# Espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev
# Sexta Aula: Existência de uma solução positiva $C^{1,\alpha}$ para um problema $\Phi-$Laplaciano.

Prof. Jefferson Abrantes

( Universidade Federal de Campina Grande)

Curso de Verão 2021

DM-UFSCar

São Carlos-SP

# Sobre o Problema

Sob certas condições para o parâmetro $\lambda > 0$, obteremos uma solução positiva para uma classe de problemas quaselineares, dados por:

$$(P_\lambda) \begin{cases} -div(\phi(|\nabla u|)\nabla u) = \lambda f(x,u), & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{na} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

# Sobre o Problema

Sob certas condições para o parâmetro $\lambda > 0$, obteremos uma solução positiva para uma classe de problemas quaselineares, dados por:

$$(P_\lambda) \begin{cases} -div(\phi(|\nabla u|)\nabla u) = \lambda f(x,u), & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{na} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\phi : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ satisfaz $(\phi_1) - (\phi_3)$

# Sobre o Problema

Sob certas condições para o parâmetro $\lambda > 0$, obteremos uma solução positiva para uma classe de problemas quaselineares, dados por:

$$(P_\lambda) \begin{cases} -div(\phi(|\nabla u|)\nabla u) = \lambda f(x,u), & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{na} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\phi : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ satisfaz $(\phi_1) - (\phi_3)$ e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ verifica as seguintes condições:

# Sobre o Problema

Sob certas condições para o parâmetro $\lambda > 0$, obteremos uma solução positiva para uma classe de problemas quaselineares, dados por:

$$(P_\lambda) \begin{cases} -div(\phi(|\nabla u|)\nabla u) = \lambda f(x,u), & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{na} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\phi : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ satisfaz $(\phi_1) - (\phi_3)$ e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ verifica as seguintes condições:

$(f_1)$ $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $f(x,0) = 0$ para $x \in \Omega$;

# Sobre o Problema

Sob certas condições para o parâmetro $\lambda > 0$, obteremos uma solução positiva para uma classe de problemas quaselineares, dados por:

$$(P_\lambda) \begin{cases} -div(\phi(|\nabla u|)\nabla u) = \lambda f(x,u), & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{na} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\phi : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ satisfaz $(\phi_1) - (\phi_3)$ e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ verifica as seguintes condições:

- $(f_1)$ $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $f(x,0) = 0$ para $x \in \Omega$;
- $(f_2)$ $f(x,t) \geq 0$ para $x \in \Omega$, $t > 0$,

# Sobre o Problema

Sob certas condições para o parâmetro $\lambda > 0$, obteremos uma solução positiva para uma classe de problemas quaselineares, dados por:

$$(P_\lambda) \begin{cases} -div(\phi(|\nabla u|)\nabla u) = \lambda f(x,u), & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{na} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\phi : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ satisfaz $(\phi_1) - (\phi_3)$ e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ verifica as seguintes condições:

- $(f_1)$ $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $f(x,0) = 0$ para $x \in \Omega$;
- $(f_2)$ $f(x,t) \geq 0$ para $x \in \Omega$, $t > 0$, e existe um aberto $\Omega_0 \subset \Omega$ tal que
$$f(x,t) > 0 \text{ para } x \in \Omega_0 \text{ e } t > 0;$$

$(f_3)$ existe $C_0 > 0$ tal que

$$f(x,t)t \leq C_0\Phi(t) \text{ para } x \in \Omega \text{ e } t \geq 0;$$

$(f_3)$ existe $C_0 > 0$ tal que

$$f(x,t)t \leq C_0\Phi(t) \text{ para } x \in \Omega \text{ e } t \geq 0;$$

$(f_4)$ $\lim_{t\to+\infty} \dfrac{f(x,t)t}{\Phi(t)} = 0$ uniformemente em $\Omega$.

# A-Priori Estimate

Inicialmente, observe que uma solução (fraca) para o problema $(P_\lambda)$, é uma função $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, que satisfaz a equação

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u \nabla \varphi dx - \lambda \int_\Omega f(x,u)\varphi dx = 0 \tag{1}$$

para todo $\varphi \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

# A-Priori Estimate

Inicialmente, observe que uma solução (fraca) para o problema $(P_\lambda)$, é uma função $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, que satisfaz a equação

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u|)\nabla u \nabla \varphi dx - \lambda \int_\Omega f(x,u)\varphi dx = 0 \tag{1}$$

para todo $\varphi \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Uma vez que estamos interessados apenas por soluções positivas, assumiremos que

$$f(x,t) = 0, \text{ para } x \in \Omega \text{ e } t \leq 0.$$

Verificaremos agora, através do lema a seguir, a regularidade das soluções de $(P_\lambda)$.

**Lema 6.1**

Sejam $\phi(t)$ e $f(x,t)$ satisfazendo $(\phi_1) - (\phi_3)$ e $(f_3)$, respectivamente.

Verificaremos agora, através do lema a seguir, a regularidade das soluções de $(P_\lambda)$.

**Lema 6.1**

Sejam $\phi(t)$ e $f(x,t)$ satisfazendo $(\phi_1) - (\phi_3)$ e $(f_3)$, respectivamente. Se $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é uma solução de $(P_\lambda)$,

Verificaremos agora, através do lema a seguir, a regularidade das soluções de $(P_\lambda)$.

**Lema 6.1**

Sejam $\phi(t)$ e $f(x,t)$ satisfazendo $(\phi_1) - (\phi_3)$ e $(f_3)$, respectivamente. Se $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é uma solução de $(P_\lambda)$, então $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algum $\alpha \in (0,1)$.

Verificaremos agora, através do lema a seguir, a regularidade das soluções de $(P_\lambda)$.

**Lema 6.1**

Sejam $\phi(t)$ e $f(x,t)$ satisfazendo $(\phi_1) - (\phi_3)$ e $(f_3)$, respectivamente. Se $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ é uma solução de $(P_\lambda)$, então $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, para algum $\alpha \in (0,1)$. Além disso,

$$\| u \|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq d,$$

para algum $d = d(\lambda, N, | u |_\Phi)$.

*Demonstração:* Sendo $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ uma solução de $(P_\lambda)$, temos

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u|)\,|\nabla u|^2\,dx = \lambda \int_\Omega f(x,u)u\,dx,$$

*Demonstração:* Sendo $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ uma solução de $(P_\lambda)$, temos

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u|)\,|\nabla u|^2\,dx = \lambda \int_\Omega f(x,u)u\,dx,$$

implicando de $(f_3)$ que

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u|)\,|\nabla u|^2\,dx \leq \lambda C_0 \int_\Omega \Phi(|u|)\,dx. \tag{2}$$

*Demonstração:* Sendo $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ uma solução de $(P_\lambda)$, temos

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u|)\,|\nabla u|^2\,dx = \lambda \int_\Omega f(x,u)u\,dx,$$

implicando de $(f_3)$ que

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u|)\,|\nabla u|^2\,dx \leq \lambda C_0 \int_\Omega \Phi(|u|)\,dx. \tag{2}$$

Veja, também, que

$$\phi(|u|)\,|u|\,|\nabla u| \leq \phi(|u|)\,|u|^2 + \phi(|\nabla u|)\,|\nabla u|^2, \tag{3}$$

para todo $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

Utilizando (3), obtemos:

$$\int_{\Omega} \mid \nabla(\Phi(\mid u \mid)) \mid dx \quad = \quad \int_{\Omega} \phi(\mid u \mid) \mid u \mid\mid \nabla u \mid dx$$

Utilizando (3), obtemos:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mid \nabla(\Phi(\mid u \mid)) \mid dx &= \int_\Omega \phi(\mid u \mid) \mid u \mid\mid \nabla u \mid dx \\ &\leq \int_\Omega (\phi(\mid u \mid) \mid u \mid^2 + \phi(\mid \nabla u \mid) \mid \nabla u \mid^2) dx\end{aligned}$$

Utilizando (3), obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \mid \nabla(\Phi(\mid u \mid)) \mid dx &= \int_\Omega \phi(\mid u \mid) \mid u \mid\mid \nabla u \mid dx \\
&\leq \int_\Omega (\phi(\mid u \mid) \mid u \mid^2 + \phi(\mid \nabla u \mid) \mid \nabla u \mid^2) dx \\
&= \int_\Omega \left[\Phi(\mid u \mid) + \widetilde{\Phi}(\phi(\mid u \mid) \mid u \mid)\right] dx
\end{aligned}$$

Utilizando (3), obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \mid \nabla(\Phi(\mid u \mid)) \mid dx &= \int_\Omega \phi(\mid u \mid) \mid u \mid\mid \nabla u \mid dx \\
&\leq \int_\Omega (\phi(\mid u \mid) \mid u \mid^2 + \phi(\mid \nabla u \mid) \mid \nabla u \mid^2) dx \\
&= \int_\Omega \left[\Phi(\mid u \mid) + \widetilde{\Phi}(\phi(\mid u \mid) \mid u \mid)\right] dx \\
&\quad + \int_\Omega \phi(\mid \nabla u \mid) \mid \nabla u \mid^2 dx,
\end{aligned}$$

donde, segue-se, de (2), que

$$\int_\Omega \mid \nabla(\Phi(\mid u \mid)) \mid dx \quad \leq \quad \int_\Omega \Phi(\mid u \mid)dx + \int_\Omega \Phi(2 \mid u \mid)dx$$

donde, segue-se, de (2), que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \mid \nabla(\Phi(\mid u \mid)) \mid dx &\leq \int_\Omega \Phi(\mid u \mid)dx + \int_\Omega \Phi(2 \mid u \mid)dx \\
&\quad + \int_\Omega \phi(\mid \nabla u \mid) \mid \nabla u \mid^2 dx \\
&\leq \int_\Omega \Phi(\mid u \mid)dx + C_1 \int_\Omega \Phi(\mid u \mid)dx
\end{aligned}$$

donde, segue-se, de (2), que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \mid \nabla(\Phi(\mid u \mid)) \mid dx &\leq \int_\Omega \Phi(\mid u \mid)dx + \int_\Omega \Phi(2 \mid u \mid)dx \\
&\quad + \int_\Omega \phi(\mid \nabla u \mid) \mid \nabla u \mid^2 dx \\
&\leq \int_\Omega \Phi(\mid u \mid)dx + C_1 \int_\Omega \Phi(\mid u \mid)dx \\
&\quad + \int_\Omega \phi(\mid \nabla u \mid) \mid \nabla u \mid^2 dx
\end{aligned}$$

donde, segue-se, de (2), que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \mid \nabla(\Phi(\mid u \mid)) \mid dx &\leq \int_\Omega \Phi(\mid u \mid)dx + \int_\Omega \Phi(2 \mid u \mid)dx \\
&\quad + \int_\Omega \phi(\mid \nabla u \mid) \mid \nabla u \mid^2 dx \\
&\leq \int_\Omega \Phi(\mid u \mid)dx + C_1 \int_\Omega \Phi(\mid u \mid)dx \\
&\quad + \int_\Omega \phi(\mid \nabla u \mid) \mid \nabla u \mid^2 dx \\
&\leq C_1 \int_\Omega \Phi(\mid u \mid)dx, \qquad (4)
\end{aligned}$$

para alguma constante $C_2 > 0$.

Agora, considerando $\nu = \frac{N}{N-1}$ e $K > 0$ a constante obtida pela imersão contínua $W_0^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^{\nu}(\Omega)$,

Agora, considerando $\nu = \frac{N}{N-1}$ e $K > 0$ a constante obtida pela imersão contínua $W_0^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^{\nu}(\Omega)$, segue-se da desigualdade de Sobolev e de (4) que

$$\Big( \int_{\Omega} \Phi(|\, u \,|)^{\nu} dx \Big)^{\frac{1}{\nu}} \quad \leq \quad K \int_{\Omega} |\, \nabla(\Phi(|\, u \,|)) \,| \, dx$$

Agora, considerando $\nu = \frac{N}{N-1}$ e $K > 0$ a constante obtida pela imersão contínua $W_0^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^{\nu}(\Omega)$, segue-se da desigualdade de Sobolev e de (4) que

$$\begin{aligned} \Big( \int_\Omega \Phi(\mid u \mid)^{\nu} dx \Big)^{\frac{1}{\nu}} &\leq K \int_\Omega \mid \nabla(\Phi(\mid u \mid)) \mid dx \\ (5) \qquad &\leq C_3.K \int_\Omega \Phi(\mid u \mid) dx. \end{aligned}$$

Agora, considerando $\nu = \frac{N}{N-1}$ e $K > 0$ a constante obtida pela imersão contínua $W_0^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^{\nu}(\Omega)$, segue-se da desigualdade de Sobolev e de (4) que

$$\begin{aligned} \Big( \int_{\Omega} \Phi(\mid u \mid)^{\nu} dx \Big)^{\frac{1}{\nu}} &\leq K \int_{\Omega} \mid \nabla(\Phi(\mid u \mid)) \mid dx \\ &\leq C_3.K \int_{\Omega} \Phi(\mid u \mid) dx. \end{aligned} \tag{5}$$

Por outro lado, fixe $q > 1$, de sorte que $\Phi(\mid u \mid) \in L^q(\Omega)$.

Agora, considerando $\nu = \frac{N}{N-1}$ e $K > 0$ a constante obtida pela imersão contínua $W_0^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^{\nu}(\Omega)$, segue-se da desigualdade de Sobolev e de (4) que

$$\begin{aligned} \Big( \int_\Omega \Phi(\mid u \mid)^{\nu} dx \Big)^{\frac{1}{\nu}} &\leq K \int_\Omega \mid \nabla(\Phi(\mid u \mid)) \mid dx \\ &\leq C_3.K \int_\Omega \Phi(\mid u \mid) dx. \end{aligned} \tag{5}$$

Por outro lado, fixe $q > 1$, de sorte que $\Phi(\mid u \mid) \in L^q(\Omega)$. Considerando

$$\Phi_L(t) := \Phi(\min\{t, L\}), \quad L > 0,$$

defina $\varphi_L \equiv \Phi_L(\mid u \mid)^{q-1} u$.

Neste caso,

$$\nabla \varphi_L = \psi_L(\mid u \mid)\nabla u,$$

Neste caso,

$$\nabla \varphi_L = \psi_L(|\ u\ |)\nabla u,$$

onde

$$\psi_L(t) = \begin{cases} \Phi(t)^{q-1} + (q-1)\Phi(t)^{q-2}\phi(t)t^2, & \text{se} \quad 0 \leq t \leq L, \\ \end{cases}$$

Neste caso,

$$\nabla \varphi_L = \psi_L(|\ u\ |)\nabla u,$$

onde

$$\psi_L(t) = \begin{cases} \Phi(t)^{q-1} + (q-1)\Phi(t)^{q-2}\phi(t)t^2, & \text{se} \quad 0 \leq t \leq L, \\ \Phi(L)^{q-1}, & \text{se} \quad t > L. \end{cases} \tag{6}$$

Neste caso,

$$\nabla\varphi_L = \psi_L(|\ u\ |)\nabla u,$$

onde

$$\psi_L(t) = \begin{cases} \Phi(t)^{q-1} + (q-1)\Phi(t)^{q-2}\phi(t)t^2, & \text{se} \quad 0 \leq t \leq L, \\ \Phi(L)^{q-1}, & \text{se} \quad t > L. \end{cases} \tag{6}$$

Visto isto, usando $(f_3)$ e o fato de $\varphi_L \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$,

$$\int_\Omega \psi_L(|\ u\ |)\phi(|\ \nabla u\ |)\ |\ \nabla u\ |^2\ dx \quad = \quad \lambda \int_\Omega f(x,u)\Phi_L(|\ u\ |)^{q-1} u dx$$

Neste caso,

$$\nabla \varphi_L = \psi_L(|\ u\ |)\nabla u,$$

onde

$$\psi_L(t) = \begin{cases} \Phi(t)^{q-1} + (q-1)\Phi(t)^{q-2}\phi(t)t^2, & \text{se} \quad 0 \leq t \leq L, \\ \Phi(L)^{q-1}, & \text{se} \quad t > L. \end{cases} \tag{6}$$

Visto isto, usando $(f_3)$ e o fato de $\varphi_L \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \psi_L(|\ u\ |)\phi(|\ \nabla u\ |)\ |\ \nabla u\ |^2\ dx &= \lambda \int_\Omega f(x,u)\Phi_L(|\ u\ |)^{q-1}u dx \\ &\leq \lambda C_0 \int_\Omega \Phi(|\ u\ |)^q dx. \end{aligned} \tag{7}$$

Por $(\phi_2)$, para $\mid u \mid \leq L$, obtemos

$$\psi_L(\mid u \mid) \quad = \quad \Phi(\mid u \mid)^{q-1} + (q-1)\Phi(\mid u \mid)^{q-2}\phi(\mid u \mid) \mid u \mid^2$$

Por $(\phi_2)$, para $\mid u \mid \leq L$, obtemos

$$\begin{aligned} \psi_L(\mid u \mid) &= \Phi(\mid u \mid)^{q-1} + (q-1)\Phi(\mid u \mid)^{q-2}\phi(\mid u \mid) \mid u \mid^2 \\ &\geq \Phi(\mid u \mid)^{q-1} + l(q-1)\Phi(\mid u \mid)^{q-2}\Phi(\mid u \mid) \end{aligned}$$

Por $(\phi_2)$, para $\mid u \mid \leq L$, obtemos

$$\begin{aligned}
\psi_L(\mid u \mid) &= \Phi(\mid u \mid)^{q-1} + (q-1)\Phi(\mid u \mid)^{q-2}\phi(\mid u \mid) \mid u \mid^2 \\
&\geq \Phi(\mid u \mid)^{q-1} + l(q-1)\Phi(\mid u \mid)^{q-2}\Phi(\mid u \mid) \\
&= \Phi(\mid u \mid)^{q-1} + l(q-1)\Phi(\mid u \mid)^{q-1}
\end{aligned}$$

Por $(\phi_2)$, para $\mid u \mid \leq L$, obtemos

$$\begin{aligned}
\psi_L(\mid u \mid) &= \Phi(\mid u \mid)^{q-1} + (q-1)\Phi(\mid u \mid)^{q-2}\phi(\mid u \mid) \mid u \mid^2 \\
&\geq \Phi(\mid u \mid)^{q-1} + l(q-1)\Phi(\mid u \mid)^{q-2}\Phi(\mid u \mid) \\
&= \Phi(\mid u \mid)^{q-1} + l(q-1)\Phi(\mid u \mid)^{q-1} \\
&= (1 + l(q-1))\Phi(\mid u \mid)^{q-1}. \qquad (8)
\end{aligned}$$

Assim, usando (7) e (8), temos

$$\int_{\Omega} \mid \nabla(\Phi_L(\mid u \mid)^q) \mid dx = q \int_{\{x\in\Omega;|u|\leq L\}} \Phi(\mid u \mid)^{q-1}\Phi'(\mid u \mid) \mid \nabla u \mid dx$$

Assim, usando (7) e (8), temos

$$\int_\Omega \mid \nabla(\Phi_L(\mid u \mid)^q) \mid dx = q \int_{\{x\in\Omega;|u|\leq L\}} \Phi(\mid u \mid)^{q-1}\Phi'(\mid u \mid) \mid \nabla u \mid dx$$

$$\leq \frac{q}{(1+l(q-1))} \int_{\{x\in\Omega;|u|\leq L\}} \psi_L(\mid u \mid)\phi(\mid u \mid) \mid u \mid\mid \nabla u \mid dx$$

Assim, usando (7) e (8), temos

$$\int_\Omega \mid \nabla(\Phi_L(\mid u \mid)^q) \mid dx = q \int_{\{x\in\Omega;|u|\leq L\}} \Phi(\mid u \mid)^{q-1}\Phi'(\mid u \mid) \mid \nabla u \mid dx$$

$$\leq \frac{q}{(1+l(q-1))} \int_{\{x\in\Omega;|u|\leq L\}} \psi_L(\mid u \mid)\phi(\mid u \mid) \mid u \mid\mid \nabla u \mid dx$$

$$\leq \frac{q}{(1+l(q-1))} \int_{\{x\in\Omega;|u|\leq L\}} \psi_L(\mid u \mid)\Big(\phi(\mid u \mid) \mid u \mid^2$$

Assim, usando (7) e (8), temos

$$\int_\Omega \mid \nabla(\Phi_L(\mid u \mid)^q) \mid dx = q \int_{\{x\in\Omega;|u|\leq L\}} \Phi(\mid u \mid)^{q-1}\Phi'(\mid u \mid) \mid \nabla u \mid dx$$

$$\leq \frac{q}{(1+l(q-1))} \int_{\{x\in\Omega;|u|\leq L\}} \psi_L(\mid u \mid)\phi(\mid u \mid) \mid u \mid\mid \nabla u \mid dx$$

$$\leq \frac{q}{(1+l(q-1))} \int_{\{x\in\Omega;|u|\leq L\}} \psi_L(\mid u \mid)\Big(\phi(\mid u \mid) \mid u \mid^2$$

$$+\phi(\mid \nabla u \mid) \mid \nabla u \mid^2 \Big) dx$$

Assim, usando (7) e (8), temos

$$\int_\Omega \mid \nabla(\Phi_L(\mid u \mid)^q) \mid dx = q \int_{\{x\in\Omega;|u|\leq L\}} \Phi(\mid u \mid)^{q-1}\Phi'(\mid u \mid) \mid \nabla u \mid dx$$

$$\leq \frac{q}{(1+l(q-1))} \int_{\{x\in\Omega;|u|\leq L\}} \psi_L(\mid u \mid)\phi(\mid u \mid) \mid u \mid\mid \nabla u \mid dx$$

$$\leq \frac{q}{(1+l(q-1))} \int_{\{x\in\Omega;|u|\leq L\}} \psi_L(\mid u \mid)\Big(\phi(\mid u \mid) \mid u \mid^2$$

$$+\phi(\mid \nabla u \mid) \mid \nabla u \mid^2 \Big) dx$$

$$\leq \frac{q}{(1+l(q-1))} \int_{\{x\in\Omega;|u|\leq L\}} \psi_L(\mid u \mid)\phi(\mid u \mid) \mid u \mid^2 dx$$

Assim, usando (7) e (8), temos

$$\int_\Omega \mid \nabla(\Phi_L(\mid u \mid)^q) \mid dx = q \int_{\{x\in\Omega;|u|\leq L\}} \Phi(\mid u \mid)^{q-1}\Phi'(\mid u \mid) \mid \nabla u \mid dx$$

$$\leq \frac{q}{(1+l(q-1))} \int_{\{x\in\Omega;|u|\leq L\}} \psi_L(\mid u \mid)\phi(\mid u \mid) \mid u \mid\mid \nabla u \mid dx$$

$$\leq \frac{q}{(1+l(q-1))} \int_{\{x\in\Omega;|u|\leq L\}} \psi_L(\mid u \mid)\Big(\phi(\mid u \mid) \mid u \mid^2$$

$$+\phi(\mid \nabla u \mid) \mid \nabla u \mid^2 \Big) dx$$

$$\leq \frac{q}{(1+l(q-1))} \int_{\{x\in\Omega;|u|\leq L\}} \psi_L(\mid u \mid)\phi(\mid u \mid) \mid u \mid^2 dx$$

$$+\frac{\lambda q C_0}{(1+l(q-1))} \int_\Omega \Phi(\mid u \mid)^q dx.$$

(9)

Por outro lado, de $(\phi_2)$, para $\mid u \mid \leq L$, temos

$$\psi_L(\mid u \mid) \quad = \quad \Phi(\mid u \mid)^{q-1} + (q-1)\Phi(\mid u \mid)^{q-2}\phi(\mid u \mid) \mid u \mid^2$$

Por outro lado, de $(\phi_2)$, para $\mid u \mid \leq L$, temos

$$\begin{aligned} \psi_L(\mid u \mid) &= \Phi(\mid u \mid)^{q-1} + (q-1)\Phi(\mid u \mid)^{q-2}\phi(\mid u \mid) \mid u \mid^2 \\ &\leq (\Phi(\mid u \mid)^{q-1} + (q-1)m\Phi(\mid u \mid)^{q-1}) \end{aligned}$$

Por outro lado, de $(\phi_2)$, para $\mid u \mid \leq L$, temos

$$\begin{aligned}
\psi_L(\mid u \mid) &= \Phi(\mid u \mid)^{q-1} + (q-1)\Phi(\mid u \mid)^{q-2}\phi(\mid u \mid) \mid u \mid^2 \\
&\leq (\Phi(\mid u \mid)^{q-1} + (q-1)m\Phi(\mid u \mid)^{q-1}) \\
&= (1 + (q-1)m)\Phi(\mid u \mid)^{q-1},
\end{aligned}$$

Por outro lado, de $(\phi_2)$, para $\mid u \mid \leq L$, temos

$$\begin{aligned}\psi_L(\mid u \mid) &= \Phi(\mid u \mid)^{q-1} + (q-1)\Phi(\mid u \mid)^{q-2}\phi(\mid u \mid) \mid u \mid^2 \\ &\leq (\Phi(\mid u \mid)^{q-1} + (q-1)m\Phi(\mid u \mid)^{q-1}) \\ &= (1+(q-1)m)\Phi(\mid u \mid)^{q-1},\end{aligned}$$

donde segue-se que

$$\psi_L(\mid u \mid)\phi(\mid u \mid) \mid u \mid^2 \leq (m+(q-1)m^2)\Phi(\mid u \mid)^q, \tag{10}$$

para $\mid u \mid \leq L$.

Por outro lado, de $(\phi_2)$, para $\mid u \mid \leq L$, temos

$$\begin{aligned}\psi_L(\mid u \mid) &= \Phi(\mid u \mid)^{q-1} + (q-1)\Phi(\mid u \mid)^{q-2}\phi(\mid u \mid) \mid u \mid^2 \\ &\leq (\Phi(\mid u \mid)^{q-1} + (q-1)m\Phi(\mid u \mid)^{q-1}) \\ &= (1+(q-1)m)\Phi(\mid u \mid)^{q-1},\end{aligned}$$

donde segue-se que

$$\psi_L(\mid u \mid)\phi(\mid u \mid) \mid u \mid^2 \leq (m+(q-1)m^2)\Phi(\mid u \mid)^q, \tag{10}$$

para $\mid u \mid \leq L$. De (9) e (10), obtemos

(11)

$$\int_\Omega \mid \nabla(\Phi_L(\mid u \mid)^q) \mid dx \leq \lambda C_0 \Big(\frac{m+(q-1)m^2}{1+l(q-1)}\Big) q \int_\Omega \Phi(\mid u \mid)^q dx.$$

## Afirmação 1.

Existe uma constante $C > 0$ independente de $q > 1$ tal que

$$\frac{m + (q-1)m^2}{1 + l(q-1)} \leq C, \quad q > 1.$$

**Afirmação 1.**

Existe uma constante $C > 0$ independente de $q > 1$ tal que

$$\frac{m + (q-1)m^2}{1 + l(q-1)} \leq C, \quad q > 1.$$

De fato, se definirmos

$$\gamma(t) := \frac{m + (t-1)m^2}{1 + l(t-1)}, \quad t > 1,$$

## Afirmação 1.

Existe uma constante $C > 0$ independente de $q > 1$ tal que

$$\frac{m + (q-1)m^2}{1 + l(q-1)} \leq C, \quad q > 1.$$

De fato, se definirmos

$$\gamma(t) := \frac{m + (t-1)m^2}{1 + l(t-1)}, \quad t > 1,$$

observamos que

- $\gamma(t) \to m$, quando $t \to 1^+$;

## Afirmação 1.

Existe uma constante $C > 0$ independente de $q > 1$ tal que

$$\frac{m + (q-1)m^2}{1 + l(q-1)} \leq C, \quad q > 1.$$

De fato, se definirmos

$$\gamma(t) := \frac{m + (t-1)m^2}{1 + l(t-1)}, \quad t > 1,$$

observamos que

- $\gamma(t) \to m$, quando $t \to 1^+$;
- $\gamma(t) \to \dfrac{m^2}{l}$, quando $t \to +\infty$;

## Afirmação 1.

Existe uma constante $C > 0$ independente de $q > 1$ tal que

$$\frac{m + (q-1)m^2}{1 + l(q-1)} \leq C, \quad q > 1.$$

De fato, se definirmos

$$\gamma(t) := \frac{m + (t-1)m^2}{1 + l(t-1)}, \quad t > 1,$$

observamos que

- $\gamma(t) \to m$, quando $t \to 1^+$;
- $\gamma(t) \to \dfrac{m^2}{l}$, quando $t \to +\infty$;
- $\gamma$ é contínua em $(1, +\infty)$.

## Afirmação 1.

Existe uma constante $C > 0$ independente de $q > 1$ tal que

$$\frac{m + (q-1)m^2}{1 + l(q-1)} \leq C, \quad q > 1.$$

De fato, se definirmos

$$\gamma(t) := \frac{m + (t-1)m^2}{1 + l(t-1)}, \quad t > 1,$$

observamos que

- $\gamma(t) \to m$, quando $t \to 1^+$;
- $\gamma(t) \to \dfrac{m^2}{l}$, quando $t \to +\infty$;
- $\gamma$ é contínua em $(1, +\infty)$.

Por estes fatos, $\gamma$ é limitado em $(1, +\infty)$ e, consequentemente, existe $C > 0$, tal que

$$\gamma(q) = \frac{m + (q-1)m^2}{1 + l(q-1)} \leq C, \quad q > 1.$$

Da desigualdade de Sobolev, temos que

$$\Big( \int_\Omega \Phi_L(|\ u\ |)^{q\nu} dx \Big)^{\frac{1}{\nu}} \leq K \int_\Omega |\ \nabla(\Phi_L(|\ u\ |)^q)\ | \, dx,$$

Da desigualdade de Sobolev, temos que

$$\Big( \int_\Omega \Phi_L(\mid u \mid)^{q\nu} dx \Big)^{\frac{1}{\nu}} \leq K \int_\Omega \mid \nabla(\Phi_L(\mid u \mid)^q) \mid dx,$$

o que implica de (11) e da Afirmação 1,

$$\Big( \int_\Omega \Phi_L(\mid u \mid)^{q\nu} dx \Big)^{\frac{1}{\nu}} \leq Cq \int_\Omega \Phi(\mid u \mid)^q dx,$$

Da desigualdade de Sobolev, temos que

$$\Big( \int_\Omega \Phi_L(|\ u\ |)^{q\nu} dx \Big)^{\frac{1}{\nu}} \leq K \int_\Omega |\ \nabla(\Phi_L(|\ u\ |)^q)\ | \, dx,$$

o que implica de (11) e da Afirmação 1,

$$\Big( \int_\Omega \Phi_L(|\ u\ |)^{q\nu} dx \Big)^{\frac{1}{\nu}} \leq Cq \int_\Omega \Phi(|\ u\ |)^q dx,$$

onde $C > 0$ independe de $q$.

Da desigualdade de Sobolev, temos que

$$\Big( \int_\Omega \Phi_L(\mid u \mid)^{q\nu} dx \Big)^{\frac{1}{\nu}} \leq K \int_\Omega \mid \nabla(\Phi_L(\mid u \mid)^q) \mid dx,$$

o que implica de (11) e da Afirmação 1,

$$\Big( \int_\Omega \Phi_L(\mid u \mid)^{q\nu} dx \Big)^{\frac{1}{\nu}} \leq Cq \int_\Omega \Phi(\mid u \mid)^q dx,$$

onde $C > 0$ independe de $q$. Passando ao limite de $L \to \infty$, obtemos

$$\Big( \int_\Omega \Phi(\mid u \mid)^{q\nu} dx \Big)^{\frac{1}{\nu}} \leq Cq. \int_\Omega \Phi(\mid u \mid)^q dx. \tag{12}$$

Da desigualdade de Sobolev, temos que

$$\Big(\int_\Omega \Phi_L(\mid u \mid)^{q\nu} dx\Big)^{\frac{1}{\nu}} \leq K \int_\Omega \mid \nabla(\Phi_L(\mid u \mid)^q) \mid dx,$$

o que implica de (11) e da Afirmação 1,

$$\Big(\int_\Omega \Phi_L(\mid u \mid)^{q\nu} dx\Big)^{\frac{1}{\nu}} \leq Cq \int_\Omega \Phi(\mid u \mid)^q dx,$$

onde $C > 0$ independe de $q$. Passando ao limite de $L \to \infty$, obtemos

$$\Big(\int_\Omega \Phi(\mid u \mid)^{q\nu} dx\Big)^{\frac{1}{\nu}} \leq Cq. \int_\Omega \Phi(\mid u \mid)^q dx. \tag{12}$$

Multiplicando (12) por $C^{N-1}$ e elevando posteriormente a $\frac{1}{q}$, temos

$$\Big(\int_\Omega \Phi(\mid u \mid)^{q\nu} C^N dx\Big)^{\frac{1}{q\nu}} \leq q^{\frac{1}{q}} \Big(\int_\Omega \Phi(\mid u \mid)^q C^N dx\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Fazendo $q = \nu^t$, $t = 0, 1, 2, ...$, e usando o procedimento iterativo, obtemos

$$\| \Phi(| u |) \|_{\nu^{t+1}} \leq (\nu^t)^{\frac{1}{\nu^t}} \| \Phi(| u |) \|_{\nu^t}, \quad t = 0, 1, 2, ... \tag{13}$$

Fazendo $q = \nu^t$, $t = 0, 1, 2, ...$, e usando o procedimento iterativo, obtemos

$$\| \Phi(| u |) \|_{\nu^{t+1}} \leq (\nu^t)^{\frac{1}{\nu^t}} \| \Phi(| u |) \|_{\nu^t}, \quad t = 0, 1, 2, ... \tag{13}$$

onde $\| . \|_q$ denota a norma usual de Lebesgue com a medida $C^N dx$.

Fazendo $q = \nu^t$, $t = 0, 1, 2, ...$, e usando o procedimento iterativo, obtemos

$$\| \Phi(|u|) \|_{\nu^{t+1}} \leq (\nu^t)^{\frac{1}{\nu^t}} \| \Phi(|u|) \|_{\nu^t}, \quad t = 0, 1, 2, ... \tag{13}$$

onde $\| . \|_q$ denota a norma usual de Lebesgue com a medida $C^N dx$. Logo,

(14)

$$\| \Phi(|u|) \|_{\nu^t} \leq \nu^{\sum_{j=0}^{t-1} \frac{j}{\nu^j}} \| \Phi(|u|) \|_1 \leq K_1(N) \| \Phi(|u|) \|_1, \quad t \in \mathbb{N}.$$

Logo, passando ao limite de $t \to \infty$ em (14), obtemos

$$\| \Phi(| u |) \|_\infty \leq K_1(N) \int_\Omega \Phi(| u |) dx \leq K_1(N) \xi_1(| u |_\Phi),$$

Logo, passando ao limite de $t \to \infty$ em (14), obtemos

$$\| \Phi(| u |) \|_\infty \leq K_1(N) \int_\Omega \Phi(| u |) dx \leq K_1(N) \xi_1(| u |_\Phi),$$

implicando que $u \in L^\infty(\Omega)$ e,

Logo, passando ao limite de $t \to \infty$ em (14), obtemos

$$\| \Phi(| u |) \|_{\infty} \leq K_1(N) \int_{\Omega} \Phi(| u |) dx \leq K_1(N) \xi_1(| u |_{\Phi}),$$

implicando que $u \in L^{\infty}(\Omega)$ e, consequentemente,

$$\| u \|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq K(\lambda, N, | u |_{\Phi}).$$

Logo, passando ao limite de $t \to \infty$ em (14), obtemos

$$\| \Phi(| u |) \|_{\infty} \leq K_1(N) \int_{\Omega} \Phi(| u |) dx \leq K_1(N) \xi_1(| u |_{\Phi}),$$

implicando que $u \in L^{\infty}(\Omega)$ e, consequentemente,

$$\| u \|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq K(\lambda, N, | u |_{\Phi}).$$

Deste fato,

$$h = f(x, u) \in L^{\infty}(\Omega),$$

Logo, passando ao limite de $t \to \infty$ em (14), obtemos

$$\| \Phi(| u |) \|_{\infty} \leq K_1(N) \int_{\Omega} \Phi(| u |) dx \leq K_1(N) \xi_1(| u |_{\Phi}),$$

implicando que $u \in L^{\infty}(\Omega)$ e, consequentemente,

$$\| u \|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq K(\lambda, N, | u |_{\Phi}).$$

Deste fato,

$$h = f(x, u) \in L^{\infty}(\Omega),$$

e portanto, segue que $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ para algum $\alpha > 0$

Logo, passando ao limite de $t \to \infty$ em (14), obtemos

$$\| \Phi(| u |) \|_{\infty} \leq K_1(N) \int_{\Omega} \Phi(| u |) dx \leq K_1(N) \xi_1(| u |_{\Phi}),$$

implicando que $u \in L^{\infty}(\Omega)$ e, consequentemente,

$$\| u \|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq K(\lambda, N, | u |_{\Phi}).$$

Deste fato,

$$h = f(x, u) \in L^{\infty}(\Omega),$$

e portanto, segue que $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ para algum $\alpha > 0$ e existe $d = d(\lambda, N, | u |_{\Phi}) > 0$, tal que

$$\| u \|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq d,$$

como queríamos demonstrar.■

# (Preprint) with Alves, C.O. (UFCG) and Zhou, J.(UnB)

**Theorem**

*Assume* $(\phi_1)-(\phi_4)$ *and let* $u_j \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ *be a solution of the quasilinear problem*

$$-\mathit{div}(\phi(|\nabla u_j|)\nabla u_j) = g_j(x,u_j) \ \ \mathit{in}\ \Omega, \tag{15}$$

*where the Caracthéodory function* $g_j$ *satisfies the uniform growth condition*

$$|g_j(x,t)| \le C_1 + C_2\frac{\Phi_*(|t|)}{|t|},\ t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}. \tag{16}$$

*Assume that* $(u_j)$ *remains bounded in* $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ *and that*

$$\int_E \Phi_*(|u_j|)\,dx \to 0 \ \mathit{as}\ |E| \to 0,\ \mathit{uniformly\ in}\ j.$$

*Then* $(u_j)$ *remains bounded in* $C^{1,\alpha}(\Omega)$, *for some* $0<\alpha<1$.

# Existência de uma solução positiva

Para mostrarmos a existência de uma solução para o problema $(P_\lambda)$, utilizaremos o método variacional.

# Existência de uma solução positiva

Para mostrarmos a existência de uma solução para o problema $(P_\lambda)$, utilizaremos o método variacional. Por este fato, seja $I_\lambda : W_0^{1,\Phi}(\Omega) \to \mathbb{R}$ o funcional energia associado a $(P_\lambda)$,

# Existência de uma solução positiva

Para mostrarmos a existência de uma solução para o problema $(P_\lambda)$, utilizaremos o método variacional. Por este fato, seja $I_\lambda : W_0^{1,\Phi}(\Omega) \to \mathbb{R}$ o funcional energia associado a $(P_\lambda)$, dado por:

$$I_\lambda(u) = \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx - \lambda \int_\Omega F(x,u)dx, \text{ para } u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

# Existência de uma solução positiva

Para mostrarmos a existência de uma solução para o problema $(P_\lambda)$, utilizaremos o método variacional. Por este fato, seja $I_\lambda : W_0^{1,\Phi}(\Omega) \to \mathbb{R}$ o funcional energia associado a $(P_\lambda)$, dado por:

$$I_\lambda(u) = \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx - \lambda \int_\Omega F(x,u)dx, \text{ para } u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

onde

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds.$$

# Existência de uma solução positiva

Para mostrarmos a existência de uma solução para o problema $(P_\lambda)$, utilizaremos o método variacional. Por este fato, seja $I_\lambda : W_0^{1,\Phi}(\Omega) \to \mathbb{R}$ o funcional energia associado a $(P_\lambda)$, dado por:

$$I_\lambda(u) = \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx - \lambda \int_\Omega F(x,u)dx, \text{ para } u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

onde

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds.$$

O funcional $I_\lambda$ é de classe $C^1$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

# Existência de uma solução positiva

Para mostrarmos a existência de uma solução para o problema $(P_\lambda)$, utilizaremos o método variacional. Por este fato, seja $I_\lambda : W_0^{1,\Phi}(\Omega) \to \mathbb{R}$ o funcional energia associado a $(P_\lambda)$, dado por:

$$I_\lambda(u) = \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx - \lambda \int_\Omega F(x,u)dx, \text{ para } u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega).$$

onde

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds.$$

O funcional $I_\lambda$ é de classe $C^1$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Vejamos agora que os pontos críticos de $I_\lambda$ não-triviais, são soluções positivas de $(P_\lambda)$.

**Lemma 6.2**

Os pontos críticos não-triviais de $I_\lambda$ são soluções positivas de $(P_\lambda)$.

**Lemma 6.2**

Os pontos críticos não-triviais de $I_\lambda$ são soluções positivas de $(P_\lambda)$.

*Demonstração:* De fato, sejam $u_\lambda$ um ponto crítico de $I_\lambda$ não-trivial

**Lemma 6.2**

Os pontos críticos não-triviais de $I_\lambda$ são soluções positivas de $(P_\lambda)$.

*Demonstração:* De fato, sejam $u_\lambda$ um ponto crítico de $I_\lambda$ não-trivial e $\varphi \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, com $\varphi \geq 0$.

**Lemma 6.2**

Os pontos críticos não-triviais de $I_\lambda$ são soluções positivas de $(P_\lambda)$.

*Demonstração:* De fato, sejam $u_\lambda$ um ponto crítico de $I_\lambda$ não-trivial e $\varphi \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, com $\varphi \geq 0$. De $(f_2)$,

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u_\lambda|)\nabla u_\lambda \nabla \varphi dx = \lambda \int_\Omega f(x, u_\lambda(x))\varphi(x)dx \geq 0,$$

**Lemma 6.2**

Os pontos críticos não-triviais de $I_\lambda$ são soluções positivas de $(P_\lambda)$.

*Demonstração:* De fato, sejam $u_\lambda$ um ponto crítico de $I_\lambda$ não-trivial e $\varphi \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, com $\varphi \geq 0$. De $(f_2)$,

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u_\lambda|)\nabla u_\lambda \nabla \varphi dx = \lambda \int_\Omega f(x, u_\lambda(x))\varphi(x)dx \geq 0,$$

logo,

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u_\lambda|)\nabla u_\lambda \nabla \varphi dx \geq 0,$$

**Lemma 6.2**

Os pontos críticos não-triviais de $I_\lambda$ são soluções positivas de $(P_\lambda)$.

*Demonstração:* De fato, sejam $u_\lambda$ um ponto crítico de $I_\lambda$ não-trivial e $\varphi \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, com $\varphi \geq 0$. De $(f_2)$,

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u_\lambda|)\nabla u_\lambda \nabla \varphi dx = \lambda \int_\Omega f(x, u_\lambda(x))\varphi(x)dx \geq 0,$$

logo,

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u_\lambda|)\nabla u_\lambda \nabla \varphi dx \geq 0,$$

o que implica

$$-\Delta_\Phi u_\lambda \geq 0.$$

**Lemma 6.2**

Os pontos críticos não-triviais de $I_\lambda$ são soluções positivas de $(P_\lambda)$.

*Demonstração:* De fato, sejam $u_\lambda$ um ponto crítico de $I_\lambda$ não-trivial e $\varphi \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, com $\varphi \geq 0$. De $(f_2)$,

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u_\lambda|)\nabla u_\lambda \nabla \varphi dx = \lambda \int_\Omega f(x, u_\lambda(x))\varphi(x)dx \geq 0,$$

logo,

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u_\lambda|)\nabla u_\lambda \nabla \varphi dx \geq 0,$$

o que implica

$$-\Delta_\Phi u_\lambda \geq 0.$$

Além disso, $u_\lambda = 0$ na $\partial\Omega$

**Lemma 6.2**

Os pontos críticos não-triviais de $I_\lambda$ são soluções positivas de $(P_\lambda)$.

*Demonstração:* De fato, sejam $u_\lambda$ um ponto crítico de $I_\lambda$ não-trivial e $\varphi \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$, com $\varphi \geq 0$. De $(f_2)$,

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u_\lambda|)\nabla u_\lambda \nabla \varphi dx = \lambda \int_\Omega f(x, u_\lambda(x))\varphi(x)dx \geq 0,$$

logo,

$$\int_\Omega \phi(|\nabla u_\lambda|)\nabla u_\lambda \nabla \varphi dx \geq 0,$$

o que implica

$$-\Delta_\Phi u_\lambda \geq 0.$$

Além disso, $u_\lambda = 0$ na $\partial\Omega$ , portanto, pelo Princípio de Comparação, segue que

$$u_\lambda \geq 0 \text{ em } \Omega.$$

Agora, desde que $u_\lambda \in L^\infty(\Omega)$ (ver Lema 6.1)

Agora, desde que $u_\lambda \in L^\infty(\Omega)$ (ver Lema 6.1) e $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$,

Agora, desde que $u_\lambda \in L^\infty(\Omega)$ (ver Lema 6.1) e $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, temos que $f \in L^\infty(\Omega)$.

Agora, desde que $u_\lambda \in L^\infty(\Omega)$ (ver Lema 6.1) e $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, temos que $f \in L^\infty(\Omega)$. Deste fato, segue pelo Lema Hopf que

$$u_\lambda > 0 \text{ em } \Omega.$$

Agora, desde que $u_\lambda \in L^\infty(\Omega)$ (ver Lema 6.1) e $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, temos que $f \in L^\infty(\Omega)$. Deste fato, segue pelo Lema Hopf que

$$u_\lambda > 0 \text{ em } \Omega.$$

Mostrando assim, que os pontos críticos, não-triviais, de $I_\lambda$ são soluções positivas de $(P_\lambda)$. ■

**Teorema 6.3**

Assuma $(\phi_1) - (\phi_3)$, $(f_1) - (f_4)$. Então, existe uma constante $\lambda_0 > 0$, tal que $(P_\lambda)$ tem uma solução positiva para todo $\lambda > \lambda_0$.

**Teorema 6.3**

Assuma $(\phi_1) - (\phi_3)$, $(f_1) - (f_4)$. Então, existe uma constante $\lambda_0 > 0$, tal que $(P_\lambda)$ tem uma solução positiva para todo $\lambda > \lambda_0$.

*Demonstração:* De $(f_4)$, para todo $\lambda > 0$, existe uma constante $T_\lambda > 0$ tal que

$$| f(x,t) | \leq \frac{1}{2C_\Phi \lambda} \frac{\Phi(t)}{t}, \qquad x \in \Omega \text{ e } t > T_\lambda. \tag{17}$$

**Teorema 6.3**

Assuma $(\phi_1) - (\phi_3)$, $(f_1) - (f_4)$. Então, existe uma constante $\lambda_0 > 0$, tal que $(P_\lambda)$ tem uma solução positiva para todo $\lambda > \lambda_0$.

*Demonstração:* De $(f_4)$, para todo $\lambda > 0$, existe uma constante $T_\lambda > 0$ tal que

$$| f(x,t) | \leq \frac{1}{2C_\Phi \lambda} \frac{\Phi(t)}{t}, \qquad x \in \Omega \text{ e } t > T_\lambda. \tag{17}$$

Observando que

$$\left(\frac{\Phi(t)}{t}\right)' = \frac{\phi(t)t^2 + \Phi(t)}{t^2} > 0, \text{ para } t > 0, \tag{18}$$

**Teorema 6.3**

Assuma $(\phi_1) - (\phi_3)$, $(f_1) - (f_4)$. Então, existe uma constante $\lambda_0 > 0$, tal que $(P_\lambda)$ tem uma solução positiva para todo $\lambda > \lambda_0$.

*Demonstração:* De $(f_4)$, para todo $\lambda > 0$, existe uma constante $T_\lambda > 0$ tal que

$$| f(x,t) | \leq \frac{1}{2C_\Phi \lambda} \frac{\Phi(t)}{t}, \qquad x \in \Omega \text{ e } t > T_\lambda. \tag{17}$$

Observando que

$$\left(\frac{\Phi(t)}{t}\right)' = \frac{\phi(t)t^2 + \Phi(t)}{t^2} > 0, \text{ para } t > 0, \tag{18}$$

temos que $\dfrac{\Phi(t)}{t}$ é crescente em $(0, +\infty)$.

Deste fato, segue de (17),

$$F(x,t) \quad = \quad \int_0^t f(x,s)ds$$

Deste fato, segue de (17),

$$\begin{aligned} F(x,t) &= \int_0^t f(x,s)ds \\ &= \int_0^{T_\lambda} f(x,s)ds + \int_{T_\lambda}^t f(x,s)ds \end{aligned}$$

Deste fato, segue de (17),

$$\begin{aligned} F(x,t) &= \int_0^t f(x,s)ds \\ &= \int_0^{T_\lambda} f(x,s)ds + \int_{T_\lambda}^t f(x,s)ds \\ &\leq \frac{1}{2C_\Phi \lambda} \int_{T_\lambda}^t \frac{\Phi(s)}{s} ds + T_\lambda \sup_{(x,t)\in\Omega\times[0,T_\lambda]} \mid f(x,t) \mid \end{aligned}$$

Deste fato, segue de (17),

$$\begin{aligned} F(x,t) &= \int_0^t f(x,s)ds \\ &= \int_0^{T_\lambda} f(x,s)ds + \int_{T_\lambda}^t f(x,s)ds \\ &\leq \frac{1}{2C_\Phi\lambda}\int_{T_\lambda}^t \frac{\Phi(s)}{s}ds + T_\lambda \sup_{(x,t)\in\Omega\times[0,T_\lambda]} \mid f(x,t) \mid \\ &\leq \frac{1}{2C_\Phi\lambda}\int_0^t \frac{\Phi(s)}{s}ds + C_\lambda \end{aligned}$$

Deste fato, segue de (17),

$$
\begin{aligned}
F(x,t) &= \int_0^t f(x,s)ds \\
&= \int_0^{T_\lambda} f(x,s)ds + \int_{T_\lambda}^t f(x,s)ds \\
&\leq \frac{1}{2C_\Phi\lambda}\int_{T_\lambda}^t \frac{\Phi(s)}{s}ds + T_\lambda \sup_{(x,t)\in\Omega\times[0,T_\lambda]} \mid f(x,t) \mid \\
&\leq \frac{1}{2C_\Phi\lambda}\int_0^t \frac{\Phi(s)}{s}ds + C_\lambda \\
&\leq \frac{1}{2C_\Phi\lambda}\Phi(t) + C_\lambda, \quad (x,t) \in \Omega \times [0,\infty]
\end{aligned}
$$

Deste fato, segue de (17),

$$\begin{aligned}
F(x,t) &= \int_0^t f(x,s)ds \\
&= \int_0^{T_\lambda} f(x,s)ds + \int_{T_\lambda}^t f(x,s)ds \\
&\leq \frac{1}{2C_\Phi\lambda}\int_{T_\lambda}^t \frac{\Phi(s)}{s}ds + T_\lambda \sup_{(x,t)\in\Omega\times[0,T_\lambda]} |\, f(x,t)\,| \\
&\leq \frac{1}{2C_\Phi\lambda}\int_0^t \frac{\Phi(s)}{s}ds + C_\lambda \\
&\leq \frac{1}{2C_\Phi\lambda}\Phi(t) + C_\lambda, \quad (x,t)\in\Omega\times[0,\infty]
\end{aligned}$$

onde $C_\lambda = T_\lambda \sup_{(x,t)\in\Omega\times[0,T_\lambda]} |\, f(x,t)\,|$.

Utilizando a desigualdade de Poincaré, segue que

$$I_\lambda(u) = \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx - \lambda \int_\Omega F(x,u)dx$$

Utilizando a desigualdade de Poincaré, segue que

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &= \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx - \lambda \int_\Omega F(x,u)dx \\ &= \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx - \lambda\Big(\int_\Omega \frac{1}{2C_\Phi \lambda}\Phi(u)dx + \int_\Omega C_\lambda dx\Big) \end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Poincaré, segue que

$$\begin{aligned} I_\lambda(u) &= \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx - \lambda \int_\Omega F(x,u)dx \\ &= \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx - \lambda\Big(\int_\Omega \frac{1}{2C_\Phi \lambda}\Phi(u)dx + \int_\Omega C_\lambda dx\Big) \\ &= \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx - \frac{1}{2C_\Phi}\int_\Omega \Phi(|u|)dx - \lambda C_\lambda \mid \Omega \mid \end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Poincaré, segue que

$$
\begin{aligned}
I_\lambda(u) &= \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx - \lambda \int_\Omega F(x,u)dx \\
&= \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx - \lambda\Big(\int_\Omega \frac{1}{2C_\Phi \lambda}\Phi(u)dx + \int_\Omega C_\lambda dx\Big) \\
&= \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx - \frac{1}{2C_\Phi}\int_\Omega \Phi(|u|)dx - \lambda C_\lambda |\Omega| \\
&\geq \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx - \frac{1}{2C_\Phi} C_\Phi \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx - \lambda C_\lambda |\Omega|
\end{aligned}
$$

Utilizando a desigualdade de Poincaré, segue que

$$
\begin{aligned}
I_\lambda(u) &= \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx - \lambda \int_\Omega F(x,u)dx \\
&= \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx - \lambda\Big(\int_\Omega \frac{1}{2C_\Phi\lambda}\Phi(u)dx + \int_\Omega C_\lambda dx\Big) \\
&= \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx - \frac{1}{2C_\Phi}\int_\Omega \Phi(|u|)dx - \lambda C_\lambda |\Omega| \\
&\geq \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx - \frac{1}{2C_\Phi}C_\Phi\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx - \lambda C_\lambda |\Omega| \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx - \lambda C_\lambda |\Omega|
\end{aligned}
$$

Utilizando a desigualdade de Poincaré, segue que

$$
\begin{aligned}
I_\lambda(u) &= \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx - \lambda \int_\Omega F(x,u)dx \\
&= \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx - \lambda\Big(\int_\Omega \frac{1}{2C_\Phi\lambda}\Phi(u)dx + \int_\Omega C_\lambda dx\Big) \\
&= \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx - \frac{1}{2C_\Phi}\int_\Omega \Phi(|u|)dx - \lambda C_\lambda |\Omega| \\
&\geq \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx - \frac{1}{2C_\Phi}C_\Phi\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx - \lambda C_\lambda |\Omega| \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx - \lambda C_\lambda |\Omega| \\
&\geq \frac{1}{2}\xi_0(|\nabla u|_\Phi) - \lambda C_\lambda |\Omega|, \qquad (19)
\end{aligned}
$$

para todo $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

Assim, $I_\lambda$ é limitado inferiormente em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$

Assim, $I_\lambda$ é limitado inferiormente em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ e existe uma constante $\rho_\lambda > 0$ tal que

$$I_\lambda(u) > 0, \text{ com } \mid \nabla u \mid_\Phi = \rho, \tag{20}$$

para $\rho > \rho_\lambda$.

Assim, $I_\lambda$ é limitado inferiormente em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ e existe uma constante $\rho_\lambda > 0$ tal que

$$I_\lambda(u) > 0, \text{ com } \mid \nabla u \mid_\Phi = \rho, \tag{20}$$

para $\rho > \rho_\lambda$.
Agora, tomando $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

Assim, $I_\lambda$ é limitado inferiormente em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ e existe uma constante $\rho_\lambda > 0$ tal que

$$I_\lambda(u) > 0, \text{ com } \mid \nabla u \mid_\Phi = \rho, \tag{20}$$

para $\rho > \rho_\lambda$.
Agora, tomando $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi \geq 0$ e $\emptyset \neq supp\varphi \subset \Omega_0$

Assim, $I_\lambda$ é limitado inferiormente em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ e existe uma constante $\rho_\lambda > 0$ tal que

$$I_\lambda(u) > 0, \text{ com } \mid \nabla u \mid_\Phi = \rho, \tag{20}$$

para $\rho > \rho_\lambda$.
Agora, tomando $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi \geq 0$ e $\emptyset \neq supp\varphi \subset \Omega_0$ (onde $\Omega_0 \subset \Omega$ verifica $(f_2)$),

Assim, $I_\lambda$ é limitado inferiormente em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ e existe uma constante $\rho_\lambda > 0$ tal que

$$I_\lambda(u) > 0, \text{ com } \mid \nabla u \mid_\Phi = \rho, \tag{20}$$

para $\rho > \rho_\lambda$.
Agora, tomando $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi \geq 0$ e $\emptyset \neq supp\varphi \subset \Omega_0$ (onde $\Omega_0 \subset \Omega$ verifica $(f_2)$), tem-se que

$$I_\lambda(\varphi) = \int_\Omega \Phi(\mid \nabla\varphi \mid)dx - \lambda \int_\Omega F(x,\varphi)dx < 0, \tag{21}$$

para $\lambda > 0$ suficientemente grande.

Fixado $\lambda > 0$ suficientemente grande, tome $\rho > \max\{\rho_\lambda, |\nabla\varphi|_\Phi\}$.

Fixado $\lambda > 0$ suficientemente grande, tome $\rho > \max\{\rho_\lambda, |\nabla\varphi|_\Phi\}$. Desde que $I_\lambda$ é limitado inferiormente

Fixado $\lambda > 0$ suficientemente grande, tome $\rho > \max\{\rho_\lambda, |\nabla\varphi|_\Phi\}$. Desde que $I_\lambda$ é limitado inferiormente e

$$\varphi \in B_\rho = \{u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega); |\nabla u|_\Phi < \rho\},$$

Fixado $\lambda > 0$ suficientemente grande, tome $\rho > \max\{\rho_\lambda, |\nabla\varphi|_\Phi\}$. Desde que $I_\lambda$ é limitado inferiormente e

$$\varphi \in B_\rho = \{u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega); |\nabla u|_\Phi < \rho\},$$

temos

$$m_\lambda := \inf_{u \in B_\rho} I_\lambda(u) \in (-\infty, 0). \tag{22}$$

Fixado $\lambda > 0$ suficientemente grande, tome $\rho > \max\{\rho_\lambda, |\nabla\varphi|_\Phi\}$. Desde que $I_\lambda$ é limitado inferiormente e

$$\varphi \in B_\rho = \{u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega); |\nabla u|_\Phi < \rho\},$$

temos

$$m_\lambda := \inf_{u \in B_\rho} I_\lambda(u) \in (-\infty, 0). \tag{22}$$

Mostraremos agora que $m_\lambda$ é atingido.

Fixado $\lambda > 0$ suficientemente grande, tome $\rho > \max\{\rho_\lambda, |\nabla\varphi|_\Phi\}$. Desde que $I_\lambda$ é limitado inferiormente e

$$\varphi \in B_\rho = \{u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega); |\nabla u|_\Phi < \rho\},$$

temos

$$m_\lambda := \inf_{u \in B_\rho} I_\lambda(u) \in (-\infty, 0). \tag{22}$$

Mostraremos agora que $m_\lambda$ é atingido. Para isto, observe que o funcional

$$P(u) = \int_\Omega \Phi(|\nabla u|)dx, \quad u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega), \tag{23}$$

é sequencialmente fracamente semicontínuo inferiormente.

## Afirmação 1

O funcional $J(u) = \int_{\Omega} F(x,u)dx$ é fracamente contínuo em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$

## Afirmação 1

O funcional $J(u) = \int_\Omega F(x,u)dx$ é fracamente contínuo em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$

Seja $\{u_n\} \subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$.

## Afirmação 1

O funcional $J(u) = \int_\Omega F(x,u)dx$ é fracamente contínuo em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$

Seja $\{u_n\} \subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Deste fato,

$$F(x,u_n(x)) \to F(x,u(x)), \text{ q.t.p. em } \Omega, \tag{24}$$

a menos de subsequência,

## Afirmação 1

O funcional $J(u) = \int_\Omega F(x,u)dx$ é fracamente contínuo em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$

Seja $\{u_n\} \subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Deste fato,

$$F(x,u_n(x)) \to F(x,u(x)), \text{ q.t.p. em } \Omega, \tag{24}$$

a menos de subsequência, e existe $\eta \in L^1(\Omega)$, tal que

$$| F(x,u_n(x)) | \leq \eta, \quad x \in \Omega. \tag{25}$$

## Afirmação 1

O funcional $J(u) = \int_\Omega F(x,u)dx$ é fracamente contínuo em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$

Seja $\{u_n\} \subset W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Deste fato,

$$F(x,u_n(x)) \to F(x,u(x)), \text{ q.t.p. em } \Omega, \tag{24}$$

a menos de subsequência, e existe $\eta \in L^1(\Omega)$, tal que

$$| F(x,u_n(x)) | \leq \eta, \quad x \in \Omega. \tag{25}$$

Logo, de (24) e (25), segue, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que

$$\int_\Omega F(x,u_n(x))dx \to \int_\Omega F(x,u(x))dx,$$

provando a Afirmação 1.

De (23) e da Afirmação 1, o funcional $I_\lambda$ é sequencialmente fracamente semicontínuo inferiormente.

De (23) e da Afirmação 1, o funcional $I_\lambda$ é sequencialmente fracamente semicontínuo inferiormente. Além disso, de (19), $I_\lambda$ é coercivo.

De (23) e da Afirmação 1, o funcional $I_\lambda$ é sequencialmente fracamente semicontínuo inferiormente. Além disso, de (19), $I_\lambda$ é coercivo.
Uma vez que

- $\overline{B}_\rho$ é fracamente fechado em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ (pois $\overline{B}_\rho$ é fechado e convexo),

De (23) e da Afirmação 1, o funcional $I_\lambda$ é sequencialmente fracamente semicontínuo inferiormente. Além disso, de (19), $I_\lambda$ é coercivo.
Uma vez que

- $\overline{B}_\rho$ é fracamente fechado em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ (pois $\overline{B}_\rho$ é fechado e convexo),
- $I_\lambda$ é fracamente semicontínuo inferiormente,

De (23) e da Afirmação 1, o funcional $I_\lambda$ é sequencialmente fracamente semicontínuo inferiormente. Além disso, de (19), $I_\lambda$ é coercivo.
Uma vez que

- $\overline{B}_\rho$ é fracamente fechado em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ (pois $\overline{B}_\rho$ é fechado e convexo),
- $I_\lambda$ é fracamente semicontínuo inferiormente,
- $I_\lambda$ é coercivo,

De (23) e da Afirmação 1, o funcional $I_\lambda$ é sequencialmente fracamente semicontínuo inferiormente. Além disso, de (19), $I_\lambda$ é coercivo.
Uma vez que

- $\overline{B}_\rho$ é fracamente fechado em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ (pois $\overline{B}_\rho$ é fechado e convexo),
- $I_\lambda$ é fracamente semicontínuo inferiormente,
- $I_\lambda$ é coercivo,

temos da Teoria de Análise Funcional, que existe $u_\lambda \in \overline{B}_\rho$ tal que

$$I_\lambda(u_\lambda) = m_\lambda.$$

De (23) e da Afirmação 1, o funcional $I_\lambda$ é sequencialmente fracamente semicontínuo inferiormente. Além disso, de (19), $I_\lambda$ é coercivo.
Uma vez que

- $\overline{B}_\rho$ é fracamente fechado em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ (pois $\overline{B}_\rho$ é fechado e convexo),
- $I_\lambda$ é fracamente semicontínuo inferiormente,
- $I_\lambda$ é coercivo,

temos da Teoria de Análise Funcional, que existe $u_\lambda \in \overline{B}_\rho$ tal que

$$I_\lambda(u_\lambda) = m_\lambda.$$

Além disso, de (20) e (22), temos que $u_\lambda \notin \partial B_\rho$.

De (23) e da Afirmação 1, o funcional $I_\lambda$ é sequencialmente fracamente semicontínuo inferiormente. Além disso, de (19), $I_\lambda$ é coercivo.
Uma vez que

- $\overline{B}_\rho$ é fracamente fechado em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ (pois $\overline{B}_\rho$ é fechado e convexo),
- $I_\lambda$ é fracamente semicontínuo inferiormente,
- $I_\lambda$ é coercivo,

temos da Teoria de Análise Funcional, que existe $u_\lambda \in \overline{B}_\rho$ tal que

$$I_\lambda(u_\lambda) = m_\lambda.$$

Além disso, de (20) e (22), temos que $u_\lambda \notin \partial B_\rho$. Por este fato, concluímos que $u_\lambda$ é um ponto crítico de $I_\lambda$,

De (23) e da Afirmação 1, o funcional $I_\lambda$ é sequencialmente fracamente semicontínuo inferiormente. Além disso, de (19), $I_\lambda$ é coercivo.
Uma vez que

- $\overline{B}_\rho$ é fracamente fechado em $W_0^{1,\Phi}(\Omega)$ (pois $\overline{B}_\rho$ é fechado e convexo),
- $I_\lambda$ é fracamente semicontínuo inferiormente,
- $I_\lambda$ é coercivo,

temos da Teoria de Análise Funcional, que existe $u_\lambda \in \overline{B}_\rho$ tal que

$$I_\lambda(u_\lambda) = m_\lambda.$$

Além disso, de (20) e (22), temos que $u_\lambda \notin \partial B_\rho$. Por este fato, concluímos que $u_\lambda$ é um ponto crítico de $I_\lambda$, e portanto solução positiva de $(P_\lambda)$. ■