int_K |\, u \,|\, dx &= \int_{\{u\in K;|u|\leq R\}} |\, u \,|\, dx + \int_{\{u\in K;|u|>R\}} |\, u \,|\, dx \\
&\leq R \,|\, \{u \in K; |\, u \,| \leq R\} \,| + \int_{\{u\in K;|u|>R\}} \Phi(|\, u \,|) dx, \\
&\leq R \,|\, K \,| + \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\, u \,|) dx,
\end{aligned}$$

assim, para $|\, u \,|_\Phi \leq 1$, tem-se por (3) que

$$|\, j(u) \,|_{L1(K)} = \int_K |\, u \,|\, dx \leq R \,|\, K \,| + |\, u \,|_\Phi$$

Agora, fixado $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto e dado $u \in L_\Phi(\mathbb{R}^N)$, temos de (2)

$$\begin{aligned}
\int_K |\, u \,|\, dx &= \int_{\{u\in K;|u|\leq R\}} |\, u \,|\, dx + \int_{\{u\in K;|u|>R\}} |\, u \,|\, dx \\
&\leq R \,|\, \{u \in K; |\, u \,| \leq R\} \,| + \int_{\{u\in K;|u|>R\}} \Phi(|\, u \,|) dx, \\
&\leq R \,|\, K \,| + \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\, u \,|) dx,
\end{aligned}$$

assim, para $|\, u \,|_\Phi \leq 1$, tem-se por (3) que

$$\begin{aligned}
|\, j(u) \,|_{L1(K)} &= \int_K |\, u \,|\, dx \leq R \,|\, K \,| + |\, u \,|_\Phi \\
&\leq R \,|\, K \,| + 1 = C,
\end{aligned}$$

mostrando que o operador j é limitado.

Agora, fixado $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto e dado $u \in L_\Phi(\mathbb{R}^N)$, temos de (2)

$$\begin{aligned}
\int_K |\, u \,|\, dx &= \int_{\{u\in K;|u|\leq R\}} |\, u \,|\, dx + \int_{\{u\in K;|u|>R\}} |\, u \,|\, dx \\
&\leq R \,|\, \{u \in K; |\, u \,| \leq R\} \,| + \int_{\{u\in K;|u|>R\}} \Phi(|\, u \,|) dx, \\
&\leq R \,|\, K \,| + \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|\, u \,|) dx,
\end{aligned}$$

assim, para $|\, u \,|_\Phi \leq 1$, tem-se por (3) que

$$\begin{aligned}
|\, j(u) \,|_{L1(K)} &= \int_K |\, u \,|\, dx \leq R \,|\, K \,| + |\, u \,|_\Phi \\
&\leq R \,|\, K \,| + 1 = C,
\end{aligned}$$

mostrando que o operador j é limitado.
Dos 1^o e 2^o casos, podemos concluir a proposição. ■

Observação:

Queremos aqui destacar a afirmação provada ao longo da Proposição 1.2.

Observação:

Queremos aqui destacar a afirmação provada ao longo da Proposição 1.2. Se $u \in L_\Phi(\Omega)$ é tal que $| u |_\Phi \leq 1$

Observação:

Queremos aqui destacar a afirmação provada ao longo da Proposição 1.2. Se $u \in L_\Phi(\Omega)$ é tal que $|u|_\Phi \leq 1$, então

$$\int_\Omega \Phi(|u|) \leq |u|_\Phi .$$

Observação:

Queremos aqui destacar a afirmação provada ao longo da Proposição 1.2. Se $u \in L_\Phi(\Omega)$ é tal que $|\ u\ |_\Phi \leq 1$, então

$$\int_\Omega \Phi(|\ u\ |) \leq |\ u\ |_\Phi\ .$$

Lema 1.9

Seja $u \in L_\Phi(\Omega)$ tal que $|\ u\ |_\Phi \leq k$.

Observação:

Queremos aqui destacar a afirmação provada ao longo da Proposição 1.2. Se $u \in L_\Phi(\Omega)$ é tal que $|u|_\Phi \leq 1$, então

$$\int_\Omega \Phi(|u|) \leq |u|_\Phi .$$

Lema 1.9

Seja $u \in L_\Phi(\Omega)$ tal que $|u|_\Phi \leq k$. Então

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{u}{k}\right) dx \leq 1, \ u \in L_\Phi(\Omega).$$

Demonstração: Basta observar que

$$1 \geq \int_\Omega \Phi\left(\frac{u}{|u|_\Phi}\right) dx$$

Observação:

Queremos aqui destacar a afirmação provada ao longo da Proposição 1.2. Se $u \in L_\Phi(\Omega)$ é tal que $|u|_\Phi \leq 1$, então

$$\int_\Omega \Phi(|u|) \leq |u|_\Phi .$$

Lema 1.9

Seja $u \in L_\Phi(\Omega)$ tal que $|u|_\Phi \leq k$. Então

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{k}\Big)dx \leq 1,\ u \in L_\Phi(\Omega).$$

Demonstração: Basta observar que

$$1 \geq \int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{|u|_\Phi}\Big)dx \geq \int_\Omega \Phi\Big(\frac{|u|}{k}\Big)dx,$$

Observação:

Queremos aqui destacar a afirmação provada ao longo da Proposição 1.2. Se $u \in L_\Phi(\Omega)$ é tal que $|\ u\ |_\Phi \leq 1$, então

$$\int_\Omega \Phi(|\ u\ |) \leq |\ u\ |_\Phi\ .$$

Lema 1.9

Seja $u \in L_\Phi(\Omega)$ tal que $|\ u\ |_\Phi \leq k$. Então

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{k}\Big)dx \leq 1,\ u \in L_\Phi(\Omega).$$

Demonstração: Basta observar que

$$1 \geq \int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{|\ u\ |_\Phi}\Big)dx \geq \int_\Omega \Phi\Big(\frac{|\ u\ |}{k}\Big)dx,$$

para qualquer $u \in L_\Phi(\Omega) \setminus \{0\}$

Observação:

Queremos aqui destacar a afirmação provada ao longo da Proposição 1.2. Se $u \in L_\Phi(\Omega)$ é tal que $|\ u\ |_\Phi \leq 1$, então

$$\int_\Omega \Phi(|\ u\ |) \leq |\ u\ |_\Phi\ .$$

Lema 1.9

Seja $u \in L_\Phi(\Omega)$ tal que $|\ u\ |_\Phi \leq k$. Então

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{k}\Big)dx \leq 1,\ u \in L_\Phi(\Omega).$$

Demonstração: Basta observar que

$$1 \geq \int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{|\ u\ |_\Phi}\Big)dx \geq \int_\Omega \Phi\Big(\frac{|\ u\ |}{k}\Big)dx,$$

para qualquer $u \in L_\Phi(\Omega) \setminus \{0\}$ tal que $|\ u\ |_\Phi \leq k$. ■

Proposição 1.3

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado. Então, $L_\Phi(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Proposição 1.3

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado. Então, $L_\Phi(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Demonstração: Seja $\{u_n\}$ uma sequência de Cauchy em $L_\Phi(\Omega)$.

Proposição 1.3

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado. Então, $L_\Phi(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Demonstração: Seja $\{u_n\}$ uma sequência de Cauchy em $L_\Phi(\Omega)$. Segue da Proposição 1.2, que $\{u_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^1(\Omega)$.

Proposição 1.3

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado. Então, $L_\Phi(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Demonstração: Seja $\{u_n\}$ uma sequência de Cauchy em $L_\Phi(\Omega)$. Segue da Proposição 1.2, que $\{u_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^1(\Omega)$.
Desde que $L^1(\Omega)$ é um espaço de Banach, $\{u_n\}$ converge forte em $L^1(\Omega)$ para uma função u.

Proposição 1.3

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado. Então, $L_\Phi(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Demonstração: Seja $\{u_n\}$ uma sequência de Cauchy em $L_\Phi(\Omega)$. Segue da Proposição 1.2, que $\{u_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^1(\Omega)$.
Desde que $L^1(\Omega)$ é um espaço de Banach, $\{u_n\}$ converge forte em $L^1(\Omega)$ para uma função u.
Sabendo disto, temos

$$u_n(x) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u(x) \text{ q.t.p. } x \in \Omega, \tag{4}$$

a menos de subsequência.

Desde que

$$| u_n - u_m |_\Phi \overset{n,m\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

Desde que

$$| u_n - u_m |_\Phi \overset{n,m\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

dado $\epsilon > 0$

$$| u_n - u_m |_\Phi < \epsilon,$$

para n, m suficientemente grande

Desde que

$$| u_n - u_m |_\Phi \overset{n,m\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

dado $\epsilon > 0$

$$| u_n - u_m |_\Phi < \epsilon,$$

para n, m suficientemente grande, implicando do Lema 1.9

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u_n - u_m}{\epsilon}\Big) dx \leq 1,$$

para n, m suficientemente grande.

Desde que

$$| u_n - u_m |_\Phi \overset{n,m\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

dado $\epsilon > 0$

$$| u_n - u_m |_\Phi < \epsilon,$$

para n, m suficientemente grande, implicando do Lema 1.9

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u_n - u_m}{\epsilon}\Big) dx \leq 1,$$

para n, m suficientemente grande. Para cada $\epsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$

Desde que

$$| u_n - u_m |_\Phi \overset{n,m\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

dado $\epsilon > 0$

$$| u_n - u_m |_\Phi < \epsilon,$$

para n, m suficientemente grande, implicando do Lema 1.9

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u_n - u_m}{\epsilon}\Big) dx \leq 1,$$

para n, m suficientemente grande. Para cada $\epsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\Phi\Big(\frac{u_n - u_m}{\epsilon}\Big) \geq 0, \ m \in \mathbb{N}$$

Desde que

$$| u_n - u_m |_\Phi \overset{n,m\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

dado $\epsilon > 0$

$$| u_n - u_m |_\Phi < \epsilon,$$

para n, m suficientemente grande, implicando do Lema 1.9

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u_n - u_m}{\epsilon}\Big) dx \leq 1,$$

para n, m suficientemente grande. Para cada $\epsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\Phi\Big(\frac{u_n - u_m}{\epsilon}\Big) \geq 0, \ m \in \mathbb{N}$$

e de (4)

$$\Phi\Big(\frac{u_n - u_m}{\epsilon}\Big) \overset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \Phi\Big(\frac{u_n - u}{\epsilon}\Big) \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$ temos pelo Lema de Fatou

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u_n - u}{\epsilon}\Big) dx \leq \liminf_{m \to +\infty} \int_\Omega \Phi\Big(\frac{u_n - u_m}{\epsilon}\Big)$$

Assim, dado $\epsilon > 0$ temos pelo Lema de Fatou

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u_n - u}{\epsilon}\Big) dx \leq \liminf_{m \to +\infty} \int_\Omega \Phi\Big(\frac{u_n - u_m}{\epsilon}\Big) \leq 1,$$

para n suficientemente grande

Assim, dado $\epsilon > 0$ temos pelo Lema de Fatou

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u_n - u}{\epsilon}\Big) dx \leq \liminf_{m\to+\infty} \int_\Omega \Phi\Big(\frac{u_n - u_m}{\epsilon}\Big) \leq 1,$$

para n suficientemente grande, donde

$$\mid u_n - u \mid_\Phi \leq \epsilon,$$

para n suficientemente grande

Assim, dado $\epsilon > 0$ temos pelo Lema de Fatou

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u_n - u}{\epsilon}\Big)dx \leq \liminf_{m\to+\infty} \int_\Omega \Phi\Big(\frac{u_n - u_m}{\epsilon}\Big) \leq 1,$$

para n suficientemente grande, donde

$$\mid u_n - u \mid_\Phi \leq \epsilon,$$

para n suficientemente grande, além disso

$$u_n - u \in L_\Phi(\Omega).$$

Assim, dado $\epsilon > 0$ temos pelo Lema de Fatou

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u_n - u}{\epsilon}\Big)dx \leq \liminf_{m\to+\infty} \int_\Omega \Phi\Big(\frac{u_n - u_m}{\epsilon}\Big) \leq 1,$$

para n suficientemente grande, donde

$$\mid u_n - u \mid_\Phi \leq \epsilon,$$

para n suficientemente grande, além disso

$$u_n - u \in L_\Phi(\Omega).$$

Neste caso $u_n - u = w \in L_\Phi(\Omega)$, logo $u = u_n - w \in L_\Phi(\Omega)$

Assim, dado $\epsilon > 0$ temos pelo Lema de Fatou

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u_n - u}{\epsilon}\Big)dx \leq \liminf_{m\to+\infty} \int_\Omega \Phi\Big(\frac{u_n - u_m}{\epsilon}\Big) \leq 1,$$

para n suficientemente grande, donde

$$\mid u_n - u \mid_\Phi \leq \epsilon,$$

para n suficientemente grande, além disso

$$u_n - u \in L_\Phi(\Omega).$$

Neste caso $u_n - u = w \in L_\Phi(\Omega)$, logo $u = u_n - w \in L_\Phi(\Omega)$. Mostrando assim que

$$u_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u \text{ em } L_\Phi(\Omega),$$

Assim, dado $\epsilon > 0$ temos pelo Lema de Fatou

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u_n - u}{\epsilon}\Big)dx \leq \liminf_{m\to+\infty} \int_\Omega \Phi\Big(\frac{u_n - u_m}{\epsilon}\Big) \leq 1,$$

para n suficientemente grande, donde

$$\mid u_n - u \mid_\Phi \leq \epsilon,$$

para n suficientemente grande, além disso

$$u_n - u \in L_\Phi(\Omega).$$

Neste caso $u_n - u = w \in L_\Phi(\Omega)$, logo $u = u_n - w \in L_\Phi(\Omega)$. Mostrando assim que

$$u_n \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u \text{ em } L_\Phi(\Omega),$$

e consequentemente que $L_\Phi(\Omega)$ é Banach. ■

Proposição 1.4

$L_\Phi(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Banach.

Proposição 1.4

$L_\Phi(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Banach.

Demonstração: Seja $\{u_n\}$ uma sequência de Cauchy em $L_\Phi(\mathbb{R}^N)$

Proposição 1.4

$L_\Phi(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Banach.

Demonstração: Seja $\{u_n\}$ uma sequência de Cauchy em $L_\Phi(\mathbb{R}^N)$, segue da Proposição 1.3 que $\{u_n\}$ é de Cauchy em $L^1(\overline{B}_1(0))$.

Proposição 1.4

$L_\Phi(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Banach.

Demonstração: Seja $\{u_n\}$ uma sequência de Cauchy em $L_\Phi(\mathbb{R}^N)$, segue da Proposição 1.3 que $\{u_n\}$ é de Cauchy em $L^1(\overline{B}_1(0))$. Como $L^1(\overline{B}_1(0))$ é Banach

Proposição 1.4

$L_\Phi(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Banach.

Demonstração: Seja $\{u_n\}$ uma sequência de Cauchy em $L_\Phi(\mathbb{R}^N)$, segue da Proposição 1.3 que $\{u_n\}$ é de Cauchy em $L^1(\overline{B}_1(0))$. Como $L^1(\overline{B}_1(0))$ é Banach, existe uma subsequência $\{u_n^1\}$ de $\{u_n\}$ tal que

$$u_n^1 \to u^1 \quad \text{q.t.p. em } \overline{B}_1(0). \tag{5}$$

Proposição 1.4

$L_\Phi(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Banach.

Demonstração: Seja $\{u_n\}$ uma sequência de Cauchy em $L_\Phi(\mathbb{R}^N)$, segue da Proposição 1.3 que $\{u_n\}$ é de Cauchy em $L^1(\overline{B}_1(0))$. Como $L^1(\overline{B}_1(0))$ é Banach, existe uma subsequência $\{u_n^1\}$ de $\{u_n\}$ tal que

$$u_n^1 \to u^1 \quad \text{q.t.p. em } \overline{B}_1(0). \tag{5}$$

Ora, $\{u_n^1\}$ é de Cauchy em $L^1(\overline{B}_2(0))$

Proposição 1.4

$L_\Phi(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Banach.

Demonstração: Seja $\{u_n\}$ uma sequência de Cauchy em $L_\Phi(\mathbb{R}^N)$, segue da Proposição 1.3 que $\{u_n\}$ é de Cauchy em $L^1(\overline{B}_1(0))$. Como $L^1(\overline{B}_1(0))$ é Banach, existe uma subsequência $\{u_n^1\}$ de $\{u_n\}$ tal que

$$u_n^1 \to u^1 \quad \text{q.t.p. em } \overline{B}_1(0). \tag{5}$$

Ora, $\{u_n^1\}$ é de Cauchy em $L^1(\overline{B}_2(0))$, daí existe uma subsequência $\{u_n^2\}$ de $\{u_n^1\}$ tal que

$$u_n^2 \to u^2 \quad \text{q.t.p. em } \overline{B}_2(0). \tag{6}$$

Proposição 1.4

$L_\Phi(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Banach.

Demonstração: Seja $\{u_n\}$ uma sequência de Cauchy em $L_\Phi(\mathbb{R}^N)$, segue da Proposição 1.3 que $\{u_n\}$ é de Cauchy em $L^1(\overline{B}_1(0))$. Como $L^1(\overline{B}_1(0))$ é Banach, existe uma subsequência $\{u_n^1\}$ de $\{u_n\}$ tal que

$$u_n^1 \to u^1 \quad \text{q.t.p. em } \overline{B}_1(0). \tag{5}$$

Ora, $\{u_n^1\}$ é de Cauchy em $L^1(\overline{B}_2(0))$, daí existe uma subsequência $\{u_n^2\}$ de $\{u_n^1\}$ tal que

$$u_n^2 \to u^2 \quad \text{q.t.p. em } \overline{B}_2(0). \tag{6}$$

De (5) e (6), temos

$$u^1 = u^2 \text{ q.t.p. em } \overline{B}_1(0).$$

Seguindo este argumento, obtemos uma sequência $\{u_n^k\}$ em $L^1(\overline{B}_k(0))$

Seguindo este argumento, obtemos uma sequência $\{u_n^k\}$ em $L^1(\overline{B}_k(0))$ tal que

$$u_n^k \to u^k \quad \text{q.t.p. em } \overline{B}_k(0)$$

Seguindo este argumento, obtemos uma sequência $\{u_n^k\}$ em $L^1(\overline{B}_k(0))$ tal que

$$u_n^k \to u^k \quad \text{q.t.p. em } \overline{B}_k(0)$$

e

$$u^k = u^j \text{ q.t.p. em } \overline{B}_j(0),$$

para todo $j \leq k-1$.

Seguindo este argumento, obtemos uma sequência $\{u_n^k\}$ em $L^1(\overline{B}_k(0))$ tal que

$$u_n^k \to u^k \quad \text{q.t.p. em } \overline{B}_k(0)$$

e

$$u^k = u^j \text{ q.t.p. em } \overline{B}_j(0),$$

para todo $j \leq k-1$.
Desta forma, considerando

- $w_k(x) := u_k^k(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$,
- $u(x) := u^k(x)$, se $x \in \overline{B}_k(0)$,

Seguindo este argumento, obtemos uma sequência $\{u_n^k\}$ em $L^1(\overline{B}_k(0))$ tal que

$$u_n^k \to u^k \quad \text{q.t.p. em } \overline{B}_k(0)$$

e

$$u^k = u^j \text{ q.t.p. em } \overline{B}_j(0),$$

para todo $j \leq k-1$.
Desta forma, considerando

- $w_k(x) := u_k^k(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$,
- $u(x) := u^k(x)$, se $x \in \overline{B}_k(0)$,

temos

$$w_k \to u \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N,$$

Seguindo este argumento, obtemos uma sequência $\{u_n^k\}$ em $L^1(\overline{B}_k(0))$ tal que

$$u_n^k \to u^k \quad \text{q.t.p. em } \overline{B}_k(0)$$

e

$$u^k = u^j \text{ q.t.p. em } \overline{B}_j(0),$$

para todo $j \leq k-1$.
Desta forma, considerando

- $w_k(x) := u_k^k(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$,
- $u(x) := u^k(x)$, se $x \in \overline{B}_k(0)$,

temos

$$w_k \to u \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N,$$

e $\{w_k\}$ subsequência de $\{u_n\}$.

Seguindo este argumento, obtemos uma sequência $\{u_n^k\}$ em $L^1(\overline{B}_k(0))$ tal que

$$u_n^k \to u^k \quad \text{q.t.p. em } \overline{B}_k(0)$$

e

$$u^k = u^j \text{ q.t.p. em } \overline{B}_j(0),$$

para todo $j \leq k-1$.
Desta forma, considerando

- $w_k(x) := u_k^k(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$,
- $u(x) := u^k(x)$, se $x \in \overline{B}_k(0)$,

temos

$$w_k \to u \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N,$$

e $\{w_k\}$ subsequência de $\{u_n\}$.
A partir daí a demonstração segue da mesma forma que foi feita na Proposição 1.3. ■


ORLICZ, W. R., *Theory of Orlicz spaces*, Monographs and textbooks in pure and applied Mathematics, vol. 146, Marcel Dekker, Inc. New York, 1991.