Espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev
Segunda Aula: Condição Δ_2 e espaço E_Φ

Prof. Jefferson Abrantes

(Universidade Federal de Campina Grande)

Curso de Verão 2020

DM-UFSCAR

São Carlos-SP

Condição Δ_2

Vimos anterormente que nem sempre a classe de Orlicz $K_\Phi(\Omega)$ será um espaço vetorial.

Condição Δ_2

Vimos anterormente que nem sempre a classe de Orlicz $K_\Phi(\Omega)$ será um espaço vetorial.
Apresentaremos a seguir alguns resultados para N-funções que satisfazem uma condição especial **(condição Δ_2)**

Condição Δ_2

Vimos anterormente que nem sempre a classe de Orlicz $K_\Phi(\Omega)$ será um espaço vetorial.
Apresentaremos a seguir alguns resultados para N-funções que satisfazem uma condição especial **(condição Δ_2)** e, posteriormente, verificaremos que esta condição é necessária e suficiente para que $K_\Phi(\Omega)$ seja um espaço vetorial

Condição Δ_2

Vimos anterormente que nem sempre a classe de Orlicz $K_\Phi(\Omega)$ será um espaço vetorial.
Apresentaremos a seguir alguns resultados para N-funções que satisfazem uma condição especial **(condição Δ_2)** e, posteriormente, verificaremos que esta condição é necessária e suficiente para que $K_\Phi(\Omega)$ seja um espaço vetorial, ou melhor para que $K_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$.

Condição Δ_2

Vimos anterormente que nem sempre a classe de Orlicz $K_\Phi(\Omega)$ será um espaço vetorial.
Apresentaremos a seguir alguns resultados para N-funções que satisfazem uma condição especial **(condição Δ_2)** e, posteriormente, verificaremos que esta condição é necessária e suficiente para que $K_\Phi(\Omega)$ seja um espaço vetorial, ou melhor para que $K_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$.

Definição

A função Φ satisfaz a **condição** Δ_2, e escreve-se $\Phi \in \Delta_2$

Condição Δ_2

Vimos anterormente que nem sempre a classe de Orlicz $K_\Phi(\Omega)$ será um espaço vetorial.
Apresentaremos a seguir alguns resultados para N-funções que satisfazem uma condição especial **(condição Δ_2)** e, posteriormente, verificaremos que esta condição é necessária e suficiente para que $K_\Phi(\Omega)$ seja um espaço vetorial, ou melhor para que $K_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$.

Definição

A função Φ satisfaz a **condição** Δ_2, e escreve-se $\Phi \in \Delta_2$, se existirem $k > 0$ e $t_0 \geq 0$, tais que

$$\Phi(2t) \leq k\Phi(t), \ t \geq t_0.$$

Condição Δ_2

Vimos anterormente que nem sempre a classe de Orlicz $K_\Phi(\Omega)$ será um espaço vetorial.
Apresentaremos a seguir alguns resultados para N-funções que satisfazem uma condição especial **(condição Δ_2)** e, posteriormente, verificaremos que esta condição é necessária e suficiente para que $K_\Phi(\Omega)$ seja um espaço vetorial, ou melhor para que $K_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$.

Definição

A função Φ satisfaz a **condição** Δ_2, e escreve-se $\Phi \in \Delta_2$, se existirem $k > 0$ e $t_0 \geq 0$, tais que

$$\Phi(2t) \leq k\Phi(t), \ t \geq t_0.$$

Para o caso onde $\mid \Omega \mid = +\infty$,

Condição Δ_2

Vimos anterormente que nem sempre a classe de Orlicz $K_\Phi(\Omega)$ será um espaço vetorial.
Apresentaremos a seguir alguns resultados para N-funções que satisfazem uma condição especial **(condição Δ_2)** e, posteriormente, verificaremos que esta condição é necessária e suficiente para que $K_\Phi(\Omega)$ seja um espaço vetorial, ou melhor para que $K_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$.

Definição

A função Φ satisfaz a **condição** Δ_2, e escreve-se $\Phi \in \Delta_2$, se existirem $k > 0$ e $t_0 \geq 0$, tais que

$$\Phi(2t) \leq k\Phi(t), \ t \geq t_0.$$

Para o caso onde $|\ \Omega\ | = +\infty$, dizemos que $\Phi \in \Delta_2$ se Φ verificar esta desigualdade para $t_0 = 0$.

Lema 2.1

A função Φ satisfaz a condição Δ_2 se, e só se para cada $s > 1$, existirem $k_s > 0$ e $t_0 \geq 0$

Lema 2.1

A função Φ satisfaz a condição Δ_2 se, e só se para cada $s > 1$, existirem $k_s > 0$ e $t_0 \geq 0$ tais que

$$\Phi(st) \leq k_s \Phi(t), \ t \geq t_0.$$

Lema 2.1

A função Φ satisfaz a condição Δ_2 se, e só se para cada $s > 1$, existirem $k_s > 0$ e $t_0 \geq 0$ tais que

$$\Phi(st) \leq k_s \Phi(t), \ t \geq t_0.$$

Para o caso onde $\mid \Omega \mid = +\infty$ o resultado vale para $t_0 = 0$.

Proposição 2.1

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto de medida finita e $\Phi \in \Delta_2$

Proposição 2.1

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto de medida finita e $\Phi \in \Delta_2$. Então

$$u_n \to u \text{ em } L_\Phi(\Omega) \Leftrightarrow \int_\Omega \Phi(|\, u_n - u \,|)dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Proposição 2.1

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto de medida finita e $\Phi \in \Delta_2$. Então

$$u_n \to u \text{ em } L_\Phi(\Omega) \Leftrightarrow \int_\Omega \Phi(|\, u_n - u \,|)dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Demonstração: Se $u_n \to u$ em $L_\Phi(\Omega)$

Proposição 2.1

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto de medida finita e $\Phi \in \Delta_2$. Então

$$u_n \to u \text{ em } L_\Phi(\Omega) \Leftrightarrow \int_\Omega \Phi(|\, u_n - u \,|)dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Demonstração: Se $u_n \to u$ em $L_\Phi(\Omega)$, então

$$|\, u_n - u \,|_\Phi \to 0,$$

Proposição 2.1

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto de medida finita e $\Phi \in \Delta_2$. Então

$$u_n \to u \text{ em } L_\Phi(\Omega) \Leftrightarrow \int_\Omega \Phi(|\, u_n - u \,|)dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Demonstração: Se $u_n \to u$ em $L_\Phi(\Omega)$, então

$$|\, u_n - u \,|_\Phi \to 0,$$

donde

$$|\, u_n - u \,|_\Phi < 1,$$

para n suficientemente grande

Proposição 2.1

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto de medida finita e $\Phi \in \Delta_2$. Então

$$u_n \to u \text{ em } L_\Phi(\Omega) \Leftrightarrow \int_\Omega \Phi(|\, u_n - u \,|)dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Demonstração: Se $u_n \to u$ em $L_\Phi(\Omega)$, então

$$|\, u_n - u \,|_\Phi \to 0,$$

donde

$$|\, u_n - u \,|_\Phi < 1,$$

para n suficientemente grande. Então, segue pelo fato de Φ ser par que

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{u_n - u}{|\, u_n - u \,|_\Phi}\right) dx \leq 1$$

Proposição 2.1

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto de medida finita e $\Phi \in \Delta_2$. Então

$$u_n \to u \text{ em } L_\Phi(\Omega) \Leftrightarrow \int_\Omega \Phi(|\, u_n - u \,|)dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Demonstração: Se $u_n \to u$ em $L_\Phi(\Omega)$, então

$$|\, u_n - u \,|_\Phi \to 0,$$

donde

$$|\, u_n - u \,|_\Phi < 1,$$

para n suficientemente grande. Então, segue pelo fato de Φ ser par que

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{u_n - u}{|\, u_n - u \,|_\Phi}\right) dx \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|\, u_n - u \,|_\Phi} \int_\Omega \Phi(u_n - u)dx \leq 1$$

Proposição 2.1

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto de medida finita e $\Phi \in \Delta_2$. Então

$$u_n \to u \text{ em } L_\Phi(\Omega) \Leftrightarrow \int_\Omega \Phi(|\, u_n - u \,|)dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Demonstração: Se $u_n \to u$ em $L_\Phi(\Omega)$, então

$$|\, u_n - u \,|_\Phi \to 0,$$

donde

$$|\, u_n - u \,|_\Phi < 1,$$

para n suficientemente grande. Então, segue pelo fato de Φ ser par que

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{u_n - u}{|\, u_n - u \,|_\Phi}\right) dx \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|\, u_n - u \,|_\Phi} \int_\Omega \Phi(u_n - u)dx \leq 1$$

$$\Rightarrow \quad \int_\Omega \Phi(u_n - u)dx \leq |\, u_n - u \,|_\Phi$$

Proposição 2.1

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto de medida finita e $\Phi \in \Delta_2$. Então

$$u_n \to u \text{ em } L_\Phi(\Omega) \Leftrightarrow \int_\Omega \Phi(|\, u_n - u \,|)dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Demonstração: Se $u_n \to u$ em $L_\Phi(\Omega)$, então

$$|\, u_n - u \,|_\Phi \to 0,$$

donde

$$|\, u_n - u \,|_\Phi < 1,$$

para n suficientemente grande. Então, segue pelo fato de Φ ser par que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Phi\left(\frac{u_n - u}{|\, u_n - u \,|_\Phi}\right) dx \leq 1 \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{|\, u_n - u \,|_\Phi} \int_\Omega \Phi(u_n - u)dx \leq 1 \\ &\Rightarrow \quad \int_\Omega \Phi(u_n - u)dx \leq |\, u_n - u \,|_\Phi \\ &\Rightarrow \quad \int_\Omega \Phi(u_n - u)dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Reciprocamente, utilizando o Lema 2.1, para cada $s \in (0,1)$ existem constantes positivas k_s e t_s

Reciprocamente, utilizando o Lema 2.1, para cada $s \in (0,1)$ existem constantes positivas k_s e t_s satisfazendo

$$\Phi\left(\frac{t}{s}\right) \leq k_s \Phi(t),$$

para todo $t \geq t_s$

Reciprocamente, utilizando o Lema 2.1, para cada $s \in (0,1)$ existem constantes positivas k_s e t_s satisfazendo

$$\Phi\left(\frac{t}{s}\right) \leq k_s \Phi(t),$$

para todo $t \geq t_s$. Daí, fazendo $v_n = \mid u_n - u \mid$

Reciprocamente, utilizando o Lema 2.1, para cada $s \in (0,1)$ existem constantes positivas k_s e t_s satisfazendo

$$\Phi\left(\frac{t}{s}\right) \leq k_s \Phi(t),$$

para todo $t \geq t_s$. Daí, fazendo $v_n = \mid u_n - u \mid$, temos

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{v_n}{s}\right) dx = \int_{[|v_n| \leq t_s]} \Phi\left(\frac{v_n}{s}\right) dx + \int_{[|v_n| > t_s]} \Phi\left(\frac{v_n}{s}\right) dx$$

Reciprocamente, utilizando o Lema 2.1, para cada $s \in (0,1)$ existem constantes positivas k_s e t_s satisfazendo

$$\Phi\left(\frac{t}{s}\right) \leq k_s \Phi(t),$$

para todo $t \geq t_s$. Daí, fazendo $v_n = \mid u_n - u \mid$, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Phi\left(\frac{v_n}{s}\right) dx &= \int_{[|v_n| \leq t_s]} \Phi\left(\frac{v_n}{s}\right) dx + \int_{[|v_n| > t_s]} \Phi\left(\frac{v_n}{s}\right) dx \\
&\leq \int_{[|v_n| \leq t_s]} \Phi\left(\frac{v_n}{s}\right) dx + k_s \int_{[|v_n| > t_s]} \Phi(v_n) dx.
\end{aligned}$$

Reciprocamente, utilizando o Lema 2.1, para cada $s \in (0,1)$ existem constantes positivas k_s e t_s satisfazendo

$$\Phi\left(\frac{t}{s}\right) \leq k_s \Phi(t),$$

para todo $t \geq t_s$. Daí, fazendo $v_n = \mid u_n - u \mid$, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi\left(\frac{v_n}{s}\right) dx &= \int_{[|v_n| \leq t_s]} \Phi\left(\frac{v_n}{s}\right) dx + \int_{[|v_n| > t_s]} \Phi\left(\frac{v_n}{s}\right) dx \\ &\leq \int_{[|v_n| \leq t_s]} \Phi\left(\frac{v_n}{s}\right) dx + k_s \int_{[|v_n| > t_s]} \Phi(v_n) dx.\end{aligned}$$

Por outro lado, como $\int_\Omega \Phi(v_n) dx \to 0$

Reciprocamente, utilizando o Lema 2.1, para cada $s \in (0,1)$ existem constantes positivas k_s e t_s satisfazendo

$$\Phi\left(\frac{t}{s}\right) \leq k_s \Phi(t),$$

para todo $t \geq t_s$. Daí, fazendo $v_n = \mid u_n - u \mid$, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Phi\left(\frac{v_n}{s}\right) dx &= \int_{[|v_n| \leq t_s]} \Phi\left(\frac{v_n}{s}\right) dx + \int_{[|v_n| > t_s]} \Phi\left(\frac{v_n}{s}\right) dx \\ &\leq \int_{[|v_n| \leq t_s]} \Phi\left(\frac{v_n}{s}\right) dx + k_s \int_{[|v_n| > t_s]} \Phi(v_n) dx.\end{aligned}$$

Por outro lado, como $\int_\Omega \Phi(v_n) dx \to 0$, então

$$k_s \int_{[|v_n| > t_s]} \Phi(v_n) dx \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Afirmamos que $\int_{[|v_n| \leq t_s]} \Phi(\frac{v_n}{s}) dx \to 0$ quando $n \to \infty$.

Afirmamos que $\int_{[|v_n| \leq t_s]} \Phi(\frac{v_n}{s}) dx \to 0$ quando $n \to \infty$.

De fato, consideremos

$$x_n := \int_{[|v_n| \leq t_s]} \Phi\left(\frac{v_n}{s}\right) dx, \ n \in \mathbb{N}.$$

Afirmamos que $\int_{[|v_n| \leq t_s]} \Phi(\frac{v_n}{s}) dx \to 0$ quando $n \to \infty$.

De fato, consideremos

$$x_n := \int_{[|v_n| \leq t_s]} \Phi\left(\frac{v_n}{s}\right) dx, \ n \in \mathbb{N}.$$

Como $\int_\Omega \Phi(v_n) dx \to 0$

Afirmamos que $\int_{[|v_n| \leq t_s]} \Phi(\frac{v_n}{s}) dx \to 0$ quando $n \to \infty$.

De fato, consideremos

$$x_n := \int_{[|v_n| \leq t_s]} \Phi\left(\frac{v_n}{s}\right) dx, \ n \in \mathbb{N}.$$

Como $\int_\Omega \Phi(v_n) dx \to 0$, então existe uma subsequência $\{v_{n_k}\}$ tal que

$$v_{n_k}(x) \to 0, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Afirmamos que $\int_{[|v_n|\leq t_s]} \Phi(\frac{v_n}{s})dx \to 0$ quando $n \to \infty$.

De fato, consideremos

$$x_n := \int_{[|v_n|\leq t_s]} \Phi\left(\frac{v_n}{s}\right) dx, \ n \in \mathbb{N}.$$

Como $\int_\Omega \Phi(v_n)dx \to 0$, então existe uma subsequência $\{v_{n_k}\}$ tal que

$$v_{n_k}(x) \to 0, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Assim,

$$\Phi\left(\frac{v_{n_k}(x)}{s}\right) \chi_{[|v_{n_k}|\leq t_s]}(x) \to 0, \text{ q.t.p. em } \Omega, \tag{1}$$

Afirmamos que $\int_{[|v_n| \leq t_s]} \Phi(\frac{v_n}{s}) dx \to 0$ quando $n \to \infty$.

De fato, consideremos

$$x_n := \int_{[|v_n| \leq t_s]} \Phi\left(\frac{v_n}{s}\right) dx, \ n \in \mathbb{N}.$$

Como $\int_\Omega \Phi(v_n) dx \to 0$, então existe uma subsequência $\{v_{n_k}\}$ tal que

$$v_{n_k}(x) \to 0, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Assim,

$$\Phi\left(\frac{v_{n_k}(x)}{s}\right) \chi_{[|v_{n_k}| \leq t_s]}(x) \to 0, \text{ q.t.p. em } \Omega, \tag{1}$$

onde $\chi_{[|v_{n_k}| \leq t_s]}(x)$ é a função característica do conjunto $\{x \in \Omega :| \ v_{n_k}(x) \leq t_s\}$.

Observemos ainda que

$$\Phi\left(\frac{v_{n_k}(x)}{s}\right)\chi_{[|v_n|\leq t_s]}(x) \leq \Phi\left(\frac{t_s}{s}\right) \in L^1(\Omega). \tag{2}$$

Observemos ainda que

$$\Phi\left(\frac{v_{n_k}(x)}{s}\right)\chi_{[|v_n|\leq t_s]}(x) \leq \Phi\left(\frac{t_s}{s}\right) \in L^1(\Omega). \tag{2}$$

De (1) e (2), segue que

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{v_{n_k}(x)}{s}\right)\chi_{[|v_n|\leq t_s]}(x)dx \to 0,$$

Observemos ainda que

$$\Phi\left(\frac{v_{n_k}(x)}{s}\right)\chi_{[|v_n|\leq t_s]}(x) \leq \Phi\left(\frac{t_s}{s}\right) \in L^1(\Omega). \tag{2}$$

De (1) e (2), segue que

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{v_{n_k}(x)}{s}\right)\chi_{[|v_n|\leq t_s]}(x)dx \to 0,$$

ou seja,

$$\int_{[|v_n|\leq t_s]} \Phi\left(\frac{v_{n_k}}{s}\right)dx \to 0.$$

Observemos ainda que

$$\Phi\left(\frac{v_{n_k}(x)}{s}\right)\chi_{[|v_n|\leq t_s]}(x) \leq \Phi\left(\frac{t_s}{s}\right) \in L^1(\Omega). \tag{2}$$

De (1) e (2), segue que

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{v_{n_k}(x)}{s}\right)\chi_{[|v_n|\leq t_s]}(x)dx \to 0,$$

ou seja,

$$\int_{[|v_n|\leq t_s]} \Phi\left(\frac{v_{n_k}}{s}\right)dx \to 0.$$

Dessa forma,

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{v_{n_k}}{s}\right)dx \leq 1,$$

para n_k suficientemente grande.

Observemos ainda que

$$\Phi\left(\frac{v_{n_k}(x)}{s}\right)\chi_{[|v_n|\leq t_s]}(x) \leq \Phi\left(\frac{t_s}{s}\right) \in L^1(\Omega). \tag{2}$$

De (1) e (2), segue que

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{v_{n_k}(x)}{s}\right)\chi_{[|v_n|\leq t_s]}(x)dx \to 0,$$

ou seja,

$$\int_{[|v_n|\leq t_s]} \Phi\left(\frac{v_{n_k}}{s}\right)dx \to 0.$$

Dessa forma,

$$\int_\Omega \Phi\left(\frac{v_{n_k}}{s}\right)dx \leq 1,$$

para n_k suficientemente grande. Portanto,

$$|\ v_{n_k}\ |_\Phi \leq s, \text{ para } n_k \text{ suficientemente grande.}$$

Repetindo esse argumento, concluímos que toda subsequência de $\{v_n\}$ admite subsequência convergindo para 0 em $L_\Phi(\Omega)$.

Repetindo esse argumento, concluímos que toda subsequência de $\{v_n\}$ admite subsequência convergindo para 0 em $L_\Phi(\Omega)$.
Logo,

$$\mid v_n \mid_\Phi \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

Repetindo esse argumento, concluímos que toda subsequência de $\{v_n\}$ admite subsequência convergindo para 0 em $L_\Phi(\Omega)$.
Logo,

$$| \, v_n \, |_\Phi \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ou seja,

$$| \, u_n - u \, |_\Phi \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0. \blacksquare$$

Repetindo esse argumento, concluímos que toda subsequência de $\{v_n\}$ admite subsequência convergindo para 0 em $L_\Phi(\Omega)$.
Logo,

$$| v_n |_\Phi \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ou seja,

$$| u_n - u |_\Phi \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \blacksquare$$

Observação

Para o caso $\Omega = \mathbb{R}^N$, tendo em vista que $t_s = 0$, a demonstração é feita de modo análogo.

Proposição 2.2

$K_\Phi(\Omega)$ é um espaço vetorial (isto é $K_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$) se, e só se, Φ satisfaz a condição Δ_2.

Proposição 2.2

$K_\Phi(\Omega)$ é um espaço vetorial (isto é $K_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$) se, e só se, Φ satisfaz a condição Δ_2.

Demonstração: Suponha que Φ satisfaz a condição Δ_2.

Proposição 2.2

$K_\Phi(\Omega)$ é um espaço vetorial (isto é $K_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$) se, e só se, Φ satisfaz a condição Δ_2.

Demonstração: Suponha que Φ satisfaz a condição Δ_2.
Para mostrarmos que $K_\Phi(\Omega)$ é um espaço vetorial

Proposição 2.2

$K_\Phi(\Omega)$ é um espaço vetorial (isto é $K_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$) se, e só se, Φ satisfaz a condição Δ_2.

Demonstração: Suponha que Φ satisfaz a condição Δ_2.
Para mostrarmos que $K_\Phi(\Omega)$ é um espaço vetorial, devemos mostrar que

(i) $0 \in K_\Phi(\Omega)$;

Proposição 2.2

$K_\Phi(\Omega)$ é um espaço vetorial (isto é $K_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$) se, e só se, Φ satisfaz a condição Δ_2.

Demonstração: Suponha que Φ satisfaz a condição Δ_2.
Para mostrarmos que $K_\Phi(\Omega)$ é um espaço vetorial, devemos mostrar que

(*i*) $0 \in K_\Phi(\Omega)$;

(*ii*) $u + v \in K_\Phi(\Omega),\ u, v \in K_\Phi(\Omega)$;

Proposição 2.2

$K_\Phi(\Omega)$ é um espaço vetorial (isto é $K_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$) se, e só se, Φ satisfaz a condição Δ_2.

Demonstração: Suponha que Φ satisfaz a condição Δ_2.
Para mostrarmos que $K_\Phi(\Omega)$ é um espaço vetorial, devemos mostrar que

(*i*) $0 \in K_\Phi(\Omega)$;

(*ii*) $u + v \in K_\Phi(\Omega),\ u, v \in K_\Phi(\Omega)$;

(*iii*) $lu \in K_\Phi(\Omega),\ l \in \mathbb{R}$ e $u \in K_\Phi(\Omega)$.

Proposição 2.2

$K_\Phi(\Omega)$ é um espaço vetorial (isto é $K_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$) se, e só se, Φ satisfaz a condição Δ_2.

Demonstração: Suponha que Φ satisfaz a condição Δ_2.
Para mostrarmos que $K_\Phi(\Omega)$ é um espaço vetorial, devemos mostrar que

- (i) $0 \in K_\Phi(\Omega)$;
- (ii) $u + v \in K_\Phi(\Omega),\ u, v \in K_\Phi(\Omega)$;
- (iii) $lu \in K_\Phi(\Omega),\ l \in \mathbb{R}$ e $u \in K_\Phi(\Omega)$.

A verificação de (i) é imediata.

Proposição 2.2

$K_\Phi(\Omega)$ é um espaço vetorial (isto é $K_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$) se, e só se, Φ satisfaz a condição Δ_2.

Demonstração: Suponha que Φ satisfaz a condição Δ_2.
Para mostrarmos que $K_\Phi(\Omega)$ é um espaço vetorial, devemos mostrar que

- (i) $0 \in K_\Phi(\Omega)$;
- (ii) $u + v \in K_\Phi(\Omega),\ u, v \in K_\Phi(\Omega)$;
- (iii) $lu \in K_\Phi(\Omega),\ l \in \mathbb{R}$ e $u \in K_\Phi(\Omega)$.

A verificação de (i) é imediata.
Provemos a validade de (ii) e (iii).

Verificação de (iii)**:** Dado $I \in \mathbb{R}$, fixe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mid I \mid \leq 2^n$.

Verificação de (*iii*)**:** Dado $I \in \mathbb{R}$, fixe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mid I \mid \leq 2^n$.
Logo

$$\Phi(Iu(x)) \quad = \quad \Phi(\mid I \mid u(x))$$

Verificação de (*iii*)**:** Dado $I \in \mathbb{R}$, fixe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mid I \mid \leq 2^n$. Logo

$$\begin{aligned} \Phi(Iu(x)) &= \Phi(\mid I \mid u(x)) \\ &\leq \Phi(2^n u(x)) \end{aligned}$$

Verificação de (*iii*)**:** Dado $I \in \mathbb{R}$, fixe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mid I \mid \leq 2^n$. Logo

$$\begin{aligned} \Phi(Iu(x)) &= \Phi(\mid I \mid u(x)) \\ &\leq \Phi(2^n u(x)) \\ &\leq k^n \Phi(u(x)),\ u(x) \geq t_0 \text{ e } x \in \Omega, \end{aligned} \tag{3}$$

para algum $t_0 \geq 0$.

Considerando

$$\Lambda = \{x \in \Omega; \mid u(x) \mid < t_0\}.$$

Considerando

$$\Lambda = \{x \in \Omega; \mid u(x) \mid < t_0\}.$$

obtemos de (3), que

$$\int_{\Omega} \Phi(lu)dx = \int_{\Omega\setminus\Lambda} \Phi(lu)dx + \int_{\Lambda} \Phi(lu)dx$$

Considerando

$$\Lambda = \{x \in \Omega; \mid u(x) \mid < t_0\}.$$

obtemos de (3), que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Phi(lu)dx &= \int_{\Omega\setminus\Lambda} \Phi(lu)dx + \int_\Lambda \Phi(lu)dx \\ &\leq k^n \int_{\Omega\setminus\Lambda} \Phi(u)dx + \int_\Lambda \Phi(lu)dx, \end{aligned}$$

Considerando

$$\Lambda = \{x \in \Omega; \mid u(x) \mid < t_0\}.$$

obtemos de (3), que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Phi(lu)dx &= \int_{\Omega\setminus\Lambda} \Phi(lu)dx + \int_\Lambda \Phi(lu)dx \\ &\leq k^n \int_{\Omega\setminus\Lambda} \Phi(u)dx + \int_\Lambda \Phi(lu)dx, \end{aligned}$$

donde

$$\int_\Omega \Phi(lu)dx \leq k^n \int_\Omega \Phi(u)dx + \Phi(lt_0) \mid \Lambda \mid < +\infty,$$

Considerando

$$\Lambda = \{x \in \Omega; \mid u(x) \mid < t_0\}.$$

obtemos de (3), que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Phi(lu)dx &= \int_{\Omega\setminus\Lambda} \Phi(lu)dx + \int_\Lambda \Phi(lu)dx \\ &\leq k^n \int_{\Omega\setminus\Lambda} \Phi(u)dx + \int_\Lambda \Phi(lu)dx, \end{aligned}$$

donde

$$\int_\Omega \Phi(lu)dx \leq k^n \int_\Omega \Phi(u)dx + \Phi(lt_0) \mid \Lambda \mid < +\infty,$$

implicando que $lu \in K_\Phi(\Omega)$.

Considerando

$$\Lambda = \{x \in \Omega; \mid u(x) \mid < t_0\}.$$

obtemos de (3), que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Phi(lu)dx &= \int_{\Omega\setminus\Lambda} \Phi(lu)dx + \int_\Lambda \Phi(lu)dx \\ &\leq k^n \int_{\Omega\setminus\Lambda} \Phi(u)dx + \int_\Lambda \Phi(lu)dx, \end{aligned}$$

donde

$$\int_\Omega \Phi(lu)dx \leq k^n \int_\Omega \Phi(u)dx + \Phi(lt_0) \mid \Lambda \mid < +\infty,$$

implicando que $lu \in K_\Phi(\Omega)$. No caso em que $\Omega = \mathbb{R}^N$, teríamos Λ vazio, e assim o resultado continuaria válido.

Verificação de (ii)**:** Dados $u, v \in K_\Phi(\Omega)$

Verificação de (ii)**:** Dados $u, v \in K_\Phi(\Omega)$, segue do fato de Φ ser convexa

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{1}{2}(u+v)\Big)dx \leq \frac{1}{2}\Big(\int_\Omega \Phi(u)dx + \int_\Omega \Phi(v)dx\Big) < +\infty.$$

Verificação de (ii)**:** Dados $u, v \in K_\Phi(\Omega)$, segue do fato de Φ ser convexa

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{1}{2}(u+v)\Big)dx \leq \frac{1}{2}\Big(\int_\Omega \Phi(u)dx + \int_\Omega \Phi(v)dx\Big) < +\infty.$$

Segue de (iii)

$$u+v = 2\Big(\frac{1}{2}(u+v)\Big) \in K_\Phi(\Omega).$$

Reciprocamente, suponha por contradição que Φ não verifica a condição Δ_2.

Reciprocamente, suponha por contradição que Φ não verifica a condição Δ_2.
Assim, existe $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $t_n \to +\infty$

Reciprocamente, suponha por contradição que Φ não verifica a condição Δ_2.
Assim, existe $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $t_n \to +\infty$ verificando

$$\frac{1}{n}\Phi(2t_n) > \Phi(t_n), \ n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Reciprocamente, suponha por contradição que Φ não verifica a condição Δ_2.
Assim, existe $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $t_n \to +\infty$ verificando

$$\frac{1}{n}\Phi(2t_n) > \Phi(t_n), \ n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Sem perda de generalidade, suponha que $\{t_n\}$ seja uma sequência crescente.

Reciprocamente, suponha por contradição que Φ não verifica a condição Δ_2.
Assim, existe $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $t_n \to +\infty$ verificando

$$\frac{1}{n}\Phi(2t_n) > \Phi(t_n), \ n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Sem perda de generalidade, suponha que $\{t_n\}$ seja uma sequência crescente. E considere $\{\Omega_n\}$ uma sequência de subconjuntos de Ω disjuntos

Reciprocamente, suponha por contradição que Φ não verifica a condição Δ_2.
Assim, existe $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $t_n \to +\infty$ verificando

$$\frac{1}{n}\Phi(2t_n) > \Phi(t_n), \ n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Sem perda de generalidade, suponha que $\{t_n\}$ seja uma sequência crescente. E considere $\{\Omega_n\}$ uma sequência de subconjuntos de Ω disjuntos, satisfazendo:

$$| \Omega_n | := \frac{c}{n^{\frac{3}{2}}\Phi(t_n)}, \tag{5}$$

Reciprocamente, suponha por contradição que Φ não verifica a condição Δ_2.
Assim, existe $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $t_n \to +\infty$ verificando

$$\frac{1}{n}\Phi(2t_n) > \Phi(t_n), \ n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Sem perda de generalidade, suponha que $\{t_n\}$ seja uma sequência crescente. E considere $\{\Omega_n\}$ uma sequência de subconjuntos de Ω disjuntos, satisfazendo:

$$| \Omega_n | := \frac{c}{n^{\frac{3}{2}}\Phi(t_n)}, \tag{5}$$

onde $c > 0$ é tomado suficientemente pequeno, de tal forma que

$$\sum_{n=1}^{\infty} | \Omega_n | < | \Omega |,$$

Reciprocamente, suponha por contradição que Φ não verifica a condição Δ_2.
Assim, existe $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $t_n \to +\infty$ verificando

$$\frac{1}{n}\Phi(2t_n) > \Phi(t_n), \ n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Sem perda de generalidade, suponha que $\{t_n\}$ seja uma sequência crescente. E considere $\{\Omega_n\}$ uma sequência de subconjuntos de Ω disjuntos, satisfazendo:

$$| \Omega_n | := \frac{c}{n^{\frac{3}{2}}\Phi(t_n)}, \tag{5}$$

onde $c > 0$ é tomado suficientemente pequeno, de tal forma que

$$\sum_{n=1}^{\infty} | \Omega_n | < | \Omega |,$$

já que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}\Phi(t_n)} < +\infty.$$

Observe que no caso $\Omega = \mathbb{R}^N$ a constante c é desnecessária.

Observe que no caso $\Omega = \mathbb{R}^N$ a constante c é desnecessária.
Considerando

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \chi_{\Omega_n}(x), \ x \in \Omega,$$

Observe que no caso $\Omega = \mathbb{R}^N$ a constante c é desnecessária.
Considerando

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \chi_{\Omega_n}(x), \ x \in \Omega,$$

temos

$$\int_{\Omega} \Phi(u) dx \quad = \quad \int_{\Omega} \Phi\Big(\sum_{n=1}^{\infty} t_n \chi_{\Omega_n}\Big) dx$$

Observe que no caso $\Omega = \mathbb{R}^N$ a constante c é desnecessária.
Considerando

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \chi_{\Omega_n}(x), \ x \in \Omega,$$

temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi(u) dx &= \int_{\Omega} \Phi\Big(\sum_{n=1}^{\infty} t_n \chi_{\Omega_n}\Big) dx \\ &= \int_{\Omega} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(t_n) \chi_{\Omega_n} dx \end{aligned}$$

Observe que no caso $\Omega = \mathbb{R}^N$ a constante c é desnecessária.
Considerando

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \chi_{\Omega_n}(x), \ x \in \Omega,$$

temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \Phi(u) dx &= \int_{\Omega} \Phi\Big(\sum_{n=1}^{\infty} t_n \chi_{\Omega_n}\Big) dx \\
&= \int_{\Omega} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(t_n) \chi_{\Omega_n} dx \\
&= \int_{\Omega} \lim_{k \to +\infty} \sum_{n=1}^{k} \Phi(t_n) \chi_{\Omega_n} dx.
\end{aligned}$$

Segue do Teorema da Convergência Monôtona que

$$\int_\Omega \Phi(u)dx = \lim_{k\to+\infty} \int_\Omega \sum_{n=1}^{k} \Phi(t_n)\chi_{\Omega_n} dx,$$

Segue do Teorema da Convergência Monôtona que

$$\int_{\Omega} \Phi(u)dx = \lim_{k\to+\infty} \int_{\Omega} \sum_{n=1}^{k} \Phi(t_n)\chi_{\Omega_n} dx,$$

donde segue-se de (5)

$$\int_{\Omega} \Phi(u)dx = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} \Phi(t_n) \mid \Omega_n \mid$$

Segue do Teorema da Convergência Monôtona que

$$\int_\Omega \Phi(u)dx = \lim_{k\to+\infty} \int_\Omega \sum_{n=1}^{k} \Phi(t_n)\chi_{\Omega_n} dx,$$

donde segue-se de (5)

$$\int_\Omega \Phi(u)dx = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} \Phi(t_n) \mid \Omega_n \mid \; = c\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} < +\infty.$$

Segue do Teorema da Convergência Monôtona que

$$\int_\Omega \Phi(u)dx = \lim_{k\to+\infty} \int_\Omega \sum_{n=1}^{k} \Phi(t_n)\chi_{\Omega_n} dx,$$

donde segue-se de (5)

$$\int_\Omega \Phi(u)dx = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} \Phi(t_n) \mid \Omega_n \mid \; = c\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} < +\infty.$$

Por outro lado, por (4) e (5)

$$\int_\Omega \Phi(2u)dx \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(2t_n) \mid \Omega_n \mid$$

Segue do Teorema da Convergência Monôtona que

$$\int_\Omega \Phi(u)dx = \lim_{k\to+\infty} \int_\Omega \sum_{n=1}^{k} \Phi(t_n)\chi_{\Omega_n} dx,$$

donde segue-se de (5)

$$\int_\Omega \Phi(u)dx = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} \Phi(t_n) \mid \Omega_n \mid \; = c\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} < +\infty.$$

Por outro lado, por (4) e (5)

$$\int_\Omega \Phi(2u)dx \;\; = \;\; \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(2t_n) \mid \Omega_n \mid \; > \sum_{n=1}^{\infty} n\Phi(t_n) \mid \Omega_n \mid$$

Segue do Teorema da Convergência Monôtona que

$$\int_\Omega \Phi(u)dx = \lim_{k\to+\infty} \int_\Omega \sum_{n=1}^{k} \Phi(t_n)\chi_{\Omega_n} dx,$$

donde segue-se de (5)

$$\int_\Omega \Phi(u)dx = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} \Phi(t_n) \mid \Omega_n \mid \; = c\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} < +\infty.$$

Por outro lado, por (4) e (5)

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Phi(2u)dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(2t_n) \mid \Omega_n \mid \; > \sum_{n=1}^{\infty} n\Phi(t_n) \mid \Omega_n \mid \\ &= c\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} = +\infty, \end{aligned}$$

Segue do Teorema da Convergência Monôtona que

$$\int_\Omega \Phi(u)dx = \lim_{k\to+\infty} \int_\Omega \sum_{n=1}^{k} \Phi(t_n)\chi_{\Omega_n} dx,$$

donde segue-se de (5)

$$\int_\Omega \Phi(u)dx = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} \Phi(t_n) \mid \Omega_n \mid \; = c\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} < +\infty.$$

Por outro lado, por (4) e (5)

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Phi(2u)dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(2t_n) \mid \Omega_n \mid \; > \sum_{n=1}^{\infty} n\Phi(t_n) \mid \Omega_n \mid \\ &= c\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} = +\infty, \end{aligned}$$

o que é uma contradição. ■

Observação

Dado uma N-função $\Phi \in \Delta_2$

Observação

Dado uma N-função $\Phi \in \Delta_2$, existem $a, b > 0$, tais que

$$\Phi(t) \leq at^b,$$

para t suficientemente grande

Observação

Dado uma N-função $\Phi \in \Delta_2$, existem $a, b > 0$, tais que

$$\Phi(t) \leq at^b,$$

para t suficientemente grande. Ou seja, Φ vai para infinito abaixo de uma função polinômial.

Observação

Dado uma N-função $\Phi \in \Delta_2$, existem $a, b > 0$, tais que

$$\Phi(t) \leq at^b,$$

para t suficientemente grande. Ou seja, Φ vai para infinito abaixo de uma função polinômial.

Considere $k > 1$ e $t_0 \geq 0$ tais que

$$\Phi(2t) \leq k\Phi(t), \ t \geq t_0 > 1,$$

Observação

Dado uma N-função $\Phi \in \Delta_2$, existem $a, b > 0$, tais que

$$\Phi(t) \leq at^b,$$

para t suficientemente grande. Ou seja, Φ vai para infinito abaixo de uma função polinômial.

Considere $k > 1$ e $t_0 \geq 0$ tais que

$$\Phi(2t) \leq k\Phi(t), \ t \geq t_0 > 1,$$

sendo assim,

$$\Phi(2^n t_0) \leq k^n \Phi(t_0).$$

Dado $t > 0$ suficientemente grande

Dado $t > 0$ suficientemente grande, tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $t \in [2^n, 2^{n+1} t_0]$

Dado $t > 0$ suficientemente grande, tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $t \in [2^n, 2^{n+1} t_0]$, logo

$$\Phi(t) \quad \leq \quad \Phi(2^{n+1} t_0)$$

Dado $t > 0$ suficientemente grande, tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $t \in [2^n, 2^{n+1}t_0]$, logo

$$\begin{aligned} \Phi(t) &\leq \Phi(2^{n+1}t_0) \\ &\leq k^{n+1}\Phi(t_0) \end{aligned}$$

Dado $t > 0$ suficientemente grande, tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $t \in [2^n, 2^{n+1}t_0]$, logo

$$\begin{aligned} \Phi(t) &\leq \Phi(2^{n+1}t_0) \\ &\leq k^{n+1}\Phi(t_0) \\ &= k\Phi(t_0)(2^{n\log_2 k}) \end{aligned}$$

Dado $t > 0$ suficientemente grande, tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $t \in [2^n, 2^{n+1} t_0]$, logo

$$\begin{aligned} \Phi(t) &\leq \Phi(2^{n+1} t_0) \\ &\leq k^{n+1} \Phi(t_0) \\ &= k \Phi(t_0) (2^{n \log_2 k}) \\ &\leq k \Phi(t_0) t^{\log_2 k}, \end{aligned}$$

Dado $t > 0$ suficientemente grande, tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $t \in [2^n, 2^{n+1} t_0]$, logo

$$\begin{aligned} \Phi(t) &\leq \Phi(2^{n+1} t_0) \\ &\leq k^{n+1} \Phi(t_0) \\ &= k\Phi(t_0)(2^{n \log_2 k}) \\ &\leq k\Phi(t_0) t^{\log_2 k}, \end{aligned}$$

assim

$$\Phi(t) \leq a t^b,$$

onde $a = k\Phi(t_0)$ e $b = \log_2 k$.

Dado $t > 0$ suficientemente grande, tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $t \in [2^n, 2^{n+1}t_0]$, logo

$$\begin{aligned} \Phi(t) &\leq \Phi(2^{n+1}t_0) \\ &\leq k^{n+1}\Phi(t_0) \\ &= k\Phi(t_0)(2^{n\log_2 k}) \\ &\leq k\Phi(t_0)t^{\log_2 k}, \end{aligned}$$

assim

$$\Phi(t) \leq at^b,$$

onde $a = k\Phi(t_0)$ e $b = \log_2 k$.

Observação

O fato de Φ ser uma N-função que vai para o infinito abaixo de uma função polinomial, não me garante que Φ satisfaz a condição Δ_2.

1. $\Phi(t) = \frac{|\ t\ |^p}{p},\ p \in (1, +\infty).$

1. $\Phi(t) = \dfrac{|\ t\ |^p}{p},\ p \in (1, +\infty)$.

A função Φ satisfaz a condição Δ_2, pois

$$\Phi(2t) = k\Phi(t),$$

onde $k = 2^p$.

1. $\Phi(t) = \dfrac{|\ t\ |^p}{p},\ p \in (1, +\infty)$.

A função Φ satisfaz a condição Δ_2, pois

$$\Phi(2t) = k\Phi(t),$$

onde $k = 2^p$.

2. $\Phi_1(t) = e^{t^2} - 1$ e $\Phi_2(t) = e^{|t|} - |\ t\ | - 1$.

1. $\Phi(t) = \dfrac{|\ t\ |^p}{p},\ p \in (1, +\infty)$.

A função Φ satisfaz a condição Δ_2, pois

$$\Phi(2t) = k\Phi(t),$$

onde $k = 2^p$.

2. $\Phi_1(t) = e^{t^2} - 1$ e $\Phi_2(t) = e^{|t|} - |\ t\ | - 1$.

Não satisfazem a condição Δ_2, pois as funções Φ_1 e Φ_2 vão mais rápido para o infinito que qualquer função polinômial.

Proposição 2.3:

Se Φ satisfaz Δ_2, então

$$\{u_n\} \text{ é limitada em } L_\Phi(\Omega) \Longleftrightarrow \{\int_\Omega \Phi(|\ u_n\ |)dx\} \text{ é limitada.}$$

Proposição 2.3:

Se Φ satisfaz Δ_2, então

$$\{u_n\} \text{ é limitada em } L_\Phi(\Omega) \Longleftrightarrow \{\int_\Omega \Phi(|\ u_n\ |)dx\} \text{ é limitada.}$$

Demonstração: Sendo $\{u_n\}$ limitada em $L_\Phi(\Omega)$

Proposição 2.3:

Se Φ satisfaz Δ_2, então

$$\{u_n\} \text{ é limitada em } L_\Phi(\Omega) \Longleftrightarrow \{\int_\Omega \Phi(|\ u_n\ |)dx\} \text{ é limitada.}$$

Demonstração: Sendo $\{u_n\}$ limitada em $L_\Phi(\Omega)$, existe $K > 0$ tal que $|\ u_n\ |_\Phi \leq K$

Proposição 2.3:

Se Φ satisfaz Δ_2, então

$$\{u_n\} \text{ é limitada em } L_\Phi(\Omega) \Longleftrightarrow \{\int_\Omega \Phi(|\ u_n\ |)dx\} \text{ é limitada.}$$

Demonstração: Sendo $\{u_n\}$ limitada em $L_\Phi(\Omega)$, existe $K > 0$ tal que $|\ u_n\ |_\Phi \leq K$, ou seja,

$$\frac{|\ u_n\ |_\Phi}{K} \leq 1.$$

Proposição 2.3:

Se Φ satisfaz Δ_2, então

$$\{u_n\} \text{ é limitada em } L_\Phi(\Omega) \Longleftrightarrow \{\int_\Omega \Phi(|\ u_n\ |)dx\} \text{ é limitada.}$$

Demonstração: Sendo $\{u_n\}$ limitada em $L_\Phi(\Omega)$, existe $K > 0$ tal que $|\ u_n\ |_\Phi \leq K$, ou seja,

$$\frac{|\ u_n\ |_\Phi}{K} \leq 1.$$

Daí, usando a condição Δ_2,

$$\int_\Omega \Phi(u_n)dx \quad = \quad \int_\Omega \Phi\Big(\frac{|\ u_n\ |_\Phi}{K}\frac{u_n}{\frac{|u_n|_\Phi}{K}}\Big)dx$$

Proposição 2.3:

Se Φ satisfaz Δ_2, então

$$\{u_n\} \text{ é limitada em } L_\Phi(\Omega) \Longleftrightarrow \{\int_\Omega \Phi(|\ u_n\ |)dx\} \text{ é limitada.}$$

Demonstração: Sendo $\{u_n\}$ limitada em $L_\Phi(\Omega)$, existe $K > 0$ tal que $|\ u_n\ |_\Phi \leq K$, ou seja,

$$\frac{|\ u_n\ |_\Phi}{K} \leq 1.$$

Daí, usando a condição Δ_2,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Phi(u_n)dx &= \int_\Omega \Phi\Big(\frac{|\ u_n\ |_\Phi}{K}\frac{u_n}{\frac{|u_n|_\Phi}{K}}\Big)dx \\ &\leq \frac{|\ u_n\ |_\Phi}{K}\int_\Omega \Phi\Big(K\frac{u_n}{|\ u_n\ |_\Phi}\Big)dx \end{aligned}$$

Proposição 2.3:

Se Φ satisfaz Δ_2, então

$$\{u_n\} \text{ é limitada em } L_\Phi(\Omega) \Longleftrightarrow \{\int_\Omega \Phi(|\ u_n\ |)dx\} \text{ é limitada.}$$

Demonstração: Sendo $\{u_n\}$ limitada em $L_\Phi(\Omega)$, existe $K > 0$ tal que $|\ u_n\ |_\Phi \leq K$, ou seja,

$$\frac{|\ u_n\ |_\Phi}{K} \leq 1.$$

Daí, usando a condição Δ_2,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Phi(u_n)dx &= \int_\Omega \Phi\Big(\frac{|\ u_n\ |_\Phi}{K}\frac{u_n}{\frac{|u_n|_\Phi}{K}}\Big)dx \\
&\leq \frac{|\ u_n\ |_\Phi}{K}\int_\Omega \Phi\Big(K\frac{u_n}{|\ u_n\ |_\Phi}\Big)dx \\
&\leq C_K\frac{|\ u_n\ |_\Phi}{K}\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u_n}{|\ u_n\ |_\Phi}\Big)dx
\end{aligned}$$

Proposição 2.3:

Se Φ satisfaz Δ_2, então

$$\{u_n\} \text{ é limitada em } L_\Phi(\Omega) \Longleftrightarrow \{\int_\Omega \Phi(|\ u_n\ |)dx\} \text{ é limitada.}$$

Demonstração: Sendo $\{u_n\}$ limitada em $L_\Phi(\Omega)$, existe $K > 0$ tal que $|\ u_n\ |_\Phi \leq K$, ou seja,

$$\frac{|\ u_n\ |_\Phi}{K} \leq 1.$$

Daí, usando a condição Δ_2,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Phi(u_n)dx &= \int_\Omega \Phi\Big(\frac{|\ u_n\ |_\Phi}{K}\frac{u_n}{\frac{|u_n|_\Phi}{K}}\Big)dx \\
&\leq \frac{|\ u_n\ |_\Phi}{K}\int_\Omega \Phi\Big(K\frac{u_n}{|\ u_n\ |_\Phi}\Big)dx \\
&\leq C_K\frac{|\ u_n\ |_\Phi}{K}\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u_n}{|\ u_n\ |_\Phi}\Big)dx \\
&\leq C_K.
\end{aligned}$$

Proposição 2.3:

Se Φ satisfaz Δ_2, então

$$\{u_n\} \text{ é limitada em } L_\Phi(\Omega) \Longleftrightarrow \{\int_\Omega \Phi(|\ u_n\ |)dx\} \text{ é limitada.}$$

Demonstração: Sendo $\{u_n\}$ limitada em $L_\Phi(\Omega)$, existe $K > 0$ tal que $|\ u_n\ |_\Phi \leq K$, ou seja,

$$\frac{|\ u_n\ |_\Phi}{K} \leq 1.$$

Daí, usando a condição Δ_2,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Phi(u_n)dx &= \int_\Omega \Phi\Big(\frac{|\ u_n\ |_\Phi}{K}\frac{u_n}{\frac{|u_n|_\Phi}{K}}\Big)dx \\
&\leq \frac{|\ u_n\ |_\Phi}{K}\int_\Omega \Phi\Big(K\frac{u_n}{|\ u_n\ |_\Phi}\Big)dx \\
&\leq C_K\frac{|\ u_n\ |_\Phi}{K}\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u_n}{|\ u_n\ |_\Phi}\Big)dx \\
&\leq C_K.
\end{aligned}$$

Portanto, $\{\int_\Omega \Phi(|\ u_n\ |)dx\}$ é limitada.

Reciprocamente, suponha por contradição que $\{u_n\}$ não seja limitada em $L_\Phi(\Omega)$

Reciprocamente, suponha por contradição que $\{u_n\}$ não seja limitada em $L_\Phi(\Omega)$, ou seja, $\mid u_n \mid_\Phi \to \infty$, a menos de subsequência.

Reciprocamente, suponha por contradição que $\{u_n\}$ não seja limitada em $L_\Phi(\Omega)$, ou seja, $\mid u_n \mid_\Phi \to \infty$, a menos de subsequência. Assim, para n suficientemente grande temos que $\mid u_n \mid_\Phi > 1$

Reciprocamente, suponha por contradição que $\{u_n\}$ não seja limitada em $L_\Phi(\Omega)$, ou seja, $\mid u_n \mid_\Phi \to \infty$, a menos de subsequência. Assim, para n suficientemente grande temos que $\mid u_n \mid_\Phi > 1$, o que implica

$$\int_\Omega \Phi(\mid u_n \mid) dx > \mid u_n \mid_\Phi \int_\Omega \Phi\left(\frac{\mid u_n \mid}{\mid u_n \mid_\Phi}\right) dx,$$

para n suficientemente grande

Reciprocamente, suponha por contradição que $\{u_n\}$ não seja limitada em $L_\Phi(\Omega)$, ou seja, $\mid u_n \mid_\Phi \to \infty$, a menos de subsequência. Assim, para n suficientemente grande temos que $\mid u_n \mid_\Phi > 1$, o que implica

$$\int_\Omega \Phi(\mid u_n \mid)dx > \mid u_n \mid_\Phi \int_\Omega \Phi\left(\frac{\mid u_n \mid}{\mid u_n \mid_\Phi}\right) dx,$$

para n suficientemente grande. Fazendo $n \to \infty$ na desigualdade acima, segue que

$$\int_\Omega \Phi(\mid u_n \mid)dx \to \infty. \blacksquare$$

O Espaço $E_\Phi(\Omega)$

Considerando Ω um domínio limitado, definamos

$$E_\Phi(\Omega) := \overline{L^\infty(\Omega)}^{|\cdot|_\Phi}.$$

O Espaço $E_\Phi(\Omega)$

Considerando Ω um domínio limitado, definamos

$$E_\Phi(\Omega) := \overline{L^\infty(\Omega)}^{|\cdot|_\Phi}.$$

Será visto que o espaço $E_\Phi(\Omega)$ é o maior espaço vetorial contido na classe de Orlicz $K_\Phi(\Omega)$.

O Espaço $E_\Phi(\Omega)$

Considerando Ω um domínio limitado, definamos

$$E_\Phi(\Omega) := \overline{L^\infty(\Omega)}^{|\cdot|_\Phi}.$$

Será visto que o espaço $E_\Phi(\Omega)$ é o maior espaço vetorial contido na classe de Orlicz $K_\Phi(\Omega)$. Além disso, este espaço será igual ao espaço de Orlicz $L_\Phi(\Omega)$ se, e só se, Φ satisfizer a condição Δ_2.

O Espaço $E_\Phi(\Omega)$

Considerando Ω um domínio limitado, definamos

$$E_\Phi(\Omega) := \overline{L^\infty(\Omega)}^{|\cdot|_\Phi}.$$

Será visto que o espaço $E_\Phi(\Omega)$ é o maior espaço vetorial contido na classe de Orlicz $K_\Phi(\Omega)$. Além disso, este espaço será igual ao espaço de Orlicz $L_\Phi(\Omega)$ se, e só se, Φ satisfizer a condição Δ_2.

Se $\Omega = \mathbb{R}^N$, considere

$$E_\Phi(\mathbb{R}^N) := \overline{B_0(\mathbb{R}^N)}^{|\cdot|_\Phi},$$

O Espaço $E_\Phi(\Omega)$

Considerando Ω um domínio limitado, definamos

$$E_\Phi(\Omega) := \overline{L^\infty(\Omega)}^{|\cdot|_\Phi}.$$

Será visto que o espaço $E_\Phi(\Omega)$ é o maior espaço vetorial contido na classe de Orlicz $K_\Phi(\Omega)$. Além disso, este espaço será igual ao espaço de Orlicz $L_\Phi(\Omega)$ se, e só se, Φ satisfizer a condição Δ_2.

Se $\Omega = \mathbb{R}^N$, considere

$$E_\Phi(\mathbb{R}^N) := \overline{B_0(\mathbb{R}^N)}^{|\cdot|_\Phi},$$

onde $B_0(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^\infty(\mathbb{R}^N); supp(u) \subset\subset \mathbb{R}^N\}$.

Afirmamos que

$$E_\Phi(\Omega) \subset K_\Phi(\Omega).$$

Afirmamos que

$$E_\Phi(\Omega) \subset K_\Phi(\Omega).$$

De fato, seja $u \in E_\Phi(\Omega)$

Afirmamos que

$$E_\Phi(\Omega) \subset K_\Phi(\Omega).$$

De fato, seja $u \in E_\Phi(\Omega)$. Então, existe $v \in L^\infty(\Omega)$ tal que

$$| u - v |_\Phi < \frac{1}{2},$$

Afirmamos que

$$E_\Phi(\Omega) \subset K_\Phi(\Omega).$$

De fato, seja $u \in E_\Phi(\Omega)$. Então, existe $v \in L^\infty(\Omega)$ tal que

$$| u - v |_\Phi < \frac{1}{2},$$

donde

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u-v}{1/2}\Big) dx \leq 1,$$

Afirmamos que

$$E_\Phi(\Omega) \subset K_\Phi(\Omega).$$

De fato, seja $u \in E_\Phi(\Omega)$. Então, existe $v \in L^\infty(\Omega)$ tal que

$$\mid u - v \mid_\Phi < \frac{1}{2},$$

donde

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u-v}{1/2}\Big)dx \leq 1,$$

ou seja

$$\int_\Omega \Phi(2(u-v))dx \leq 1,$$

Afirmamos que

$$E_\Phi(\Omega) \subset K_\Phi(\Omega).$$

De fato, seja $u \in E_\Phi(\Omega)$. Então, existe $v \in L^\infty(\Omega)$ tal que

$$\mid u - v \mid_\Phi < \frac{1}{2},$$

donde

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{u-v}{1/2}\Big)dx \leq 1,$$

ou seja

$$\int_\Omega \Phi(2(u-v))dx \leq 1,$$

mostrando que $2(u-v) \in K_\Phi(\Omega)$.

Desde que

$$u = \frac{1}{2}(2u - 2v) + \frac{1}{2}(2v),$$

Desde que

$$u = \frac{1}{2}(2u - 2v) + \frac{1}{2}(2v),$$

temos

$$\int_\Omega \Phi(u)dx \quad = \quad \int_\Omega \Phi\left(\frac{1}{2}(2u - 2v) + \frac{1}{2}(2v)\right) dx$$

Desde que

$$u = \frac{1}{2}(2u - 2v) + \frac{1}{2}(2v),$$

temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Phi(u)dx &= \int_\Omega \Phi\left(\frac{1}{2}(2u - 2v) + \frac{1}{2}(2v)\right) dx \\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega \Phi(2u - 2v)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \Phi(2v)dx < +\infty, \end{aligned}$$

Desde que

$$u = \frac{1}{2}(2u - 2v) + \frac{1}{2}(2v),$$

temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Phi(u)dx &= \int_\Omega \Phi\left(\frac{1}{2}(2u - 2v) + \frac{1}{2}(2v)\right) dx \\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega \Phi(2u - 2v)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \Phi(2v)dx < +\infty, \end{aligned}$$

donde $u \in K_\Phi(\Omega)$.

Desde que

$$u = \frac{1}{2}(2u - 2v) + \frac{1}{2}(2v),$$

temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Phi(u)dx &= \int_\Omega \Phi\Big(\frac{1}{2}(2u - 2v) + \frac{1}{2}(2v)\Big)\, dx \\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega \Phi(2u - 2v)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \Phi(2v)dx < +\infty, \end{aligned}$$

donde $u \in K_\Phi(\Omega)$. E portanto $E_\Phi(\Omega) \subset K_\Phi(\Omega)$.

Vimos anteriormente que $K_\Phi(\Omega)$ está, em geral, estritamente contido no espaço de Orlicz $L_\Phi(\Omega)$.

Vimos anteriormente que $K_\Phi(\Omega)$ está, em geral, estritamente contido no espaço de Orlicz $L_\Phi(\Omega)$.
Deste fato, podemos concluir que, em geral, $L^\infty(\Omega)$ não é denso em $L_\Phi(\Omega)$.

Vimos anteriormente que $K_\Phi(\Omega)$ está, em geral, estritamente contido no espaço de Orlicz $L_\Phi(\Omega)$.
Deste fato, podemos concluir que, em geral, $L^\infty(\Omega)$ não é denso em $L_\Phi(\Omega)$.
Veremos a seguir que o espaço vetorial $E_\Phi(\Omega)$,

Vimos anteriormente que $K_\Phi(\Omega)$ está, em geral, estritamente contido no espaço de Orlicz $L_\Phi(\Omega)$.
Deste fato, podemos concluir que, em geral, $L^\infty(\Omega)$ não é denso em $L_\Phi(\Omega)$.
Veremos a seguir que o espaço vetorial $E_\Phi(\Omega)$, está, em geral, estritamente contido em $K_\Phi(\Omega)$.

Lema 2.2

O conjunto

$$D = \left\{ u \in L_\Phi(\Omega); \mathrm{d}_{|.|_\Phi}(u, E_\Phi(\Omega)) < \frac{1}{2} \right\},$$

Lema 2.2

O conjunto

$$D = \left\{ u \in L_\Phi(\Omega); \mathrm{d}_{|.|_\Phi}(u, E_\Phi(\Omega)) < \frac{1}{2} \right\},$$

está contido em $K_\Phi(\Omega)$

Lema 2.2

O conjunto

$$D = \left\{ u \in L_\Phi(\Omega); \mathrm{d}_{|.|_\Phi}(u, E_\Phi(\Omega)) < \frac{1}{2} \right\},$$

está contido em $K_\Phi(\Omega)$, isto é $D \subset K_\Phi(\Omega)$.

Lema 2.2

O conjunto

$$D = \left\{ u \in L_\Phi(\Omega); \mathrm{d}_{|.|_\Phi}(u, E_\Phi(\Omega)) < \frac{1}{2} \right\},$$

está contido em $K_\Phi(\Omega)$, isto é $D \subset K_\Phi(\Omega)$.

Demonstração: Sejam $u \in D$ e $w \in E_\Phi(\Omega)$

Lema 2.2

O conjunto

$$D = \left\{ u \in L_\Phi(\Omega); \mathrm{d}_{|.|_\Phi}(u, E_\Phi(\Omega)) < \frac{1}{2} \right\},$$

está contido em $K_\Phi(\Omega)$, isto é $D \subset K_\Phi(\Omega)$.

Demonstração: Sejam $u \in D$ e $w \in E_\Phi(\Omega)$, tais que

$$| u - w |_\Phi < \frac{1}{2}.$$

Lema 2.2

O conjunto

$$D = \left\{ u \in L_\Phi(\Omega); \mathrm{d}_{|.|_\Phi}(u, E_\Phi(\Omega)) < \frac{1}{2} \right\},$$

está contido em $K_\Phi(\Omega)$, isto é $D \subset K_\Phi(\Omega)$.

Demonstração: Sejam $u \in D$ e $w \in E_\Phi(\Omega)$, tais que

$$| u - w |_\Phi < \frac{1}{2}.$$

Deste fato,

$$| u - w |_\Phi < \frac{1}{2} - \delta, \tag{6}$$

para algum $\delta > 0$.

Seja $v \in L^{\infty}(\Omega)$, tal que

$$| w - v |_{\Phi} < \delta. \tag{7}$$

Seja $v \in L^{\infty}(\Omega)$, tal que

(7) $$| w - v |_{\Phi} < \delta.$$

De (6) e (7)

$$| u - v |_{\Phi} \leq | u - w |_{\Phi} + | w - v |_{\Phi} < \frac{1}{2},$$

Seja $v \in L^{\infty}(\Omega)$, tal que

(7) $$| w - v |_{\Phi} < \delta.$$

De (6) e (7)

$$| u - v |_{\Phi} \leq | u - w |_{\Phi} + | w - v |_{\Phi} < \frac{1}{2},$$

donde

$$\int_{\Omega} \Phi\big(2(u - v)\big)\, dx \leq 1,$$

Seja $v \in L^{\infty}(\Omega)$, tal que

(7) $$| w - v |_{\Phi} < \delta.$$

De (6) e (7)

$$| u - v |_{\Phi} \leq | u - w |_{\Phi} + | w - v |_{\Phi} < \frac{1}{2},$$

donde

$$\int_{\Omega} \Phi\big(2(u - v)\big)\, dx \leq 1,$$

implicando

$$u = \frac{1}{2}\big(2(u - v)\big) + \frac{1}{2}(2v) \in K_{\Phi}(\Omega),$$

como queriamos mostrar. ■

Lema 2.3

Seja $A = \{u \in L_\Phi(\Omega); \text{dist}(u, E_\Phi(\Omega)) \leq 1\}$

Lema 2.3

Seja $A = \{u \in L_\Phi(\Omega); \text{dist}(u, E_\Phi(\Omega)) \leq 1\}$. Então $K_\Phi(\Omega) \subset A$.

Lema 2.3

Seja $A = \{u \in L_\Phi(\Omega); \text{dist}(u, E_\Phi(\Omega)) \leq 1\}$. Então $K_\Phi(\Omega) \subset A$.

Demonstração: De fato, dado $u \in K_\Phi(\Omega)$

Lema 2.3

Seja $A = \{u \in L_\Phi(\Omega); \text{dist}(u, E_\Phi(\Omega)) \leq 1\}$. Então $K_\Phi(\Omega) \subset A$.

Demonstração: De fato, dado $u \in K_\Phi(\Omega)$ considere

$$u_n(x) = \begin{cases} u(x), \ se \mid u(x) \mid \leq n \\ 0, \ \text{c.c.} \end{cases}$$

Lema 2.3

Seja $A = \{u \in L_\Phi(\Omega); \text{dist}(u, E_\Phi(\Omega)) \leq 1\}$. Então $K_\Phi(\Omega) \subset A$.

Demonstração: De fato, dado $u \in K_\Phi(\Omega)$ considere

$$u_n(x) = \begin{cases} u(x), \ se \mid u(x) \mid \leq n \\ 0, \ \text{c.c.} \end{cases}$$

Note que $\{u_n\} \subset L^\infty(\Omega)$.

Lema 2.3

Seja $A = \{u \in L_\Phi(\Omega); \text{dist}(u, E_\Phi(\Omega)) \leq 1\}$. Então $K_\Phi(\Omega) \subset A$.

Demonstração: De fato, dado $u \in K_\Phi(\Omega)$ considere

$$u_n(x) = \begin{cases} u(x), \ se \mid u(x) \mid \leq n \\ 0, \ \text{c.c.} \end{cases}$$

Note que $\{u_n\} \subset L^\infty(\Omega)$.
Considerando

$$\Omega_\infty = \{y \in \Omega; u(y) = \pm\infty\},$$

Lema 2.3

Seja $A = \{u \in L_\Phi(\Omega); \text{dist}(u, E_\Phi(\Omega)) \leq 1\}$. Então $K_\Phi(\Omega) \subset A$.

Demonstração: De fato, dado $u \in K_\Phi(\Omega)$ considere

$$u_n(x) = \begin{cases} u(x), \ se \mid u(x) \mid \leq n \\ 0, \ \text{c.c.} \end{cases}$$

Note que $\{u_n\} \subset L^\infty(\Omega)$.
Considerando

$$\Omega_\infty = \{y \in \Omega; u(y) = \pm\infty\},$$

temos

(8) $$\mid \Omega_\infty \mid = 0,$$

pois $\int_\Omega \Phi(u)dx < +\infty$

Lema 2.3

Seja $A = \{u \in L_\Phi(\Omega); \text{dist}(u, E_\Phi(\Omega)) \leq 1\}$. Então $K_\Phi(\Omega) \subset A$.

Demonstração: De fato, dado $u \in K_\Phi(\Omega)$ considere

$$u_n(x) = \begin{cases} u(x), \ se \mid u(x) \mid \leq n \\ 0, \ \text{c.c.} \end{cases}$$

Note que $\{u_n\} \subset L^\infty(\Omega)$.
Considerando

$$\Omega_\infty = \{y \in \Omega; u(y) = \pm\infty\},$$

temos

(8) $$\mid \Omega_\infty \mid = 0,$$

pois $\int_\Omega \Phi(u)dx < +\infty$. De (8), podemos concluir que

$$\Phi(u(x))\chi_{[|u|>n]}(x) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ q.t.p. } x \in \Omega.$$

Sendo assim, desde que

$$\Phi(u(x))\chi_{[|u|>n]}(x) \leq \Phi(u(x)) \text{ q.t.p. } x \in \Omega \text{ e } n \in \mathbb{N},$$

Sendo assim, desde que

$$\Phi(u(x))\chi_{[|u|>n]}(x) \leq \Phi(u(x)) \text{ q.t.p. } x \in \Omega \text{ e } n \in \mathbb{N},$$

temos pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_\Omega \Phi(u-u_n)dx = \int_\Omega \Phi(u)\chi_{[|u|>n]}(x)dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

Sendo assim, desde que

$$\Phi(u(x))\chi_{[|u|>n]}(x) \leq \Phi(u(x)) \text{ q.t.p. } x \in \Omega \text{ e } n \in \mathbb{N},$$

temos pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_\Omega \Phi(u-u_n)dx = \int_\Omega \Phi(u)\chi_{[|u|>n]}(x)dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donde segue para n suficientemente grande

$$\int_\Omega \Phi(u-u_n)dx \leq 1,$$

Sendo assim, desde que

$$\Phi(u(x))\chi_{[|u|>n]}(x) \leq \Phi(u(x)) \text{ q.t.p. } x \in \Omega \text{ e } n \in \mathbb{N},$$

temos pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_\Omega \Phi(u-u_n)dx = \int_\Omega \Phi(u)\chi_{[|u|>n]}(x)dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donde segue para n suficientemente grande

$$\int_\Omega \Phi(u-u_n)dx \leq 1,$$

implicando

$$|\ u-u_n\ |_\Phi \leq 1,$$

para n suficientemente grande

Sendo assim, desde que

$$\Phi(u(x))\chi_{[|u|>n]}(x) \leq \Phi(u(x)) \text{ q.t.p. } x \in \Omega \text{ e } n \in \mathbb{N},$$

temos pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\int_\Omega \Phi(u-u_n)dx = \int_\Omega \Phi(u)\chi_{[|u|>n]}(x)dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donde segue para n suficientemente grande

$$\int_\Omega \Phi(u-u_n)dx \leq 1,$$

implicando

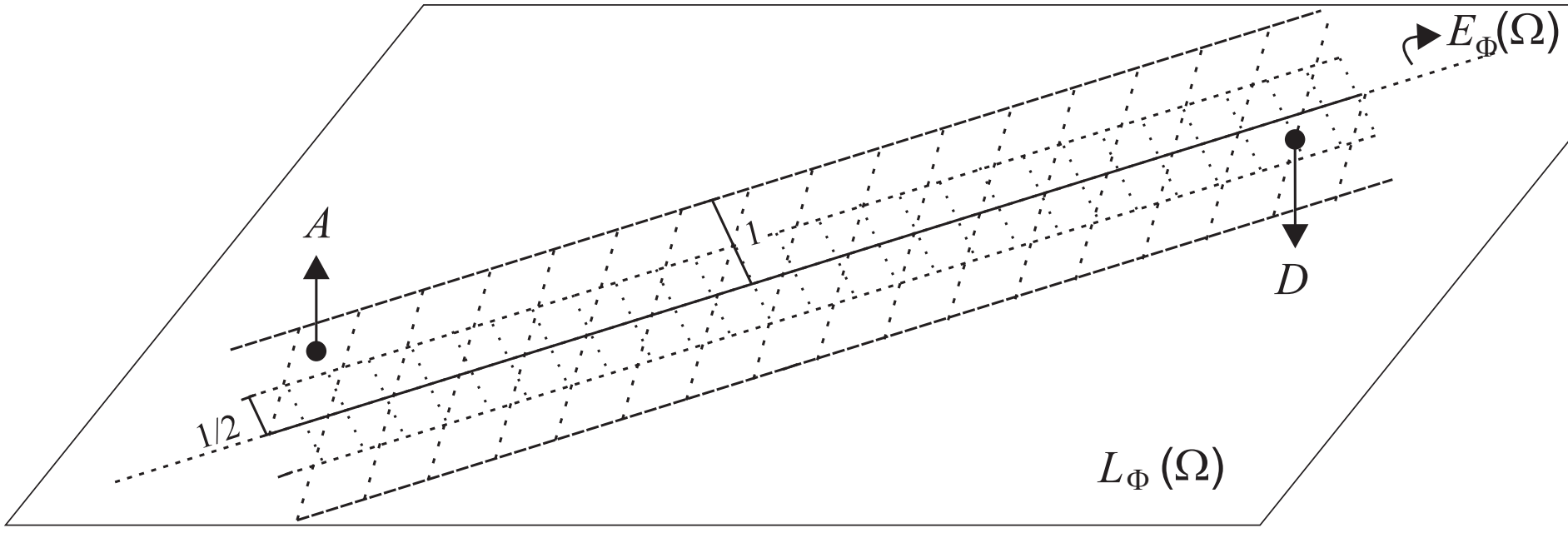
$$|\ u-u_n\ |_\Phi \leq 1,$$

para n suficientemente grande, logo

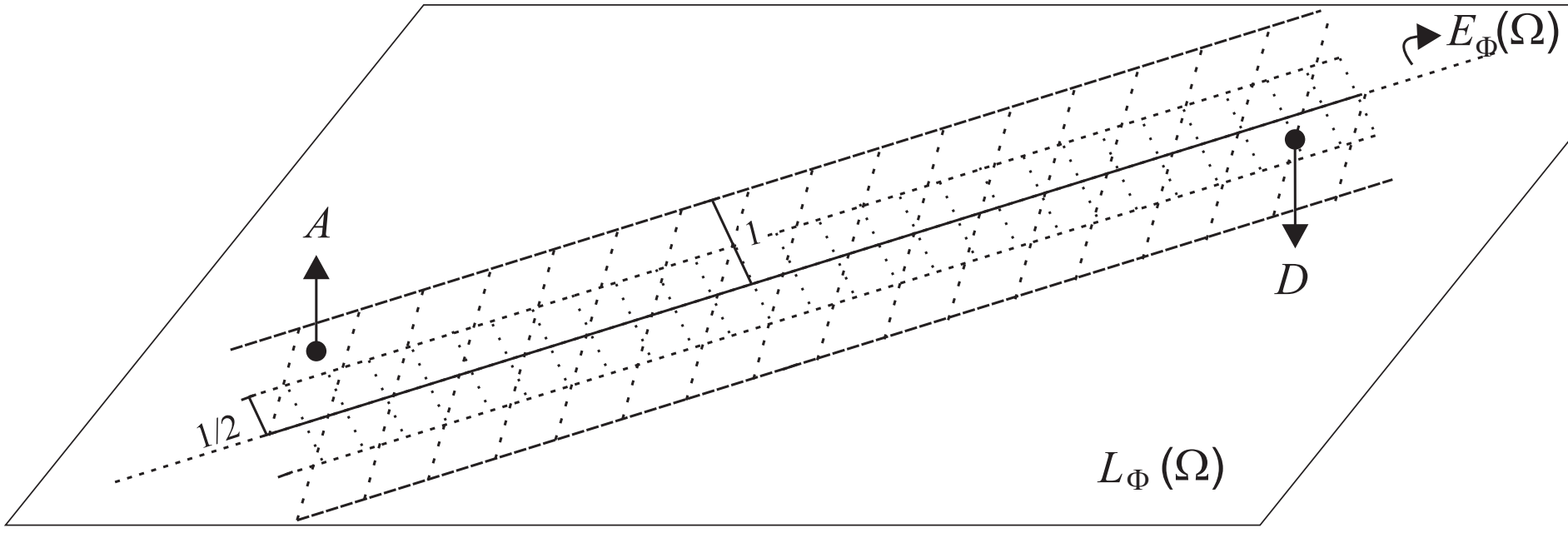
$$\mathrm{d}(u, E_\Phi(\Omega)) \leq 1,$$

como queríamos mostrar. ■

Dos Lemas 2.2 e 2.3, temos geometricamente o seguinte:



Dos Lemas 2.2 e 2.3, temos geometricamente o seguinte:



Ou seja,

$$D \subset K_\Phi(\Omega) \subset A.$$

Proposição 2.4

$E_\Phi(\Omega)$ é o maior subespaço vetorial contido em $K_\Phi(\Omega)$.

Proposição 2.4

$E_\Phi(\Omega)$ é o maior subespaço vetorial contido em $K_\Phi(\Omega)$.

Demonstração: Seja $u \in K_\Phi(\Omega)$, tal que

$$\lambda u \in K_\Phi(\Omega),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Proposição 2.4

$E_\Phi(\Omega)$ é o maior subespaço vetorial contido em $K_\Phi(\Omega)$.

Demonstração: Seja $u \in K_\Phi(\Omega)$, tal que

$$\lambda u \in K_\Phi(\Omega),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Mostraremos agora que

$$\langle u \rangle \subset\ E_\Phi(\Omega),$$

Proposição 2.4

$E_\Phi(\Omega)$ é o maior subespaço vetorial contido em $K_\Phi(\Omega)$.

Demonstração: Seja $u \in K_\Phi(\Omega)$, tal que

$$\lambda u \in K_\Phi(\Omega),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Mostraremos agora que

$$\langle u \rangle \subset\ E_\Phi(\Omega),$$

ou seja $u \in E_\Phi(\Omega)$

Proposição 2.4

$E_\Phi(\Omega)$ é o maior subespaço vetorial contido em $K_\Phi(\Omega)$.

Demonstração: Seja $u \in K_\Phi(\Omega)$, tal que

$$\lambda u \in K_\Phi(\Omega),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Mostraremos agora que

$$\langle u \rangle \subset\ E_\Phi(\Omega),$$

ou seja $u \in E_\Phi(\Omega)$. Suponha por contradição que $u \notin E_\Phi(\Omega)$,

Proposição 2.4

$E_\Phi(\Omega)$ é o maior subespaço vetorial contido em $K_\Phi(\Omega)$.

Demonstração: Seja $u \in K_\Phi(\Omega)$, tal que

$$\lambda u \in K_\Phi(\Omega),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Mostraremos agora que

$$\langle u \rangle \subset\ E_\Phi(\Omega),$$

ou seja $u \in E_\Phi(\Omega)$. Suponha por contradição que $u \notin E_\Phi(\Omega)$, logo

$$d_{|.|_\Phi}(u, E_\Phi(\Omega)) > 0. \tag{9}$$

Para $\lambda > 0$, temos

$$d_{|.|_\Phi}(\lambda u, E_\Phi(\Omega)) \quad = \quad \inf_{w \in E_\Phi(\Omega)} \mid \lambda u - w \mid_\Phi$$

Para $\lambda > 0$, temos

$$\begin{aligned} d_{|.|_\Phi}(\lambda u, E_\Phi(\Omega)) &= \inf_{w \in E_\Phi(\Omega)} | \lambda u - w |_\Phi \\ &= \inf_{w \in E_\Phi(\Omega)} \lambda \left| u - \frac{w}{\lambda} \right|_\Phi \end{aligned}$$

Para $\lambda > 0$, temos

$$\begin{aligned} d_{|.|_\Phi}(\lambda u, E_\Phi(\Omega)) &= \inf_{w \in E_\Phi(\Omega)} | \lambda u - w |_\Phi \\ &= \inf_{w \in E_\Phi(\Omega)} \lambda \left| u - \frac{w}{\lambda} \right|_\Phi \\ &= \lambda \inf_{\lambda \widehat{w} \in E_\Phi(\Omega)} | u - \widehat{w} |_\Phi \end{aligned}$$

Para $\lambda > 0$, temos

$$\begin{aligned} d_{|.|_\Phi}(\lambda u, E_\Phi(\Omega)) &= \inf_{w \in E_\Phi(\Omega)} | \lambda u - w |_\Phi \\ &= \inf_{w \in E_\Phi(\Omega)} \lambda \left| u - \frac{w}{\lambda} \right|_\Phi \\ &= \lambda \inf_{\lambda \widehat{w} \in E_\Phi(\Omega)} | u - \widehat{w} |_\Phi \\ &= \lambda d_{|.|_\Phi}(u, E_\Phi(\Omega)), \end{aligned}$$

Para $\lambda > 0$, temos

$$\begin{aligned} d_{|.|_\Phi}(\lambda u, E_\Phi(\Omega)) &= \inf_{w \in E_\Phi(\Omega)} | \lambda u - w |_\Phi \\ &= \inf_{w \in E_\Phi(\Omega)} \lambda \left| u - \frac{w}{\lambda} \right|_\Phi \\ &= \lambda \inf_{\lambda \widehat{w} \in E_\Phi(\Omega)} | u - \widehat{w} |_\Phi \\ &= \lambda d_{|.|_\Phi}(u, E_\Phi(\Omega)), \end{aligned}$$

donde segue-se de (9), que para $\lambda > d_{|.|_\Phi}(u, E_\Phi(\Omega))^{-1}$

Para $\lambda > 0$, temos

$$\begin{aligned} d_{|.|_\Phi}(\lambda u, E_\Phi(\Omega)) &= \inf_{w \in E_\Phi(\Omega)} | \lambda u - w |_\Phi \\ &= \inf_{w \in E_\Phi(\Omega)} \lambda \left| u - \frac{w}{\lambda} \right|_\Phi \\ &= \lambda \inf_{\lambda \widehat{w} \in E_\Phi(\Omega)} | u - \widehat{w} |_\Phi \\ &= \lambda d_{|.|_\Phi}(u, E_\Phi(\Omega)), \end{aligned}$$

donde segue-se de (9), que para $\lambda > d_{|.|_\Phi}(u, E_\Phi(\Omega))^{-1}$

$$d_{|.|_\Phi}(\lambda u, E_\Phi(\Omega)) > 1,$$

Para $\lambda > 0$, temos

$$\begin{aligned} d_{|.|_\Phi}(\lambda u, E_\Phi(\Omega)) &= \inf_{w \in E_\Phi(\Omega)} | \lambda u - w |_\Phi \\ &= \inf_{w \in E_\Phi(\Omega)} \lambda \left| u - \frac{w}{\lambda} \right|_\Phi \\ &= \lambda \inf_{\lambda \widehat{w} \in E_\Phi(\Omega)} | u - \widehat{w} |_\Phi \\ &= \lambda d_{|.|_\Phi}(u, E_\Phi(\Omega)), \end{aligned}$$

donde segue-se de (9), que para $\lambda > d_{|.|_\Phi}(u, E_\Phi(\Omega))^{-1}$

$$d_{|.|_\Phi}(\lambda u, E_\Phi(\Omega)) > 1,$$

implicando do Lema 2.3 que $\lambda u \notin K_\Phi(\Omega)$ para $\lambda > d_{|.|_\Phi}(u, E_\Phi(\Omega))^{-1}$

Para $\lambda > 0$, temos

$$\begin{aligned} d_{|.|_\Phi}(\lambda u, E_\Phi(\Omega)) &= \inf_{w \in E_\Phi(\Omega)} | \lambda u - w |_\Phi \\ &= \inf_{w \in E_\Phi(\Omega)} \lambda \left| u - \frac{w}{\lambda} \right|_\Phi \\ &= \lambda \inf_{\lambda \widehat{w} \in E_\Phi(\Omega)} | u - \widehat{w} |_\Phi \\ &= \lambda d_{|.|_\Phi}(u, E_\Phi(\Omega)), \end{aligned}$$

donde segue-se de (9), que para $\lambda > d_{|.|_\Phi}(u, E_\Phi(\Omega))^{-1}$

$$d_{|.|_\Phi}(\lambda u, E_\Phi(\Omega)) > 1,$$

implicando do Lema 2.3 que $\lambda u \notin K_\Phi(\Omega)$ para $\lambda > d_{|.|_\Phi}(u, E_\Phi(\Omega))^{-1}$, contradizendo o fato de

$$\lambda u \in K_\Phi(\Omega), \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Para $\lambda > 0$, temos

$$\begin{aligned} d_{|.|_\Phi}(\lambda u, E_\Phi(\Omega)) &= \inf_{w \in E_\Phi(\Omega)} \mid \lambda u - w \mid_\Phi \\ &= \inf_{w \in E_\Phi(\Omega)} \lambda \left| u - \frac{w}{\lambda} \right|_\Phi \\ &= \lambda \inf_{\lambda \widehat{w} \in E_\Phi(\Omega)} \mid u - \widehat{w} \mid_\Phi \\ &= \lambda d_{|.|_\Phi}(u, E_\Phi(\Omega)), \end{aligned}$$

donde segue-se de (9), que para $\lambda > d_{|.|_\Phi}(u, E_\Phi(\Omega))^{-1}$

$$d_{|.|_\Phi}(\lambda u, E_\Phi(\Omega)) > 1,$$

implicando do Lema 2.3 que $\lambda u \notin K_\Phi(\Omega)$ para $\lambda > d_{|.|_\Phi}(u, E_\Phi(\Omega))^{-1}$, contradizendo o fato de

$$\lambda u \in K_\Phi(\Omega), \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Logo, $u \in E_\Phi(\Omega)$. ■

Observação

Pelo que foi visto anteriormente, podemos concluir que

"$L_\Phi(\Omega)$ é o menor subespaço vetorial que contém $K_\Phi(\Omega)$"

Observação

Pelo que foi visto anteriormente, podemos concluir que

"$L_\Phi(\Omega)$ é o menor subespaço vetorial que contém $K_\Phi(\Omega)$"

e

" $E_\Phi(\Omega)$ é o maior subespaço vetorial que está contido em $K_\Phi(\Omega)$".

Corolário

$E_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$ se, e só se, Φ satisfaz a condição Δ_2.

Corolário

$E_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$ se, e só se, Φ satisfaz a condição Δ_2.

Demonstração: Se $E_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$, então o fato de

$$E_\Phi(\Omega) \subset K_\Phi(\Omega) \subset L_\Phi(\Omega),$$

Corolário

$E_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$ se, e só se, Φ satisfaz a condição Δ_2.

Demonstração: Se $E_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$, então o fato de

$$E_\Phi(\Omega) \subset K_\Phi(\Omega) \subset L_\Phi(\Omega),$$

temos

$$K_\Phi(\Omega) = E_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega),$$

Corolário

$E_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$ se, e só se, Φ satisfaz a condição Δ_2.

Demonstração: Se $E_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$, então o fato de

$$E_\Phi(\Omega) \subset K_\Phi(\Omega) \subset L_\Phi(\Omega),$$

temos

$$K_\Phi(\Omega) = E_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega),$$

donde segue-se que $K_\Phi(\Omega)$ é um subespaço vetorial

Corolário

$E_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$ se, e só se, Φ satisfaz a condição Δ_2.

Demonstração: Se $E_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$, então o fato de

$$E_\Phi(\Omega) \subset K_\Phi(\Omega) \subset L_\Phi(\Omega),$$

temos

$$K_\Phi(\Omega) = E_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega),$$

donde segue-se que $K_\Phi(\Omega)$ é um subespaço vetorial, e portanto Φ satisfaz a condição Δ_2.

Corolário

$E_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$ se, e só se, Φ satisfaz a condição Δ_2.

Demonstração: Se $E_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$, então o fato de

$$E_\Phi(\Omega) \subset K_\Phi(\Omega) \subset L_\Phi(\Omega),$$

temos

$$K_\Phi(\Omega) = E_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega),$$

donde segue-se que $K_\Phi(\Omega)$ é um subespaço vetorial, e portanto Φ satisfaz a condição Δ_2.
Reciprocamente, se Φ satisfaz a condição Δ_2

Corolário

$E_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$ se, e só se, Φ satisfaz a condição Δ_2.

Demonstração: Se $E_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$, então o fato de

$$E_\Phi(\Omega) \subset K_\Phi(\Omega) \subset L_\Phi(\Omega),$$

temos

$$K_\Phi(\Omega) = E_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega),$$

donde segue-se que $K_\Phi(\Omega)$ é um subespaço vetorial, e portanto Φ satisfaz a condição Δ_2.
Reciprocamente, se Φ satisfaz a condição Δ_2, então

$$K_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega),$$

Corolário

$E_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$ se, e só se, Φ satisfaz a condição Δ_2.

Demonstração: Se $E_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$, então o fato de

$$E_\Phi(\Omega) \subset K_\Phi(\Omega) \subset L_\Phi(\Omega),$$

temos

$$K_\Phi(\Omega) = E_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega),$$

donde segue-se que $K_\Phi(\Omega)$ é um subespaço vetorial, e portanto Φ satisfaz a condição Δ_2.
Reciprocamente, se Φ satisfaz a condição Δ_2, então

$$K_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega),$$

donde segue-se, pelo fato de $E_\Phi(\Omega)$ ser o maior subespaço vetorial que está contido em $K_\Phi(\Omega)$

Corolário

$E_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$ se, e só se, Φ satisfaz a condição Δ_2.

Demonstração: Se $E_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$, então o fato de

$$E_\Phi(\Omega) \subset K_\Phi(\Omega) \subset L_\Phi(\Omega),$$

temos

$$K_\Phi(\Omega) = E_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega),$$

donde segue-se que $K_\Phi(\Omega)$ é um subespaço vetorial, e portanto Φ satisfaz a condição Δ_2.
Reciprocamente, se Φ satisfaz a condição Δ_2, então

$$K_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega),$$

donde segue-se, pelo fato de $E_\Phi(\Omega)$ ser o maior subespaço vetorial que está contido em $K_\Phi(\Omega)$, que

$$E_\Phi(\Omega) = K_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega). \blacksquare$$

Proposição 2.5

O espaço $E_\Phi(\Omega)$ é separável

Proposição 2.5

O espaço $E_\Phi(\Omega)$ é separável. Além disso o espaço $C_0(\Omega)$ das funções contínuas com suporte compacto em Ω é denso em $E_\Phi(\Omega)$

Proposição 2.5

O espaço $E_\Phi(\Omega)$ é separável. Além disso o espaço $C_0(\Omega)$ das funções contínuas com suporte compacto em Ω é denso em $E_\Phi(\Omega)$, isto é

$$\overline{C_0(\Omega)}^{|\cdot|_\Phi} = E_\Phi(\Omega).$$

Proposição 2.5

O espaço $E_\Phi(\Omega)$ é separável. Além disso o espaço $C_0(\Omega)$ das funções contínuas com suporte compacto em Ω é denso em $E_\Phi(\Omega)$, isto é

$$\overline{C_0(\Omega)}^{|\cdot|_\Phi} = E_\Phi(\Omega).$$

Proposição 2.6

$L_\Phi(\Omega)$ é separável se, e só se, Φ satisfaz a condição Δ_2.


ORLICZ, W. R., *Theory of Orlicz spaces*, Monographs and textbooks in pure and applied Mathematics, vol. 146, Marcel Dekker, Inc. New York, 1991.