Espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev
Quinta Aula: Operador $\Phi-$Laplaciano.

Prof. Jefferson Abrantes

(Universidade Federal de Campina Grande)

Curso de Verão 2021

DM-UFSCar

São Carlos-SP

Sobre a N-função Φ

Nosso objetivo aqui é mostrar algumas propriedades do **operador Φ-Laplaciano** definido em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, dado por:

$$-\Delta_\Phi u := -div(\phi(|\nabla u|)\nabla u), \quad u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega),$$

Sobre a N-função Φ

Nosso objetivo aqui é mostrar algumas propriedades do **operador Φ-Laplaciano** definido em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, dado por:

$$-\Delta_\Phi u := -div(\phi(|\nabla u|)\nabla u), \quad u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega),$$

onde

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio **limitado** com fronteira regular;

Sobre a N-função Φ

Nosso objetivo aqui é mostrar algumas propriedades do **operador Φ-Laplaciano** definido em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, dado por:

$$-\Delta_\Phi u := -div(\phi(|\nabla u|)\nabla u), \quad u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega),$$

onde

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio **limitado** com fronteira regular;
- $\Phi(t) = \int_0^{|t|} \phi(s)sds$ é uma N-função verificando algumas condições.

No que segue assumiremos sobre $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\phi : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ as seguintes condições:

No que segue assumiremos sobre $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\phi : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ as seguintes condições:

(ϕ_1) $\phi \in C^1(0, \infty)$, $\phi(t) > 0$, $(\phi(t)t)' > 0$ para $t > 0$;

No que segue assumiremos sobre $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\phi : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ as seguintes condições:

- (ϕ_1) $\phi \in C^1(0, \infty)$, $\phi(t) > 0$, $(\phi(t)t)' > 0$ para $t > 0$;
- (ϕ_2) existem $l, m > 1$ tais que

$$l \leq \frac{\Phi'(t)t}{\Phi(t)} \leq m, \quad t > 0;$$

No que segue assumiremos sobre $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\phi : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ as seguintes condições:

(ϕ_1) $\phi \in C^1(0, \infty)$, $\phi(t) > 0$, $(\phi(t)t)' > 0$ para $t > 0$;

(ϕ_2) existem $l, m > 1$ tais que

$$l \leq \frac{\Phi'(t)t}{\Phi(t)} \leq m, \quad t > 0;$$

(ϕ_3) existem $a_0, a_1 > 0$ tais que

$$a_0 \leq \frac{\Phi''(t)t}{\Phi'(t)} \leq a_1, \quad t > 0.$$

Observação

A condição (ϕ_3) implica em (ϕ_2) para $l = a_0 + 1$ e $m = a_1 + 1$.

Observação

A condição (ϕ_3) implica em (ϕ_2) para $l = a_0 + 1$ e $m = a_1 + 1$.

De fato, para $s > 0$, obtemos de (ϕ_3) que

$$a_0 \Phi'(s) \leq \Phi''(s)s$$

Observação

A condição (ϕ_3) implica em (ϕ_2) para $l = a_0 + 1$ e $m = a_1 + 1$.

De fato, para $s > 0$, obtemos de (ϕ_3) que

$$a_0\Phi'(s) \leq \Phi''(s)s \leq a_1\Phi'(s),$$

Observação

A condição (ϕ_3) implica em (ϕ_2) para $l = a_0 + 1$ e $m = a_1 + 1$.

De fato, para $s > 0$, obtemos de (ϕ_3) que

$$a_0\Phi'(s) \leq \Phi''(s)s \leq a_1\Phi'(s),$$

donde

$$(a_0 + 1)\phi(s)s \leq (\phi(s)s)'s + \phi(s)s$$

Observação

A condição (ϕ_3) implica em (ϕ_2) para $l = a_0 + 1$ e $m = a_1 + 1$.

De fato, para $s > 0$, obtemos de (ϕ_3) que

$$a_0\Phi'(s) \leq \Phi''(s)s \leq a_1\Phi'(s),$$

donde

$$(a_0 + 1)\phi(s)s \leq (\phi(s)s)'s + \phi(s)s \leq (a_1 + 1)\phi(s)s,$$

Observação

A condição (ϕ_3) implica em (ϕ_2) para $l = a_0 + 1$ e $m = a_1 + 1$.

De fato, para $s > 0$, obtemos de (ϕ_3) que

$$a_0\Phi'(s) \leq \Phi''(s)s \leq a_1\Phi'(s),$$

donde

$$(a_0 + 1)\phi(s)s \leq (\phi(s)s)'s + \phi(s)s \leq (a_1 + 1)\phi(s)s,$$

ou seja,

$$(a_0 + 1)\phi(s)s \leq ((\phi(s)s)s)'$$

Observação

A condição (ϕ_3) implica em (ϕ_2) para $l = a_0 + 1$ e $m = a_1 + 1$.

De fato, para $s > 0$, obtemos de (ϕ_3) que

$$a_0\Phi'(s) \leq \Phi''(s)s \leq a_1\Phi'(s),$$

donde

$$(a_0 + 1)\phi(s)s \leq (\phi(s)s)'s + \phi(s)s \leq (a_1 + 1)\phi(s)s,$$

ou seja,

$$(a_0 + 1)\phi(s)s \leq ((\phi(s)s)s)' \leq (a_1 + 1)\phi(s)s.$$

Observação

A condição (ϕ_3) implica em (ϕ_2) para $l = a_0 + 1$ e $m = a_1 + 1$.

De fato, para $s > 0$, obtemos de (ϕ_3) que

$$a_0\Phi'(s) \leq \Phi''(s)s \leq a_1\Phi'(s),$$

donde

$$(a_0 + 1)\phi(s)s \leq (\phi(s)s)'s + \phi(s)s \leq (a_1 + 1)\phi(s)s,$$

ou seja,

$$(a_0 + 1)\phi(s)s \leq ((\phi(s)s)s)' \leq (a_1 + 1)\phi(s)s.$$

Integrando de 0 à t, obtemos

$$(a_0 + 1)\Phi(t) \leq (\phi(t)t)t \leq (a_1 + 1)\Phi(t), \quad t \geq 0$$

Observação

A condição (ϕ_3) implica em (ϕ_2) para $l = a_0 + 1$ e $m = a_1 + 1$.

De fato, para $s > 0$, obtemos de (ϕ_3) que

$$a_0\Phi'(s) \leq \Phi''(s)s \leq a_1\Phi'(s),$$

donde

$$(a_0 + 1)\phi(s)s \leq (\phi(s)s)'s + \phi(s)s \leq (a_1 + 1)\phi(s)s,$$

ou seja,

$$(a_0 + 1)\phi(s)s \leq ((\phi(s)s)s)' \leq (a_1 + 1)\phi(s)s.$$

Integrando de 0 à t, obtemos

$$(a_0 + 1)\Phi(t) \leq (\phi(t)t)t \leq (a_1 + 1)\Phi(t), \quad t \geq 0$$

logo,

$$(a_0 + 1)\Phi(t) \leq \Phi'(t)t \leq (a_1 + 1)\Phi(t), \quad t \geq 0$$

Observação

A condição (ϕ_3) implica em (ϕ_2) para $l = a_0 + 1$ e $m = a_1 + 1$.

De fato, para $s > 0$, obtemos de (ϕ_3) que

$$a_0\Phi'(s) \leq \Phi''(s)s \leq a_1\Phi'(s),$$

donde

$$(a_0 + 1)\phi(s)s \leq (\phi(s)s)'s + \phi(s)s \leq (a_1 + 1)\phi(s)s,$$

ou seja,

$$(a_0 + 1)\phi(s)s \leq ((\phi(s)s)s)' \leq (a_1 + 1)\phi(s)s.$$

Integrando de 0 à t, obtemos

$$(a_0 + 1)\Phi(t) \leq (\phi(t)t)t \leq (a_1 + 1)\Phi(t), \quad t \geq 0$$

logo,

$$(a_0 + 1)\Phi(t) \leq \Phi'(t)t \leq (a_1 + 1)\Phi(t), \quad t \geq 0$$

e, portanto,

$$l = a_0 + 1 \leq \frac{\Phi'(t)t}{\Phi(t)} \leq a_1 + 1 = m, \quad t \geq 0.$$

Lema 5.1

Assumindo (ϕ_1) e (ϕ_2), Φ e $\widetilde{\Phi}$ definem N-funções.

Lema 5.1

Assumindo (ϕ_1) e (ϕ_2), Φ e $\widetilde{\Phi}$ definem N-funções.

Abaixo, segue alguns exemplos de N-funções Φ que cumprem $(\phi_1) - (\phi_3)$.

Lema 5.1

Assumindo (ϕ_1) e (ϕ_2), Φ e $\widetilde{\Phi}$ definem N-funções.

Abaixo, segue alguns exemplos de N-funções Φ que cumprem $(\phi_1) - (\phi_3)$.

(i) $\Phi_1(t) = \mid t \mid^{p_0} + \mid t \mid^{p_1}$, $1 < p_0 < p_1 < N$ e $p_1 \in (p_0, p_0^*)$.

Lema 5.1

Assumindo (ϕ_1) e (ϕ_2), Φ e $\widetilde{\Phi}$ definem N-funções.

Abaixo, segue alguns exemplos de N-funções Φ que cumprem $(\phi_1) - (\phi_3)$.

(i) $\Phi_1(t) = \mid t \mid^{p_0} + \mid t \mid^{p_1}$, $1 < p_0 < p_1 < N$ e $p_1 \in (p_0, p_0^*)$.

Deste modo, fazendo $a_1 = p_1 - 1$ e $a_0 = p_0 - 1$,

Lema 5.1

Assumindo (ϕ_1) e (ϕ_2), Φ e $\widetilde{\Phi}$ definem N-funções.

Abaixo, segue alguns exemplos de N-funções Φ que cumprem $(\phi_1) - (\phi_3)$.

(i) $\Phi_1(t) = \mid t \mid^{p_0} + \mid t \mid^{p_1}$, $1 < p_0 < p_1 < N$ e $p_1 \in (p_0, p_0^*)$.

Deste modo, fazendo $a_1 = p_1 - 1$ e $a_0 = p_0 - 1$, temos

$$a_0 \leq \frac{\Phi_1''(t)t}{\Phi_1'(t)} \leq a_1, \text{ para } t > 0.$$

(ii) $\Phi_2(t) = (1 + t^2)^\gamma - 1$, $\gamma \in \left(1, \frac{N}{N-2}\right)$.

(ii) $\Phi_2(t) = (1+t^2)^\gamma - 1$, $\gamma \in \left(1, \frac{N}{N-2}\right)$.

Neste caso $a_0 = 1$ e $a_1 = 2\gamma - 1$, temos

$$1 \leq \frac{\Phi_2''(t)t}{\Phi_2'(t)} \leq 2\gamma - 1, \quad t > 0.$$

(iii) $\Phi_3(t) = t^p \ln(1+t)$, $1 < p_0 < p < N-1$, onde

$$p_0 := \frac{-1+\sqrt{1+4N}}{2}.$$

(iii) $\Phi_3(t) = t^p \ln(1+t)$, $1 < p_0 < p < N-1$, onde

$$p_0 := \frac{-1+\sqrt{1+4N}}{2}.$$

Para $a_0 = p-1$ e $a_1 = p$, tem-se

$$p-1 \leq \frac{\Phi_3''(t)t}{\Phi_3'(t)} \leq p, \quad t > 0.$$

(iv) $\Phi_4(t) = \int_0^{|t|} s^{1-\alpha}(senh^{-1}s)^{\beta} ds,$

(iv) $\Phi_4(t) = \int_0^{|t|} s^{1-\alpha}(senh^{-1}s)^{\beta} ds,\ 0 \leq \alpha < 1$

(iv) $\Phi_4(t) = \int_0^{|t|} s^{1-\alpha}(senh^{-1}s)^{\beta} ds$, $0 \leq \alpha < 1$ e $0 \leq \beta < N - 2 + \alpha$.

(iv) $\Phi_4(t) = \int_0^{|t|} s^{1-\alpha}(senh^{-1}s)^{\beta} ds$, $0 \leq \alpha < 1$ e $0 \leq \beta < N - 2 + \alpha$.

Neste caso

$$1 - \alpha \leq \frac{\Phi_4''(t)t}{\Phi_4'(t)} \leq 1 - \alpha + \beta, \text{ para } t > 0.$$

Lema 5.2

Assumindo (ϕ_1) e (ϕ_2), sejam

$$\xi_0(t) = min\{t^l, t^m\},$$

Lema 5.2

Assumindo (ϕ_1) e (ϕ_2), sejam

$$\xi_0(t) = min\{t^l, t^m\}, \quad \xi_1(t) = max\{t^l, t^m\},$$

Lema 5.2

Assumindo (ϕ_1) e (ϕ_2), sejam

$$\xi_0(t) = min\{t^l, t^m\}, \quad \xi_1(t) = max\{t^l, t^m\},$$

$$\xi_2(t) = min\{t^{\frac{l}{l-1}}, t^{\frac{m}{m-1}}\}$$

Lema 5.2

Assumindo (ϕ_1) e (ϕ_2), sejam

$$\xi_0(t) = min\{t^l, t^m\}, \quad \xi_1(t) = max\{t^l, t^m\},$$

$$\xi_2(t) = min\{t^{\frac{l}{l-1}}, t^{\frac{m}{m-1}}\} \text{ e } \xi_3(t) = max\{t^{\frac{l}{l-1}}, t^{\frac{m}{m-1}}\},$$

definidas sobre $\mathbb{R}_+$.

Lema 5.2

Assumindo (ϕ_1) e (ϕ_2), sejam

$$\xi_0(t) = min\{t^l, t^m\}, \quad \xi_1(t) = max\{t^l, t^m\},$$

$$\xi_2(t) = min\{t^{\frac{l}{l-1}}, t^{\frac{m}{m-1}}\} \text{ e } \xi_3(t) = max\{t^{\frac{l}{l-1}}, t^{\frac{m}{m-1}}\},$$

definidas sobre $\mathbb{R}_+$. Então

(i) $\xi_0(t)\Phi(\rho) \leq \Phi(\rho t) \leq \xi_1(t)\Phi(\rho), \quad \rho, t > 0,$

Lema 5.2

Assumindo (ϕ_1) e (ϕ_2), sejam

$$\xi_0(t) = min\{t^l, t^m\}, \quad \xi_1(t) = max\{t^l, t^m\},$$

$$\xi_2(t) = min\{t^{\frac{l}{l-1}}, t^{\frac{m}{m-1}}\} \text{ e } \xi_3(t) = max\{t^{\frac{l}{l-1}}, t^{\frac{m}{m-1}}\},$$

definidas sobre $\mathbb{R}_+$. Então

(i) $\xi_0(t)\Phi(\rho) \leq \Phi(\rho t) \leq \xi_1(t)\Phi(\rho), \quad \rho, t > 0,$

(ii) $\xi_2(t)\widetilde{\Phi}(\rho) \leq \widetilde{\Phi}(\rho t) \leq \xi_3(t)\widetilde{\Phi}(\rho), \quad \rho, t > 0,$

Lema 5.2

Assumindo (ϕ_1) e (ϕ_2), sejam

$$\xi_0(t) = min\{t^l, t^m\}, \quad \xi_1(t) = max\{t^l, t^m\},$$

$$\xi_2(t) = min\{t^{\frac{l}{l-1}}, t^{\frac{m}{m-1}}\} \text{ e } \xi_3(t) = max\{t^{\frac{l}{l-1}}, t^{\frac{m}{m-1}}\},$$

definidas sobre $\mathbb{R}_+$. Então

(i) $\xi_0(t)\Phi(\rho) \leq \Phi(\rho t) \leq \xi_1(t)\Phi(\rho), \quad \rho, t > 0,$

(ii) $\xi_2(t)\widetilde{\Phi}(\rho) \leq \widetilde{\Phi}(\rho t) \leq \xi_3(t)\widetilde{\Phi}(\rho), \quad \rho, t > 0,$

(iii) $\xi_0(|\ u\ |_\Phi) \leq \int_\Omega \Phi(|\ u\ |)\, dx \leq \xi_1(|\ u\ |_\Phi), \quad u \in L_\Phi(\Omega),$

Lema 5.2

Assumindo (ϕ_1) e (ϕ_2), sejam

$$\xi_0(t) = min\{t^l, t^m\}, \quad \xi_1(t) = max\{t^l, t^m\},$$

$$\xi_2(t) = min\{t^{\frac{l}{l-1}}, t^{\frac{m}{m-1}}\} \text{ e } \xi_3(t) = max\{t^{\frac{l}{l-1}}, t^{\frac{m}{m-1}}\},$$

definidas sobre $\mathbb{R}_+$. Então

(i) $\xi_0(t)\Phi(\rho) \leq \Phi(\rho t) \leq \xi_1(t)\Phi(\rho), \quad \rho, t > 0,$

(ii) $\xi_2(t)\widetilde{\Phi}(\rho) \leq \widetilde{\Phi}(\rho t) \leq \xi_3(t)\widetilde{\Phi}(\rho), \quad \rho, t > 0,$

(iii) $\xi_0(|\ u\ |_\Phi) \leq \int_\Omega \Phi(|\ u\ |)\, dx \leq \xi_1(|\ u\ |_\Phi), \quad u \in L_\Phi(\Omega),$

(iv) $\xi_2(|\ u\ |_{\widetilde{\Phi}}) \leq \int_\Omega \widetilde{\Phi}(|\ u\ |)\, dx \leq \xi_3(|\ u\ |_{\widetilde{\Phi}}), \quad u \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega).$

Lema 5.3

Seja $\varphi(t) = \phi(t)t$, para $t > 0$. Assumindo (ϕ_1) e (ϕ_2),

Lema 5.3

Seja $\varphi(t) = \phi(t)t$, para $t > 0$. Assumindo (ϕ_1) e (ϕ_2), temos

$$\frac{m}{m-1} \leq \frac{t\varphi^{-1}(t)}{\widetilde{\Phi}(t)} \leq \frac{l}{l-1}, \quad t > 0. \tag{1}$$

Lema 5.3

Seja $\varphi(t) = \phi(t)t$, para $t > 0$. Assumindo (ϕ_1) e (ϕ_2), temos

$$\frac{m}{m-1} \leq \frac{t\varphi^{-1}(t)}{\widetilde{\Phi}(t)} \leq \frac{l}{l-1}, \quad t > 0. \tag{1}$$

Demonstração: De (ϕ_2),

$$l \leq \frac{s\varphi(s)}{\Phi(s)} \leq m, \text{ para } s > 0.$$

Lema 5.3

Seja $\varphi(t) = \phi(t)t$, para $t > 0$. Assumindo (ϕ_1) e (ϕ_2), temos

$$\frac{m}{m-1} \leq \frac{t\varphi^{-1}(t)}{\widetilde{\Phi}(t)} \leq \frac{l}{l-1}, \quad t > 0. \tag{1}$$

Demonstração: De (ϕ_2),

$$l \leq \frac{s\varphi(s)}{\Phi(s)} \leq m, \text{ para } s > 0.$$

Fazendo $s = \varphi^{-1}(t)$, obtemos

$$l\Phi(\varphi^{-1}(t)) \leq t\varphi^{-1}(t) \leq m\Phi(\varphi^{-1}(t)), \quad t > 0.$$

Lema 5.3

Seja $\varphi(t) = \phi(t)t$, para $t > 0$. Assumindo (ϕ_1) e (ϕ_2), temos

$$\frac{m}{m-1} \leq \frac{t\varphi^{-1}(t)}{\widetilde{\Phi}(t)} \leq \frac{l}{l-1}, \quad t > 0. \tag{1}$$

Demonstração: De (ϕ_2),

$$l \leq \frac{s\varphi(s)}{\Phi(s)} \leq m, \text{ para } s > 0.$$

Fazendo $s = \varphi^{-1}(t)$, obtemos

$$l\Phi(\varphi^{-1}(t)) \leq t\varphi^{-1}(t) \leq m\Phi(\varphi^{-1}(t)), \quad t > 0.$$

Além disso, da igualdade de Young,

$$l(t\varphi^{-1}(t) - \widetilde{\Phi}(t)) \leq t\varphi^{-1}(t) \leq m(t\varphi^{-1}(t) - \widetilde{\Phi}(t)),$$

Lema 5.3

Seja $\varphi(t) = \phi(t)t$, para $t > 0$. Assumindo (ϕ_1) e (ϕ_2), temos

$$\frac{m}{m-1} \leq \frac{t\varphi^{-1}(t)}{\widetilde{\Phi}(t)} \leq \frac{l}{l-1}, \quad t > 0. \tag{1}$$

Demonstração: De (ϕ_2),

$$l \leq \frac{s\varphi(s)}{\Phi(s)} \leq m, \text{ para } s > 0.$$

Fazendo $s = \varphi^{-1}(t)$, obtemos

$$l\Phi(\varphi^{-1}(t)) \leq t\varphi^{-1}(t) \leq m\Phi(\varphi^{-1}(t)), \quad t > 0.$$

Além disso, da igualdade de Young,

$$l(t\varphi^{-1}(t) - \widetilde{\Phi}(t)) \leq t\varphi^{-1}(t) \leq m(t\varphi^{-1}(t) - \widetilde{\Phi}(t)),$$

e, portanto,

$$\frac{m}{m-1} \leq \frac{t\varphi^{-1}(t)}{\widetilde{\Phi}(t)} \leq \frac{l}{l-1}, \quad t > 0. \blacksquare$$

Observação

Segue do Lema 5.3 que

$$\widetilde{\Phi}(t) = \int_0^{|t|} \varphi^{-1}(s)ds.$$

Observação

Segue do Lema 5.3 que

$$\widetilde{\Phi}(t) = \int_0^{|t|} \varphi^{-1}(s)ds.$$

Deste modo, (1) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{m}{m-1} \leq \frac{t\widetilde{\Phi}'(t)}{\widetilde{\Phi}(t)} \leq \frac{l}{l-1}, \quad t > 0.$$

Lema 5.4

Assumindo (ϕ_1) e (ϕ_2), então Φ e $\widetilde{\Phi}$ cumprem a condição Δ_2.

Lema 5.4

Assumindo (ϕ_1) e (ϕ_2), então Φ e $\widetilde{\Phi}$ cumprem a condição Δ_2.

A partir do Lema 5.4, podemos concluir que

- $E_\Phi(\Omega) = K_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$;

Lema 5.4

Assumindo (ϕ_1) e (ϕ_2), então Φ e $\widetilde{\Phi}$ cumprem a condição Δ_2.

A partir do Lema 5.4, podemos concluir que

- $E_\Phi(\Omega) = K_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$;
- $L_\Phi(\Omega)^* = L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$;

Lema 5.4

Assumindo (ϕ_1) e (ϕ_2), então Φ e $\widetilde{\Phi}$ cumprem a condição Δ_2.

A partir do Lema 5.4, podemos concluir que

- $E_\Phi(\Omega) = K_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$;
- $L_\Phi(\Omega)^* = L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$;
- $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é reflexivo e separável.

O Funcional associado a Φ

Agora, caminharemos com o intuito de mostrar alguns resultados relacionados ao funcional $P : W_0^{1,\Phi}(\Omega) \to \mathbb{R}$,

O Funcional associado a Φ

Agora, caminharemos com o intuito de mostrar alguns resultados relacionados ao funcional $P : W_0^{1,\Phi}(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por:

$$P(u) := \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx, \quad u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

O Funcional associado a Φ

Agora, caminharemos com o intuito de mostrar alguns resultados relacionados ao funcional $P : W_0^{1,\Phi}(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por:

$$P(u) := \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx, \quad u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Proposição 5.1

Se Φ satisfaz (ϕ_1) e (ϕ_2),

O Funcional associado a Φ

Agora, caminharemos com o intuito de mostrar alguns resultados relacionados ao funcional $P : W_0^{1,\Phi}(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por:

$$P(u) := \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx, \quad u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Proposição 5.1

Se Φ satisfaz (ϕ_1) e (ϕ_2), então $P \in C^1(W_0^{1,\Phi}(\Omega), \mathbb{R})$

O Funcional associado a Φ

Agora, caminharemos com o intuito de mostrar alguns resultados relacionados ao funcional $P : W_0^{1,\Phi}(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por:

$$P(u) := \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx, \quad u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Proposição 5.1

Se Φ satisfaz (ϕ_1) e (ϕ_2), então $P \in C^1(W_0^{1,\Phi}(\Omega), \mathbb{R})$ e para cada $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$,

$$\langle P'(u), \varphi \rangle = \int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u \nabla \varphi dx, \quad \varphi \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

O Funcional associado a Φ

Agora, caminharemos com o intuito de mostrar alguns resultados relacionados ao funcional $P : W_0^{1,\Phi}(\Omega) \to \mathbb{R}$, dado por:

$$P(u) := \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx, \quad u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Proposição 5.1

Se Φ satisfaz (ϕ_1) e (ϕ_2), então $P \in C^1(W_0^{1,\Phi}(\Omega), \mathbb{R})$ e para cada $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$,

$$\langle P'(u), \varphi \rangle = \int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u \nabla \varphi dx, \quad \varphi \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Demonstrações: Para demonstrarmos este resultado, verificaremos as seguintes afirmações:

1. P é contínuo em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

1. P é contínuo em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

Considere $u_n \to u$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

1. P é contínuo em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

Considere $u_n \to u$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Segue do Lema 5.2 que

$$\int_\Omega \Phi(|\nabla u_n - \nabla u|)dx \leq \xi_1(|\nabla u_n - \nabla u|_\Phi) \to 0. \tag{2}$$

1. P é contínuo em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

Considere $u_n \to u$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Segue do Lema 5.2 que

$$\int_\Omega \Phi(|\nabla u_n - \nabla u|)dx \leq \xi_1(|\nabla u_n - \nabla u|_\Phi) \to 0. \tag{2}$$

E uma vez que $L_\Phi(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^1(\Omega)$,

1. P é contínuo em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

Considere $u_n \to u$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Segue do Lema 5.2 que

$$\int_\Omega \Phi(|\nabla u_n - \nabla u|)dx \leq \xi_1(|\nabla u_n - \nabla u|_\Phi) \to 0. \tag{2}$$

E uma vez que $L_\Phi(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^1(\Omega)$, existe $C > 0$ tal que

$$|\nabla u_n - \nabla u|_1 \leq C\,|\nabla u_n - \nabla u|_\Phi \to 0,$$

1. P é contínuo em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

Considere $u_n \to u$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Segue do Lema 5.2 que

$$\int_\Omega \Phi(|\nabla u_n - \nabla u|)dx \leq \xi_1(|\nabla u_n - \nabla u|_\Phi) \to 0. \tag{2}$$

E uma vez que $L_\Phi(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^1(\Omega)$, existe $C > 0$ tal que

$$|\nabla u_n - \nabla u|_1 \leq C\,|\nabla u_n - \nabla u|_\Phi \to 0,$$

donde

$$||\nabla u_n| - |\nabla u|| \leq |\nabla u_n - \nabla u| \to 0 \text{ q.t.p. em } \Omega, \tag{3}$$

a menos de subsequência.

De (2), segue que

$$\Phi(|\nabla u_n - \nabla u|) \leq \eta, \text{ q.t.p. em } \Omega, \tag{4}$$

para algum $\eta \in L^1(\Omega)$ a menos de subsequência.

De (2), segue que

$$\Phi(|\nabla u_n - \nabla u|) \leq \eta, \text{ q.t.p. em } \Omega, \tag{4}$$

para algum $\eta \in L^1(\Omega)$ a menos de subsequência.
Além disso, utilizando o fato de Φ ser convexa, crescente em $\mathbb{R}_+$ e cumprir Δ_2,

De (2), segue que

$$\Phi(|\nabla u_n - \nabla u|) \leq \eta, \text{ q.t.p. em } \Omega, \tag{4}$$

para algum $\eta \in L^1(\Omega)$ a menos de subsequência.
Além disso, utilizando o fato de Φ ser convexa, crescente em $\mathbb{R}_+$ e cumprir Δ_2,

$$|\Phi(|\nabla u_n|) - \Phi(|\nabla u|)| \leq \Phi(|\nabla u_n|) + \Phi(|\nabla u|)$$

De (2), segue que

$$\Phi(|\nabla u_n - \nabla u|) \leq \eta, \text{ q.t.p. em } \Omega, \tag{4}$$

para algum $\eta \in L^1(\Omega)$ a menos de subsequência.
Além disso, utilizando o fato de Φ ser convexa, crescente em $\mathbb{R}_+$ e cumprir Δ_2,

$$\begin{aligned} |\Phi(|\nabla u_n|) - \Phi(|\nabla u|)| &\leq \Phi(|\nabla u_n|) + \Phi(|\nabla u|) \\ &\leq \Phi(|\nabla u_n - \nabla u| + |\nabla u|) + \Phi(|\nabla u|) \end{aligned}$$

De (2), segue que

$$\Phi(|\nabla u_n - \nabla u|) \leq \eta, \text{ q.t.p. em } \Omega, \tag{4}$$

para algum $\eta \in L^1(\Omega)$ a menos de subsequência.
Além disso, utilizando o fato de Φ ser convexa, crescente em $\mathbb{R}_+$ e cumprir Δ_2,

$$\begin{aligned} |\Phi(|\nabla u_n|) - \Phi(|\nabla u|)| &\leq \Phi(|\nabla u_n|) + \Phi(|\nabla u|) \\ &\leq \Phi(|\nabla u_n - \nabla u| + |\nabla u|) + \Phi(|\nabla u|) \\ &\leq K[\Phi(|\nabla u_n - \nabla u|) \end{aligned}$$

De (2), segue que

$$\Phi(|\nabla u_n - \nabla u|) \leq \eta, \text{ q.t.p. em } \Omega, \tag{4}$$

para algum $\eta \in L^1(\Omega)$ a menos de subsequência.
Além disso, utilizando o fato de Φ ser convexa, crescente em $\mathbb{R}_+$ e cumprir Δ_2,

$$\begin{aligned} |\Phi(|\nabla u_n|) - \Phi(|\nabla u|)| &\leq \Phi(|\nabla u_n|) + \Phi(|\nabla u|) \\ &\leq \Phi(|\nabla u_n - \nabla u| + |\nabla u|) + \Phi(|\nabla u|) \\ &\leq K[\Phi(|\nabla u_n - \nabla u|) \\ &\quad + \Phi(|\nabla u|)] + \Phi(|\nabla u|) \end{aligned}$$

De (2), segue que

$$\Phi(|\nabla u_n - \nabla u|) \leq \eta, \text{ q.t.p. em } \Omega, \tag{4}$$

para algum $\eta \in L^1(\Omega)$ a menos de subsequência.
Além disso, utilizando o fato de Φ ser convexa, crescente em $\mathbb{R}_+$ e cumprir Δ_2,

$$\begin{aligned}
|\Phi(|\nabla u_n|) - \Phi(|\nabla u|)| &\leq \Phi(|\nabla u_n|) + \Phi(|\nabla u|) \\
&\leq \Phi(|\nabla u_n - \nabla u| + |\nabla u|) + \Phi(|\nabla u|) \\
&\leq K[\Phi(|\nabla u_n - \nabla u|) \\
&\quad +\Phi(|\nabla u|)] + \Phi(|\nabla u|) \\
&\leq K(\Phi(|\nabla u_n - \nabla u|) + \Phi(|\nabla u|)),
\end{aligned}$$

onde $K > 0$.

De (2), segue que

$$\Phi(|\nabla u_n - \nabla u|) \leq \eta, \text{ q.t.p. em } \Omega, \tag{4}$$

para algum $\eta \in L^1(\Omega)$ a menos de subsequência.
Além disso, utilizando o fato de Φ ser convexa, crescente em $\mathbb{R}_+$ e cumprir Δ_2,

$$\begin{aligned} |\Phi(|\nabla u_n|) - \Phi(|\nabla u|)| &\leq \Phi(|\nabla u_n|) + \Phi(|\nabla u|) \\ &\leq \Phi(|\nabla u_n - \nabla u| + |\nabla u|) + \Phi(|\nabla u|) \\ &\leq K[\Phi(|\nabla u_n - \nabla u|) \\ &\quad +\Phi(|\nabla u|)] + \Phi(|\nabla u|) \\ &\leq K(\Phi(|\nabla u_n - \nabla u|) + \Phi(|\nabla u|)), \end{aligned}$$

onde $K > 0$. Donde segue-se, de (4), que

$$|\Phi(|\nabla u_n|) - \Phi(|u|)| \leq K\eta + K\Phi(|\nabla u|) \in L^1(\Omega). \tag{5}$$

De (3) e (5), temos pelo Teorema da Conv. Dominada de Lebesgue

$$\int_{\Omega} \mid \Phi(\mid \nabla u_n \mid) - \Phi(\mid \nabla u \mid) \mid dx \to 0,$$

De (3) e (5), temos pelo Teorema da Conv. Dominada de Lebesgue

$$\int_\Omega \mid \Phi(\mid \nabla u_n \mid) - \Phi(\mid \nabla u \mid) \mid dx \to 0,$$

donde

$$\int_\Omega \Phi(\mid \nabla u_n \mid)dx \to \int_\Omega \Phi(\mid \nabla u \mid)dx,$$

a menos de subsequência.

De (3) e (5), temos pelo Teorema da Conv. Dominada de Lebesgue

$$\int_\Omega \mid \Phi(\mid \nabla u_n \mid) - \Phi(\mid \nabla u \mid) \mid dx \to 0,$$

donde

$$\int_\Omega \Phi(\mid \nabla u_n \mid)dx \to \int_\Omega \Phi(\mid \nabla u \mid)dx,$$

a menos de subsequência. Repetindo esse argumento, concluímos que toda subsequência de $\{u_{n_k}\}$ de $\{u_n\}$ admite subsequência $\{u_{n_{k_j}}\}$ tal que

$$\int_\Omega \Phi(\mid \nabla u_{n_{k_j}} \mid)dx \to \int_\Omega \Phi(\mid \nabla u \mid)dx,$$

De (3) e (5), temos pelo Teorema da Conv. Dominada de Lebesgue

$$\int_\Omega \mid \Phi(\mid \nabla u_n \mid) - \Phi(\mid \nabla u \mid) \mid dx \to 0,$$

donde

$$\int_\Omega \Phi(\mid \nabla u_n \mid)dx \to \int_\Omega \Phi(\mid \nabla u \mid)dx,$$

a menos de subsequência. Repetindo esse argumento, concluímos que toda subsequência de $\{u_{n_k}\}$ de $\{u_n\}$ admite subsequência $\{u_{n_{k_j}}\}$ tal que

$$\int_\Omega \Phi(\mid \nabla u_{n_{k_j}} \mid)dx \to \int_\Omega \Phi(\mid \nabla u \mid)dx,$$

daí

$$\int_\Omega \Phi(\mid \nabla u_n \mid)dx \to \int_\Omega \Phi(\mid \nabla u \mid)dx,$$

De (3) e (5), temos pelo Teorema da Conv. Dominada de Lebesgue

$$\int_\Omega \mid \Phi(\mid \nabla u_n \mid) - \Phi(\mid \nabla u \mid) \mid dx \to 0,$$

donde

$$\int_\Omega \Phi(\mid \nabla u_n \mid)dx \to \int_\Omega \Phi(\mid \nabla u \mid)dx,$$

a menos de subsequência. Repetindo esse argumento, concluímos que toda subsequência de $\{u_{n_k}\}$ de $\{u_n\}$ admite subsequência $\{u_{n_{k_j}}\}$ tal que

$$\int_\Omega \Phi(\mid \nabla u_{n_{k_j}} \mid)dx \to \int_\Omega \Phi(\mid \nabla u \mid)dx,$$

daí

$$\int_\Omega \Phi(\mid \nabla u_n \mid)dx \to \int_\Omega \Phi(\mid \nabla u \mid)dx,$$

mostrando a continuidade de P sobre $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. ■

2. P admite derivada de Gâteaux.

2. P admite derivada de Gâteaux.

Com efeito, considere $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dado por:

$$f(x) = \Phi(|\, x \,|), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

2. P admite derivada de Gâteaux.

Com efeito, considere $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dado por:

$$f(x) = \Phi(|\ x\ |), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Desta forma, $f \in C^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$

2. P admite derivada de Gâteaux.

Com efeito, considere $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dado por:

$$f(x) = \Phi(|\, x \,|), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Desta forma, $f \in C^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ e

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(w) = \begin{cases} w_i \phi(|\, w \,|), \text{ se } w \neq 0; \\ 0, \text{ se } w = 0. \end{cases}$$

2. P admite derivada de Gâteaux.

Com efeito, considere $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dado por:

$$f(x) = \Phi(|\ x\ |), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Desta forma, $f \in C^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ e

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(w) = \begin{cases} w_i \phi(|\ w\ |), \text{ se } w \neq 0; \\ 0, \text{ se } w = 0. \end{cases}$$

Assim, dados $u, \varphi \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$,

$$\lim_{t \to 0} \frac{\Phi(|\ \nabla u + t\nabla\varphi\ |) - \Phi(|\ \nabla u\ |)}{t} = \frac{\partial f}{\partial \nabla\varphi}(\nabla u)$$

2. P admite derivada de Gâteaux.

Com efeito, considere $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dado por:

$$f(x) = \Phi(|\ x\ |), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Desta forma, $f \in C^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ e

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(w) = \begin{cases} w_i \phi(|\ w\ |), \text{ se } w \neq 0; \\ 0, \text{ se } w = 0. \end{cases}$$

Assim, dados $u, \varphi \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} \frac{\Phi(|\ \nabla u + t\nabla\varphi\ |) - \Phi(|\ \nabla u\ |)}{t} &= \frac{\partial f}{\partial \nabla \varphi}(\nabla u) \\ &= \phi(|\ \nabla u\ |) \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \end{aligned}$$

2. P admite derivada de Gâteaux.

Com efeito, considere $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dado por:

$$f(x) = \Phi(|\ x\ |), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Desta forma, $f \in C^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ e

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(w) = \begin{cases} w_i \phi(|\ w\ |), \text{ se } w \neq 0; \\ 0, \text{ se } w = 0. \end{cases}$$

Assim, dados $u, \varphi \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} \frac{\Phi(|\ \nabla u + t\nabla\varphi\ |) - \Phi(|\ \nabla u\ |)}{t} &= \frac{\partial f}{\partial \nabla \varphi}(\nabla u) \\ &= \phi(|\ \nabla u\ |) \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \\ &= \phi(|\ \nabla u\ |) \nabla u \nabla \varphi. \end{aligned} \tag{6}$$

Fixados $x \in \Omega$ e $\mid t \mid \in (0, 1)$,

Fixados $x \in \Omega$ e $\mid t \mid \in (0,1)$, temos pelo Teorema do Valor Médio que existe $\theta_x \in (0,1)$,

Fixados $x \in \Omega$ e $\mid t \mid \in (0,1)$, temos pelo Teorema do Valor Médio que existe $\theta_x \in (0,1)$, tal que

$$\left| \frac{\Phi(\mid \nabla u + t\nabla\varphi \mid) - \Phi(\mid \nabla u \mid)}{t} \right|$$

Fixados $x \in \Omega$ e $\mid t \mid \in (0,1)$, temos pelo Teorema do Valor Médio que existe $\theta_x \in (0,1)$, tal que

$$\left| \frac{\Phi(\mid \nabla u + t\nabla\varphi \mid) - \Phi(\mid \nabla u \mid)}{t} \right|$$
$$= \frac{1}{\mid t \mid} \left| \frac{\partial f}{\partial(t\nabla\varphi)}(\nabla u + t\theta_x \nabla\varphi) \right|$$

Fixados $x \in \Omega$ e $\mid t \mid \in (0,1)$, temos pelo Teorema do Valor Médio que existe $\theta_x \in (0,1)$, tal que

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\Phi(\mid \nabla u + t\nabla\varphi \mid) - \Phi(\mid \nabla u \mid)}{t}\right| \\
&= \frac{1}{\mid t \mid}\left|\frac{\partial f}{\partial(t\nabla\varphi)}(\nabla u + t\theta_x\nabla\varphi)\right| \\
&= \mid \phi(\mid \nabla u + t\theta_x\nabla\varphi \mid)(\nabla u + t\theta_x\nabla\varphi)\nabla\varphi \mid
\end{aligned}$$

Fixados $x \in \Omega$ e $\mid t \mid \in (0,1)$, temos pelo Teorema do Valor Médio que existe $\theta_x \in (0,1)$, tal que

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\Phi(\mid \nabla u + t\nabla\varphi \mid) - \Phi(\mid \nabla u \mid)}{t}\right| \\
&= \frac{1}{\mid t \mid}\left|\frac{\partial f}{\partial(t\nabla\varphi)}(\nabla u + t\theta_x\nabla\varphi)\right| \\
&= \mid \phi(\mid \nabla u + t\theta_x\nabla\varphi \mid)(\nabla u + t\theta_x\nabla\varphi)\nabla\varphi \mid \\
&\leq \phi(\mid \nabla u + t\theta_x\nabla\varphi \mid) \mid \nabla u + t\theta_x\nabla\varphi \mid\mid \nabla\varphi \mid .
\end{aligned}$$

Uma vez que

$$| \nabla u + t\theta_x \nabla \varphi | \leq | \nabla u | + | \nabla \varphi |$$

Uma vez que

$$| \nabla u + t\theta_x \nabla \varphi | \leq | \nabla u | + | \nabla \varphi |$$

e $\phi(t)t$ é crescente para $t > 0$,

Uma vez que

$$| \nabla u + t\theta_x \nabla \varphi | \leq | \nabla u | + | \nabla \varphi |$$

e $\phi(t)t$ é crescente para $t > 0$,

Uma vez que

$$| \nabla u + t\theta_x \nabla \varphi | \leq | \nabla u | + | \nabla \varphi |$$

e $\phi(t)t$ é crescente para $t > 0$, obtemos de (ϕ_2)

$$\left| \frac{\Phi(| \nabla u + t\nabla \varphi |) - \Phi(| \nabla u |)}{t} \right|$$

Uma vez que

$$| \nabla u + t\theta_x \nabla \varphi | \leq | \nabla u | + | \nabla \varphi |$$

e $\phi(t)t$ é crescente para $t > 0$, obtemos de (ϕ_2)

$$\left| \frac{\Phi(| \nabla u + t\nabla \varphi |) - \Phi(| \nabla u |)}{t} \right|$$
$$\leq \phi(| \nabla u | + | \nabla \varphi |)(| \nabla u | + | \nabla \varphi |) | \nabla \varphi |$$

Uma vez que

$$| \nabla u + t\theta_x \nabla \varphi | \leq | \nabla u | + | \nabla \varphi |$$

e $\phi(t)t$ é crescente para $t > 0$, obtemos de (ϕ_2)

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\Phi(| \nabla u + t\nabla \varphi |) - \Phi(| \nabla u |)}{t} \right| \\
&\leq \phi(| \nabla u | + | \nabla \varphi |)(| \nabla u | + | \nabla \varphi |) | \nabla \varphi | \\
&\leq \phi(| \nabla u | + | \nabla \varphi |)(| \nabla u | + | \nabla \varphi |)^2
\end{aligned}$$

Uma vez que

$$| \nabla u + t\theta_x \nabla \varphi | \leq | \nabla u | + | \nabla \varphi |$$

e $\phi(t)t$ é crescente para $t > 0$, obtemos de (ϕ_2)

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\Phi(| \nabla u + t\nabla \varphi |) - \Phi(| \nabla u |)}{t} \right| \\
&\leq \phi(| \nabla u | + | \nabla \varphi |)(| \nabla u | + | \nabla \varphi |) | \nabla \varphi | \\
&\leq \phi(| \nabla u | + | \nabla \varphi |)(| \nabla u | + | \nabla \varphi |)^2 \\
&\leq m\Phi(| \nabla u | + | \nabla \varphi |) \in L^1(\Omega).
\end{aligned}$$

(7)

Por (6) e (7)

$$\lim_{t\to 0}\int_{\Omega}\frac{\Phi(|\nabla u + t\nabla\varphi|) - \Phi(|\nabla u|)}{t}dx = \int_{\Omega}\phi(|\nabla u|)\nabla u\nabla\varphi dx,$$

mostrando assim a Afirmação 2.

Por (6) e (7)

$$\lim_{t\to 0}\int_{\Omega}\frac{\Phi(|\nabla u + t\nabla\varphi|) - \Phi(|\nabla u|)}{t}dx = \int_{\Omega}\phi(|\nabla u|)\nabla u\nabla\varphi dx,$$

mostrando assim a Afirmação 2.

3. $\dfrac{\partial P}{\partial(.)}$ é contínua sobre $W_0^{1,\Phi}(\Omega)^*$.

Por (6) e (7)

$$\lim_{t\to 0}\int_{\Omega}\frac{\Phi(|\nabla u + t\nabla\varphi|) - \Phi(|\nabla u|)}{t}dx = \int_{\Omega}\phi(|\nabla u|)\nabla u\nabla\varphi dx,$$

mostrando assim a Afirmação 2.

3. $\dfrac{\partial P}{\partial(.)}$ é contínua sobre $W_0^{1,\Phi}(\Omega)^*$.

De fato, considere $\varphi \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, tal que $|\nabla\varphi|_\Phi \leq 1$, e $\{u_n\} \subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

Por (6) e (7)

$$\lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{\Phi(|\nabla u + t\nabla\varphi|) - \Phi(|\nabla u|)}{t}dx = \int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u\nabla\varphi dx,$$

mostrando assim a Afirmação 2.

3. $\dfrac{\partial P}{\partial(.)}$ é contínua sobre $W_0^{1,\Phi}(\Omega)^*$.

De fato, considere $\varphi \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, tal que $|\nabla\varphi|_\Phi \leq 1$, e $\{u_n\} \subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Segue da Desigualdade de Holder que

$$\left|\frac{\partial P}{\partial\varphi}(u_n) - \frac{\partial P}{\partial\varphi}(u)\right| = \left|\int_\Omega (\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u)\nabla\varphi dx\right|$$

Por (6) e (7)

$$\lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{\Phi(|\nabla u + t\nabla\varphi|) - \Phi(|\nabla u|)}{t}dx = \int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u\nabla\varphi dx,$$

mostrando assim a Afirmação 2.

3. $\dfrac{\partial P}{\partial(.)}$ é contínua sobre $W_0^{1,\Phi}(\Omega)^*$.

De fato, considere $\varphi \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, tal que $|\nabla\varphi|_\Phi \leq 1$, e $\{u_n\} \subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Segue da Desigualdade de Holder que

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial P}{\partial\varphi}(u_n) - \frac{\partial P}{\partial\varphi}(u)\right| &= \left|\int_\Omega (\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u)\nabla\varphi dx\right| \\ &\leq 2\,|\nabla\varphi|_\Phi|\,|\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u|_{\widetilde{\Phi}} \\ &\leq 2\,|\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u|_{\widetilde{\Phi}}\,.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\widetilde{\Phi}(\mid \phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n - \phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u \mid)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\Phi}(\mid \phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n - \phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u \mid) \\
&\quad \leq \widetilde{\Phi}(\phi(\mid \nabla u_n \mid) \mid \nabla u_n \mid + \phi(\mid \nabla u \mid) \mid \nabla u \mid)
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\Phi}(\mid \phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n - \phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u \mid) \\
&\quad \leq \widetilde{\Phi}(\phi(\mid \nabla u_n \mid) \mid \nabla u_n \mid + \phi(\mid \nabla u \mid) \mid \nabla u \mid) \\
&\quad \leq K[\widetilde{\Phi}(\phi(\mid \nabla u_n \mid) \mid \nabla u_n \mid) + \widetilde{\Phi}(\phi(\mid \nabla u \mid) \mid \nabla u \mid)]
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\Phi}(\mid \phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n - \phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u \mid) \\
&\quad \leq \widetilde{\Phi}(\phi(\mid \nabla u_n \mid) \mid \nabla u_n \mid + \phi(\mid \nabla u \mid) \mid \nabla u \mid) \\
&\quad \leq K[\widetilde{\Phi}(\phi(\mid \nabla u_n \mid) \mid \nabla u_n \mid) + \widetilde{\Phi}(\phi(\mid \nabla u \mid) \mid \nabla u \mid)] \\
&\quad \leq K[\Phi(2 \mid \nabla u_n \mid) + \Phi(2 \mid \nabla u \mid)]
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\Phi}(\mid \phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n - \phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u \mid) \\
&\quad \leq \widetilde{\Phi}(\phi(\mid \nabla u_n \mid) \mid \nabla u_n \mid + \phi(\mid \nabla u \mid) \mid \nabla u \mid) \\
&\quad \leq K[\widetilde{\Phi}(\phi(\mid \nabla u_n \mid) \mid \nabla u_n \mid) + \widetilde{\Phi}(\phi(\mid \nabla u \mid) \mid \nabla u \mid)] \\
&\quad \leq K[\Phi(2 \mid \nabla u_n \mid) + \Phi(2 \mid \nabla u \mid)] \\
&\quad \leq K[\Phi(\mid \nabla u_n \mid) + \Phi(\mid \nabla u \mid)]
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\Phi}(\mid \phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n - \phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u \mid) \\
&\leq \widetilde{\Phi}(\phi(\mid \nabla u_n \mid) \mid \nabla u_n \mid + \phi(\mid \nabla u \mid) \mid \nabla u \mid) \\
&\leq K[\widetilde{\Phi}(\phi(\mid \nabla u_n \mid) \mid \nabla u_n \mid) + \widetilde{\Phi}(\phi(\mid \nabla u \mid) \mid \nabla u \mid)] \\
&\leq K[\Phi(2 \mid \nabla u_n \mid) + \Phi(2 \mid \nabla u \mid)] \\
&\leq K[\Phi(\mid \nabla u_n \mid) + \Phi(\mid \nabla u \mid)] \\
&\leq K[\Phi(\mid \nabla u_n \mid) + \Phi(\mid \nabla u \mid)],
\end{aligned}$$

(8)

onde $K > 0$.

Agora, como $(u_n - u) \to 0$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$,

Agora, como $(u_n - u) \to 0$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$,

$$\int_\Omega \Phi(|\ \nabla u_n - \nabla u\ |)dx \to 0,$$

Agora, como $(u_n - u) \to 0$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$,

$$\int_\Omega \Phi(|\ \nabla u_n - \nabla u\ |)dx \to 0,$$

e assim, considerando uma subsequência se necessário, existe $\eta \in L^1(\Omega)$

Agora, como $(u_n - u) \to 0$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$,

$$\int_\Omega \Phi(|\ \nabla u_n - \nabla u\ |)dx \to 0,$$

e assim, considerando uma subsequência se necessário, existe $\eta \in L^1(\Omega)$ tal que

$$|\ \nabla u_n - \nabla u\ | \to 0,\ \text{q.t.p. em } \Omega \tag{9}$$

Agora, como $(u_n - u) \to 0$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$,

$$\int_\Omega \Phi(|\ \nabla u_n - \nabla u\ |)dx \to 0,$$

e assim, considerando uma subsequência se necessário, existe $\eta \in L^1(\Omega)$ tal que

$$|\ \nabla u_n - \nabla u\ | \to 0,\ \text{q.t.p. em } \Omega \tag{9}$$

e

$$\Phi(|\ \nabla u_n - \nabla u\ |) \leq \eta \text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{10}$$

De (8) e (10) obtemos que

$$\widetilde{\Phi}(\mid \phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n - \phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u \mid)$$

De (8) e (10) obtemos que

$$\begin{aligned}&\widetilde{\Phi}(\mid \phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n - \phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u \mid)\\ &\leq K[\Phi(\mid \nabla u_n \mid) + \Phi(\mid \nabla u \mid)]\end{aligned}$$

De (8) e (10) obtemos que

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\Phi}(\mid \phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n - \phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u \mid) \\
&\quad \leq K[\Phi(\mid \nabla u_n \mid) + \Phi(\mid \nabla u \mid)] \\
&\quad \leq K[(\Phi(\mid \nabla u_n - \nabla u \mid) + \Phi(\mid \nabla u \mid))]
\end{aligned}$$

De (8) e (10) obtemos que

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\Phi}(\mid \phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n - \phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u \mid) \\
&\quad \leq K[\Phi(\mid \nabla u_n \mid) + \Phi(\mid \nabla u \mid)] \\
&\quad \leq K[(\Phi(\mid \nabla u_n - \nabla u \mid) + \Phi(\mid \nabla u \mid))] \\
&\quad \leq K[\eta + \Phi(\mid \nabla u \mid)] \in L^1(\Omega). \qquad (11)
\end{aligned}
$$

De (8) e (10) obtemos que

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\Phi}(\mid \phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n - \phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u \mid) \\
&\quad \leq K[\Phi(\mid \nabla u_n \mid) + \Phi(\mid \nabla u \mid)] \\
&\quad \leq K[(\Phi(\mid \nabla u_n - \nabla u \mid) + \Phi(\mid \nabla u \mid))] \\
&\quad \leq K[\eta + \Phi(\mid \nabla u \mid)] \in L^1(\Omega). \qquad (11)
\end{aligned}$$

Além disso, de (9)

$$\widetilde{\Phi}(\mid \phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n - \phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u \mid) \to 0 \text{ q.t.p. em } \Omega. \qquad (12)$$

De (11) e (12)

$$\int_{\Omega} \widetilde{\Phi}(|\ \phi(|\ \nabla u_n\ |)\nabla u_n - \phi(|\ \nabla u\ |)\nabla u\ |)dx \to 0. \tag{13}$$

De (11) e (12)

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}(\mid \phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n - \phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u \mid)dx \to 0. \tag{13}$$

Agora, como $\widetilde{\Phi}$ satisfaz Δ_2, então

$$\mid \phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n - \phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u \mid_{\widetilde{\Phi}} \to 0,$$

De (11) e (12)

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}(\mid \phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n - \phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u \mid)dx \to 0. \tag{13}$$

Agora, como $\widetilde{\Phi}$ satisfaz Δ_2, então

$$\mid \phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n - \phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u \mid_{\widetilde{\Phi}} \to 0,$$

donde segue-se que

$$\left| \frac{\partial P}{\partial(.)}(u_n) - \frac{\partial P}{\partial(.)}(u) \right|_* \to 0.$$

De (11) e (12)

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}(\mid \phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n - \phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u \mid)dx \to 0. \tag{13}$$

Agora, como $\widetilde{\Phi}$ satisfaz Δ_2, então

$$\mid \phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n - \phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u \mid_{\widetilde{\Phi}} \to 0,$$

donde segue-se que

$$\left| \frac{\partial P}{\partial(.)}(u_n) - \frac{\partial P}{\partial(.)}(u) \right|_* \to 0.$$

Das Afirmações 1, 2 e 3, segue que $P \in C^1(W_0^{1,\Phi}(\Omega), \mathbb{R})$

De (11) e (12)

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}(\mid \phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n - \phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u \mid)dx \to 0. \tag{13}$$

Agora, como $\widetilde{\Phi}$ satisfaz Δ_2, então

$$\mid \phi(\mid \nabla u_n \mid)\nabla u_n - \phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u \mid_{\widetilde{\Phi}} \to 0,$$

donde segue-se que

$$\left| \frac{\partial P}{\partial(.)}(u_n) - \frac{\partial P}{\partial(.)}(u) \right|_* \to 0.$$

Das Afirmações 1, 2 e 3, segue que $P \in C^1(W_0^{1,\Phi}(\Omega), \mathbb{R})$ e

$$\langle P'(u), \varphi \rangle = \int_\Omega \phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u \nabla \varphi dx, \text{ para } u, \varphi \in W_0^{1,\Phi}(\Omega). \blacksquare$$

Proposição 5.2

Se Φ satisfaz (ϕ_1) e (ϕ_2), então P é sequencialmente fracamente semicontínuo inferiormente.

Proposição 5.2

Se Φ satisfaz (ϕ_1) e (ϕ_2), então P é sequencialmente fracamente semicontínuo inferiormente.

Demonstração: Seja $\{u_n\} \subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

Proposição 5.2

Se Φ satisfaz (ϕ_1) e (ϕ_2), então P é sequencialmente fracamente semicontínuo inferiormente.

Demonstração: Seja $\{u_n\} \subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Usando a convexidade de P, vale que

$$P(u_n) - P(u) \geq \langle P'(u), u_n - u \rangle, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Proposição 5.2

Se Φ satisfaz (ϕ_1) e (ϕ_2), então P é sequencialmente fracamente semicontínuo inferiormente.

Demonstração: Seja $\{u_n\} \subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Usando a convexidade de P, vale que

$$P(u_n) - P(u) \geq \langle P'(u), u_n - u \rangle, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Daí,

$$\liminf_{n \to +\infty} P(u_n) \quad \geq \quad \liminf_{n \to +\infty} [P(u) + \langle P'(u), u_n - u \rangle]$$

Proposição 5.2

Se Φ satisfaz (ϕ_1) e (ϕ_2), então P é sequencialmente fracamente semicontínuo inferiormente.

Demonstração: Seja $\{u_n\} \subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Usando a convexidade de P, vale que

$$P(u_n) - P(u) \geq \langle P'(u), u_n - u \rangle, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to+\infty} P(u_n) &\geq \liminf_{n\to+\infty} [P(u) + \langle P'(u), u_n - u \rangle] \\ &= P(u) + \liminf_{n\to+\infty} \langle P'(u), u_n - u \rangle \end{aligned}$$

Proposição 5.2

Se Φ satisfaz (ϕ_1) e (ϕ_2), então P é sequencialmente fracamente semicontínuo inferiormente.

Demonstração: Seja $\{u_n\} \subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Usando a convexidade de P, vale que

$$P(u_n) - P(u) \geq \langle P'(u), u_n - u \rangle, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to+\infty} P(u_n) &\geq \liminf_{n\to+\infty} [P(u) + \langle P'(u), u_n - u \rangle] \\ &= P(u) + \liminf_{n\to+\infty} \langle P'(u), u_n - u \rangle \\ &= P(u), \end{aligned}$$

Proposição 5.2

Se Φ satisfaz (ϕ_1) e (ϕ_2), então P é sequencialmente fracamente semicontínuo inferiormente.

Demonstração: Seja $\{u_n\} \subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Usando a convexidade de P, vale que

$$P(u_n) - P(u) \geq \langle P'(u), u_n - u \rangle, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to+\infty} P(u_n) &\geq \liminf_{n\to+\infty} [P(u) + \langle P'(u), u_n - u \rangle] \\ &= P(u) + \liminf_{n\to+\infty} \langle P'(u), u_n - u \rangle \\ &= P(u), \end{aligned}$$

mostrando que P é sequencialmente fracamente semicontínuo inferiormente. ■

Proposição 5.3

Assumindo que P satisfaz (ϕ_1) e (ϕ_2), tem-se que

$$P \text{ é coercivo em } W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Proposição 5.3

Assumindo que P satisfaz (ϕ_1) e (ϕ_2), tem-se que

$$P \text{ é coercivo em } W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Demonstração: Decorre do Lema 5.2 (iii) que

$$\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx \geq \xi_0(|\nabla u|_\Phi), \quad u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$$

Proposição 5.3

Assumindo que P satisfaz (ϕ_1) e (ϕ_2), tem-se que

$$P \text{ é coercivo em } W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Demonstração: Decorre do Lema 5.2 (iii) que

$$\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx \geq \xi_0(|\nabla u|_\Phi), \quad u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$$

e, portanto,

$$P(u) = \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx \to +\infty, \text{ quando } |\nabla u|_\Phi \to +\infty. \blacksquare$$

Lema 5.4

Seja $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ uma função contínua satisfazendo

(i) $\lim_{s \to 0} sf(s) = 0$ e $\lim_{s \to \infty} sf(s) = \infty$;

Lema 5.4

Seja $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ uma função contínua satisfazendo

(*i*) $\lim_{s \to 0} sf(s) = 0$ e $\lim_{s \to \infty} sf(s) = \infty$;

(*ii*) $s \mapsto sf(s)$ é estritamente crescente em $(0, \infty)$.

Lema 5.4

Seja $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ uma função contínua satisfazendo

(i) $\lim_{s \to 0} sf(s) = 0$ e $\lim_{s \to \infty} sf(s) = \infty$;

(ii) $s \mapsto sf(s)$ é estritamente crescente em $(0, \infty)$.

Então

$$\langle f(|\, x \,|)x - f(|\, y \,|)y, x - y \rangle > 0,$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^N$, com $x \neq y$.

Proposição 5.4

O operador $P' : W_0^{1,\Phi}(\Omega) \to W_0^{1,\Phi}(\Omega)^*$ é estritamente monotônico,

Proposição 5.4

O operador $P' : W_0^{1,\Phi}(\Omega) \to W_0^{1,\Phi}(\Omega)^*$ é estritamente monotônico, isto é,

$$\langle P'(u) - P'(v), u - v \rangle > 0,$$

para todo $u, v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, com $u \neq v$.

Proposição 5.4

O operador $P' : W_0^{1,\Phi}(\Omega) \to W_0^{1,\Phi}(\Omega)^*$ é estritamente monotônico, isto é,

$$\langle P'(u) - P'(v), u - v \rangle > 0,$$

para todo $u, v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, com $u \neq v$.

Demonstração: Sejam $u, v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, tais que $u \neq v$.

Proposição 5.4

O operador $P' : W_0^{1,\Phi}(\Omega) \to W_0^{1,\Phi}(\Omega)^*$ é estritamente monotônico, isto é,

$$\langle P'(u) - P'(v), u - v \rangle > 0,$$

para todo $u, v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, com $u \neq v$.

Demonstração: Sejam $u, v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, tais que $u \neq v$. Assim, considerando

$$\Omega_0 := \{x \in \Omega; u(x) \neq v(x)\},$$

Proposição 5.4

O operador $P' : W_0^{1,\Phi}(\Omega) \to W_0^{1,\Phi}(\Omega)^*$ é estritamente monotônico, isto é,

$$\langle P'(u) - P'(v), u - v \rangle > 0,$$

para todo $u, v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, com $u \neq v$.

Demonstração: Sejam $u, v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, tais que $u \neq v$. Assim, considerando

$$\Omega_0 := \{x \in \Omega; u(x) \neq v(x)\},$$

e observando que $f(s) = \phi(|\, s \,|)$, $s \in \mathbb{R}$, cumpre as condições (i) e (ii) do Lema 5.4 (ver (ϕ_1) e (ϕ_2)),

Proposição 5.4

O operador $P' : W_0^{1,\Phi}(\Omega) \to W_0^{1,\Phi}(\Omega)^*$ é estritamente monotônico, isto é,

$$\langle P'(u) - P'(v), u - v \rangle > 0,$$

para todo $u, v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, com $u \neq v$.

Demonstração: Sejam $u, v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, tais que $u \neq v$. Assim, considerando

$$\Omega_0 := \{x \in \Omega; u(x) \neq v(x)\},$$

e observando que $f(s) = \phi(|\, s \,|)$, $s \in \mathbb{R}$, cumpre as condições (i) e (ii) do Lema 5.4 (ver (ϕ_1) e (ϕ_2)), temos

$$\langle \phi(|\, \nabla u \,|)\nabla u - \phi(|\, \nabla v \,|)\nabla v, \nabla u - \nabla v \rangle > 0 \text{ em } \Omega_0,$$

donde segue-se que

$$\begin{aligned}
&\langle P^{'}(u) - P^{'}(v), u - v\rangle \\
&= \int_{\Omega} \langle \phi(|\ \nabla u\ |)\nabla u - \phi(|\ \nabla v\ |)\nabla v, \nabla u - \nabla v\rangle dx
\end{aligned}$$

donde segue-se que

$$\begin{aligned}
&\langle P^{'}(u) - P^{'}(v), u - v\rangle \\
&= \int_{\Omega} \langle \phi(|\ \nabla u\ |)\nabla u - \phi(|\ \nabla v\ |)\nabla v, \nabla u - \nabla v\rangle dx \\
&\geq \int_{\Omega_0} \langle \phi(|\ \nabla u\ |)\nabla u - \phi(|\ \nabla v\ |)\nabla v, \nabla u - \nabla v\rangle dx
\end{aligned}$$

donde segue-se que

$$\begin{aligned}
&\langle P'(u) - P'(v), u - v\rangle \\
&= \int_{\Omega} \langle \phi(|\nabla u|)\nabla u - \phi(|\nabla v|)\nabla v, \nabla u - \nabla v\rangle dx \\
&\geq \int_{\Omega_0} \langle \phi(|\nabla u|)\nabla u - \phi(|\nabla v|)\nabla v, \nabla u - \nabla v\rangle dx > 0. \blacksquare
\end{aligned}$$

Lema 5.5

Sejam $\beta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ um operador estritamente monotônico

[1] DAL MASO, G., MURAT, F. *Almost everywhere convergence of gradients of solutions to nonlinear elliptic systems*, Nonlinear Anal.31, 405-412, 1998.

Lema 5.5

Sejam $\beta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ um operador estritamente monotônico e $\{v_n\} \subset \mathbb{R}^N$ uma sequência verificando

$$(\beta(v_n) - \beta(v))(v_n - v) \to 0, \text{ em } \mathbb{R},$$

para algum $v \in \mathbb{R}^N$.

[1] DAL MASO, G., MURAT, F. *Almost everywhere convergence of gradients of solutions to nonlinear elliptic systems*, Nonlinear Anal.31, 405-412, 1998.

Lema 5.5

Sejam $\beta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ um operador estritamente monotônico e $\{v_n\} \subset \mathbb{R}^N$ uma sequência verificando

$$(\beta(v_n) - \beta(v))(v_n - v) \to 0, \text{ em } \mathbb{R},$$

para algum $v \in \mathbb{R}^N$. Então,

$$v_n \to v \text{ em } \mathbb{R}^N.$$

[1] DAL MASO, G., MURAT, F. *Almost everywhere convergence of gradients of solutions to nonlinear elliptic systems*, Nonlinear Anal.31, 405-412, 1998.

Lema 5.5

Sejam $\beta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ um operador estritamente monotônico e $\{v_n\} \subset \mathbb{R}^N$ uma sequência verificando

$$(\beta(v_n) - \beta(v))(v_n - v) \to 0, \text{ em } \mathbb{R},$$

para algum $v \in \mathbb{R}^N$. Então,

$$v_n \to v \text{ em } \mathbb{R}^N.$$

Demonstração: Ver Dal Maso e Murat.[1] ■

[1] DAL MASO, G., MURAT, F. *Almost everywhere convergence of gradients of solutions to nonlinear elliptic systems*, Nonlinear Anal.31, 405-412, 1998.

Condição do tipo S_+ [2]

Lema 5.6

Sejam $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ e $\{u_n\}$ uma sequência limitada de $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$

[2] Alves, C.O., De Holanda, A.R.F. and Santos, Jefferson A. . Existence of positive solutions for a class of semipositone quasilinear problems through Orlicz-Sobolev space. Proceedings of the American Mathematical society, v. 147, p. 285-299, 2018.

Condição do tipo S_+ [2]

Lema 5.6

Sejam $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ e $\{u_n\}$ uma sequência limitada de $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ verificando

$$\int_\Omega (\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u)(\nabla u_n - \nabla u)\, dx \to 0.$$

[2] Alves, C.O., De Holanda, A.R.F. and Santos, Jefferson A. . Existence of positive solutions for a class of semipositone quasilinear problems through Orlicz-Sobolev space. Proceedings of the American Mathematical society, v. 147, p. 285-299, 2018.

Condição do tipo S_+ [2]

Lema 5.6

Sejam $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ e $\{u_n\}$ uma sequência limitada de $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ verificando

$$\int_\Omega (\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u)(\nabla u_n - \nabla u)\, dx \to 0.$$

Então,

$$u_n \to u \text{ em } W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

[2] Alves, C.O., De Holanda, A.R.F. and Santos, Jefferson A. . Existence of positive solutions for a class of semipositone quasilinear problems through Orlicz-Sobolev space. Proceedings of the American Mathematical society, v. 147, p. 285-299, 2018.

Condição do tipo S_+ [2]

Lema 5.6

Sejam $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ e $\{u_n\}$ uma sequência limitada de $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ verificando

$$\int_\Omega (\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u)(\nabla u_n - \nabla u)\, dx \to 0.$$

Então,

$$u_n \to u \text{ em } W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Demonstração: Considerando $\beta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, uma aplicação dada por

$$\beta(x) = \phi(|\nabla x|)\nabla x, x \in \mathbb{R}^N,$$

[2] Alves, C.O., De Holanda, A.R.F. and Santos, Jefferson A. . Existence of positive solutions for a class of semipositone quasilinear problems through Orlicz-Sobolev space. Proceedings of the American Mathematical society, v. 147, p. 285-299, 2018.

Condição do tipo S_+ [2]

Lema 5.6

Sejam $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ e $\{u_n\}$ uma sequência limitada de $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ verificando

$$\int_\Omega (\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u)(\nabla u_n - \nabla u)\, dx \to 0.$$

Então,

$$u_n \to u \text{ em } W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Demonstração: Considerando $\beta : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, uma aplicação dada por

$$\beta(x) = \phi(|\nabla x|)\nabla x, x \in \mathbb{R}^N,$$

tem-se da Proposição 5.4, que β é estritamente monotônico.

---

[2] Alves, C.O., De Holanda, A.R.F. and Santos, Jefferson A. . Existence of positive solutions for a class of semipositone quasilinear problems through Orlicz-Sobolev space. Proceedings of the American Mathematical society, v. 147, p. 285-299, 2018.

Deste fato, uma vez que

$$(\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u)(\nabla u_n - \nabla u) \to 0, \text{ em } L^1(\Omega) \tag{14}$$

Deste fato, uma vez que

$$(\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u)(\nabla u_n - \nabla u) \to 0, \text{ em } L^1(\Omega) \tag{14}$$

temos

$$(\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u)(\nabla u_n - \nabla u) \to 0, \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

Deste fato, uma vez que

$$(\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u)(\nabla u_n - \nabla u) \to 0, \text{ em } L^1(\Omega) \tag{14}$$

temos

$$(\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u)(\nabla u_n - \nabla u) \to 0, \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

donde segue-se, pelo Lema 5.5, que

$$\nabla u_n(x) \to \nabla u(x) \text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{15}$$

Deste fato, uma vez que

$$(\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u)(\nabla u_n - \nabla u) \to 0, \text{ em } L^1(\Omega) \tag{14}$$

temos

$$(\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n - \phi(|\nabla u|)\nabla u)(\nabla u_n - \nabla u) \to 0, \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

donde segue-se, pelo Lema 5.5, que

$$\nabla u_n(x) \to \nabla u(x) \text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{15}$$

Agora, vejamos os seguintes fatos:

(*i*) $\Phi(|\nabla u_n - \nabla u|) \leq C(\phi(|\nabla u_n|)\,|\nabla u_n|^2 + \phi(|\nabla u|)\,|\nabla u|^2), n \in \mathbb{N}$.

De fato, usando (ϕ_2), a convexidade e a monotonicidade em $\mathbb{R}_+$ de Φ,

De fato, usando (ϕ_2), a convexidade e a monotonicidade em $\mathbb{R}_+$ de Φ, existe $K > 0$ tal que

$$\Phi(|\nabla u_n - \nabla u|) \leq K(\Phi(|\nabla u_n|) + \Phi(|\nabla u|))$$

De fato, usando (ϕ_2), a convexidade e a monotonicidade em $\mathbb{R}_+$ de Φ, existe $K > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\Phi(|\nabla u_n - \nabla u|) &\leq K(\Phi(|\nabla u_n|) + \Phi(|\nabla u|)) \\ &\leq \frac{K}{l}(\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2 + \phi(|\nabla u|)|\nabla u|^2).\end{aligned}$$

Segue de (15).

De fato, usando (ϕ_2), a convexidade e a monotonicidade em $\mathbb{R}_+$ de Φ, existe $K > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\Phi(|\nabla u_n - \nabla u|) &\leq K(\Phi(|\nabla u_n|) + \Phi(|\nabla u|)) \\ &\leq \frac{K}{l}(\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2 + \phi(|\nabla u|)|\nabla u|^2).\end{aligned}$$

(*ii*) $\Phi(|\nabla u_n - \nabla u|) \to 0$ q.t.p. em Ω.

Segue de (15).

(*iii*) $C(\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2 + \phi(|\nabla u|)|\nabla u|^2) \in L^1(\Omega)$.

(*iii*) $C(\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2 + \phi(|\nabla u|)|\nabla u|^2) \in L^1(\Omega)$.

Basta usar (ϕ_2).

(*iii*) $C(\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2 + \phi(|\nabla u|)|\nabla u|^2) \in L^1(\Omega)$.

Basta usar (ϕ_2).

(*iv*) $\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2 \to \phi(|\nabla u|)|\nabla u|^2$ q.t.p. em Ω.

(*iii*) $C(\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2 + \phi(|\nabla u|)|\nabla u|^2) \in L^1(\Omega)$.

Basta usar (ϕ_2).

(*iv*) $\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2 \to \phi(|\nabla u|)|\nabla u|^2$ q.t.p. em Ω.

Segue de (15).

$$(v)\ \int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)\,|\nabla u_n|^2\,dx \to \int_\Omega \phi(|\nabla u|)\,|\nabla u|^2\,dx.$$

(v) $\int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)\,|\nabla u_n|^2\,dx \to \int_\Omega \phi(|\nabla u|)\,|\nabla u|^2\,dx.$

Inicialmente, observe que

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)\,|\nabla u_n|^2\,dx \quad = \quad \int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n(\nabla u_n - \nabla u)dx$$

(v) $\int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)\,|\nabla u_n|^2\,dx \to \int_\Omega \phi(|\nabla u|)\,|\nabla u|^2\,dx.$

Inicialmente, observe que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)\,|\nabla u_n|^2\,dx &= \int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n(\nabla u_n - \nabla u)dx \\ &\quad + \int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n \nabla u dx. \end{aligned} \tag{16}$$

(v) $\int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)\,|\nabla u_n|^2\,dx \to \int_\Omega \phi(|\nabla u|)\,|\nabla u|^2\,dx.$

Inicialmente, observe que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)\,|\nabla u_n|^2\,dx &= \int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n(\nabla u_n - \nabla u)dx \\ &\quad + \int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n \nabla u dx. \end{aligned} \tag{16}$$

Uma vez que $\{u_n\} \subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é limitada,

(v) $\int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2\,dx \to \int_\Omega \phi(|\nabla u|)|\nabla u|^2\,dx.$

Inicialmente, observe que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2\,dx &= \int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n(\nabla u_n - \nabla u)dx \\ &\quad + \int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n \nabla u dx. \end{aligned} \tag{16}$$

Uma vez que $\{u_n\} \subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é limitada, temos para cada $i \in \{1,...,N\}$

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}\Big(\phi(|\nabla u_n|)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\Big)dx \leq \int_\Omega \widetilde{\Phi}(\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|)dx$$

(v) $\int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2\,dx \to \int_\Omega \phi(|\nabla u|)|\nabla u|^2\,dx.$

Inicialmente, observe que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|^2\,dx &= \int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n(\nabla u_n - \nabla u)dx \\ &\quad + \int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n \nabla u dx. \end{aligned} \tag{16}$$

Uma vez que $\{u_n\} \subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é limitada, temos para cada $i \in \{1,...,N\}$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \widetilde{\Phi}\Big(\phi(|\nabla u_n|)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\Big)dx &\leq \int_\Omega \widetilde{\Phi}(\phi(|\nabla u_n|)|\nabla u_n|)dx \\ &\leq K_1 \int_\Omega \Phi(|\nabla u_n|)dx\end{aligned}$$

(v) $\int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)\,|\nabla u_n|^2\,dx \to \int_\Omega \phi(|\nabla u|)\,|\nabla u|^2\,dx.$

Inicialmente, observe que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)\,|\nabla u_n|^2\,dx &= \int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n(\nabla u_n - \nabla u)dx \\ &\quad + \int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n \nabla u dx. \end{aligned} \tag{16}$$

Uma vez que $\{u_n\} \subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é limitada, temos para cada $i \in \{1, ..., N\}$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \widetilde{\Phi}\Big(\phi(|\nabla u_n|)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\Big)dx &\leq \int_\Omega \widetilde{\Phi}(\phi(|\nabla u_n|)\,|\nabla u_n|)dx \\ &\leq K_1 \int_\Omega \Phi(|\nabla u_n|)dx \\ &\leq C, \quad n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Desse modo, a sequência

$$\left\{\phi(|\nabla u_n|)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega), \text{ para cada } i \in \{1,...,N\}.$$

[3] Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $\Phi : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ uma N-função verificando (ϕ_1) e $(\phi 2)$. Se $\{f_n\}$ é uma sequência limitada em $L_\Phi(\Omega)$, verificando

$$f_n \to f \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

temos que

$$f_n \rightharpoonup f \text{ em } L_\Phi(\Omega).$$

Desse modo, a sequência

$$\left\{\phi(|\nabla u_n|)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega), \text{ para cada } i \in \{1,...,N\}.$$

Além disso, de (15),

$$\phi(|\nabla u_n(x)|)\frac{\partial u_n(x)}{\partial x_i} \to \phi(|\nabla u(x)|)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

---

[3] Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $\Phi : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ uma N-função verificando (ϕ_1) e $(\phi 2)$. Se $\{f_n\}$ é uma sequência limitada em $L_\Phi(\Omega)$, verificando

$$f_n \to f \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

temos que

$$f_n \rightharpoonup f \text{ em } L_\Phi(\Omega).$$

Desse modo, a sequência

$$\left\{\phi(|\nabla u_n|)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega), \text{ para cada } i \in \{1,...,N\}.$$

Além disso, de (15),

$$\phi(|\nabla u_n(x)|)\frac{\partial u_n(x)}{\partial x_i} \to \phi(|\nabla u(x)|)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Destes fatos, usando Brézis e Lieb para N-funções[3],

[3] Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $\Phi : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ uma N-função verificando (ϕ_1) e $(\phi 2)$. Se $\{f_n\}$ é uma sequência limitada em $L_\Phi(\Omega)$, verificando

$$f_n \to f \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

temos que

$$f_n \rightharpoonup f \text{ em } L_\Phi(\Omega).$$

Desse modo, a sequência

$$\left\{\phi(|\nabla u_n|)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega), \text{ para cada } i \in \{1,...,N\}.$$

Além disso, de (15),

$$\phi(|\nabla u_n(x)|)\frac{\partial u_n(x)}{\partial x_i} \to \phi(|\nabla u(x)|)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Destes fatos, usando Brézis e Lieb para N-funções[3],

$$\phi(|\nabla u_n|)\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightharpoonup \phi(|\nabla u|)\frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ em } L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega),$$

---

[3] Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto, $\Phi : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ uma N-função verificando (ϕ_1) e $(\phi 2)$. Se $\{f_n\}$ é uma sequência limitada em $L_\Phi(\Omega)$, verificando

$$f_n \to f \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

temos que

$$f_n \rightharpoonup f \text{ em } L_\Phi(\Omega).$$

consequentemente

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \phi(\mid \nabla u_n \mid) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx \to \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \phi(\mid \nabla u \mid) \Big(\frac{\partial u}{\partial x_i} \Big)^2 dx,$$

consequentemente

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \phi(\mid \nabla u_n \mid) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx \to \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \phi(\mid \nabla u \mid) \Big(\frac{\partial u}{\partial x_i} \Big)^2 dx,$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} \phi(\mid \nabla u_n \mid) \nabla u_n \nabla u dx \to \int_{\Omega} \phi(\mid \nabla u \mid) \mid \nabla u \mid^2 dx. \tag{17}$$

Afirmamos agora que

$$\int_\Omega \phi(|\ \nabla u_n\ |)\nabla u_n(\nabla u_n - \nabla u)dx \to 0.$$

Afirmamos agora que

$$\int_\Omega \phi(|\ \nabla u_n\ |)\nabla u_n(\nabla u_n - \nabla u)dx \to 0.$$

De fato, utilizando (14) tem-se que

(18)

$$\int_\Omega \phi(|\ \nabla u_n\ |)\nabla u_n(\nabla u_n - \nabla u)dx = \int_\Omega \phi(|\ \nabla u\ |)\nabla u(\nabla u_n - \nabla u)dx + o_n(1).$$

Afirmamos agora que

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n(\nabla u_n - \nabla u)dx \to 0.$$

De fato, utilizando (14) tem-se que

(18)

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n(\nabla u_n - \nabla u)dx = \int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u(\nabla u_n - \nabla u)dx + o_n(1).$$

Por outro lado, desde que

$$\left\{\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right\} \text{ é limitado em } L_\Phi(\Omega)$$

Afirmamos agora que

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n(\nabla u_n - \nabla u)dx \to 0.$$

De fato, utilizando (14) tem-se que

(18)

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n(\nabla u_n - \nabla u)dx = \int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u(\nabla u_n - \nabla u)dx + o_n(1).$$

Por outro lado, desde que

$$\left\{\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\right\} \text{ é limitado em } L_\Phi(\Omega)$$

e

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) \to \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

segue novamente do Teorema de Brézis-Lieb para N-funções que

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ em } L_\Phi(\Omega),$$

segue novamente do Teorema de Brézis-Lieb para N-funções que

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ em } L_\Phi(\Omega),$$

isto é,

$$\frac{\partial (u_n - u)}{\partial x_i} \rightharpoonup 0 \text{ em } L_\Phi(\Omega).$$

segue novamente do Teorema de Brézis-Lieb para N-funções que

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ em } L_\Phi(\Omega),$$

isto é,

$$\frac{\partial (u_n - u)}{\partial x_i} \rightharpoonup 0 \text{ em } L_\Phi(\Omega).$$

Deste fato,

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \phi(|\nabla u|) \frac{\partial u}{\partial x_i} . \frac{\partial (u_n - u)}{\partial x_i} dx \to 0,$$

segue novamente do Teorema de Brézis-Lieb para N-funções que

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ em } L_\Phi(\Omega),$$

isto é,

$$\frac{\partial (u_n - u)}{\partial x_i} \rightharpoonup 0 \text{ em } L_\Phi(\Omega).$$

Deste fato,

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \phi(|\nabla u|) \frac{\partial u}{\partial x_i} . \frac{\partial (u_n - u)}{\partial x_i} dx \to 0,$$

ou seja,

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u|) \nabla u (\nabla u_n - \nabla u) dx \to 0. \tag{19}$$

segue novamente do Teorema de Brézis-Lieb para N-funções que

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ em } L_\Phi(\Omega),$$

isto é,

$$\frac{\partial (u_n - u)}{\partial x_i} \rightharpoonup 0 \text{ em } L_\Phi(\Omega).$$

Deste fato,

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \phi(|\nabla u|) \frac{\partial u}{\partial x_i} . \frac{\partial (u_n - u)}{\partial x_i} dx \to 0,$$

ou seja,

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u|) \nabla u (\nabla u_n - \nabla u) dx \to 0. \tag{19}$$

De (18) e (19),

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u_n|) \nabla u_n (\nabla u_n - \nabla u) dx \to 0, \tag{20}$$

como queríamos provar.

Agora, utilizando (16), (17) e (20),

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)\,|\nabla u_n|^2\,dx \to \int_\Omega \phi(|\nabla u|)\,|\nabla u|^2\,dx,$$

mostrando assim a afirmação (v).

---

[4] Sejam $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ sequências de funções integráveis em Ω e f, g integráveis em Ω, tais que:

- $f_n \to f$ q.t.p. em Ω,
- $g_n \to g$ q.t.p. em Ω,
- $|f_n| \leq g_n$,
- $\int_\Omega g_n \to \int_\Omega g$.

Então,

$$\int_\Omega f_n \to \int_\Omega f$$

Agora, utilizando (16), (17) e (20),

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)\,|\nabla u_n|^2\,dx \to \int_\Omega \phi(|\nabla u|)\,|\nabla u|^2\,dx,$$

mostrando assim a afirmação (v). De (i)-(v), segue do Teorema Generalizado de Lebesgue que[4]

[4] Sejam $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ sequências de funções integráveis em Ω e f, g integráveis em Ω, tais que:

- $f_n \to f$ q.t.p. em Ω,
- $g_n \to g$ q.t.p. em Ω,
- $|f_n| \leq g_n$,
- $\int_\Omega g_n \to \int_\Omega g$.

Então,

$$\int_\Omega f_n \to \int_\Omega f$$

Agora, utilizando (16), (17) e (20),

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)\,|\nabla u_n|^2\,dx \to \int_\Omega \phi(|\nabla u|)\,|\nabla u|^2\,dx,$$

mostrando assim a afirmação (v). De (i)-(v), segue do Teorema Generalizado de Lebesgue que[4]

$$\int_\Omega \Phi(|\nabla u_n - \nabla u|)dx \to 0,$$

---

[4] Sejam $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ sequências de funções integráveis em Ω e f, g integráveis em Ω, tais que:

- $f_n \to f$ q.t.p. em Ω,
- $g_n \to g$ q.t.p. em Ω,
- $|f_n| \leq g_n$,
- $\int_\Omega g_n \to \int_\Omega g$.

Então,

$$\int_\Omega f_n \to \int_\Omega f$$

Agora, utilizando (16), (17) e (20),

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u_n|)\,|\nabla u_n|^2\,dx \to \int_\Omega \phi(|\nabla u|)\,|\nabla u|^2\,dx,$$

mostrando assim a afirmação (v). De (i)-(v), segue do Teorema Generalizado de Lebesgue que[4]

$$\int_\Omega \Phi(|\nabla u_n - \nabla u|)dx \to 0,$$

donde, segue-se que

$$u_n \to u \text{ em } W_0^{1,\Phi}(\Omega). \blacksquare$$

---

[4] Sejam $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ sequências de funções integráveis em Ω e f, g integráveis em Ω, tais que:

- $f_n \to f$ q.t.p. em Ω,
- $g_n \to g$ q.t.p. em Ω,
- $|f_n| \leq g_n$,
- $\int_\Omega g_n \to \int_\Omega g$.

Então,

$$\int_\Omega f_n \to \int_\Omega f$$

Proposição 5.5

Se Φ satisfaz (ϕ_1) e (ϕ_2), então

$$P' : W_0^{1,\Phi}(\Omega) \to W_0^{1,\Phi}(\Omega)^* \text{ é pseudomonotônico}^a.$$

---

[a] Seja X um espaço de Banach reflexivo. Um funcional $T : X \to X^*$ é dito **pseudomonotônico** se toda sequência $\{u_n\} \subset X$ tal que

- $u_n \rightharpoonup u$ em X
- $\limsup_{n\to\infty} \langle T(u_n), u_n - u\rangle \leq 0$,

implicar que

$$T(u_n) \rightharpoonup T(u) \text{ em } X^*$$

e

$$\langle T(u_n), u_n\rangle \to \langle T(u), u\rangle.$$

Proposição 5.6

Seja Φ uma função verificando (ϕ_1) e (ϕ_2). Se

- $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$

Proposição 5.6

Seja Φ uma função verificando (ϕ_1) e (ϕ_2). Se

- $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ e
- $\limsup_{n\to\infty} \langle P'(u_n), u_n - u\rangle \leq 0$,

Proposição 5.6

Seja Φ uma função verificando (ϕ_1) e (ϕ_2). Se

- $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ e
- $\limsup_{n\to\infty} \langle P'(u_n), u_n - u\rangle \leq 0$,

então

$$u_n \to u \text{ em } W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Proposição 5.6

Seja Φ uma função verificando (ϕ_1) e (ϕ_2). Se

- $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ e
- $\limsup_{n\to\infty} \langle P'(u_n), u_n - u\rangle \leq 0$,

então

$$u_n \to u \text{ em } W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Neste caso, diz-se que P' é um **operador do tipo** (S_+)**.**

Propriedades do operador

Agora verificaremos algumas propriedades sobre o operador Φ-Laplaciano definido por

$$-\Delta_{\Phi} u := -div(\phi(|\ \nabla u\ |)\nabla u), u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Propriedades do operador

Agora verificaremos algumas propriedades sobre o operador Φ-Laplaciano definido por

$$-\Delta_{\Phi} u := -div(\phi(|\nabla u|)\nabla u), u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Dada uma função $h \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)^*$, dizemos que $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é uma solução fraca de

$$\begin{cases} -div(\phi(|\nabla u|)\nabla u) = h, & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0, & \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{21}$$

Propriedades do operador

Agora verificaremos algumas propriedades sobre o operador Φ-Laplaciano definido por

$$-\Delta_\Phi u := -div(\phi(|\nabla u|)\nabla u), u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Dada uma função $h \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)^*$, dizemos que $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é uma solução fraca de

$$\begin{cases} -div(\phi(|\nabla u|)\nabla u) = h, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{21}$$

se satisfaz

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u \nabla \varphi dx = \langle h, \varphi \rangle \text{ para todo } \varphi \in W_0^{1,\Phi}(\Omega),$$

Propriedades do operador

Agora verificaremos algumas propriedades sobre o operador Φ-Laplaciano definido por

$$-\Delta_\Phi u := -div(\phi(|\nabla u|)\nabla u), u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

Dada uma função $h \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)^*$, dizemos que $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é uma solução fraca de

$$\begin{cases} -div(\phi(|\nabla u|)\nabla u) = h, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{21}$$

se satisfaz

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u \nabla \varphi dx = \langle h, \varphi \rangle \text{ para todo } \varphi \in W_0^{1,\Phi}(\Omega),$$

onde $\langle ., . \rangle$ denota a dualidade entre os espaços $W_0^{1,\Phi}(\Omega)^*$ e $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

Definição

Sejam $u, v \in W^{1,\Phi}(\Omega)$. Dizemos que

$$-\Delta_\Phi u \leq -\Delta_\Phi v \text{ em } \Omega,$$

Definição

Sejam $u, v \in W^{1,\Phi}(\Omega)$. Dizemos que

$$-\Delta_\Phi u \leq -\Delta_\Phi v \text{ em } \Omega,$$

se

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u \nabla \varphi \, dx \leq \int_\Omega \phi(|\nabla v|)\nabla v \nabla \varphi \, dx,$$

para todo $\varphi \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, com $\varphi \geq 0$.

Proposição 5.7 (Maximum Principle)

Sejam $u, v \in W^{1,\Phi}(\Omega)$. Se

$$-\Delta_\Phi u \leq -\Delta_\Phi v \text{ em } \Omega$$

Proposição 5.7 (Maximum Principle)

Sejam $u, v \in W^{1,\Phi}(\Omega)$. Se

$$-\Delta_\Phi u \leq -\Delta_\Phi v \text{ em } \Omega$$

e

$$u \leq v \text{ na } \partial\Omega \text{ (ou seja, } (u-v)^+ \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)),$$

Proposição 5.7 (Maximum Principle)

Sejam $u, v \in W^{1,\Phi}(\Omega)$. Se

$$-\Delta_\Phi u \leq -\Delta_\Phi v \text{ em } \Omega$$

e

$$u \leq v \text{ na } \partial\Omega \text{ (ou seja, } (u-v)^+ \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)),$$

então

$$u \leq v \text{ em } \Omega.$$

Demonstração: Assumindo que

- $-\Delta_\Phi u \leq -\Delta_\Phi v$ em Ω,

Demonstração: Assumindo que

- $-\Delta_\Phi u \leq -\Delta_\Phi v$ em Ω,
- $(u-v)^+ \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$,

Demonstração: Assumindo que

- $-\Delta_\Phi u \leq -\Delta_\Phi v$ em Ω,
- $(u-v)^+ \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$,

temos

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u \nabla (u-v)^+ dx \leq \int_\Omega \phi(|\nabla v|)\nabla v \nabla (u-v)^+ dx.$$

Demonstração: Assumindo que

- $-\Delta_\Phi u \leq -\Delta_\Phi v$ em Ω,
- $(u-v)^+ \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$,

temos

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u \nabla (u-v)^+ dx \leq \int_\Omega \phi(|\nabla v|)\nabla v \nabla (u-v)^+ dx.$$

Dessa forma, considerando $\Omega_1 = \{x \in \Omega; u(x) - v(x) \geq 0\}$, obtemos

$$\int_{\Omega_1} \langle \phi(|\nabla u|)\nabla u \quad - \quad \phi(|\nabla v|)\nabla v, \nabla (u-v)\rangle dx$$

Demonstração: Assumindo que

- $-\Delta_\Phi u \leq -\Delta_\Phi v$ em Ω,
- $(u-v)^+ \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$,

temos

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u \nabla (u-v)^+ dx \leq \int_\Omega \phi(|\nabla v|)\nabla v \nabla (u-v)^+ dx.$$

Dessa forma, considerando $\Omega_1 = \{x \in \Omega; u(x) - v(x) \geq 0\}$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \langle \phi(|\nabla u|)\nabla u &- \phi(|\nabla v|)\nabla v, \nabla(u-v)\rangle dx \\ &= \int_\Omega \langle \phi(|\nabla u|)\nabla u - \phi(|\nabla v|)\nabla v, \nabla(u-v)^+\rangle dx \end{aligned}$$

Demonstração: Assumindo que

- $-\Delta_\Phi u \leq -\Delta_\Phi v$ em Ω,
- $(u-v)^+ \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$,

temos

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u \nabla (u-v)^+ dx \leq \int_\Omega \phi(|\nabla v|)\nabla v \nabla (u-v)^+ dx.$$

Dessa forma, considerando $\Omega_1 = \{x \in \Omega; u(x) - v(x) \geq 0\}$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1} \langle \phi(|\nabla u|)\nabla u &- \phi(|\nabla v|)\nabla v, \nabla(u-v)\rangle dx \\ &= \int_\Omega \langle \phi(|\nabla u|)\nabla u - \phi(|\nabla v|)\nabla v, \nabla(u-v)^+\rangle dx \\ &\leq 0.\end{aligned}$$

Segue da Proposição 5.4 que

$$\nabla(u - v) = 0, \text{ q.t.p. em } \Omega_1,$$

Segue da Proposição 5.4 que

$$\nabla(u - v) = 0, \text{ q.t.p. em } \Omega_1,$$

donde segue-se que

$$\nabla(u - v)^+ = 0, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Segue da Proposição 5.4 que

$$\nabla(u - v) = 0, \text{ q.t.p. em } \Omega_1,$$

donde segue-se que

$$\nabla(u - v)^+ = 0, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Portanto, usando o fato de que $(u - v)^+ \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$

Segue da Proposição 5.4 que

$$\nabla(u - v) = 0, \text{ q.t.p. em } \Omega_1,$$

donde segue-se que

$$\nabla(u - v)^+ = 0, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Portanto, usando o fato de que $(u - v)^+ \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, obtemos que

$$(u - v)^+ = 0 \text{ em } \Omega,$$

Segue da Proposição 5.4 que

$$\nabla(u - v) = 0, \text{ q.t.p. em } \Omega_1,$$

donde segue-se que

$$\nabla(u - v)^+ = 0, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Portanto, usando o fato de que $(u - v)^+ \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, obtemos que

$$(u - v)^+ = 0 \text{ em } \Omega,$$

isto é,

$$u \leq v, \text{ q.t.p. em } \Omega. \blacksquare$$

Proposição 5.8

O operador $-\Delta_\Phi(.)$ é um homeomorfismo de $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)^*$.

Proposição 5.8

O operador $-\Delta_\Phi(.)$ é um homeomorfismo de $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)^*$.

Demonstração: Utilizando o fato de $\Phi \in \Delta_2$, existe $k > 0$ tal que

$$\widetilde{\Phi}(\phi(t)t) \leq \Phi(2t) \leq k\Phi(t), \quad t \geq 0.$$

Proposição 5.8

O operador $-\Delta_\Phi(.)$ é um homeomorfismo de $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)^*$.

Demonstração: Utilizando o fato de $\Phi \in \Delta_2$, existe $k > 0$ tal que

$$\widetilde{\Phi}(\phi(t)t) \leq \Phi(2t) \leq k\Phi(t), \quad t \geq 0.$$

Assim,

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}(\phi(|\nabla u|)\,|\nabla u|)dx \leq k \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx,$$

para todo $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

Afirmamos que

$$| \phi(| \nabla u |)\nabla u |_{\widetilde{\Phi}} \leq \max\left\{1, k\int_{\Omega} \Phi(| \nabla u |)dx\right\}.$$

Afirmamos que

$$| \phi(| \nabla u |)\nabla u |_{\widetilde{\Phi}} \leq \max\left\{1, k\int_{\Omega} \Phi(| \nabla u |)dx\right\}.$$

De fato, para todo $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ não identicamente nulo vale que

$$\frac{\int_{\Omega} \widetilde{\Phi}(\phi(| \nabla u |) \mid \nabla u |)dx}{k\int_{\Omega} \Phi(| \nabla u |)dx} \leq 1. \tag{22}$$

- Se $k \int_\Omega \Phi(|\ \nabla u\ |)dx \geq 1$,

- Se $k\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx \geq 1$, tem-se

$$\frac{\int_\Omega \widetilde{\Phi}(\phi(|\nabla u|)\,|\nabla u|)dx}{k\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx} \geq \int_\Omega \widetilde{\Phi}\Big(\frac{\phi(|\nabla u|)\,|\nabla u|}{k(\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx)}\Big)dx,$$

- Se $k\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx \geq 1$, tem-se

$$\frac{\int_\Omega \widetilde{\Phi}(\phi(|\nabla u|)\,|\nabla u|)dx}{k\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx} \geq \int_\Omega \widetilde{\Phi}\Big(\frac{\phi(|\nabla u|)\,|\nabla u|}{k(\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx)}\Big)dx,$$

donde segue-se, de (22), que

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}\Big(\frac{\phi(|\nabla u|)\,|\nabla u|}{k(\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx)}\Big)dx \leq 1$$

- Se $k\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx \geq 1$, tem-se

$$\frac{\int_\Omega \widetilde{\Phi}(\phi(|\nabla u|)\,|\nabla u|)dx}{k\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx} \geq \int_\Omega \widetilde{\Phi}\Big(\frac{\phi(|\nabla u|)\,|\nabla u|}{k(\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx)}\Big)dx,$$

donde segue-se, de (22), que

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}\Big(\frac{\phi(|\nabla u|)\,|\nabla u|}{k(\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx)}\Big)dx \leq 1$$

implicando que

$$|\,\phi(|\nabla u|)\nabla u\,|_{\widetilde{\Phi}} \leq k\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx.$$

- Se $k \int_\Omega \Phi(\mid \nabla u \mid) dx < 1$.

- Se $k \int_\Omega \Phi(\mid \nabla u \mid) dx < 1$.
  Segue de (22),

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}\Big(\frac{\phi(\mid \nabla u \mid) \mid \nabla u \mid}{1}\Big) dx < 1,$$

- Se $k \int_\Omega \Phi(\mid \nabla u \mid) dx < 1$.
  Segue de (22),

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}\Big(\frac{\phi(\mid \nabla u \mid) \mid \nabla u \mid}{1}\Big) dx < 1,$$

  logo

$$\mid \phi(\mid \nabla u \mid) \nabla u \mid_{\widetilde{\Phi}} \leq 1.$$

- Se $k \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx < 1$.
  Segue de (22),

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}\Big(\frac{\phi(|\nabla u|)\,|\nabla u|}{1}\Big)dx < 1,$$

  logo

$$|\phi(|\nabla u|)\nabla u|_{\widetilde{\Phi}} \leq 1.$$

Portanto,

$$|\phi(|\nabla u|)\nabla u|_{\widetilde{\Phi}} \leq \max\left\{1, k\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx\right\}.$$

Agora, usando a desigualdade de Holder, segue que

$$\left| \int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u \nabla v dx \right| \leq 2. |\phi(|\nabla u|)\nabla u|_{\widetilde{\Phi}} . |\nabla v|_{\Phi}$$

Agora, usando a desigualdade de Holder, segue que

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u \nabla v dx\right| &\leq 2.|\phi(|\nabla u|)\nabla u|_{\widetilde{\Phi}}.|\nabla v|_{\Phi} \\ &\leq 2.\max\left\{1, k\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx\right\}.|\nabla v|_{\Phi},\end{aligned}$$

para todo $u, v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

Agora, usando a desigualdade de Holder, segue que

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u \nabla v dx\right| &\leq 2.\,|\,\phi(|\nabla u|)\nabla u\,|_{\widetilde{\Phi}}\,.\,|\nabla v|_\Phi \\ &\leq 2.\max\left\{1, k\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx\right\}.\,|\nabla v|_\Phi,\end{aligned}$$

para todo $u, v \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.
Isto mostra que $\Delta_\Phi u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)^*$ para todo $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

Usando as Proposições 5.1, 5.3 e 5.4, obtemos que o operador é contínuo, coercivo e monotônico em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$,

[5] Sejam E um espaço de Banach reflexivo e $A : E \to E^*$ um operador contínuo, monotônico e coercivo. Então para cada $f \in E^*$ existe uma única solução $u \in E$ da equação $Au = f$.

Usando as Proposições 5.1, 5.3 e 5.4, obtemos que o operador é contínuo, coercivo e monotônico em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, e daí segue do Teorema de Browder-Minty[5]

[5] Sejam E um espaço de Banach reflexivo e $A : E \to E^*$ um operador contínuo, monotônico e coercivo. Então para cada $f \in E^*$ existe uma única solução $u \in E$ da equação $Au = f$.

Usando as Proposições 5.1, 5.3 e 5.4, obtemos que o operador é contínuo, coercivo e monotônico em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, e daí segue do Teorema de Browder-Minty[5] que, para $h \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)^*$, o problema

$$\begin{cases} -\Delta_\Phi u = h, & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0, & \text{em} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

possui única solução.

[5] Sejam E um espaço de Banach reflexivo e $A : E \to E^*$ um operador contínuo, monotônico e coercivo. Então para cada $f \in E^*$ existe uma única solução $u \in E$ da equação $Au = f$.

Usando as Proposições 5.1, 5.3 e 5.4, obtemos que o operador é contínuo, coercivo e monotônico em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, e daí segue do Teorema de Browder-Minty[5] que, para $h \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)^*$, o problema

$$\begin{cases} -\Delta_\Phi u = h, & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0, & \text{em} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

possui única solução. Dessa maneira, fica bem definido o operador inverso de $-\Delta_\Phi$, dado por

$$\begin{aligned} (-\Delta_\Phi)^{-1} : W_0^{1,\Phi}(\Omega)^* &\to W_0^{1,\Phi}(\Omega) \\ h &\mapsto (-\Delta_\Phi)^{-1} h = u. \end{aligned}$$

[5] Sejam E um espaço de Banach reflexivo e $A : E \to E^*$ um operador contínuo, monotônico e coercivo. Então para cada $f \in E^*$ existe uma única solução $u \in E$ da equação $Au = f$.

Agora, provaremos a continuidade do operador inverso. Tome $h_n, h_0 \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, com $h_n \neq h_0$ e $h_n \to h_0$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)^*$, e $u_n, u_0 \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ soluções de

$$-div(\phi(|\nabla u_n|)\nabla u_n) = h_n,$$

e

$$-div(\phi(|\nabla u_0|)\nabla u_0) = h_0,$$

respectivamente.

Afirmamos que $\{u_n\}$ é limitada em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

De fato, caso contrário existiria uma subsequência $\{u_{n_k}\} \subset \{u_n\}$ tal que $|\nabla u_{n_k}|_\Phi \to \infty$.
Daí,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi(|\nabla u_{n_k}|)dx &\leq \int_\Omega |\nabla u_{n_k}|^2 \phi(|\nabla u_{n_k}|)dx \\ &= \langle h_{n_k}, u_{n_k}\rangle \\ &\leq \|h_{n_k}\|_* |\nabla u_{n_k}|_\Phi,\end{aligned}$$

donde segue-se, pelo Lema 5.2

$$\begin{aligned}\|h_{n_k}\|_* &\geq \frac{\int_\Omega \Phi(|\nabla u_{n_k}|)dx}{|\nabla u_{n_k}|_\Phi} \\ &\geq \frac{\xi_0(|\nabla u_{n_k}|_\Phi)}{|\nabla u_{n_k}|_\Phi} \to \infty,\end{aligned}$$

o que é um absurdo, já que $\{h_{n_k}\}$ é convergente, e portanto, limitada.
Logo, $\{u_n\}$ é limitada em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

Deste modo,

$$\int_\Omega (\phi(|\ \nabla u_n\ |)\nabla u_n - \phi(|\ \nabla u_0\ |)\nabla u_0).(\nabla u_n - \nabla u_0)dx$$
$$= \langle h_n - h_0, u_n - u_0 \rangle \to 0, \qquad n \to \infty.$$

E segue do Lema 5.3 que

$$u_n \to u_0 \text{ em } W_0^{1,\Phi}(\Omega). \blacksquare$$

Em [1][6] e [2][7], Lieberman mostrou resultados de regularidade para soluções fracas de problemas de valores de contorno do tipo:

$$\begin{cases} divA(x,u,\nabla u) + B(x,u,\nabla u) = 0, \text{ em } \Omega \\ u = \varphi, \text{ na } \partial\Omega. \end{cases}$$

Aplicando seus resultados para o operador $-\Delta_\Phi u$, temos o seguinte lema.

---

[6] LIEBERMAN, G. M. *Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlinear Anal 12, 1203-1219, 1988.

[7] LIEBERMAN, G. M. *The natural generalization of the natural conditions of Ladyzhenskaya and Ural'tseva for elliptic equations*, Comm. Partial Differential Equations 16, 311-361, 1991.

Lema 5.7

Seja $h \in L^{\infty}(\Omega)$ e $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ uma solução fraca de

$$\begin{cases} -div(\phi(|\nabla u|)\nabla u) = h, & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0, & \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Então $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ para algum $\alpha > 0$ dependente de a_0, a_1, l e m. Além disso, existe uma constante $K = K(\| h \|_{L^{\infty}(\Omega)}) > 0$ tal que

$$\| u \|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq K.$$

Essa constante K tende a 0 quando $\| h \|_{L^{\infty}(\Omega)}$ se aproxima de 0.