Espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev
Quarta Aula: Espaços de Orlicz Sobolev e Imersões

Prof. Jefferson Abrantes

(Universidade Federal de Campina Grande)

Curso de Verão 2021

DM-UFSCAR

São Carlos-SP

Espaços de Orlicz-Sobolev

Foi observado que os espaços de Orlicz $L_\Phi(\Omega)$ é uma generalização natural dos espaços de Lebesgue $L^p(\Omega)$.

Espaços de Orlicz-Sobolev

Foi observado que os espaços de Orlicz $L_\Phi(\Omega)$ é uma generalização natural dos espaços de Lebesgue $L^p(\Omega)$.

Por este fato, nada mais natural que definir a partir deste espaço, os espaços de Orlicz-Sobolev.

Espaços de Orlicz-Sobolev

Foi observado que os espaços de Orlicz $L_\Phi(\Omega)$ é uma generalização natural dos espaços de Lebesgue $L^p(\Omega)$.

Por este fato, nada mais natural que definir a partir deste espaço, os espaços de Orlicz-Sobolev.

Os espaços de Orlicz-Sobolev $W^{1,\Phi}(\Omega)$ é uma generalização dos espaços de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$.

No que segue, considere Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$.

No que segue, considere Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$.

Definição

Dada uma N-função Φ, definimos como espaço de **Orlicz-Sobolev**, $W^{1,\Phi}(\Omega)$,

No que segue, considere Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$.

Definição

Dada uma N-função Φ, definimos como espaço de **Orlicz-Sobolev**, $W^{1,\Phi}(\Omega)$, o conjunto de funções dado por:

$$W^{1,\Phi}(\Omega) = \left\{ u \in L_\Phi(\Omega) \right.$$

No que segue, considere Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$.

Definição

Dada uma N-função Φ, definimos como espaço de **Orlicz-Sobolev**, $W^{1,\Phi}(\Omega)$, o conjunto de funções dado por:

$$W^{1,\Phi}(\Omega) = \Big\{ u \in L_\Phi(\Omega) \quad / \quad \textit{existem } f_1, ..., f_n \in L_\Phi(\Omega)$$

No que segue, considere Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$.

Definição

Dada uma N-função Φ, definimos como espaço de **Orlicz-Sobolev**, $W^{1,\Phi}(\Omega)$, o conjunto de funções dado por:

$$W^{1,\Phi}(\Omega) = \Big\{ u \in L_\Phi(\Omega) \quad / \quad \text{existem } f_1, ..., f_n \in L_\Phi(\Omega) \text{ tais que } \int_\Omega u \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega f_i \psi dx$$

No que segue, considere Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$.

Definição

Dada uma N-função Φ, definimos como espaço de **Orlicz-Sobolev**, $W^{1,\Phi}(\Omega)$, o conjunto de funções dado por:

$$W^{1,\Phi}(\Omega) = \Big\{ u \in L_\Phi(\Omega) \quad / \quad \text{existem } f_1, ..., f_n \in L_\Phi(\Omega) \text{ tais que}$$

$$\int_\Omega u \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega f_i \psi dx, \ \psi \in C_0^\infty(\Omega)$$

No que segue, considere Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$.

Definição

Dada uma N-função Φ, definimos como espaço de **Orlicz-Sobolev**, $W^{1,\Phi}(\Omega)$, o conjunto de funções dado por:

$$W^{1,\Phi}(\Omega) = \Big\{ u \in L_\Phi(\Omega) \quad / \quad \text{existem } f_1, ..., f_n \in L_\Phi(\Omega) \text{ tais que } \int_\Omega u \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega f_i \psi dx, \ \psi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ e } i \in \{1, ..., n\} \Big\}.$$

Observação

Generalizando, dado $m \in \mathbb{N}$

Observação

Generalizando, dado $m \in \mathbb{N}$

$$W^{m,\Phi}(\Omega) = \left\{ u \in L_\Phi(\Omega) / \text{existem } \{g_\alpha\} \in L_\Phi(\Omega),\ \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N), \right.$$

Observação

Generalizando, dado $m \in \mathbb{N}$

$$W^{m,\Phi}(\Omega) = \Big\{ u \in L_\Phi(\Omega) / \textit{existem } \{g_\alpha\} \in L_\Phi(\Omega),\ \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N),$$
$$\textit{tais que}$$
$$\int_\Omega u \frac{\partial^\alpha \psi}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial^{\alpha_N} x_N} dx = (-1)^{\|\alpha\| s} \int_\Omega g_\alpha \psi dx,$$

Observação

Generalizando, dado $m \in \mathbb{N}$

$$W^{m,\Phi}(\Omega) = \Big\{ u \in L_\Phi(\Omega) / \text{existem } \{g_\alpha\} \in L_\Phi(\Omega),\ \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N),$$
$$\text{tais que}$$
$$\int_\Omega u \frac{\partial^\alpha \psi}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial^{\alpha_N} x_N} dx = (-1)^{\|\alpha\| s} \int_\Omega g_\alpha \psi dx,$$
$$\text{para quaisquer } \psi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ e } \| \alpha \|_s \leq m \Big\}.$$

Observação

Generalizando, dado $m \in \mathbb{N}$

$$W^{m,\Phi}(\Omega) = \Big\{ u \in L_\Phi(\Omega) / \text{existem } \{g_\alpha\} \in L_\Phi(\Omega),\ \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N),$$
$$\text{tais que}$$
$$\int_\Omega u \frac{\partial^\alpha \psi}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial^{\alpha_N} x_N} dx = (-1)^{\|\alpha\| s} \int_\Omega g_\alpha \psi dx,$$
$$\text{para quaisquer } \psi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ e } \| \alpha \|_s \leq m \Big\}.$$

Observação

Se $u \in W^{1,\Phi}(\Omega)$,

Observação

Generalizando, dado $m \in \mathbb{N}$

$$W^{m,\Phi}(\Omega) = \Big\{ u \in L_\Phi(\Omega) / \text{existem } \{g_\alpha\} \in L_\Phi(\Omega),\ \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N),$$
$$\text{tais que}$$
$$\int_\Omega u \frac{\partial^\alpha \psi}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial^{\alpha_N} x_N} dx = (-1)^{\|\alpha\| s} \int_\Omega g_\alpha \psi dx,$$
$$\text{para quaisquer } \psi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ e } \| \alpha \|_s \leq m \Big\}.$$

Observação

Se $u \in W^{1,\Phi}(\Omega)$, então tais f_i's são únicos

Observação

Generalizando, dado $m \in \mathbb{N}$

$$W^{m,\Phi}(\Omega) = \Big\{ u \in L_\Phi(\Omega) / \textit{existem } \{g_\alpha\} \in L_\Phi(\Omega),\ \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N),$$
$$\textit{tais que}$$
$$\int_\Omega u \frac{\partial^\alpha \psi}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial^{\alpha_N} x_N} dx = (-1)^{\|\alpha\| s} \int_\Omega g_\alpha \psi dx,$$
$$\textit{para quaisquer } \psi \in C_0^\infty(\Omega) \textit{ e } \| \alpha \|_s \leq m \Big\}.$$

Observação

Se $u \in W^{1,\Phi}(\Omega)$, então tais f_i's são únicos. Assim denotemos

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = f_i$$

Observação

Generalizando, dado $m \in \mathbb{N}$

$$W^{m,\Phi}(\Omega) = \Big\{ u \in L_\Phi(\Omega) / \textit{existem } \{g_\alpha\} \in L_\Phi(\Omega),\ \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N),$$
$$\textit{tais que}$$
$$\int_\Omega u \frac{\partial^\alpha \psi}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial^{\alpha_N} x_N} dx = (-1)^{\|\alpha\| s} \int_\Omega g_\alpha \psi dx,$$
$$\textit{para quaisquer } \psi \in C_0^\infty(\Omega) \textit{ e } \| \alpha \|_s \leq m \Big\}.$$

Observação

Se $u \in W^{1,\Phi}(\Omega)$, então tais f_i's são únicos. Assim denotemos

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = f_i \textit{ e } \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N} \right).$$

Observação

Sobre $W^{1,\Phi}(\Omega)$, podemos estabelecer a seguinte norma:

$$| u |_{1,\Phi,\Omega} = \max_{1 \leq i \leq N} \left\{ | u |_{\Phi}, \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{\Phi} \right\}.$$

Observação

Sobre $W^{1,\Phi}(\Omega)$, podemos estabelecer a seguinte norma:

$$| u |_{1,\Phi,\Omega} = \max_{1 \leq i \leq N} \left\{ | u |_{\Phi}, \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{\Phi} \right\}.$$

Lema 4.1

A norma $| \, . \, |_{1,\Phi,\Omega}$ é equivalente à seguinte norma

$$| u |_{1,\Phi} = | u |_{\Phi} + | \nabla u |_{\Phi}, \; u \in W^{1,\Phi}(\Omega).$$

Observação

Sobre $W^{1,\Phi}(\Omega)$, podemos estabelecer a seguinte norma:

$$| u |_{1,\Phi,\Omega} = \max_{1 \leq i \leq N} \left\{ | u |_{\Phi}, \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|_{\Phi} \right\}.$$

Lema 4.1

A norma $| \, . \, |_{1,\Phi,\Omega}$ é equivalente à seguinte norma

$$| u |_{1,\Phi} = | u |_{\Phi} + | \nabla u |_{\Phi}, \ u \in W^{1,\Phi}(\Omega).$$

Teorema 4.1

$W^{1,\Phi}(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Teorema 4.2

Supondo Φ uma N-função satisfazendo a condição Δ_2,

Teorema 4.2

Supondo Φ uma N-função satisfazendo a condição Δ_2, temos

1. $W^{1,\Phi}(\Omega)$ é separável;

Teorema 4.2

Supondo Φ uma N-função satisfazendo a condição Δ_2, temos

1. $W^{1,\Phi}(\Omega)$ é separável;
2. Para cada $T \in W^{1,\Phi}(\Omega)^*$

Teorema 4.2

Supondo Φ uma N-função satisfazendo a condição Δ_2, temos

1. $W^{1,\Phi}(\Omega)$ é separável;
2. Para cada $T \in W^{1,\Phi}(\Omega)^*$ existem $\{v_i\}_{i=0}^{N} \subset L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$,

Teorema 4.2

Supondo Φ uma N-função satisfazendo a condição Δ_2, temos

1. $W^{1,\Phi}(\Omega)$ é separável;
2. Para cada $T \in W^{1,\Phi}(\Omega)^*$ existem $\{v_i\}_{i=0}^{N} \subset L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$, tais que

$$T(u) = \int_\Omega u v_0 dx + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v_i dx;$$

Teorema 4.2

Supondo Φ uma N-função satisfazendo a condição Δ_2, temos

1. $W^{1,\Phi}(\Omega)$ é separável;
2. Para cada $T \in W^{1,\Phi}(\Omega)^*$ existem $\{v_i\}_{i=0}^{N} \subset L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$, tais que

$$T(u) = \int_\Omega u v_0 dx + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v_i dx;$$

3. $W^{1,\Phi}(\Omega)$ é reflexivo, se $\tilde{\Phi} \in \Delta_2$ também.

Imersões de Orlicz e Orlicz-Sobolev

Definição

Sejam Φ_1 e Φ_2 duas N-funções

Imersões de Orlicz e Orlicz-Sobolev

Definição

Sejam Φ_1 e Φ_2 duas N-funções. Diz-se que Φ_2 **cresce estritamente mais lento** que Φ_1 e escrevemos $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$,

Imersões de Orlicz e Orlicz-Sobolev

Definição

Sejam Φ_1 e Φ_2 duas N-funções. Diz-se que Φ_2 **cresce estritamente mais lento** que Φ_1 e escrevemos $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$, quando para todo $k > 0$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\Phi_2(kt)}{\Phi_1(t)} = 0.$$

Imersões de Orlicz e Orlicz-Sobolev

Definição

Sejam Φ_1 e Φ_2 duas N-funções. Diz-se que Φ_2 **cresce estritamente mais lento** que Φ_1 e escrevemos $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$, quando para todo $k > 0$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\Phi_2(kt)}{\Phi_1(t)} = 0.$$

Teorema 4.3

Se $\mid \Omega \mid < \infty$ e $\Phi_2 \prec \Phi_1$,

Imersões de Orlicz e Orlicz-Sobolev

Definição

Sejam Φ_1 e Φ_2 duas N-funções. Diz-se que Φ_2 **cresce estritamente mais lento** que Φ_1 e escrevemos $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$, quando para todo $k > 0$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\Phi_2(kt)}{\Phi_1(t)} = 0.$$

Teorema 4.3

Se $\mid \Omega \mid < \infty$ e $\Phi_2 \prec \Phi_1$, então

$$L_{\Phi_1}(\Omega) \overset{\hookrightarrow}{cont} L_{\Phi_2}(\Omega).$$

Imersões de Orlicz e Orlicz-Sobolev

Definição

Sejam Φ_1 e Φ_2 duas N-funções. Diz-se que Φ_2 **cresce estritamente mais lento** que Φ_1 e escrevemos $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$, quando para todo $k > 0$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\Phi_2(kt)}{\Phi_1(t)} = 0.$$

Teorema 4.3

Se $\mid \Omega \mid < \infty$ e $\Phi_2 \prec \Phi_1$, então

$$L_{\Phi_1}(\Omega) \overset{\hookrightarrow}{cont} L_{\Phi_2}(\Omega).$$

Demonstração: Uma vez que $\Phi_2 \prec \Phi_1$,

Imersões de Orlicz e Orlicz-Sobolev

Definição

Sejam Φ_1 e Φ_2 duas N-funções. Diz-se que Φ_2 **cresce estritamente mais lento** que Φ_1 e escrevemos $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$, quando para todo $k > 0$

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\Phi_2(kt)}{\Phi_1(t)} = 0.$$

Teorema 4.3

Se $| \Omega | < \infty$ e $\Phi_2 \prec \Phi_1$, então

$$L_{\Phi_1}(\Omega) \overset{\hookrightarrow}{cont} L_{\Phi_2}(\Omega).$$

Demonstração: Uma vez que $\Phi_2 \prec \Phi_1$, tomemos k e t_0 positivos

Imersões de Orlicz e Orlicz-Sobolev

Definição

Sejam Φ_1 e Φ_2 duas N-funções. Diz-se que Φ_2 **cresce estritamente mais lento** que Φ_1 e escrevemos $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$, quando para todo $k > 0$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\Phi_2(kt)}{\Phi_1(t)} = 0.$$

Teorema 4.3

Se $\mid \Omega \mid < \infty$ e $\Phi_2 \prec \Phi_1$, então

$$L_{\Phi_1}(\Omega) \overset{\hookrightarrow}{cont} L_{\Phi_2}(\Omega).$$

Demonstração: Uma vez que $\Phi_2 \prec \Phi_1$, tomemos k e t_0 positivos tais que

$$\Phi_2(kt) \leq \Phi_1(t), \ t \geq t_0.$$

Imersões de Orlicz e Orlicz-Sobolev

Definição

Sejam Φ_1 e Φ_2 duas N-funções. Diz-se que Φ_2 **cresce estritamente mais lento** que Φ_1 e escrevemos $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$, quando para todo $k > 0$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\Phi_2(kt)}{\Phi_1(t)} = 0.$$

Teorema 4.3

Se $\mid \Omega \mid < \infty$ e $\Phi_2 \prec \Phi_1$, então

$$L_{\Phi_1}(\Omega) \overset{\hookrightarrow}{cont} L_{\Phi_2}(\Omega).$$

Demonstração: Uma vez que $\Phi_2 \prec \Phi_1$, tomemos k e t_0 positivos tais que

$$\Phi_2(kt) \leq \Phi_1(t), \ t \geq t_0.$$

Note que

$$L_{\Phi_1}(\Omega) \subset L_{\Phi_2}(\Omega).$$

Sejam $t_1 = (1/k).\Phi_2^{-1}\left(1/(2 \mid \Omega \mid)\right)$

Sejam $t_1 = (1/k).\Phi_2^{-1}\big(1/(2 \mid \Omega \mid)\big)$ e $c = \max\{1, \Phi_2(kt_0)/\Phi_1(t_1)\}$.

Sejam $t_1 = (1/k).\Phi_2^{-1}\big(1/(2 \mid \Omega \mid)\big)$ e $c = \max\{1, \Phi_2(kt_0)/\Phi_1(t_1)\}$.

Afirmação 1

Para todo $t \geq t_1$,

Sejam $t_1 = (1/k).\Phi_2^{-1}\big(1/(2 \mid \Omega \mid)\big)$ e $c = \max\{1, \Phi_2(kt_0)/\Phi_1(t_1)\}$.

Afirmação 1

Para todo $t \geq t_1$, temos

$$\Phi_2(kt) \leq c\Phi_1(t).$$

Sejam $t_1 = (1/k).\Phi_2^{-1}\big(1/(2 \mid \Omega \mid)\big)$ e $c = \max\{1, \Phi_2(kt_0)/\Phi_1(t_1)\}$.

Afirmação 1

Para todo $t \geq t_1$, temos

$$\Phi_2(kt) \leq c\Phi_1(t).$$

De fato, se $t_1 \geq t_0$ não há o que fazer, já que $c \geq 1$.

Sejam $t_1 = (1/k).\Phi_2^{-1}\big(1/(2 \mid \Omega \mid)\big)$ e $c = \max\{1, \Phi_2(kt_0)/\Phi_1(t_1)\}$.

Afirmação 1

Para todo $t \geq t_1$, temos

$$\Phi_2(kt) \leq c\Phi_1(t).$$

De fato, se $t_1 \geq t_0$ não há o que fazer, já que $c \geq 1$.
Agora, se $t_1 < t_0$, observamos que para $t \geq t_0$ a desigualdade segue imediatamente.

Sejam $t_1 = (1/k).\Phi_2^{-1}\big(1/(2 \mid \Omega \mid)\big)$ e $c = \max\{1, \Phi_2(kt_0)/\Phi_1(t_1)\}$.

Afirmação 1

Para todo $t \geq t_1$, temos

$$\Phi_2(kt) \leq c\Phi_1(t).$$

De fato, se $t_1 \geq t_0$ não há o que fazer, já que $c \geq 1$.
Agora, se $t_1 < t_0$, observamos que para $t \geq t_0$ a desigualdade segue imediatamente.
Assim, tomando $t \in [t_1, t_0]$

Sejam $t_1 = (1/k).\Phi_2^{-1}\big(1/(2 \mid \Omega \mid)\big)$ e $c = \max\{1, \Phi_2(kt_0)/\Phi_1(t_1)\}$.

Afirmação 1

Para todo $t \geq t_1$, temos

$$\Phi_2(kt) \leq c\Phi_1(t).$$

De fato, se $t_1 \geq t_0$ não há o que fazer, já que $c \geq 1$.
Agora, se $t_1 < t_0$, observamos que para $t \geq t_0$ a desigualdade segue imediatamente.
Assim, tomando $t \in [t_1, t_0]$ temos

(1) $$\Phi_1(t_1) \leq \Phi_1(t)$$

Sejam $t_1 = (1/k).\Phi_2^{-1}\big(1/(2 \mid \Omega \mid)\big)$ e $c = \max\{1, \Phi_2(kt_0)/\Phi_1(t_1)\}$.

Afirmação 1

Para todo $t \geq t_1$, temos

$$\Phi_2(kt) \leq c\Phi_1(t).$$

De fato, se $t_1 \geq t_0$ não há o que fazer, já que $c \geq 1$.
Agora, se $t_1 < t_0$, observamos que para $t \geq t_0$ a desigualdade segue imediatamente.
Assim, tomando $t \in [t_1, t_0]$ temos

(1) $$\Phi_1(t_1) \leq \Phi_1(t)$$

e

(2) $$\Phi_2(kt) \leq \Phi_2(kt_0).$$

Segue de (1) e (2) que

$$\Phi_2(kt) \quad \leq \quad \Phi_2(kt_0)$$

Segue de (1) e (2) que

$$\begin{aligned}\Phi_2(kt) &\leq \Phi_2(kt_0) \\ &\leq \Phi_2(kt_0)\frac{\Phi_1(t)}{\Phi_1(t_1)}\end{aligned}$$

Segue de (1) e (2) que

$$\begin{aligned}\Phi_2(kt) &\leq \Phi_2(kt_0)\\ &\leq \Phi_2(kt_0)\frac{\Phi_1(t)}{\Phi_1(t_1)}\\ &\leq c\Phi_1(t),\end{aligned}$$

mostrando a Afirmação 1.

Segue de (1) e (2) que

$$\begin{aligned}\Phi_2(kt) &\leq \Phi_2(kt_0)\\ &\leq \Phi_2(kt_0)\frac{\Phi_1(t)}{\Phi_1(t_1)}\\ &\leq c\Phi_1(t),\end{aligned}$$

mostrando a Afirmação 1.
Dado $u \in L_{\Phi_1}(\Omega)$

Segue de (1) e (2) que

$$\begin{aligned}\Phi_2(kt) &\leq \Phi_2(kt_0)\\ &\leq \Phi_2(kt_0)\frac{\Phi_1(t)}{\Phi_1(t_1)}\\ &\leq c\Phi_1(t),\end{aligned}$$

mostrando a Afirmação 1.
Dado $u \in L_{\Phi_1}(\Omega)$, defina

$$\Omega_u = \left\{x \in \Omega;\ \frac{\mid u(x) \mid}{2c \mid u \mid_{\Phi_1}} < t_1\right\}.$$

Da Afirmação 1, temos

$$\int_{\Omega} \Phi_2\Big(\frac{ku(x)}{2c \mid u \mid_{\Phi_1}}\Big)dx \quad = \quad \int_{\Omega_u} \Phi_2\Big(\frac{k \mid u \mid}{2c \mid u \mid_{\Phi_1}}\Big)dx$$

Da Afirmação 1, temos

$$\int_{\Omega} \Phi_2\Big(\frac{ku(x)}{2c \mid u \mid_{\Phi_1}}\Big)dx = \int_{\Omega_u} \Phi_2\Big(\frac{k \mid u \mid}{2c \mid u \mid_{\Phi_1}}\Big)dx + \int_{\Omega\setminus\Omega_u} \Phi_2\Big(\frac{k \mid u \mid}{2c \mid u \mid_{\Phi_1}}\Big)dx$$

Da Afirmação 1, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \Phi_2\Big(\frac{ku(x)}{2c \mid u \mid_{\Phi_1}}\Big)dx &= \int_{\Omega_u} \Phi_2\Big(\frac{k \mid u \mid}{2c \mid u \mid_{\Phi_1}}\Big)dx \\
&\quad + \int_{\Omega\setminus\Omega_u} \Phi_2\Big(\frac{k \mid u \mid}{2c \mid u \mid_{\Phi_1}}\Big)dx \\
&\leq \Phi_2(kt_1) \mid \Omega_u \mid + c\int_{\Omega\setminus\Omega_u} \Phi_1\Big(\frac{\mid u \mid}{2c \mid u \mid_{\Phi_1}}\Big)dx
\end{aligned}$$

Da Afirmação 1, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \Phi_2\Big(\frac{ku(x)}{2c \mid u \mid_{\Phi_1}}\Big)dx &= \int_{\Omega_u} \Phi_2\Big(\frac{k \mid u \mid}{2c \mid u \mid_{\Phi_1}}\Big)dx \\
&\quad + \int_{\Omega\setminus\Omega_u} \Phi_2\Big(\frac{k \mid u \mid}{2c \mid u \mid_{\Phi_1}}\Big)dx \\
&\leq \Phi_2(kt_1) \mid \Omega_u \mid + c\int_{\Omega\setminus\Omega_u} \Phi_1\Big(\frac{\mid u \mid}{2c \mid u \mid_{\Phi_1}}\Big)dx \\
&= \frac{\mid \Omega_u \mid}{2 \mid \Omega \mid} + c\int_{\Omega\setminus\Omega_u} \Phi_1\Big(\frac{\mid u \mid}{2c \mid u \mid_{\Phi_1}}\Big)dx
\end{aligned}$$

Da Afirmação 1, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \Phi_2\Big(\frac{ku(x)}{2c \mid u \mid_{\Phi_1}}\Big)dx &= \int_{\Omega_u} \Phi_2\Big(\frac{k \mid u \mid}{2c \mid u \mid_{\Phi_1}}\Big)dx \\
&\quad + \int_{\Omega\setminus\Omega_u} \Phi_2\Big(\frac{k \mid u \mid}{2c \mid u \mid_{\Phi_1}}\Big)dx \\
&\leq \Phi_2(kt_1) \mid \Omega_u \mid + c\int_{\Omega\setminus\Omega_u} \Phi_1\Big(\frac{\mid u \mid}{2c \mid u \mid_{\Phi_1}}\Big)dx \\
&= \frac{\mid \Omega_u \mid}{2 \mid \Omega \mid} + c\int_{\Omega\setminus\Omega_u} \Phi_1\Big(\frac{\mid u \mid}{2c \mid u \mid_{\Phi_1}}\Big)dx \\
&\leq \frac{1}{2} + c\int_{\Omega\setminus\Omega_u} \Phi_1\Big(\frac{\mid u \mid}{2c \mid u \mid_{\Phi_1}}\Big)dx,
\end{aligned}$$

segue do fato de $2c \geq 1$

segue do fato de $2c \geq 1$, isto é $\dfrac{1}{2c} \in [0, 1]$,

segue do fato de $2c \geq 1$, isto é $\frac{1}{2c} \in [0,1]$, que

$$\int_\Omega \Phi_2\Big(\frac{k \mid u \mid}{2c \mid u \mid_{\Phi_1}}\Big) \leq \frac{1}{2} + \frac{c}{2c}\int_{\Omega\setminus\Omega_u} \Phi_1\Big(\frac{\mid u \mid}{\mid u \mid_{\Phi_1}}\Big)dx$$

segue do fato de $2c \geq 1$, isto é $\frac{1}{2c} \in [0,1]$, que

$$\int_\Omega \Phi_2\Big(\frac{k \mid u \mid}{2c \mid u \mid_{\Phi_1}}\Big) \leq \frac{1}{2} + \frac{c}{2c}\int_{\Omega\setminus\Omega_u} \Phi_1\Big(\frac{\mid u \mid}{\mid u \mid_{\Phi_1}}\Big)dx \leq 1,$$

segue do fato de $2c \geq 1$, isto é $\frac{1}{2c} \in [0,1]$, que

$$\int_\Omega \Phi_2\Big(\frac{k \mid u \mid}{2c \mid u \mid_{\Phi_1}}\Big) \leq \frac{1}{2} + \frac{c}{2c}\int_{\Omega\setminus\Omega_u} \Phi_1\Big(\frac{\mid u \mid}{\mid u \mid_{\Phi_1}}\Big)dx \leq 1,$$

donde segue que

$$\mid u \mid_{\Phi_2} \leq \frac{2c}{k} \mid u \mid_{\Phi_1},$$

segue do fato de $2c \geq 1$, isto é $\frac{1}{2c} \in [0,1]$, que

$$\int_\Omega \Phi_2\Big(\frac{k \mid u \mid}{2c \mid u \mid_{\Phi_1}}\Big) \leq \frac{1}{2} + \frac{c}{2c}\int_{\Omega\setminus\Omega_u} \Phi_1\Big(\frac{\mid u \mid}{\mid u \mid_{\Phi_1}}\Big)dx \leq 1,$$

donde segue que

$$\mid u \mid_{\Phi_2} \leq \frac{2c}{k} \mid u \mid_{\Phi_1},$$

mostrando assim a continuidade da imersão. ■

Teorema 4.4

Suponha que $|\Omega| < \infty$

Teorema 4.4

Suponha que $|\Omega| < \infty$ e $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$.

Teorema 4.4

Suponha que $|\Omega| < \infty$ e $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$. Se uma sequência (u_n) em $L_{\Phi_1}(\Omega)$ é limitada

Teorema 4.4

Suponha que $|\Omega| < \infty$ e $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$. Se uma sequência (u_n) em $L_{\Phi_1}(\Omega)$ é limitada e convergente em medida

Teorema 4.4

Suponha que $|\Omega| < \infty$ e $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$. Se uma sequência (u_n) em $L_{\Phi_1}(\Omega)$ é limitada e convergente em medida, a mesma é convergente em $L_{\Phi_2}(\Omega)$.

Teorema 4.4

Suponha que $|\Omega| < \infty$ e $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$. Se uma sequência (u_n) em $L_{\Phi_1}(\Omega)$ é limitada e convergente em medida, a mesma é convergente em $L_{\Phi_2}(\Omega)$.

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$

Teorema 4.4

Suponha que $|\ \Omega\ | < \infty$ e $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$. Se uma sequência (u_n) em $L_{\Phi_1}(\Omega)$ é limitada e convergente em medida, a mesma é convergente em $L_{\Phi_2}(\Omega)$.

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, defina

$$v_{jk}(x) = \frac{u_j(x) - u_k(x)}{\epsilon},\ x \in \Omega.$$

Teorema 4.4

Suponha que $|\Omega| < \infty$ e $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$. Se uma sequência (u_n) em $L_{\Phi_1}(\Omega)$ é limitada e convergente em medida, a mesma é convergente em $L_{\Phi_2}(\Omega)$.

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, defina

$$v_{jk}(x) = \frac{u_j(x) - u_k(x)}{\epsilon}, \ x \in \Omega.$$

Por hipótese, (v_{jk}) é uma sequência limitada em $L_{\Phi_1}(\Omega)$.

Teorema 4.4

Suponha que $|\ \Omega\ | < \infty$ e $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$. Se uma sequência (u_n) em $L_{\Phi_1}(\Omega)$ é limitada e convergente em medida, a mesma é convergente em $L_{\Phi_2}(\Omega)$.

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, defina

$$v_{jk}(x) = \frac{u_j(x) - u_k(x)}{\epsilon},\ x \in \Omega.$$

Por hipótese, (v_{jk}) é uma sequência limitada em $L_{\Phi_1}(\Omega)$. Então existe $R > 0$, tal que

(3) $$|\ v_{jk}\ |_{\Phi_1} \leq R,\ j, k \in \mathbb{N}.$$

Desde que $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$

Desde que $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$, tomemos $t_0 > 0$ tal que

$$\Phi_2(t) \leq \Phi_1\left(\frac{1}{4R}t\right),\ t \geq t_0,$$

Desde que $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$, tomemos $t_0 > 0$ tal que

$$\Phi_2(t) \leq \Phi_1\Big(\frac{1}{4R}t\Big),\ t \geq t_0,$$

donde segue que

$$\Phi_2(t) \leq \frac{1}{4}\Phi_1\Big(\frac{t}{R}\Big),\ t \geq t_0. \tag{4}$$

Desde que $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$, tomemos $t_0 > 0$ tal que

$$\Phi_2(t) \leq \Phi_1\Big(\frac{1}{4R}t\Big),\ t \geq t_0,$$

donde segue que

$$\Phi_2(t) \leq \frac{1}{4}\Phi_1\Big(\frac{t}{R}\Big),\ t \geq t_0. \tag{4}$$

Agora, fixemos $\delta := \dfrac{1}{4\Phi_2(t_0)}$

Desde que $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$, tomemos $t_0 > 0$ tal que

$$\Phi_2(t) \leq \Phi_1\left(\frac{1}{4R}t\right),\ t \geq t_0,$$

donde segue que

$$\Phi_2(t) \leq \frac{1}{4}\Phi_1\left(\frac{t}{R}\right),\ t \geq t_0. \tag{4}$$

Agora, fixemos $\delta := \dfrac{1}{4\Phi_2(t_0)}$ e

$$\Omega_{jk} := \left\{x \in \Omega; \mid v_{jk}(x) \mid \geq \Phi_2^{-1}\left(\frac{1}{2 \mid \Omega \mid}\right)\right\}.$$

Desde que $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$, tomemos $t_0 > 0$ tal que

$$\Phi_2(t) \leq \Phi_1\left(\frac{1}{4R}t\right),\ t \geq t_0,$$

donde segue que

$$\Phi_2(t) \leq \frac{1}{4}\Phi_1\left(\frac{t}{R}\right),\ t \geq t_0. \tag{4}$$

Agora, fixemos $\delta := \dfrac{1}{4\Phi_2(t_0)}$ e

$$\Omega_{jk} := \left\{x \in \Omega; \mid v_{jk}(x) \mid \geq \Phi_2^{-1}\left(\frac{1}{2 \mid \Omega \mid}\right)\right\}.$$

Desde que (u_n) é convergente em medida

Desde que $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$, tomemos $t_0 > 0$ tal que

$$\Phi_2(t) \leq \Phi_1\left(\frac{1}{4R}t\right),\ t \geq t_0,$$

donde segue que

$$\Phi_2(t) \leq \frac{1}{4}\Phi_1\left(\frac{t}{R}\right),\ t \geq t_0. \tag{4}$$

Agora, fixemos $\delta := \dfrac{1}{4\Phi_2(t_0)}$ e

$$\Omega_{jk} := \left\{x \in \Omega; \mid v_{jk}(x) \mid \geq \Phi_2^{-1}\left(\frac{1}{2 \mid \Omega \mid}\right)\right\}.$$

Desde que (u_n) é convergente em medida, podemos tomar $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$\mid \Omega_{jk} \mid \leq \delta \ \ \forall j, k \geq N. \tag{5}$$

Considerando agora

$$\Omega'_{jk} := \left\{ x \in \Omega_{jk}; \mid v_{jk}(x) \mid \geq t_0 \right\}$$

Considerando agora

$$\Omega'_{jk} := \left\{ x \in \Omega_{jk}; \mid v_{jk}(x) \mid \geq t_0 \right\}$$

e

$$\Omega''_{jk} := \Omega_{jk} \setminus \Omega'_{jk},$$

Considerando agora

$$\Omega'_{jk} := \left\{ x \in \Omega_{jk}; \mid v_{jk}(x) \mid \geq t_0 \right\}$$

e

$$\Omega''_{jk} := \Omega_{jk} \setminus \Omega'_{jk},$$

temos

$$\int_{\Omega} \Phi_2(\mid v_{jk}(x) \mid) dx \quad = \quad \int_{\Omega \setminus \Omega_{jk}} \Phi_2(\mid v_{jk}(x) \mid) dx + \int_{\Omega'_{jk}} \Phi_2(\mid v_{jk}(x) \mid) dx$$

Considerando agora

$$\Omega'_{jk} := \left\{ x \in \Omega_{jk}; \mid v_{jk}(x) \mid \geq t_0 \right\}$$

e

$$\Omega''_{jk} := \Omega_{jk} \setminus \Omega'_{jk},$$

temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi_2(\mid v_{jk}(x) \mid) dx &= \int_{\Omega \setminus \Omega_{jk}} \Phi_2(\mid v_{jk}(x) \mid) dx + \int_{\Omega'_{jk}} \Phi_2(\mid v_{jk}(x) \mid) dx \\ &\quad + \int_{\Omega''_{jk}} \Phi_2(\mid v_{jk}(x) \mid) dx, \end{aligned}$$

segue de (4)

$$\int_{\Omega} \Phi_2(|\ v_{jk}(x)\ |)dx \quad \leq \quad \int_{\Omega \setminus \Omega_{jk}} \Phi_2(|\ v_{jk}(x)\ |)dx$$

segue de (4)

$$\int_{\Omega} \Phi_2(\mid v_{jk}(x) \mid)dx \quad \leq \quad \int_{\Omega \setminus \Omega_{jk}} \Phi_2(\mid v_{jk}(x) \mid)dx$$
$$+\frac{1}{4}\int_{\Omega'_{jk}} \Phi_1\Big(\frac{\mid v_{jk}(x) \mid}{R}\Big)dx + \Phi_2(t_0) \mid \Omega''_{jk} \mid$$

segue de (4)

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \Phi_2(\mid v_{jk}(x) \mid)dx &\leq \int_{\Omega\setminus\Omega_{jk}} \Phi_2(\mid v_{jk}(x) \mid)dx \\
&\quad + \frac{1}{4}\int_{\Omega'_{jk}} \Phi_1\Big(\frac{\mid v_{jk}(x) \mid}{R}\Big)dx + \Phi_2(t_0) \mid \Omega''_{jk} \mid \\
&\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\int_{\Omega} \Phi_1\Big(\frac{\mid v_{jk} \mid}{R}\Big)dx + \Phi_2(t_0) \mid \Omega''_{jk} \mid,
\end{aligned}$$

segue de (4)

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi_2(\mid v_{jk}(x) \mid)dx &\leq \int_{\Omega\setminus\Omega_{jk}} \Phi_2(\mid v_{jk}(x) \mid)dx \\ &\quad + \frac{1}{4}\int_{\Omega'_{jk}} \Phi_1\Big(\frac{\mid v_{jk}(x) \mid}{R}\Big)dx + \Phi_2(t_0) \mid \Omega''_{jk} \mid \\ &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\int_\Omega \Phi_1\Big(\frac{\mid v_{jk} \mid}{R}\Big)dx + \Phi_2(t_0) \mid \Omega''_{jk} \mid,\end{aligned}$$

implicando de (3) e (5)

$$\int_\Omega \Phi_2(\mid v_{jk} \mid)dx \leq 1,\ j,k \geq N.$$

segue de (4)

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi_2(\mid v_{jk}(x) \mid)dx &\leq \int_{\Omega\setminus\Omega_{jk}} \Phi_2(\mid v_{jk}(x) \mid)dx \\ &\quad + \frac{1}{4}\int_{\Omega'_{jk}} \Phi_1\Big(\frac{\mid v_{jk}(x) \mid}{R}\Big)dx + \Phi_2(t_0) \mid \Omega''_{jk} \mid \\ &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\int_\Omega \Phi_1\Big(\frac{\mid v_{jk} \mid}{R}\Big)dx + \Phi_2(t_0) \mid \Omega''_{jk} \mid,\end{aligned}$$

implicando de (3) e (5)

$$\int_\Omega \Phi_2(\mid v_{jk} \mid)dx \leq 1,\ j,k \geq N.$$

Logo, $\mid v_{jk} \mid_{\Phi_2} \leq 1$,

segue de (4)

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi_2(\mid v_{jk}(x) \mid)dx &\leq \int_{\Omega\setminus\Omega_{jk}} \Phi_2(\mid v_{jk}(x) \mid)dx \\ &\quad + \frac{1}{4}\int_{\Omega'_{jk}} \Phi_1\Big(\frac{\mid v_{jk}(x) \mid}{R}\Big)dx + \Phi_2(t_0) \mid \Omega''_{jk} \mid \\ &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\int_\Omega \Phi_1\Big(\frac{\mid v_{jk} \mid}{R}\Big)dx + \Phi_2(t_0) \mid \Omega''_{jk} \mid,\end{aligned}$$

implicando de (3) e (5)

$$\int_\Omega \Phi_2(\mid v_{jk} \mid)dx \leq 1,\ j,k \geq N.$$

Logo, $\mid v_{jk} \mid_{\Phi_2} \leq 1$, isto é

$$\mid u_j - u_k \mid_{\Phi_2} < \epsilon,$$

segue de (4)

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi_2(\mid v_{jk}(x) \mid)dx &\leq \int_{\Omega\setminus\Omega_{jk}} \Phi_2(\mid v_{jk}(x) \mid)dx \\ &\quad + \frac{1}{4}\int_{\Omega'_{jk}} \Phi_1\Big(\frac{\mid v_{jk}(x) \mid}{R}\Big)dx + \Phi_2(t_0) \mid \Omega''_{jk} \mid \\ &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\int_\Omega \Phi_1\Big(\frac{\mid v_{jk} \mid}{R}\Big)dx + \Phi_2(t_0) \mid \Omega''_{jk} \mid,\end{aligned}$$

implicando de (3) e (5)

$$\int_\Omega \Phi_2(\mid v_{jk} \mid)dx \leq 1,\ j,k \geq N.$$

Logo, $\mid v_{jk} \mid_{\Phi_2} \leq 1$, isto é

$$\mid u_j - u_k \mid_{\Phi_2} < \epsilon,$$

justificando assim que (u_n) é uma sequência de Cauchy em $L_{\Phi_2}(\Omega)$.

segue de (4)

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi_2(\mid v_{jk}(x)\mid)dx &\leq \int_{\Omega\setminus\Omega_{jk}} \Phi_2(\mid v_{jk}(x)\mid)dx \\ &\quad + \frac{1}{4}\int_{\Omega'_{jk}} \Phi_1\Big(\frac{\mid v_{jk}(x)\mid}{R}\Big)dx + \Phi_2(t_0)\mid \Omega''_{jk}\mid \\ &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\int_\Omega \Phi_1\Big(\frac{\mid v_{jk}\mid}{R}\Big)dx + \Phi_2(t_0)\mid \Omega''_{jk}\mid,\end{aligned}$$

implicando de (3) e (5)

$$\int_\Omega \Phi_2(\mid v_{jk}\mid)dx \leq 1,\ j,k \geq N.$$

Logo, $\mid v_{jk}\mid_{\Phi_2} \leq 1$, isto é

$$\mid u_j - u_k\mid_{\Phi_2} < \epsilon,$$

justificando assim que (u_n) é uma sequência de Cauchy em $L_{\Phi_2}(\Omega)$. E portanto, (u_n) é convergente em $L_{\Phi_2}(\Omega)$,

segue de (4)

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi_2(\mid v_{jk}(x)\mid)dx &\leq \int_{\Omega\setminus\Omega_{jk}} \Phi_2(\mid v_{jk}(x)\mid)dx \\ &\quad + \frac{1}{4}\int_{\Omega'_{jk}} \Phi_1\Big(\frac{\mid v_{jk}(x)\mid}{R}\Big)dx + \Phi_2(t_0)\mid \Omega''_{jk}\mid \\ &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\int_\Omega \Phi_1\Big(\frac{\mid v_{jk}\mid}{R}\Big)dx + \Phi_2(t_0)\mid \Omega''_{jk}\mid,\end{aligned}$$

implicando de (3) e (5)

$$\int_\Omega \Phi_2(\mid v_{jk}\mid)dx \leq 1,\ j,k \geq N.$$

Logo, $\mid v_{jk}\mid_{\Phi_2} \leq 1$, isto é

$$\mid u_j - u_k\mid_{\Phi_2} < \epsilon,$$

justificando assim que (u_n) é uma sequência de Cauchy em $L_{\Phi_2}(\Omega)$. E portanto, (u_n) é convergente em $L_{\Phi_2}(\Omega)$, já que $L_{\Phi_2}(\Omega)$ é um espaço de Banach. ■

Corolário

Suponha que $|\Omega| < \infty$ e $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$

Corolário

Suponha que $|\ \Omega\ | < \infty$ e $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$. Se $S \subset L_{\Phi_1}(\Omega)$ é limitado em $L_{\Phi_1}(\Omega)$

Corolário

Suponha que $|\ \Omega\ | < \infty$ e $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$. Se $S \subset L_{\Phi_1}(\Omega)$ é limitado em $L_{\Phi_1}(\Omega)$ e pré-compacto no espaço de Lebesgue das funções integráveis $L^1(\Omega)$

Corolário

Suponha que $|\ \Omega\ | < \infty$ e $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$. Se $S \subset L_{\Phi_1}(\Omega)$ é limitado em $L_{\Phi_1}(\Omega)$ e pré-compacto no espaço de Lebesgue das funções integráveis $L^1(\Omega)$, então S é pré-compacto em $L_{\Phi_2}(\Omega)$.

Corolário

Suponha que $|\ \Omega\ | < \infty$ e $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$. Se $S \subset L_{\Phi_1}(\Omega)$ é limitado em $L_{\Phi_1}(\Omega)$ e pré-compacto no espaço de Lebesgue das funções integráveis $L^1(\Omega)$, então S é pré-compacto em $L_{\Phi_2}(\Omega)$.

Lembre que toda sequência convergente em $L^1(\Omega)$ é convergente em medida.

Corolário

Suponha que $|\Omega| < \infty$ e $\Phi_2 \prec\prec \Phi_1$. Se $S \subset L_{\Phi_1}(\Omega)$ é limitado em $L_{\Phi_1}(\Omega)$ e pré-compacto no espaço de Lebesgue das funções integráveis $L^1(\Omega)$, então S é pré-compacto em $L_{\Phi_2}(\Omega)$.

Lembre que toda sequência convergente em $L^1(\Omega)$ é convergente em medida. Deste fato, este corolário é uma consequência imediata do Teorema 4.4.

O próximo Lema estabelecerá uma nova N-função Φ_*, associada a Φ.

O próximo Lema estabelecerá uma nova N-função Φ_*, associada a Φ.
Verificaremos mais adiante que esta é a N-função crítica para se obter imersões compactas nos espaços de Orlicz-Sobolev.

O próximo Lema estabelecerá uma nova N-função Φ_*, associada a Φ.

Verificaremos mais adiante que esta é a N-função crítica para se obter imersões compactas nos espaços de Orlicz-Sobolev.

Lema 4.2

Seja Φ uma N-função satisfazendo

$$\int_0^1 \frac{\Phi^{-1}(\tau)}{\tau^{1+\frac{1}{N}}} d\tau < +\infty \tag{6}$$

O próximo Lema estabelecerá uma nova N-função Φ_*, associada a Φ.

Verificaremos mais adiante que esta é a N-função crítica para se obter imersões compactas nos espaços de Orlicz-Sobolev.

Lema 4.2

Seja Φ uma N-função satisfazendo

$$\int_0^1 \frac{\Phi^{-1}(\tau)}{\tau^{1+\frac{1}{N}}} d\tau < +\infty \tag{6}$$

e

$$\int_1^\infty \frac{\Phi^{-1}(\tau)}{\tau^{1+\frac{1}{N}}} d\tau = +\infty. \tag{7}$$

O próximo Lema estabelecerá uma nova N-função Φ_*, associada a Φ.
Verificaremos mais adiante que esta é a N-função crítica para se obter imersões compactas nos espaços de Orlicz-Sobolev.

Lema 4.2

Seja Φ uma N-função satisfazendo

$$\int_0^1 \frac{\Phi^{-1}(\tau)}{\tau^{1+\frac{1}{N}}} d\tau < +\infty \tag{6}$$

e

$$\int_1^\infty \frac{\Phi^{-1}(\tau)}{\tau^{1+\frac{1}{N}}} d\tau = +\infty. \tag{7}$$

Então a função $\Phi_*^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ dada por

$$\Phi_*^{-1}(t) = \int_0^t \frac{\Phi^{-1}(\tau)}{\tau^{1+\frac{1}{N}}} d\tau, \tag{8}$$

O próximo Lema estabelecerá uma nova N-função Φ_*, associada a Φ.
Verificaremos mais adiante que esta é a N-função crítica para se obter imersões compactas nos espaços de Orlicz-Sobolev.

Lema 4.2

Seja Φ uma N-função satisfazendo

$$\int_0^1 \frac{\Phi^{-1}(\tau)}{\tau^{1+\frac{1}{N}}} d\tau < +\infty \tag{6}$$

e

$$\int_1^\infty \frac{\Phi^{-1}(\tau)}{\tau^{1+\frac{1}{N}}} d\tau = +\infty. \tag{7}$$

Então a função $\Phi_*^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ dada por

$$\Phi_*^{-1}(t) = \int_0^t \frac{\Phi^{-1}(\tau)}{\tau^{1+\frac{1}{N}}} d\tau, \tag{8}$$

é bijetiva e sua inversa Φ_*, extendida em toda reta, é uma N-função.

Observação

Suponha $\Phi(t) = |t|^p$.

Observação

Suponha $\Phi(t) = |t|^p$. Se Φ satisfaz as hipóteses do lema anterior, então $p \in [1, N)$.

Observação

Suponha $\Phi(t) = |t|^p$. Se Φ satisfaz as hipóteses do lema anterior, então $p \in [1, N)$.

Primeiramente, note que a inversa de Φ em $\mathbb{R}_+$ é dada por

$$\Phi^{-1}(t) = t^{\frac{1}{p}}.$$

Observação

Suponha $\Phi(t) = |t|^p$. Se Φ satisfaz as hipóteses do lema anterior, então $p \in [1, N)$.

Primeiramente, note que a inversa de Φ em $\mathbb{R}_+$ é dada por

$$\Phi^{-1}(t) = t^{\frac{1}{p}}.$$

Deste fato, temos

$$\frac{\Phi^{-1}(t)}{t^{1+\frac{1}{N}}} = \frac{t^{\frac{1}{p}}}{t^{1+\frac{1}{N}}} = t^{\frac{N-p(N+1)}{pN}}.$$

Considerando $\alpha = \frac{N-p(N+1)}{pN}$,

Considerando $\alpha = \frac{N-p(N+1)}{pN}$, note que

$$\int_0^1 t^\alpha dt < +\infty \iff \alpha > -1,$$

Considerando $\alpha = \frac{N-p(N+1)}{pN}$, note que

$$\int_0^1 t^\alpha dt < +\infty \iff \alpha > -1,$$

ou seja

$$\int_0^1 t^\alpha dt < +\infty \iff N > p. \tag{9}$$

Além disso,

$$\int_1^{\infty} t^{\alpha}\, dt = +\infty \iff p \leq N. \tag{10}$$

Além disso,

$$\int_1^{\infty} t^{\alpha}\, dt = +\infty \iff p \leq N. \tag{10}$$

De (9) e (10), podemos concluir que Φ satisfaz as hipóteses do Lema 4.2 se, e só se, $p < N$.

Além disso,

$$\int_1^{\infty} t^{\alpha} dt = +\infty \iff p \leq N. \tag{10}$$

De (9) e (10), podemos concluir que Φ satisfaz as hipóteses do Lema 4.2 se, e só se, $p < N$. Observe agora que, para $p < N$

$$\Phi_*^{-1}(t) = \frac{pN}{N-p} t^{\frac{N-p}{Np}},$$

Além disso,

$$\int_1^{\infty} t^{\alpha} dt = +\infty \iff p \leq N. \tag{10}$$

De (9) e (10), podemos concluir que Φ satisfaz as hipóteses do Lema 4.2 se, e só se, $p < N$. Observe agora que, para $p < N$

$$\Phi_*^{-1}(t) = \frac{pN}{N-p} t^{\frac{N-p}{Np}},$$

e portanto

$$\Phi_*(t) = \frac{N-p}{Np} \mid t \mid^{\frac{Np}{N-p}}, \ t \in \mathbb{R}.$$

E como $p^* = \frac{Np}{N-p}$,

E como $p^* = \frac{Np}{N-p}$, obtemos

$$\Phi_*(t) = \frac{1}{p^*} \mid t \mid^{p^*}, t \in \mathbb{R}.$$

E como $p^* = \frac{Np}{N-p}$, obtemos

$$\Phi_*(t) = \frac{1}{p^*} \mid t \mid^{p^*}, t \in \mathbb{R}.$$

No que segue considere Ω um domínio **adimissível**, isto é um domínio onde ocorram as imersões de Sobolev

$$W^{1,1}(\Omega) \overset{\hookrightarrow}{cont} L^q(\Omega), \ q \in [1, \frac{N}{N-1}].$$

Teorema 4.5

Seja Ω um domínio aberto e admissível.

Teorema 4.5

Seja Ω um domínio aberto e admissível. Suponha que a N-função Φ satisfaz as hipóteses do Lema 4.2.

Teorema 4.5

Seja Ω um domínio aberto e admissível. Suponha que a N-função Φ satisfaz as hipóteses do Lema 4.2. Se Φ_*^{-1} é dada por

$$\Phi_*^{-1}(t) = \int_0^t \frac{\Phi^{-1}(s)}{s^{1+\frac{1}{N}}} ds,$$

Teorema 4.5

Seja Ω um domínio aberto e admissível. Suponha que a N-função Φ satisfaz as hipóteses do Lema 4.2. Se Φ_*^{-1} é dada por

$$\Phi_*^{-1}(t) = \int_0^t \frac{\Phi^{-1}(s)}{s^{1+\frac{1}{N}}} ds,$$

então

$$W^{1,\Phi}(\Omega) \overset{\hookrightarrow}{cont} L_{\Phi_*}(\Omega).$$

Teorema 4.5

Seja Ω um domínio aberto e admissível. Suponha que a N-função Φ satisfaz as hipóteses do Lema 4.2. Se Φ_*^{-1} é dada por

$$\Phi_*^{-1}(t) = \int_0^t \frac{\Phi^{-1}(s)}{s^{1+\frac{1}{N}}} ds,$$

então

$$W^{1,\Phi}(\Omega) \overset{\hookrightarrow}{cont} L_{\Phi_*}(\Omega).$$

Além disso, se $|\Omega| < +\infty$

Teorema 4.5

Seja Ω um domínio aberto e admissível. Suponha que a N-função Φ satisfaz as hipóteses do Lema 4.2. Se Φ_*^{-1} é dada por

$$\Phi_*^{-1}(t) = \int_0^t \frac{\Phi^{-1}(s)}{s^{1+\frac{1}{N}}} ds,$$

então

$$W^{1,\Phi}(\Omega) \overset{\hookrightarrow}{cont} L_{\Phi_*}(\Omega).$$

Além disso, se $|\Omega| < +\infty$ e Ψ é uma N-função crescendo estritamente mais lento que Φ_*,

Teorema 4.5

Seja Ω um domínio aberto e admissível. Suponha que a N-função Φ satisfaz as hipóteses do Lema 4.2. Se Φ_*^{-1} é dada por

$$\Phi_*^{-1}(t) = \int_0^t \frac{\Phi^{-1}(s)}{s^{1+\frac{1}{N}}} ds,$$

então

$$W^{1,\Phi}(\Omega) \overset{\hookrightarrow}{cont} L_{\Phi_*}(\Omega).$$

Além disso, se $|\Omega| < +\infty$ e Ψ é uma N-função crescendo estritamente mais lento que Φ_*, então

$$W^{1,\Phi}(\Omega) \overset{\hookrightarrow}{comp} L_{\Psi}(\Omega).$$

Demonstração: Verificaremos aqui apenas a imersão compacta.

Demonstração: Verificaremos aqui apenas a imersão compacta. Suponha

$$\Psi \prec\prec \Phi_*,$$

Demonstração: Verificaremos aqui apenas a imersão compacta. Suponha

$$\Psi \prec\prec \Phi_*,$$

logo

$$L_{\Phi_*}(\Omega) \overset{\hookrightarrow}{cont} L_{\Psi}(\Omega).$$

Demonstração: Verificaremos aqui apenas a imersão compacta. Suponha

$$\Psi \prec\prec \Phi_*,$$

logo

$$L_{\Phi_*}(\Omega) \overset{\hookrightarrow}{cont} L_{\Psi}(\Omega).$$

Portanto,

$$W^{1,\Phi}(\Omega) \overset{\hookrightarrow}{cont} L_{\Phi_*}(\Omega) \overset{\hookrightarrow}{cont} L_{\Psi}(\Omega),$$

Demonstração: Verificaremos aqui apenas a imersão compacta. Suponha

$$\Psi \prec\prec \Phi_*,$$

logo

$$L_{\Phi_*}(\Omega) \overset{\hookrightarrow}{cont} L_{\Psi}(\Omega).$$

Portanto,

$$W^{1,\Phi}(\Omega) \overset{\hookrightarrow}{cont} L_{\Phi_*}(\Omega) \overset{\hookrightarrow}{cont} L_{\Psi}(\Omega),$$

ou seja,

$$W^{1,\Phi}(\Omega) \overset{\hookrightarrow}{cont} L_{\Psi}(\Omega).$$

Provaremos agora que tal imersão é compacta.

Provaremos agora que tal imersão é compacta. Seja $S \subset W^{1,\Phi}(\Omega)$ um subconjunto limitado.

Provaremos agora que tal imersão é compacta. Seja $S \subset W^{1,\Phi}(\Omega)$ um subconjunto limitado. Note que S também é limitado em $L_{\Phi_*}(\Omega)$,

Provaremos agora que tal imersão é compacta. Seja $S \subset W^{1,\Phi}(\Omega)$ um subconjunto limitado. Note que S também é limitado em $L_{\Phi_*}(\Omega)$, pois

$$W^{1,\Phi}(\Omega) \overset{\hookrightarrow}{cont} L_{\Phi_*}(\Omega).$$

Provaremos agora que tal imersão é compacta. Seja $S \subset W^{1,\Phi}(\Omega)$ um subconjunto limitado. Note que S também é limitado em $L_{\Phi_*}(\Omega)$, pois

$$W^{1,\Phi}(\Omega) \overset{\hookrightarrow}{cont} L_{\Phi_*}(\Omega).$$

Desde que

$$W^{1,\Phi}(\Omega) \overset{\hookrightarrow}{cont} W^{1,1}(\Omega)$$

Provaremos agora que tal imersão é compacta. Seja $S \subset W^{1,\Phi}(\Omega)$ um subconjunto limitado. Note que S também é limitado em $L_{\Phi_*}(\Omega)$, pois

$$W^{1,\Phi}(\Omega) \overset{\hookrightarrow}{cont} L_{\Phi_*}(\Omega).$$

Desde que

$$W^{1,\Phi}(\Omega) \overset{\hookrightarrow}{cont} W^{1,1}(\Omega)$$

e

$$W^{1,1}(\Omega) \overset{\hookrightarrow}{comp} L^1(\Omega),$$

Provaremos agora que tal imersão é compacta. Seja $S \subset W^{1,\Phi}(\Omega)$ um subconjunto limitado. Note que S também é limitado em $L_{\Phi_*}(\Omega)$, pois

$$W^{1,\Phi}(\Omega) \overset{\hookrightarrow}{cont} L_{\Phi_*}(\Omega).$$

Desde que

$$W^{1,\Phi}(\Omega) \overset{\hookrightarrow}{cont} W^{1,1}(\Omega)$$

e

$$W^{1,1}(\Omega) \overset{\hookrightarrow}{comp} L^1(\Omega),$$

temos S pré-compacto em $L^1(\Omega)$.

Sendo assim, observando que

- $\Psi \prec\prec \Phi_*$;

Sendo assim, observando que

- $\Psi \prec\prec \Phi_*$;
- $S \subset L_{\Phi_*}(\Omega)$ é limitado;

Sendo assim, observando que

- $\Psi \prec\prec \Phi_*$;
- $S \subset L_{\Phi_*}(\Omega)$ é limitado;
- $S \subset L^1(\Omega)$ é pré-compacto,

Sendo assim, observando que

- $\Psi \prec\prec \Phi_*$;
- $S \subset L_{\Phi_*}(\Omega)$ é limitado;
- $S \subset L^1(\Omega)$ é pré-compacto,

temos pelo Corolário do Teorema 4.4 que S é pré-compacto em $L_\Psi(\Omega)$,

Sendo assim, observando que

- $\Psi \prec\prec \Phi_*$;
- $S \subset L_{\Phi_*}(\Omega)$ é limitado;
- $S \subset L^1(\Omega)$ é pré-compacto,

temos pelo Corolário do Teorema 4.4 que S é pré-compacto em $L_\Psi(\Omega)$, concluindo a demonstração deste teorema. ■

Sendo assim, observando que

- $\Psi \prec\prec \Phi_*$;
- $S \subset L_{\Phi_*}(\Omega)$ é limitado;
- $S \subset L^1(\Omega)$ é pré-compacto,

temos pelo Corolário do Teorema 4.4 que S é pré-compacto em $L_\Psi(\Omega)$, concluindo a demonstração deste teorema. ■

Observação

Devido a N-função Φ_* ser a função limite para se obter uma imersão compacta

Sendo assim, observando que

- $\Psi \prec\prec \Phi_*$;
- $S \subset L_{\Phi_*}(\Omega)$ é limitado;
- $S \subset L^1(\Omega)$ é pré-compacto,

temos pelo Corolário do Teorema 4.4 que S é pré-compacto em $L_\Psi(\Omega)$, concluindo a demonstração deste teorema. ■

Observação

Devido a N-função Φ_* ser a função limite para se obter uma imersão compacta, diz-se que Φ_* é uma função de crescimento crítico de Φ.

A compactness result for radial functions (a result type Strauss)[1]

Teorema

Assume that $(a_1) - (a_2)$ hold and let B be a N-function verifying

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{B(t)}{A(t)} = 0 \qquad (B_1)$$

and

$$\lim_{t\to +\infty} \frac{B(t)}{A_*(t)} = 0. \qquad (B_2)$$

Then, the embedding $W^1 L_{A,rad}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L_B(\mathbb{R}^N)$ is compact.

[1] Alves, C. O. ; Figueiredo, Giovany M. ; Santos, J. A. . Strauss- and Lions-type results for a class of Orlicz-Sobolev spaces and applications. Topological Methods in Nonlinear Analysis, v. 44, p. 435/2-456, 2014.

A result type Lions for Orlicz-Sobolev space[2]

Teorema

Assume that $(a_1) - (a_2)$ hold and let $(u_n) \subset W^1 L_A(\mathbb{R}^N)$ be a bounded sequence such that there exists $R > 0$ satisfying

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B_R(y)} A(|u_n|) = 0.$$

Then, for any N-function B verifying Δ_2-condition,

$$\lim_{t\to 0} \frac{B(t)}{A(t)} = 0 \text{ and } \lim_{|t|\to+\infty} \frac{B(t)}{A_*(t)} = 0,$$

we have

$$u_n \to 0 \text{ in } L_B(\mathbb{R}^N).$$

[2] Alves, C. O. ; Figueiredo, Giovany M. ; Santos, J. A. . Strauss- and Lions-type results for a class of Orlicz-Sobolev spaces and applications. Topological Methods in Nonlinear Analysis, v. 44, p. 435/2-456, 2014.

O Espaço $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$

Definimos $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ como sendo o completamento do espaço $C_0^{\infty}(\Omega)$ com relação a norma

$$| u |_{W_0^{1,\Phi}(\Omega)} = | \nabla u |_{\Phi} + | u |_{\Phi},$$

O Espaço $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$

Definimos $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ como sendo o completamento do espaço $C_0^\infty(\Omega)$ com relação a norma

$$\mid u \mid_{W_0^{1,\Phi}(\Omega)} = \mid \nabla u \mid_\Phi + \mid u \mid_\Phi,$$

isto é,

$$W_0^{1,\Phi}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{|\cdot|_{1,\Phi}}.$$

Desigualdade de Poincaré no espaço $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$

Sejam Ω um domínio limitado e Φ uma N-função.

Desigualdade de Poincaré no espaço $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$

Sejam Ω um domínio limitado e Φ uma N-função. Para todo $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$

Desigualdade de Poincaré no espaço $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$

Sejam Ω um domínio limitado e Φ uma N-função. Para todo $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, vale que

$$\int_\Omega \Phi(|\, u \,|)dx \leq \int_\Omega \Phi(d \,|\, \nabla u \,|)dx,$$

Desigualdade de Poincaré no espaço $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$

Sejam Ω um domínio limitado e Φ uma N-função. Para todo $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, vale que

$$\int_\Omega \Phi(\mid u \mid)dx \leq \int_\Omega \Phi(d \mid \nabla u \mid)dx,$$

onde d é o diâmetro de Ω.

Desigualdade de Poincaré no espaço $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$

Sejam Ω um domínio limitado e Φ uma N-função. Para todo $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, vale que

$$\int_\Omega \Phi(|\, u \,|)dx \leq \int_\Omega \Phi(d \,|\, \nabla u \,|)dx,$$

onde d é o diâmetro de Ω.

Demonstração: Desde que Ω é limitado,

Desigualdade de Poincaré no espaço $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$

Sejam Ω um domínio limitado e Φ uma N-função. Para todo $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, vale que

$$\int_\Omega \Phi(|\, u \,|)dx \leq \int_\Omega \Phi(d \,|\, \nabla u \,|)dx,$$

onde d é o diâmetro de Ω.

Demonstração: Desde que Ω é limitado, suponha que

$$\Omega \subset (a, b) \times \mathbb{R}^{N-1},$$

Desigualdade de Poincaré no espaço $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$

Sejam Ω um domínio limitado e Φ uma N-função. Para todo $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, vale que

$$\int_\Omega \Phi(|\, u \,|)dx \leq \int_\Omega \Phi(d \,|\, \nabla u \,|)dx,$$

onde d é o diâmetro de Ω.

Demonstração: Desde que Ω é limitado, suponha que

$$\Omega \subset (a, b) \times \mathbb{R}^{N-1},$$

onde a e b são constantes reais.

Desigualdade de Poincaré no espaço $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$

Sejam Ω um domínio limitado e Φ uma N-função. Para todo $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, vale que

$$\int_\Omega \Phi(|\, u \,|)dx \leq \int_\Omega \Phi(d \,|\, \nabla u \,|)dx,$$

onde d é o diâmetro de Ω.

Demonstração: Desde que Ω é limitado, suponha que

$$\Omega \subset (a, b) \times \mathbb{R}^{N-1},$$

onde a e b são constantes reais. Dado $\varphi \in C_0^\infty(a, b)$,

Desigualdade de Poincaré no espaço $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$

Sejam Ω um domínio limitado e Φ uma N-função. Para todo $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, vale que

$$\int_\Omega \Phi(|\, u \,|)dx \leq \int_\Omega \Phi(d \,|\, \nabla u \,|)dx,$$

onde d é o diâmetro de Ω.

Demonstração: Desde que Ω é limitado, suponha que

$$\Omega \subset (a, b) \times \mathbb{R}^{N-1},$$

onde a e b são constantes reais. Dado $\varphi \in C_0^\infty(a, b)$, tem-se pelo Teorema Fundamental do Cálculo que

$$\varphi(t) = \int_a^t \varphi'(s)ds, \quad t \in (a, b),$$

donde

$$| \varphi(t) | \leq \int_a^t | \varphi'(s) | \, ds, \quad t \in (a, b),$$

donde

$$| \varphi(t) | \leq \int_a^t | \varphi'(s) | ds, \quad t \in (a, b),$$

implicando que

$$| \varphi(t) | \leq \int_a^b | \varphi'(s) | ds, \quad t \in (a, b). \tag{11}$$

donde

$$| \varphi(t) | \leq \int_a^t | \varphi'(s) | ds, \quad t \in (a, b),$$

implicando que

$$| \varphi(t) | \leq \int_a^b | \varphi'(s) | ds, \quad t \in (a, b). \tag{11}$$

Considerando $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $x = (t, x')$, com $x' = (x_2, ...x_N)$,

donde

$$| \varphi(t) | \leq \int_a^t | \varphi'(s) | ds, \quad t \in (a, b),$$

implicando que

$$| \varphi(t) | \leq \int_a^b | \varphi'(s) | ds, \quad t \in (a, b). \tag{11}$$

Considerando $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $x = (t, x')$, com $x' = (x_2, ...x_N)$, temos

$$| \psi(x) | \quad = \quad | \psi(t, x') |$$

donde

$$| \varphi(t) | \leq \int_a^t | \varphi'(s) | ds, \quad t \in (a, b),$$

implicando que

$$| \varphi(t) | \leq \int_a^b | \varphi'(s) | ds, \quad t \in (a, b). \tag{11}$$

Considerando $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $x = (t, x')$, com $x' = (x_2, ...x_N)$, temos

$$\begin{aligned} | \psi(x) | &= | \psi(t, x') | \\ &= | \psi_{x'}(t) | \end{aligned}$$

donde

$$| \varphi(t) | \leq \int_a^t | \varphi'(s) | ds, \quad t \in (a,b),$$

implicando que

$$| \varphi(t) | \leq \int_a^b | \varphi'(s) | ds, \quad t \in (a,b). \tag{11}$$

Considerando $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $x = (t, x')$, com $x' = (x_2, ...x_N)$, temos

$$\begin{aligned} | \psi(x) | &= | \psi(t, x') | \\ &= | \psi_{x'}(t) | \\ &\leq \int_a^b | \psi'_{x'}(t) | dt. \end{aligned} \tag{12}$$

Usando (12) e a desigualdade de Jensen

[3] Sejam (X, δ, μ) um espaço de medida com $\mu(X) = 1$, $f : X \to \mathbb{R}$ em $L^1(X, \mu)$, e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa, então

$$\varphi\Big(\int_X f d\mu\Big) \leq \int_X (\varphi \circ f) d\mu.$$

Usando (12) e a desigualdade de Jensen[3]

[3] Sejam (X, δ, μ) um espaço de medida com $\mu(X) = 1$, $f : X \to \mathbb{R}$ em $L^1(X, \mu)$, e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa, então

$$\varphi\Big(\int_X f d\mu\Big) \leq \int_X (\varphi \circ f) d\mu.$$

Usando (12) e a desigualdade de Jensen[3], obtemos:

$$\int_{\Omega} \Phi(\psi(x))dx \quad = \quad \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{a}^{b} \Phi(|\ \psi(t, x^{'})\ |)dtdx^{'}$$

[3] Sejam (X, δ, μ) um espaço de medida com $\mu(X) = 1$, $f : X \to \mathbb{R}$ em $L^1(X, \mu)$, e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa, então

$$\varphi\Big(\int_X f d\mu\Big) \leq \int_X (\varphi \circ f) d\mu.$$

Usando (12) e a desigualdade de Jensen[3], obtemos:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \Phi(\psi(x))dx &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_a^b \Phi(|\ \psi(t, x')\ |)dtdx' \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_a^b \Phi\Big(\int_a^b |\ \psi'_{x'}(s)\ |\ ds\Big)dtdx'\end{aligned}$$

[3] Sejam (X, δ, μ) um espaço de medida com $\mu(X) = 1$, $f : X \to \mathbb{R}$ em $L^1(X, \mu)$, e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa, então

$$\varphi\Big(\int_X f d\mu\Big) \leq \int_X (\varphi \circ f) d\mu.$$

Usando (12) e a desigualdade de Jensen[3], obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \Phi(\psi(x))dx &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_a^b \Phi(|\ \psi(t, x')\ |)dtdx' \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_a^b \Phi\Big(\int_a^b |\ \psi'_{x'}(s)\ |\ ds\Big)dtdx' \\
&= (b-a) \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \Phi\Big(\frac{(b-a)\int_a^b |\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(s, x')|ds}{\int_a^b 1 ds}\Big)dx',
\end{aligned}$$

[3]Sejam (X, δ, μ) um espaço de medida com $\mu(X) = 1$, $f : X \to \mathbb{R}$ em $L^1(X, \mu)$, e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa, então

$$\varphi\Big(\int_X f d\mu\Big) \leq \int_X (\varphi \circ f) d\mu.$$

donde

$$\int_{\Omega} \Phi(\psi(x))dx \quad \leq \quad (b-a)\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \Phi\Big(\frac{\int_a^b (b-a)|\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(s,x')|ds}{\int_a^b ds}\Big)dx'$$

donde

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi(\psi(x))dx &\leq (b-a)\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \Phi\Big(\frac{\int_a^b (b-a)|\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(s,x')|ds}{\int_a^b ds}\Big)dx' \\ &\leq (b-a)\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{1}{b-a}\int_a^b \Phi\Big((b-a)|\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(s,x')|\Big)dsdx\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Phi(\psi(x))dx &\leq (b-a)\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \Phi\Big(\frac{\int_a^b (b-a)|\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(s,x')|ds}{\int_a^b ds}\Big)dx' \\
&\leq (b-a)\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{1}{b-a}\int_a^b \Phi\Big((b-a)|\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(s,x')|\Big)dsdx \\
&= \int_\Omega \Phi\Big((b-a)|\frac{\partial \psi}{\partial x_1}(x)|\Big)dx
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Phi(\psi(x))dx &\leq (b-a)\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \Phi\Big(\frac{\int_a^b (b-a)|\frac{\partial\psi}{\partial x_1}(s,x')|ds}{\int_a^b ds}\Big)dx' \\
&\leq (b-a)\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{1}{b-a}\int_a^b \Phi\Big((b-a)|\frac{\partial\psi}{\partial x_1}(s,x')|\Big)dsdx \\
&= \int_\Omega \Phi\Big((b-a)|\frac{\partial\psi}{\partial x_1}(x)|\Big)dx \\
&\leq \int_\Omega \Phi(d\mid\nabla\psi\mid)dx. \qquad (13)
\end{aligned}$$

Dado $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$,

Dado $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, considere $\{\varphi_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$

Dado $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, considere $\{\varphi_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ satisfazendo

$$\varphi_n \to u \text{ em } W_0^{1,\Phi}(\Omega),$$

Dado $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, considere $\{\varphi_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ satisfazendo

$$\varphi_n \to u \text{ em } W_0^{1,\Phi}(\Omega),$$

ou seja,

$$| \nabla(d\varphi_n - du) |_\Phi \to 0.$$

Dado $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, considere $\{\varphi_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ satisfazendo

$$\varphi_n \to u \text{ em } W_0^{1,\Phi}(\Omega),$$

ou seja,

$$| \nabla(d\varphi_n - du) |_\Phi \to 0.$$

Neste caso

$$\int_\Omega \Phi(| \nabla(d\varphi_n - du) |)dx \to 0,$$

Dado $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, considere $\{\varphi_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ satisfazendo

$$\varphi_n \to u \text{ em } W_0^{1,\Phi}(\Omega),$$

ou seja,

$$| \nabla(d\varphi_n - du) |_\Phi \to 0.$$

Neste caso

$$\int_\Omega \Phi(| \nabla(d\varphi_n - du) |)dx \to 0,$$

donde segue-se de Brézis-Lieb que

$$\int_\Omega \Big(\Phi(| \nabla d\varphi_n |) - \Phi(| \nabla d\varphi_n - d\nabla u |) - \Phi(| \nabla du |)\Big)dx \to 0,$$

Dado $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, considere $\{\varphi_n\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ satisfazendo

$$\varphi_n \to u \text{ em } W_0^{1,\Phi}(\Omega),$$

ou seja,

$$| \nabla(d\varphi_n - du) |_\Phi \to 0.$$

Neste caso

$$\int_\Omega \Phi(| \nabla(d\varphi_n - du) |)dx \to 0,$$

donde segue-se de Brézis-Lieb que

$$\int_\Omega \Big(\Phi(| \nabla d\varphi_n |) - \Phi(| \nabla d\varphi_n - d\nabla u |) - \Phi(| \nabla du |)\Big)dx \to 0,$$

e daí

$$\int_\Omega \Phi(| d\nabla\varphi_n |)dx \to \int_\Omega \Phi(d \mid \nabla u |)dx. \tag{14}$$

De modo análogo, mostra-se que

$$\int_{\Omega} \Phi(|\ \varphi_n\ |)dx \to \int_{\Omega} \Phi(|\ u\ |)dx. \tag{15}$$

De modo análogo, mostra-se que

$$\int_\Omega \Phi(\mid \varphi_n \mid)dx \to \int_\Omega \Phi(\mid u \mid)dx. \tag{15}$$

De (13)

$$\int_\Omega \Phi(\mid \varphi_n \mid)dx \leq \int_\Omega \Phi(d \mid \nabla\varphi_n \mid)dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

De modo análogo, mostra-se que

$$\int_\Omega \Phi(\mid \varphi_n \mid)dx \to \int_\Omega \Phi(\mid u \mid)dx. \tag{15}$$

De (13)

$$\int_\Omega \Phi(\mid \varphi_n \mid)dx \leq \int_\Omega \Phi(d \mid \nabla\varphi_n \mid)dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

passando ao limite de $n \to \infty$,

De modo análogo, mostra-se que

$$\int_\Omega \Phi(|\ \varphi_n\ |)dx \to \int_\Omega \Phi(|\ u\ |)dx. \tag{15}$$

De (13)

$$\int_\Omega \Phi(|\ \varphi_n\ |)dx \leq \int_\Omega \Phi(d\ |\ \nabla\varphi_n\ |)dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

passando ao limite de $n \to \infty$, obtemos de (14) e (15)

$$\int_\Omega \Phi(|\ u\ |)dx \leq \int_\Omega \Phi(d\ |\ \nabla u\ |)dx, \quad u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega). \ \blacksquare$$

Observação

Observando a demonstração da Desigualdade de Poincaré, podemos refinar as hipóteses do mesmo, solicitando apenas que Ω seja limitado em uma direção.

Observação

Observando a demonstração da Desigualdade de Poincaré, podemos refinar as hipóteses do mesmo, solicitando apenas que Ω seja limitado em uma direção.

Corolário

Assuma $\mid \Omega \mid < \infty$.

Observação

Observando a demonstração da Desigualdade de Poincaré, podemos refinar as hipóteses do mesmo, solicitando apenas que Ω seja limitado em uma direção.

Corolário

Assuma $\mid \Omega \mid < \infty$. Então

$$\mid u \mid_{\Phi} \leq C \mid \nabla u \mid_{\Phi},$$

Observação

Observando a demonstração da Desigualdade de Poincaré, podemos refinar as hipóteses do mesmo, solicitando apenas que Ω seja limitado em uma direção.

Corolário

Assuma $|\ \Omega\ | < \infty$. Então

$$|\ u\ |_{\Phi} \leq C\, |\nabla u|_{\Phi}\ ,$$

para todo $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

Observação

Observando a demonstração da Desigualdade de Poincaré, podemos refinar as hipóteses do mesmo, solicitando apenas que Ω seja limitado em uma direção.

Corolário

Assuma $|\ \Omega\ | < \infty$. Então

$$|\ u\ |_{\Phi} \leq C\, |\nabla u|_{\Phi}\ ,$$

para todo $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

Dado $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$,

Observação

Observando a demonstração da Desigualdade de Poincaré, podemos refinar as hipóteses do mesmo, solicitando apenas que Ω seja limitado em uma direção.

Corolário

Assuma $|\ \Omega\ | < \infty$. Então

$$|\ u\ |_{\Phi} \leq C\, |\nabla u|_{\Phi}\ ,$$

para todo $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

Dado $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$,

$$\widetilde{u} := \frac{u}{d\ |\ \nabla u\ |_{\Phi}} \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Portanto,

$$\int_\Omega \Phi(\widetilde{u}(x))dx \leq \int_\Omega \Phi\Big(d\frac{|\nabla u|}{d \mid \nabla u \mid_\Phi}\Big)dx \leq 1,$$

Portanto,

$$\int_\Omega \Phi(\widetilde{u}(x))dx \leq \int_\Omega \Phi\Big(d\frac{|\nabla u|}{d \mid \nabla u \mid_\Phi}\Big)dx \leq 1,$$

ou seja

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{d \mid \nabla u \mid_\Phi}\Big)dx \leq 1.$$

Portanto,

$$\int_\Omega \Phi(\widetilde{u}(x))dx \leq \int_\Omega \Phi\Big(d\frac{|\nabla u|}{d \mid \nabla u \mid_\Phi}\Big)dx \leq 1,$$

ou seja

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u}{d \mid \nabla u \mid_\Phi}\Big)dx \leq 1.$$

Deste fato

$$\mid u \mid_\Phi \leq d\,|\nabla u|_\Phi\,.$$

Segue deste Corolário que a norma $| \nabla u |_{\Phi}$ é equivalente a norma $| u |_{W_0^{1,\Phi}(\Omega)}$

Segue deste Corolário que a norma $| \nabla u |_{\Phi}$ é equivalente a norma $| u |_{W_0^{1,\Phi}(\Omega)}$. Deste fato, $| \nabla u |_{\Phi}$, pode ser definido como a norma para o espaço $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

Segue deste Corolário que a norma $| \nabla u |_{\Phi}$ é equivalente a norma $| u |_{W_0^{1,\Phi}(\Omega)}$. Deste fato, $| \nabla u |_{\Phi}$, pode ser definido como a norma para o espaço $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

Observação

$W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo e separável.

Segue deste Corolário que a norma $| \nabla u |_{\Phi}$ é equivalente a norma $| u |_{W_0^{1,\Phi}(\Omega)}$. Deste fato, $| \nabla u |_{\Phi}$, pode ser definido como a norma para o espaço $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

Observação

$W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo e separável.

Demonstração: De fato, visto que $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é um subespaço fechado de $W^{1,\Phi}(\Omega)$

Segue deste Corolário que a norma $| \nabla u |_{\Phi}$ é equivalente a norma $| u |_{W_0^{1,\Phi}(\Omega)}$. Deste fato, $| \nabla u |_{\Phi}$, pode ser definido como a norma para o espaço $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

Observação

$W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo e separável.

Demonstração: De fato, visto que $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é um subespaço fechado de $W^{1,\Phi}(\Omega)$ e que $W^{1,\Phi}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo

Segue deste Corolário que a norma $| \nabla u |_{\Phi}$ é equivalente a norma $| u |_{W_0^{1,\Phi}(\Omega)}$. Deste fato, $| \nabla u |_{\Phi}$, pode ser definido como a norma para o espaço $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

Observação

$W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo e separável.

Demonstração: De fato, visto que $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é um subespaço fechado de $W^{1,\Phi}(\Omega)$ e que $W^{1,\Phi}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo (considerando que $\Phi \in \Delta_2$ e usando o Teorema 4.2)

Segue deste Corolário que a norma $| \nabla u |_{\Phi}$ é equivalente a norma $| u |_{W_0^{1,\Phi}(\Omega)}$. Deste fato, $| \nabla u |_{\Phi}$, pode ser definido como a norma para o espaço $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

Observação

$W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo e separável.

Demonstração: De fato, visto que $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é um subespaço fechado de $W^{1,\Phi}(\Omega)$ e que $W^{1,\Phi}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo (considerando que $\Phi \in \Delta_2$ e usando o Teorema 4.2), segue que $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo. ■

Devido a Donaldson e Trudinger 1971[4] existe uma constante $\gamma = \gamma(N)$

[4] Donaldson, T. K. and Trudinger, N. S., *Orlicz-Sobolev Spaces and Imbedding Theorems*, Journal of Functional Analysis 8, 52-75 (1971).

Devido a Donaldson e Trudinger 1971[4] existe uma constante $\gamma = \gamma(N)$, tal que

$$| u |_{\Phi_*} \leq \gamma | \nabla u |_{\Phi}, \ u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega),$$

[4] Donaldson, T. K. and Trudinger, N. S., *Orlicz-Sobolev Spaces and Imbedding Theorems*, Journal of Functional Analysis 8, 52-75 (1971).

Devido a Donaldson e Trudinger 1971[4] existe uma constante $\gamma = \gamma(N)$, tal que

$$| u |_{\Phi_*} \leq \gamma | \nabla u |_{\Phi}, \ u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega),$$

ou melhor, o espaço $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ está imerso continuamente em $L_{\Phi_*}(\Omega)$.

[4] Donaldson, T. K. and Trudinger, N. S., *Orlicz-Sobolev Spaces and Imbedding Theorems*, Journal of Functional Analysis 8, 52-75 (1971).