Espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev
Terceira Aula: Dualidade

Prof. Jefferson Abrantes

(Universidade Federal de Campina Grande)

Curso de Verão 2021

DM-UFSCar

São Carlos-SP

Dualidade

A ideia agora é identificar quem é o espaço dual de um espaço de Orlicz.

Dualidade

A ideia agora é identificar quem é o espaço dual de um espaço de Orlicz. No que segue considere $f : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty)$ um funcional semi- contínuo a direita

Dualidade

A ideia agora é identificar quem é o espaço dual de um espaço de Orlicz. No que segue considere $f : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty)$ um funcional semi- contínuo a direita e convexo.

Dualidade

A ideia agora é identificar quem é o espaço dual de um espaço de Orlicz. No que segue considere $f : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty)$ um funcional semi- contínuo a direita e convexo. Assim

$$epi(f) = \{(s, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; f(s) \leq b\}$$

Dualidade

A ideia agora é identificar quem é o espaço dual de um espaço de Orlicz. No que segue considere $f : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty)$ um funcional semi- contínuo a direita e convexo. Assim

$$epi(f) = \{(s, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; f(s) \leq b\}$$

é um conjunto diferente do vazio

Dualidade

A ideia agora é identificar quem é o espaço dual de um espaço de Orlicz. No que segue considere $f : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty)$ um funcional semi- contínuo a direita e convexo. Assim

$$epi(f) = \{(s, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; f(s) \leq b\}$$

é um conjunto diferente do vazio e convexo sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Dualidade

A ideia agora é identificar quem é o espaço dual de um espaço de Orlicz. No que segue considere $f : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty)$ um funcional semi- contínuo a direita e convexo. Assim

$$epi(f) = \{(s, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; f(s) \leq b\}$$

é um conjunto diferente do vazio e convexo sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Definição

Definimos como **função conjugada** (ou **transformada de Legendre**) de f a função $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Dualidade

A ideia agora é identificar quem é o espaço dual de um espaço de Orlicz. No que segue considere $f : \mathbb{R} \to (-\infty, +\infty)$ um funcional semi- contínuo a direita e convexo. Assim

$$epi(f) = \{(s, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; f(s) \leq b\}$$

é um conjunto diferente do vazio e convexo sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Definição

Definimos como **função conjugada** (ou **transformada de Legendre**) de f a função $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\widetilde{f}(t) = \sup\{st - f(s); s \in \mathbb{R}\}.$$

Lema 3.1

Considere

$$\Lambda = \{(t, a) \in \mathbb{R}^2; a \geq \widetilde{f}(t)\} = epi(\widetilde{f})$$

Lema 3.1

Considere

$$\Lambda = \{(t, a) \in \mathbb{R}^2; a \geq \widetilde{f}(t)\} = epi(\widetilde{f})$$

e para cada $(t, a) \in \Lambda$ defina

$$A_{t,a} = \{(s, b) \in \mathbb{R}^2; b \geq st - a\}.$$

Lema 3.1

Considere

$$\Lambda = \{(t, a) \in \mathbb{R}^2; a \geq \widetilde{f}(t)\} = epi(\widetilde{f})$$

e para cada $(t, a) \in \Lambda$ defina

$$A_{t,a} = \{(s, b) \in \mathbb{R}^2; b \geq st - a\}.$$

Então

$$epi(f) = \bigcap_{(t,a)\in\Lambda} A_{t,a}.$$

Lema 3.1

Considere

$$\Lambda = \{(t, a) \in \mathbb{R}^2; a \geq \widetilde{f}(t)\} = epi(\widetilde{f})$$

e para cada $(t, a) \in \Lambda$ defina

$$A_{t,a} = \{(s, b) \in \mathbb{R}^2; b \geq st - a\}.$$

Então

$$epi(f) = \bigcap_{(t,a)\in\Lambda} A_{t,a}.$$

Lema 3.2

Dado $t \in \mathbb{R}$, considerando

$$A_t = \{(s, b); b \geq st - \widetilde{f}(t)\},$$

Lema 3.1

Considere

$$\Lambda = \{(t, a) \in \mathbb{R}^2; a \geq \widetilde{f}(t)\} = epi(\widetilde{f})$$

e para cada $(t, a) \in \Lambda$ defina

$$A_{t,a} = \{(s, b) \in \mathbb{R}^2; b \geq st - a\}.$$

Então

$$epi(f) = \bigcap_{(t,a)\in\Lambda} A_{t,a}.$$

Lema 3.2

Dado $t \in \mathbb{R}$, considerando

$$A_t = \{(s, b); b \geq st - \widetilde{f}(t)\},$$

temos

$$epi(f) = \bigcap_{t\in\mathbb{R}} A_t = \bigcap_{(t,a)\in epi(\widetilde{f})} A_{t,a}.$$

Lema 3.3

A função conjugada de $\widetilde{f}$ (isto é $\widetilde{\widetilde{f}}$) é a função f

Lema 3.3

A função conjugada de $\widetilde{f}$ (isto é $\widetilde{\widetilde{f}}$) é a função f, ou seja $f \equiv \widetilde{\widetilde{f}}$.

Lema 3.3

A função conjugada de $\widetilde{f}$ (isto é $\widetilde{\widetilde{f}}$) é a função f, ou seja $f \equiv \widetilde{\widetilde{f}}$.

Lema 3.4

Se f é uma N-função, então $\widetilde{f}$ também será uma N-função.

Proposição 3.1

Considere Φ uma N-função dada por

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} \phi(s)ds,$$

Proposição 3.1

Considere Φ uma N-função dada por

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} \phi(s)ds,$$

onde $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ satisfaz as condições de (I) à (IV) do Lema 1.1.

Proposição 3.1

Considere Φ uma N-função dada por

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} \phi(s)ds,$$

onde $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ satisfaz as condições de (I) à (IV) do Lema 1.1. Definindo

$$\widetilde{\phi}(s) = \sup\{t \in \mathbb{R}_+; \phi(t) \leq s\}$$

Proposição 3.1

Considere Φ uma N-função dada por

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} \phi(s)ds,$$

onde $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ satisfaz as condições de (I) à (IV) do Lema 1.1. Definindo

$$\widetilde{\phi}(s) = \sup\{t \in \mathbb{R}_+; \phi(t) \leq s\}$$

e

$$\widetilde{\Phi}(t) = \int_0^{|t|} \widetilde{\phi}(s)ds$$

Proposição 3.1

Considere Φ uma N-função dada por

$$\Phi(t) = \int_0^{|t|} \phi(s)ds,$$

onde $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ satisfaz as condições de (I) à (IV) do Lema 1.1. Definindo

$$\widetilde{\phi}(s) = \sup\{t \in \mathbb{R}_+; \phi(t) \leq s\}$$

e

$$\widetilde{\Phi}(t) = \int_0^{|t|} \widetilde{\phi}(s)ds$$

segue que $\widetilde{\Phi}$ é uma N-função.

Obsevações

1. As funções definidas Proposição 2.7, $\widetilde{\phi}$ e $\widetilde{\Phi}$ são funções conjugadas de ϕ e Φ, respectivamente.

Obsevações

1. As funções definidas Proposição 2.7, $\widetilde{\phi}$ e $\widetilde{\Phi}$ são funções conjugadas de ϕ e Φ, respectivamente.

2. É possível mostrar que, se ϕ e $\widetilde{\phi}$ forem funções contínuas em $\mathbb{R}_+$,

Obsevações

1. As funções definidas Proposição 2.7, $\widetilde{\phi}$ e $\widetilde{\Phi}$ são funções conjugadas de ϕ e Φ, respectivamente.

2. É possível mostrar que, se ϕ e $\widetilde{\phi}$ forem funções contínuas em $\mathbb{R}_+$, então ϕ é a inversa de $\widetilde{\phi}$ em $\mathbb{R}_+$.

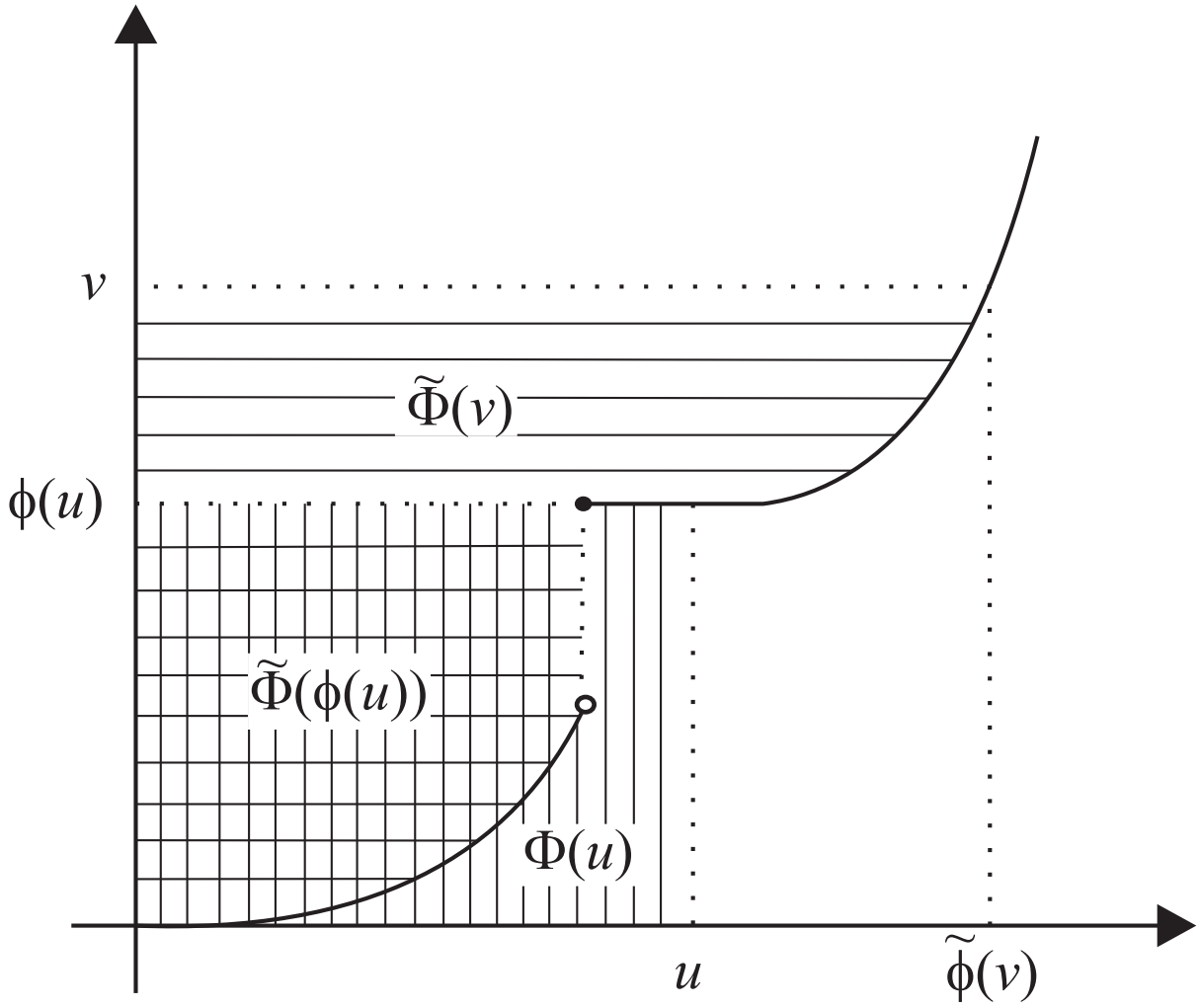
Obsevações

1. As funções definidas Proposição 2.7, $\widetilde{\phi}$ e $\widetilde{\Phi}$ são funções conjugadas de ϕ e Φ, respectivamente.
2. É possível mostrar que, se ϕ e $\widetilde{\phi}$ forem funções contínuas em $\mathbb{R}_+$, então ϕ é a inversa de $\widetilde{\phi}$ em $\mathbb{R}_+$.
3. A função ϕ pode ser definida da seguinte forma:

$$\phi(t) = \sup\{s; \widetilde{\phi}(s) \leq t\}, \ t \in \mathbb{R}_+.$$

Observando as definições de Φ e $\widetilde{\Phi}$,

Observando as definições de Φ e $\widetilde{\Phi}$, temos geometricamente:



Da figura anterior, conclui-se que

$$u\phi(u) = \Phi(u) + \widetilde{\Phi}(\phi(u)),\ u \in \mathbb{R}_+ \tag{1}$$

Da figura anterior, conclui-se que

$$u\phi(u) = \Phi(u) + \widetilde{\Phi}(\phi(u)),\ u \in \mathbb{R}_+ \tag{1}$$

e

$$v\widetilde{\phi}(v) = \Phi(\widetilde{\phi}(v)) + \widetilde{\Phi}(v),\ v \in \mathbb{R}_+. \tag{2}$$

Da figura anterior, conclui-se que

$$u\phi(u) = \Phi(u) + \widetilde{\Phi}(\phi(u)),\ u \in \mathbb{R}_+ \tag{1}$$

e

$$v\widetilde{\phi}(v) = \Phi(\widetilde{\phi}(v)) + \widetilde{\Phi}(v),\ v \in \mathbb{R}_+. \tag{2}$$

Desigualdade de Young

Sejam Φ uma N-função e $\widetilde{\Phi}$ a função conjugado de Φ.

Da figura anterior, conclui-se que

$$u\phi(u) = \Phi(u) + \widetilde{\Phi}(\phi(u)),\ u \in \mathbb{R}_+ \tag{1}$$

e

$$v\widetilde{\phi}(v) = \Phi(\widetilde{\phi}(v)) + \widetilde{\Phi}(v),\ v \in \mathbb{R}_+. \tag{2}$$

Desigualdade de Young

Sejam Φ uma N-função e $\widetilde{\Phi}$ a função conjugado de Φ. Então

$$ts \leq \Phi(t) + \widetilde{\Phi}(s),\ t, s \in \mathbb{R}.$$

Lema 3.5

Sejam Φ e $\widetilde{\Phi}$ um par de N-funções complementares.

Lema 3.5

Sejam Φ e $\widetilde{\Phi}$ um par de N-funções complementares. Então as seguintes propriedades se verificam:

a) $\widetilde{\Phi}(\phi(t)) \leq \Phi(2t)$, para todo $t \geq 0$;

Lema 3.5

Sejam Φ e $\widetilde{\Phi}$ um par de N-funções complementares. Então as seguintes propriedades se verificam:

a) $\widetilde{\Phi}(\phi(t)) \leq \Phi(2t)$, para todo $t \geq 0$;

b) $\widetilde{\Phi}\left(\dfrac{\Phi(t)}{t}\right) < \Phi(t)$, para todo $t > 0$;

Lema 3.5

Sejam Φ e $\widetilde{\Phi}$ um par de N-funções complementares. Então as seguintes propriedades se verificam:

a) $\widetilde{\Phi}(\phi(t)) \leq \Phi(2t)$, para todo $t \geq 0$;

b) $\widetilde{\Phi}\left(\dfrac{\Phi(t)}{t}\right) < \Phi(t)$, para todo $t > 0$;

c) $t < \Phi^{-1}(t)\widetilde{\Phi}^{-1}(t)$, para todo $t > 0$.

A função $\widetilde{\Phi}$ pode ser definida da seguinte forma:

$$\widetilde{\Phi}(t) = \sup_{s \in \mathbb{R}_+} \{st - \Phi(s)\}, \ t \in \mathbb{R}_+.$$

A função $\widetilde{\Phi}$ pode ser definida da seguinte forma:

$$\widetilde{\Phi}(t) = \sup_{s \in \mathbb{R}_+} \{st - \Phi(s)\}, \ t \in \mathbb{R}_+.$$

De fato, desde que

$$st \leq \Phi(s) + \widetilde{\Phi}(t), \ s, t \in \mathbb{R}_+,$$

A função $\widetilde{\Phi}$ pode ser definida da seguinte forma:

$$\widetilde{\Phi}(t) = \sup_{s \in \mathbb{R}_+} \{st - \Phi(s)\}, \ t \in \mathbb{R}_+.$$

De fato, desde que

$$st \leq \Phi(s) + \widetilde{\Phi}(t), \ s, t \in \mathbb{R}_+,$$

temos

$$\widetilde{\Phi}(t) \geq st - \Phi(s), \ s, t \in \mathbb{R}_+.$$

A função $\widetilde{\Phi}$ pode ser definida da seguinte forma:

$$\widetilde{\Phi}(t) = \sup_{s \in \mathbb{R}_+} \{st - \Phi(s)\}, \ t \in \mathbb{R}_+.$$

De fato, desde que

$$st \leq \Phi(s) + \widetilde{\Phi}(t), \ s, t \in \mathbb{R}_+,$$

temos

$$\widetilde{\Phi}(t) \geq st - \Phi(s), \ s, t \in \mathbb{R}_+.$$

Em particular, para $s = \phi(t)$

A função $\widetilde{\Phi}$ pode ser definida da seguinte forma:

$$\widetilde{\Phi}(t) = \sup_{s \in \mathbb{R}_+} \{st - \Phi(s)\}, \ t \in \mathbb{R}_+.$$

De fato, desde que

$$st \leq \Phi(s) + \widetilde{\Phi}(t), \ s, t \in \mathbb{R}_+,$$

temos

$$\widetilde{\Phi}(t) \geq st - \Phi(s), \ s, t \in \mathbb{R}_+.$$

Em particular, para $s = \phi(t)$

$$\widetilde{\Phi}(t) = \phi(t)t - \Phi(\phi(t)), \ t \in \mathbb{R}_+.$$

A função $\widetilde{\Phi}$ pode ser definida da seguinte forma:

$$\widetilde{\Phi}(t) = \sup_{s \in \mathbb{R}_+} \{st - \Phi(s)\}, \ t \in \mathbb{R}_+.$$

De fato, desde que

$$st \leq \Phi(s) + \widetilde{\Phi}(t), \ s, t \in \mathbb{R}_+,$$

temos

$$\widetilde{\Phi}(t) \geq st - \Phi(s), \ s, t \in \mathbb{R}_+.$$

Em particular, para $s = \phi(t)$

$$\widetilde{\Phi}(t) = \phi(t)t - \Phi(\phi(t)), \ t \in \mathbb{R}_+.$$

Logo,

$$\widetilde{\Phi}(t) = \sup_{s \in \mathbb{R}_+} \{st - \Phi(s)\}, \ t \in \mathbb{R}_+.$$

A função $\widetilde{\Phi}$ pode ser definida da seguinte forma:

$$\widetilde{\Phi}(t) = \sup_{s \in \mathbb{R}_+} \{st - \Phi(s)\},\ t \in \mathbb{R}_+.$$

De fato, desde que

$$st \leq \Phi(s) + \widetilde{\Phi}(t),\ s, t \in \mathbb{R}_+,$$

temos

$$\widetilde{\Phi}(t) \geq st - \Phi(s),\ s, t \in \mathbb{R}_+.$$

Em particular, para $s = \phi(t)$

$$\widetilde{\Phi}(t) = \phi(t)t - \Phi(\phi(t)),\ t \in \mathbb{R}_+.$$

Logo,

$$\widetilde{\Phi}(t) = \sup_{s \in \mathbb{R}_+} \{st - \Phi(s)\},\ t \in \mathbb{R}_+.$$

Mostrando assim que $\widetilde{\Phi}$ é a função conjugada de Φ.

A seguir, construiremos algumas funções conjugadas a partir de N-funções dadas.

A seguir, construiremos algumas funções conjugadas a partir de N-funções dadas.

1. Fixado $p > 1$, seja

$$f(t) = \frac{1}{p} \mid t \mid^p, \quad t \in \mathbb{R}.$$

A seguir, construiremos algumas funções conjugadas a partir de N-funções dadas.

1. Fixado $p > 1$, seja

$$f(t) = \frac{1}{p} \mid t \mid^p, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Afim de encontrarmos a conjugada de f, considere

$$\xi(s) = st - \frac{1}{p}s^p, \ s \in \mathbb{R}_+.$$

A seguir, construiremos algumas funções conjugadas a partir de N-funções dadas.

1. Fixado $p > 1$, seja

$$f(t) = \frac{1}{p} \mid t \mid^p, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Afim de encontrarmos a conjugada de f, considere

$$\xi(s) = st - \frac{1}{p}s^p, \ s \in \mathbb{R}_+.$$

Neste caso os pontos de máximo de ξ determinam a função conjugada $\widetilde{f}$.

A seguir, construiremos algumas funções conjugadas a partir de N-funções dadas.

1. Fixado $p > 1$, seja

$$f(t) = \frac{1}{p} \mid t \mid^p, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Afim de encontrarmos a conjugada de f, considere

$$\xi(s) = st - \frac{1}{p}s^p, \ s \in \mathbb{R}_+.$$

Neste caso os pontos de máximo de ξ determinam a função conjugada $\widetilde{f}$. Por este fato, iremos agora obter estes pontos de máximo.

A seguir, construiremos algumas funções conjugadas a partir de N-funções dadas.

1. Fixado $p > 1$, seja

$$f(t) = \frac{1}{p} \mid t \mid^p, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Afim de encontrarmos a conjugada de f, considere

$$\xi(s) = st - \frac{1}{p}s^p, \ s \in \mathbb{R}_+.$$

Neste caso os pontos de máximo de ξ determinam a função conjugada $\widetilde{f}$. Por este fato, iremos agora obter estes pontos de máximo. Observando que

$$\xi'(s) = t - s^{p-1}, \ s \in \mathbb{R}_+,$$

A seguir, construiremos algumas funções conjugadas a partir de N-funções dadas.

1. Fixado $p > 1$, seja

$$f(t) = \frac{1}{p} \mid t \mid^p, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Afim de encontrarmos a conjugada de f, considere

$$\xi(s) = st - \frac{1}{p}s^p, \ s \in \mathbb{R}_+.$$

Neste caso os pontos de máximo de ξ determinam a função conjugada $\widetilde{f}$. Por este fato, iremos agora obter estes pontos de máximo. Observando que

$$\xi'(s) = t - s^{p-1}, \ s \in \mathbb{R}_+,$$

tem-se

$$\xi'(s) = 0 \ \textit{se, e só se} \ t - s^{p-1} = 0,$$

A seguir, construiremos algumas funções conjugadas a partir de N-funções dadas.

1. Fixado $p > 1$, seja

$$f(t) = \frac{1}{p} \mid t \mid^p, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Afim de encontrarmos a conjugada de f, considere

$$\xi(s) = st - \frac{1}{p}s^p, \ s \in \mathbb{R}_+.$$

Neste caso os pontos de máximo de ξ determinam a função conjugada $\widetilde{f}$. Por este fato, iremos agora obter estes pontos de máximo. Observando que

$$\xi'(s) = t - s^{p-1}, \ s \in \mathbb{R}_+,$$

tem-se

$$\xi'(s) = 0 \ \textit{se, e só se} \ t - s^{p-1} = 0,$$

ou seja

$$s = t^{\frac{1}{p-1}}.$$

Assumindo que $t \geq 0$, obtemos:

$$\widetilde{f}(t) = \max_{s \in \mathbb{R}_+} \{st - f(s)\}$$

Assumindo que $t \geq 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(t) &= \max_{s \in \mathbb{R}_+} \{st - f(s)\} \\ &= t^{\frac{p}{p-1}} - f\left(t^{\frac{1}{p-1}}\right) \end{aligned}$$

Assumindo que $t \geq 0$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}(t) &= \max_{s \in \mathbb{R}_+} \{st - f(s)\} \\
&= t^{\frac{p}{p-1}} - f(t^{\frac{1}{p-1}}) \\
&= q^{-1} t^q,
\end{aligned}$$

Assumindo que $t \geq 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(t) &= \max_{s \in \mathbb{R}_+} \{st - f(s)\} \\ &= t^{\frac{p}{p-1}} - f(t^{\frac{1}{p-1}}) \\ &= q^{-1} t^q, \end{aligned}$$

onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Assumindo que $t \geq 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(t) &= \max_{s \in \mathbb{R}_+} \{st - f(s)\} \\ &= t^{\frac{p}{p-1}} - f(t^{\frac{1}{p-1}}) \\ &= q^{-1} t^q, \end{aligned}$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Agora, utilizando o fato que $\widetilde{f}$ é par, podemos concluir:

$$\widetilde{f}(t) = \frac{1}{q} \mid t \mid^q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Assumindo que $t \geq 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(t) &= \max_{s \in \mathbb{R}_+} \{st - f(s)\} \\ &= t^{\frac{p}{p-1}} - f(t^{\frac{1}{p-1}}) \\ &= q^{-1} t^q, \end{aligned}$$

onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Agora, utilizando o fato que $\widetilde{f}$ é par, podemos concluir:

$$\widetilde{f}(t) = \frac{1}{q} \mid t \mid^q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

b) $f(t) = e^{|t|} - \mid t \mid -1$.

Assumindo que $t \geq 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(t) &= \max_{s \in \mathbb{R}_+} \{st - f(s)\} \\ &= t^{\frac{p}{p-1}} - f(t^{\frac{1}{p-1}}) \\ &= q^{-1} t^q, \end{aligned}$$

onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Agora, utilizando o fato que $\widetilde{f}$ é par, podemos concluir:

$$\widetilde{f}(t) = \frac{1}{q} \mid t \mid^q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

b) $f(t) = e^{|t|} - \mid t \mid -1$.

Se $t \geq 0$, considerando

$$\eta(s) = ts + s + 1 - e^s, \ s > 0,$$

Assumindo que $t \geq 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(t) &= \max_{s \in \mathbb{R}_+} \{st - f(s)\} \\ &= t^{\frac{p}{p-1}} - f(t^{\frac{1}{p-1}}) \\ &= q^{-1} t^q, \end{aligned}$$

onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Agora, utilizando o fato que $\widetilde{f}$ é par, podemos concluir:

$$\widetilde{f}(t) = \frac{1}{q} \mid t \mid^q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

b) $f(t) = e^{|t|} - \mid t \mid -1$.

Se $t \geq 0$, considerando

$$\eta(s) = ts + s + 1 - e^s, \ s > 0,$$

temos

$$\eta'(s) = t + 1 - e^s, \ s > 0.$$

Logo

$$\eta'(s) = 0 \text{ se, e só se } s = \ln(1 + t).$$

Logo

$$\eta'(s) = 0 \text{ se, e só se } s = \ln(1+t).$$

Deste fato,

$$\widetilde{f}(t) = \max_{s \in \mathbb{R}_+} \{st - f(s)\}$$

Logo

$$\eta'(s) = 0 \text{ se, e só se } s = \ln(1+t).$$

Deste fato,

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(t) &= \max_{s \in \mathbb{R}_+} \{st - f(s)\} \\ &= t\ln(1+t) - f(\ln(1+t)) \end{aligned}$$

Logo

$$\eta'(s) = 0 \text{ se, e só se } s = \ln(1+t).$$

Deste fato,

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}(t) &= \max_{s\in\mathbb{R}_+}\{st - f(s)\} \\
&= t\ln(1+t) - f(\ln(1+t)) \\
&= (1+t)\ln(1+t) - t,\ t \geq 0.
\end{aligned}$$

Logo

$$\eta'(s) = 0 \text{ se, e só se } s = \ln(1+t).$$

Deste fato,

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(t) &= \max_{s\in\mathbb{R}_+}\{st - f(s)\} \\ &= t\ln(1+t) - f(\ln(1+t)) \\ &= (1+t)\ln(1+t) - t,\ t \geq 0. \end{aligned}$$

Se $t < 0$, mostra-se de modo análogo que

$$\widetilde{f}(t) = (1+(-t))\ln(1+(-t)) - (-t),\ t < 0.$$

Logo

$$\eta'(s) = 0 \text{ se, e só se } s = \ln(1+t).$$

Deste fato,

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(t) &= \max_{s\in\mathbb{R}_+}\{st - f(s)\} \\ &= t\ln(1+t) - f(\ln(1+t)) \\ &= (1+t)\ln(1+t) - t,\ t \geq 0. \end{aligned}$$

Se $t < 0$, mostra-se de modo análogo que

$$\widetilde{f}(t) = (1+(-t))\ln(1+(-t)) - (-t),\ t < 0.$$

E portanto,

$$\widetilde{f}(t) = (1+\mid t \mid)\ln(1+\mid t \mid) - \mid t \mid,\ t \in \mathbb{R}.$$

Proposição 3.2

Sejam Φ uma N-função e $\widetilde{\Phi}$ a função conjugado de Φ.

Proposição 3.2

Sejam Φ uma N-função e $\widetilde{\Phi}$ a função conjugado de Φ.
Se

$$u \in L_{\Phi}(\Omega) \text{ e } v \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega),$$

Proposição 3.2

Sejam Φ uma N-função e $\widetilde{\Phi}$ a função conjugado de Φ.
Se

$$u \in L_{\Phi}(\Omega) \text{ e } v \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega),$$

então

(i) $uv \in L^1(\Omega)$;

Proposição 3.2

Sejam Φ uma N-função e $\widetilde{\Phi}$ a função conjugado de Φ.
Se

$$u \in L_{\Phi}(\Omega) \text{ e } v \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega),$$

então

(*i*) $uv \in L^1(\Omega)$;

(*ii*) $\int_{\Omega} uvdx \leq 2 \mid u \mid_{\Phi} \mid v \mid_{\widetilde{\Phi}}$. (Desigualdade de Holder)

É possível mostrar agora que o espaço $L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$ está contido no espaço dual de $L_{\Phi}(\Omega)$, $L_{\Phi}(\Omega)^{*}$.

É possível mostrar agora que o espaço $L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$ está contido no espaço dual de $L_\Phi(\Omega)$, $L_\Phi(\Omega)^*$. E caso Φ não cumpra a condição Δ_2, então esta inclusão é estrita.

É possível mostrar agora que o espaço $L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$ está contido no espaço dual de $L_\Phi(\Omega)$, $L_\Phi(\Omega)^*$. E caso Φ não cumpra a condição Δ_2, então esta inclusão é estrita.

De fato, dado $v \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$

É possível mostrar agora que o espaço $L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$ está contido no espaço dual de $L_\Phi(\Omega)$, $L_\Phi(\Omega)^*$. E caso Φ não cumpra a condição Δ_2, então esta inclusão é estrita.

De fato, dado $v \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$ seja $\varphi_v : L_\Phi(\Omega) \to \mathbb{R}$ um funcional dado por

É possível mostrar agora que o espaço $L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$ está contido no espaço dual de $L_\Phi(\Omega)$, $L_\Phi(\Omega)^*$. E caso Φ não cumpra a condição Δ_2, então esta inclusão é estrita.

De fato, dado $v \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$ seja $\varphi_v : L_\Phi(\Omega) \to \mathbb{R}$ um funcional dado por

$$\varphi_v(u) = \int_\Omega vu dx, \ u \in L_\Phi(\Omega).$$

É possível mostrar agora que o espaço $L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$ está contido no espaço dual de $L_\Phi(\Omega)$, $L_\Phi(\Omega)^*$. E caso Φ não cumpra a condição Δ_2, então esta inclusão é estrita.

De fato, dado $v \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$ seja $\varphi_v : L_\Phi(\Omega) \to \mathbb{R}$ um funcional dado por

$$\varphi_v(u) = \int_\Omega vu dx, \ u \in L_\Phi(\Omega).$$

Segue da Proposição 2.8 que $\varphi_v \in L_\Phi(\Omega)^*$.

Suponha agora que Φ não cumpre a condição Δ_2.

Suponha agora que Φ não cumpre a condição Δ_2. Neste caso, $E_\Phi(\Omega)$ é um subespaço próprio de $L_\Phi(\Omega)$.

Suponha agora que Φ não cumpre a condição Δ_2. Neste caso, $E_\Phi(\Omega)$ é um subespaço próprio de $L_\Phi(\Omega)$.
Sabendo que $E_\Phi(\Omega)$ é fechado em $L_\Phi(\Omega)$

Suponha agora que Φ não cumpre a condição Δ_2. Neste caso, $E_\Phi(\Omega)$ é um subespaço próprio de $L_\Phi(\Omega)$.
Sabendo que $E_\Phi(\Omega)$ é fechado em $L_\Phi(\Omega)$ (já que $E_\Phi(\Omega) = \overline{L^\infty(\Omega)}^{\|.\|_\Phi}$),

Suponha agora que Φ não cumpre a condição Δ_2. Neste caso, $E_\Phi(\Omega)$ é um subespaço próprio de $L_\Phi(\Omega)$.
Sabendo que $E_\Phi(\Omega)$ é fechado em $L_\Phi(\Omega)$ (já que $E_\Phi(\Omega) = \overline{L^\infty(\Omega)}^{\|.\|_\Phi}$), existe $f \in L^\Phi(\Omega)^*$, $f \not\equiv 0$,

Suponha agora que Φ não cumpre a condição Δ_2. Neste caso, $E_\Phi(\Omega)$ é um subespaço próprio de $L_\Phi(\Omega)$.
Sabendo que $E_\Phi(\Omega)$ é fechado em $L_\Phi(\Omega)$ (já que $E_\Phi(\Omega) = \overline{L^\infty(\Omega)}^{\|.\|_\Phi}$), existe $f \in L^\Phi(\Omega)^*$, $f \not\equiv 0$, tal que

$$f(u) = 0, \ u \in E_\Phi(\Omega). \tag{3}$$

Suponha agora que Φ não cumpre a condição Δ_2. Neste caso, $E_\Phi(\Omega)$ é um subespaço próprio de $L_\Phi(\Omega)$.
Sabendo que $E_\Phi(\Omega)$ é fechado em $L_\Phi(\Omega)$ (já que $E_\Phi(\Omega) = \overline{L^\infty(\Omega)}^{\|.\|_\Phi}$), existe $f \in L^\Phi(\Omega)^*$, $f \not\equiv 0$, tal que

$$f(u) = 0, \ u \in E_\Phi(\Omega). \tag{3}$$

Suponha por contradição que exista $v \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$,

Suponha agora que Φ não cumpre a condição Δ_2. Neste caso, $E_\Phi(\Omega)$ é um subespaço próprio de $L_\Phi(\Omega)$.
Sabendo que $E_\Phi(\Omega)$ é fechado em $L_\Phi(\Omega)$ (já que $E_\Phi(\Omega) = \overline{L^\infty(\Omega)}^{\|.\|_\Phi}$), existe $f \in L^\Phi(\Omega)^*$, $f \not\equiv 0$, tal que

$$f(u) = 0, \ u \in E_\Phi(\Omega). \tag{3}$$

Suponha por contradição que exista $v \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$, tal que

$$f(u) = \int_\Omega uv dx, \ u \in L_\Phi(\Omega).$$

Suponha agora que Φ não cumpre a condição Δ_2. Neste caso, $E_\Phi(\Omega)$ é um subespaço próprio de $L_\Phi(\Omega)$.
Sabendo que $E_\Phi(\Omega)$ é fechado em $L_\Phi(\Omega)$ (já que $E_\Phi(\Omega) = \overline{L^\infty(\Omega)}^{\|.\|_\Phi}$), existe $f \in L^\Phi(\Omega)^*$, $f \not\equiv 0$, tal que

$$f(u) = 0, \ u \in E_\Phi(\Omega). \tag{3}$$

Suponha por contradição que exista $v \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$, tal que

$$f(u) = \int_\Omega uv dx, \ u \in L_\Phi(\Omega).$$

Considerando $u = sgn\ v \in E_\Phi(\Omega)$,

Suponha agora que Φ não cumpre a condição Δ_2. Neste caso, $E_\Phi(\Omega)$ é um subespaço próprio de $L_\Phi(\Omega)$.
Sabendo que $E_\Phi(\Omega)$ é fechado em $L_\Phi(\Omega)$ (já que $E_\Phi(\Omega) = \overline{L^\infty(\Omega)}^{\|.\|_\Phi}$), existe $f \in L^\Phi(\Omega)^*$, $f \not\equiv 0$, tal que

$$f(u) = 0, \ u \in E_\Phi(\Omega). \tag{3}$$

Suponha por contradição que exista $v \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$, tal que

$$f(u) = \int_\Omega uv dx, \ u \in L_\Phi(\Omega).$$

Considerando $u = sgn\ v \in E_\Phi(\Omega)$, segue de (3)

$$0 = f(u) \quad = \quad \int_\Omega uv dx$$

Suponha agora que Φ não cumpre a condição Δ_2. Neste caso, $E_\Phi(\Omega)$ é um subespaço próprio de $L_\Phi(\Omega)$.
Sabendo que $E_\Phi(\Omega)$ é fechado em $L_\Phi(\Omega)$ (já que $E_\Phi(\Omega) = \overline{L^\infty(\Omega)}^{\|.\|_\Phi}$), existe $f \in L^\Phi(\Omega)^*$, $f \not\equiv 0$, tal que

$$f(u) = 0, \ u \in E_\Phi(\Omega). \tag{3}$$

Suponha por contradição que exista $v \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$, tal que

$$f(u) = \int_\Omega uv dx, \ u \in L_\Phi(\Omega).$$

Considerando $u = sgn\ v \in E_\Phi(\Omega)$, segue de (3)

$$\begin{aligned} 0 = f(u) &= \int_\Omega uv dx \\ &= \int_\Omega |\ v\ | dx, \end{aligned}$$

Suponha agora que Φ não cumpre a condição Δ_2. Neste caso, $E_\Phi(\Omega)$ é um subespaço próprio de $L_\Phi(\Omega)$.
Sabendo que $E_\Phi(\Omega)$ é fechado em $L_\Phi(\Omega)$ (já que $E_\Phi(\Omega) = \overline{L^\infty(\Omega)}^{\|.\|_\Phi}$), existe $f \in L^\Phi(\Omega)^*$, $f \not\equiv 0$, tal que

$$f(u) = 0, \ u \in E_\Phi(\Omega). \tag{3}$$

Suponha por contradição que exista $v \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$, tal que

$$f(u) = \int_\Omega uv dx, \ u \in L_\Phi(\Omega).$$

Considerando $u = sgn\ v \in E_\Phi(\Omega)$, segue de (3)

$$\begin{aligned} 0 = f(u) &= \int_\Omega uv dx \\ &= \int_\Omega \mid v \mid dx, \end{aligned}$$

donde

$$v(x) = 0 \text{ q.t.p. } x \in \Omega,$$

Suponha agora que Φ não cumpre a condição Δ_2. Neste caso, $E_\Phi(\Omega)$ é um subespaço próprio de $L_\Phi(\Omega)$.
Sabendo que $E_\Phi(\Omega)$ é fechado em $L_\Phi(\Omega)$ (já que $E_\Phi(\Omega) = \overline{L^\infty(\Omega)}^{\|.\|_\Phi}$), existe $f \in L^\Phi(\Omega)^*$, $f \not\equiv 0$, tal que

$$f(u) = 0, \ u \in E_\Phi(\Omega). \tag{3}$$

Suponha por contradição que exista $v \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$, tal que

$$f(u) = \int_\Omega uv dx, \ u \in L_\Phi(\Omega).$$

Considerando $u = sgn\ v \in E_\Phi(\Omega)$, segue de (3)

$$\begin{aligned} 0 = f(u) &= \int_\Omega uv dx \\ &= \int_\Omega \mid v \mid dx, \end{aligned}$$

donde

$$v(x) = 0 \text{ q.t.p. } x \in \Omega,$$

implicando que $f \equiv 0$, o que é uma contradição.

A seguir serão mostrados dois lemas, que serão úteis para verificar que o dual do espaço $E_\Phi(\Omega)$ (equivalentemente, o dual de $E_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$)

A seguir serão mostrados dois lemas, que serão úteis para verificar que o dual do espaço $E_\Phi(\Omega)$ (equivalentemente, o dual de $E_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$) pode ser identificado com o espaço de Orlicz $L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$ (equivalentemente, o espaço $L_\Phi(\Omega)$).

A seguir serão mostrados dois lemas, que serão úteis para verificar que o dual do espaço $E_\Phi(\Omega)$ (equivalentemente, o dual de $E_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$) pode ser identificado com o espaço de Orlicz $L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$ (equivalentemente, o espaço $L_\Phi(\Omega)$).

Lema 3.6

Seja $w \in L_\Phi(\Omega)$.

A seguir serão mostrados dois lemas, que serão úteis para verificar que o dual do espaço $E_\Phi(\Omega)$ (equivalentemente, o dual de $E_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$) pode ser identificado com o espaço de Orlicz $L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$ (equivalentemente, o espaço $L_\Phi(\Omega)$).

Lema 3.6

Seja $w \in L_\Phi(\Omega)$. Se

$$| w |_\Phi > 1,$$

A seguir serão mostrados dois lemas, que serão úteis para verificar que o dual do espaço $E_\Phi(\Omega)$ (equivalentemente, o dual de $E_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$) pode ser identificado com o espaço de Orlicz $L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$ (equivalentemente, o espaço $L_\Phi(\Omega)$).

Lema 3.6

Seja $w \in L_\Phi(\Omega)$. Se

$$| w |_\Phi > 1,$$

então

$$| w |_\Phi \leq \int_\Omega \Phi(w) dx.$$

No que segue consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto de medida finita.

No que segue consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto de medida finita.

Teorema 3.1

$E_\Phi(\Omega)^* = L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$ (equivalentemente $E_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)^* = L_\Phi(\Omega)$).

No que segue consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto de medida finita.

Teorema 3.1

$E_\Phi(\Omega)^* = L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$ (equivalentemente $E_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)^* = L_\Phi(\Omega)$).

Demonstração: Primeiramente, afirmamos que

$$L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega) \subset E_\Phi(\Omega)^*.$$

No que segue consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto de medida finita.

Teorema 3.1

$E_\Phi(\Omega)^* = L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$ (equivalentemente $E_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)^* = L_\Phi(\Omega)$).

Demonstração: Primeiramente, afirmamos que

$$L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega) \subset E_\Phi(\Omega)^*.$$

De fato, para cada $\widehat{v} \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$

No que segue consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto de medida finita.

Teorema 3.1

$E_\Phi(\Omega)^* = L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$ (equivalentemente $E_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)^* = L_\Phi(\Omega)$).

Demonstração: Primeiramente, afirmamos que

$$L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega) \subset E_\Phi(\Omega)^*.$$

De fato, para cada $\widehat{v} \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$ podemos definir

$$\Psi_{\widehat{v}} : E_\Phi(\Omega) \quad \to \quad \mathbb{R}$$

No que segue consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto de medida finita.

Teorema 3.1

$E_\Phi(\Omega)^* = L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$ (equivalentemente $E_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)^* = L_\Phi(\Omega)$).

Demonstração: Primeiramente, afirmamos que

$$L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega) \subset E_\Phi(\Omega)^*.$$

De fato, para cada $\widehat{v} \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$ podemos definir

$$\begin{aligned} \Psi_{\widehat{v}} : E_\Phi(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \Psi_{\widehat{v}}(u) = \int_\Omega u\widehat{v}dx, \end{aligned}$$

No que segue consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto de medida finita.

Teorema 3.1

$E_\Phi(\Omega)^* = L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$ (equivalentemente $E_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)^* = L_\Phi(\Omega)$).

Demonstração: Primeiramente, afirmamos que

$$L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega) \subset E_\Phi(\Omega)^*.$$

De fato, para cada $\widehat{v} \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$ podemos definir

$$\begin{aligned} \Psi_{\widehat{v}} : E_\Phi(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \Psi_{\widehat{v}}(u) = \int_\Omega u\widehat{v}dx, \end{aligned}$$

de modo que $\Psi_{\widehat{v}} \in E_\Phi(\Omega)^*$.

Mostraremos agora que

$$E_\Phi(\Omega)^* \subset L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega).$$

Mostraremos agora que

$$E_\Phi(\Omega)^* \subset L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega).$$

Tome $\Psi \in E_\Phi(\Omega)^*$

Mostraremos agora que

$$E_\Phi(\Omega)^* \subset L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega).$$

Tome $\Psi \in E_\Phi(\Omega)^*$ e considere

$$\Sigma = \{U \subset \Omega; U \text{ é mensurável}\}.$$

Mostraremos agora que

$$E_\Phi(\Omega)^* \subset L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega).$$

Tome $\Psi \in E_\Phi(\Omega)^*$ e considere

$$\Sigma = \{U \subset \Omega; U \text{ é mensurável}\}.$$

Seja $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$,

Mostraremos agora que

$$E_\Phi(\Omega)^* \subset L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega).$$

Tome $\Psi \in E_\Phi(\Omega)^*$ e considere

$$\Sigma = \{U \subset \Omega; U \text{ é mensurável}\}.$$

Seja $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$, dada por

$$\mu(U) = \Psi(\chi_U),\ U \in \Sigma,$$

Mostraremos agora que

$$E_\Phi(\Omega)^* \subset L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega).$$

Tome $\Psi \in E_\Phi(\Omega)^*$ e considere

$$\Sigma = \{U \subset \Omega; U \text{ é mensurável}\}.$$

Seja $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$, dada por

$$\mu(U) = \Psi(\chi_U),\ U \in \Sigma,$$

onde χ_U é a função característica com relação ao subconjunto U.

Mostraremos agora que

$$E_\Phi(\Omega)^* \subset L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega).$$

Tome $\Psi \in E_\Phi(\Omega)^*$ e considere

$$\Sigma = \{U \subset \Omega; U \text{ é mensurável}\}.$$

Seja $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$, dada por

$$\mu(U) = \Psi(\chi_U),\ U \in \Sigma,$$

onde χ_U é a função característica com relação ao subconjunto U.
Se $\mid U \mid = 0$,

Mostraremos agora que

$$E_\Phi(\Omega)^* \subset L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega).$$

Tome $\Psi \in E_\Phi(\Omega)^*$ e considere

$$\Sigma = \{U \subset \Omega; U \text{ é mensurável}\}.$$

Seja $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$, dada por

$$\mu(U) = \Psi(\chi_U),\ U \in \Sigma,$$

onde χ_U é a função característica com relação ao subconjunto U. Se $\mid U \mid = 0$, temos

$$\chi_U(x) = 0 \text{ q.t.p. } x \in \Omega,$$

Mostraremos agora que

$$E_\Phi(\Omega)^* \subset L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega).$$

Tome $\Psi \in E_\Phi(\Omega)^*$ e considere

$$\Sigma = \{U \subset \Omega; U \text{ é mensurável}\}.$$

Seja $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$, dada por

$$\mu(U) = \Psi(\chi_U),\ U \in \Sigma,$$

onde χ_U é a função característica com relação ao subconjunto U. Se $\mid U \mid = 0$, temos

$$\chi_U(x) = 0 \text{ q.t.p. } x \in \Omega,$$

donde $\Psi(\chi_U) = 0$,

Mostraremos agora que

$$E_\Phi(\Omega)^* \subset L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega).$$

Tome $\Psi \in E_\Phi(\Omega)^*$ e considere

$$\Sigma = \{U \subset \Omega; U \text{ é mensurável}\}.$$

Seja $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$, dada por

$$\mu(U) = \Psi(\chi_U),\ U \in \Sigma,$$

onde χ_U é a função característica com relação ao subconjunto U. Se $\mid U \mid = 0$, temos

$$\chi_U(x) = 0 \text{ q.t.p. } x \in \Omega,$$

donde $\Psi(\chi_U) = 0$, isto é $\mu(U) = 0$.

Mostraremos agora que

$$E_\Phi(\Omega)^* \subset L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega).$$

Tome $\Psi \in E_\Phi(\Omega)^*$ e considere

$$\Sigma = \{U \subset \Omega; U \text{ é mensurável}\}.$$

Seja $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}$, dada por

$$\mu(U) = \Psi(\chi_U),\ U \in \Sigma,$$

onde χ_U é a função característica com relação ao subconjunto U.
Se $\mid U \mid = 0$, temos

$$\chi_U(x) = 0 \text{ q.t.p. } x \in \Omega,$$

donde $\Psi(\chi_U) = 0$, isto é $\mu(U) = 0$.
Mostrando que μ é uma **medida absolutamente contínua com respeito a medida de Lebesgue.**

Segue do Teorema de Radon-Nikodyn

[1] Seja ν uma medida de Radon, tal que $\nu << \mathcal{L}^N$. Então existe uma única $f \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\nu(S) = \int_S f(x)dx,$$

para todo subconjunto mensurável $S \subset \Omega$

Segue do Teorema de Radon-Nikodyn [1]

[1] Seja ν uma medida de Radon, tal que $\nu << \mathcal{L}^N$. Então existe uma única $f \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\nu(S) = \int_S f(x)dx,$$

para todo subconjunto mensurável $S \subset \Omega$

Segue do Teorema de Radon-Nikodyn [1], que existe uma função $v \in L^1(\Omega)$

[1] Seja ν uma medida de Radon, tal que $\nu << \mathcal{L}^N$. Então existe uma única $f \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\nu(S) = \int_S f(x)dx,$$

para todo subconjunto mensurável $S \subset \Omega$

Segue do Teorema de Radon-Nikodyn [1], que existe uma função $v \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\mu(U) = \int_U v(x)dx.$$

[1] Seja ν uma medida de Radon, tal que $\nu << \mathcal{L}^N$. Então existe uma única $f \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\nu(S) = \int_S f(x)dx,$$

para todo subconjunto mensurável $S \subset \Omega$.

Segue do Teorema de Radon-Nikodyn [1], que existe uma função $v \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\mu(U) = \int_U v(x)dx.$$

Deste fato, considerando $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$,

[1] Seja ν uma medida de Radon, tal que $\nu << \mathcal{L}^N$. Então existe uma única $f \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\nu(S) = \int_S f(x)dx,$$

para todo subconjunto mensurável $S \subset \Omega$.

Segue do Teorema de Radon-Nikodyn [1], que existe uma função $v \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\mu(U) = \int_U v(x)dx.$$

Deste fato, considerando $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$, onde $A_i \subset \Omega$, $i \in \{1, ..., n\}$, são subconjuntos mensuráveis

[1] Seja ν uma medida de Radon, tal que $\nu << \mathcal{L}^N$. Então existe uma única $f \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\nu(S) = \int_S f(x)dx,$$

para todo subconjunto mensurável $S \subset \Omega$

Segue do Teorema de Radon-Nikodyn [1], que existe uma função $v \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\mu(U) = \int_U v(x)dx.$$

Deste fato, considerando $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$, onde $A_i \subset \Omega$, $i \in \{1, ..., n\}$, são subconjuntos mensuráveis e $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathbb{R}$,

[1] Seja ν uma medida de Radon, tal que $\nu << \mathcal{L}^N$. Então existe uma única $f \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\nu(S) = \int_S f(x)dx,$$

para todo subconjunto mensurável $S \subset \Omega$.

Segue do Teorema de Radon-Nikodyn [1], que existe uma função $v \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\mu(U) = \int_U v(x)dx.$$

Deste fato, considerando $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$, onde $A_i \subset \Omega$, $i \in \{1, ..., n\}$, são subconjuntos mensuráveis e $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathbb{R}$, temos

$$\Psi(w) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Psi(\chi_{A_i})$$

[1] Seja ν uma medida de Radon, tal que $\nu << \mathcal{L}^N$. Então existe uma única $f \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\nu(S) = \int_S f(x)dx,$$

para todo subconjunto mensurável $S \subset \Omega$.

Segue do Teorema de Radon-Nikodyn [1], que existe uma função $v \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\mu(U) = \int_U v(x)dx.$$

Deste fato, considerando $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$, onde $A_i \subset \Omega$, $i \in \{1, ..., n\}$, são subconjuntos mensuráveis e $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} \Psi(w) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Psi(\chi_{A_i}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_{A_i} v dx \end{aligned}$$

[1] Seja ν uma medida de Radon, tal que $\nu << \mathcal{L}^N$. Então existe uma única $f \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\nu(S) = \int_S f(x)dx,$$

para todo subconjunto mensurável $S \subset \Omega$.

Segue do Teorema de Radon-Nikodyn [1], que existe uma função $v \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\mu(U) = \int_U v(x)dx.$$

Deste fato, considerando $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$, onde $A_i \subset \Omega$, $i \in \{1, ..., n\}$, são subconjuntos mensuráveis e $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} \Psi(w) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Psi(\chi_{A_i}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_{A_i} v dx \\ &= \int_{\Omega} wv dx. \end{aligned} \tag{4}$$

[1] Seja ν uma medida de Radon, tal que $\nu << \mathcal{L}^N$. Então existe uma única $f \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\nu(S) = \int_S f(x)dx,$$

para todo subconjunto mensurável $S \subset \Omega$

Dado $u \in L^{\infty}(\Omega)$,

Dado $u \in L^\infty(\Omega)$, segue que existem $\{u_n^1\},\ \{u_n^2\}$ sequências de funções simples não-negativas

Dado $u \in L^\infty(\Omega)$, segue que existem $\{u_n^1\},\ \{u_n^2\}$ sequências de funções simples não-negativas, tais que

$$u_n^1 \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u^+ \quad \text{pontualmente em } \Omega$$

Dado $u \in L^\infty(\Omega)$, segue que existem $\{u_n^1\},\ \{u_n^2\}$ sequências de funções simples não-negativas, tais que

$$u_n^1 \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u^+ \quad \text{pontualmente em } \Omega$$

e

$$u_n^2 \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u^- \quad \text{pontualmente em } \Omega,$$

Dado $u \in L^\infty(\Omega)$, segue que existem $\{u_n^1\},\ \{u_n^2\}$ sequências de funções simples não-negativas, tais que

$$u_n^1 \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u^+ \text{ pontualmente em } \Omega$$

e

$$u_n^2 \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u^- \text{ pontualmente em } \Omega,$$

além disso

$$u_n^1(x) \leq u^+(x)\ x \in \Omega\ e\ n \in \mathbb{N}$$

Dado $u \in L^\infty(\Omega)$, segue que existem $\{u_n^1\},\ \{u_n^2\}$ sequências de funções simples não-negativas, tais que

$$u_n^1 \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u^+ \text{ pontualmente em } \Omega$$

e

$$u_n^2 \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u^- \text{ pontualmente em } \Omega,$$

além disso

$$u_n^1(x) \leq u^+(x)\ x \in \Omega\ e\ n \in \mathbb{N}$$

e

$$u_n^2(x) \leq u^-(x)\ x \in \Omega\ e\ n \in \mathbb{N}.$$

Neste caso, para cada $\epsilon > 0$

Neste caso, para cada $\epsilon > 0$ temos

$$\Phi\left(\frac{(u_n^1 - u_n^2) - u}{\epsilon}\right) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ pontualmente em } \Omega$$

Neste caso, para cada $\epsilon > 0$ temos

$$\Phi\left(\frac{(u_n^1 - u_n^2) - u}{\epsilon}\right) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ pontualmente em } \Omega$$

e

$$\Phi\left(\frac{(u_n^1(x) - u_n^2(x)) - u(x)}{\epsilon}\right) \leq \Phi\left(\frac{2 \mid u(x) \mid}{\epsilon}\right) \; x \in \Omega \; e \; n \in \mathbb{N}.$$

Neste caso, para cada $\epsilon > 0$ temos

$$\Phi\Big(\frac{(u_n^1 - u_n^2) - u}{\epsilon}\Big) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ pontualmente em } \Omega$$

e

$$\Phi\Big(\frac{(u_n^1(x) - u_n^2(x)) - u(x)}{\epsilon}\Big) \leq \Phi\Big(\frac{2 \mid u(x) \mid}{\epsilon}\Big) \; x \in \Omega \; e \; n \in \mathbb{N}.$$

Segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{(u_n^1 - u_n^2) - u}{\epsilon}\Big) dx \leq 1, \; \epsilon > 0,$$

para n suficientemente grande,

Neste caso, para cada $\epsilon > 0$ temos

$$\Phi\Big(\frac{(u_n^1 - u_n^2) - u}{\epsilon}\Big) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ pontualmente em } \Omega$$

e

$$\Phi\Big(\frac{(u_n^1(x) - u_n^2(x)) - u(x)}{\epsilon}\Big) \leq \Phi\Big(\frac{2 \mid u(x) \mid}{\epsilon}\Big) \; x \in \Omega \; e \; n \in \mathbb{N}.$$

Segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que

$$\int_\Omega \Phi\Big(\frac{(u_n^1 - u_n^2) - u}{\epsilon}\Big) dx \leq 1, \; \epsilon > 0,$$

para n suficientemente grande, donde

$$\mid (u_n^1 - u_n^2) - u \mid_\Phi \leq \epsilon,$$

para n suficientemente grande.

Já que $\Psi \in E_\Phi(\Omega)^*$

Já que $\Psi \in E_\Phi(\Omega)^*$, temos

$$\Psi(u_n^1 - u_n^2) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Psi(u) \text{ em } \mathbb{R}. \tag{5}$$

Já que $\Psi \in E_\Phi(\Omega)^*$, temos

$$\Psi(u_n^1 - u_n^2) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Psi(u) \; em \; \mathbb{R}. \tag{5}$$

Por outro lado, desde que

$$| \, (u_n^1 - u_n^2)v \, | \leq | \, uv \, | \in L^1(\Omega)$$

Já que $\Psi \in E_\Phi(\Omega)^*$, temos

$$\Psi(u_n^1 - u_n^2) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Psi(u) \text{ em } \mathbb{R}. \tag{5}$$

Por outro lado, desde que

$$| (u_n^1 - u_n^2)v | \leq | uv | \in L^1(\Omega)$$

e

$$(u_n^1 - u_n^2)v \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} uv \text{ pontualmente em } \Omega,$$

Já que $\Psi \in E_\Phi(\Omega)^*$, temos

$$\Psi(u_n^1 - u_n^2) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Psi(u) \ em\ \mathbb{R}. \tag{5}$$

Por outro lado, desde que

$$|\ (u_n^1 - u_n^2)v\ | \leq |\ uv\ | \in L^1(\Omega)$$

e

$$(u_n^1 - u_n^2)v \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} uv \ \text{ pontualmente em } \Omega,$$

temos novamente pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\int_\Omega (u_n^1 - u_n^2)v dx \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega uv dx. \tag{6}$$

Temos de (4)

$$\Psi_v(u_1^n - u_2^n) \quad = \quad \Psi_v(u_1^n) - \Psi_v(u_2^n)$$

Temos de (4)

$$\begin{aligned}\Psi_v(u_1^n - u_2^n) &= \Psi_v(u_1^n) - \Psi_v(u_2^n) \\ &= \int_\Omega (u_1^n - u_2^n) v dx,\end{aligned}$$

Temos de (4)

$$\begin{aligned}\Psi_v(u_1^n - u_2^n) &= \Psi_v(u_1^n) - \Psi_v(u_2^n) \\ &= \int_\Omega (u_1^n - u_2^n) v dx,\end{aligned}$$

passando ao limite de $n \to +\infty$,

Temos de (4)

$$\begin{aligned}\Psi_v(u_1^n - u_2^n) &= \Psi_v(u_1^n) - \Psi_v(u_2^n) \\ &= \int_\Omega (u_1^n - u_2^n) v dx,\end{aligned}$$

passando ao limite de $n \to +\infty$, segue de (5) e (6)

$$\Psi(u) = \int_\Omega uv dx.$$

Temos de (4)

$$\begin{aligned}\Psi_v(u_1^n - u_2^n) &= \Psi_v(u_1^n) - \Psi_v(u_2^n) \\ &= \int_\Omega (u_1^n - u_2^n) v dx,\end{aligned}$$

passando ao limite de $n \to +\infty$, segue de (5) e (6)

$$\Psi(u) = \int_\Omega uv dx.$$

Mostrando que o funcional $\Psi \in E_\Phi(\Omega)^*$ restrito a $L^\infty(\Omega)$

Temos de (4)

$$\begin{aligned}\Psi_v(u_1^n - u_2^n) &= \Psi_v(u_1^n) - \Psi_v(u_2^n) \\ &= \int_\Omega (u_1^n - u_2^n) v dx,\end{aligned}$$

passando ao limite de $n \to +\infty$, segue de (5) e (6)

$$\Psi(u) = \int_\Omega uv dx.$$

Mostrando que o funcional $\Psi \in E_\Phi(\Omega)^*$ restrito a $L^\infty(\Omega)$ é dado por:

$$\Psi(u) = \int_\Omega uv dx, \ u \in L^\infty(\Omega). \tag{7}$$

Justificaremos agora que $v \in L^1(\Omega)$, obtida pelo Teorema de Radon-Nikodyn

Justificaremos agora que $v \in L^1(\Omega)$, obtida pelo Teorema de Radon-Nikodyn, pertence a $L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$.

Justificaremos agora que $v \in L^1(\Omega)$, obtida pelo Teorema de Radon-Nikodyn, pertence a $L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, considere v_n a função truncamento de v

Justificaremos agora que $v \in L^1(\Omega)$, obtida pelo Teorema de Radon-Nikodyn, pertence a $L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, considere v_n a função truncamento de v, dada por:

$$v_n(x) = \begin{cases} v(x), \ se \ \mid v(x) \mid \leq n, \\ 0, \ se \ \mid v(x) \mid > n \end{cases}$$

Justificaremos agora que $v \in L^1(\Omega)$, obtida pelo Teorema de Radon-Nikodyn, pertence a $L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, considere v_n a função truncamento de v, dada por:

$$v_n(x) = \begin{cases} v(x), \ se \ \mid v(x) \mid \leq n, \\ 0, \ se \ \mid v(x) \mid > n \end{cases}$$

e

$$\widetilde{u}_n(x) = \begin{cases} \frac{\widetilde{\Phi}(v_n(x)/\lambda)}{v_n(x)/\lambda}, \ se \ v_n(x) \neq 0 \\ 0, \ c.c. \end{cases}$$

Justificaremos agora que $v \in L^1(\Omega)$, obtida pelo Teorema de Radon-Nikodyn, pertence a $L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, considere v_n a função truncamento de v, dada por:

$$v_n(x) = \begin{cases} v(x), \ se \ \mid v(x) \mid \leq n, \\ 0, \ se \ \mid v(x) \mid > n \end{cases}$$

e

$$\widetilde{u}_n(x) = \begin{cases} \frac{\widetilde{\Phi}(v_n(x)/\lambda)}{v_n(x)/\lambda}, \ se \ v_n(x) \neq 0 \\ 0, \ c.c. \end{cases}$$

onde $\lambda = \| \ \Psi \ \|_*$.

Justificaremos agora que $v \in L^1(\Omega)$, obtida pelo Teorema de Radon-Nikodyn, pertence a $L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, considere v_n a função truncamento de v, dada por:

$$v_n(x) = \begin{cases} v(x), \ se \ \mid v(x) \mid \leq n, \\ 0, \ se \ \mid v(x) \mid > n \end{cases}$$

e

$$\widetilde{u}_n(x) = \begin{cases} \frac{\widetilde{\Phi}(v_n(x)/\lambda)}{v_n(x)/\lambda}, \ se \ v_n(x) \neq 0 \\ 0, \ c.c. \end{cases}$$

onde $\lambda = \| \ \Psi \ \|_*$. Note que $(\widetilde{u}_n) \subset L^\infty(\Omega)$.

Justificaremos agora que $v \in L^1(\Omega)$, obtida pelo Teorema de Radon-Nikodyn, pertence a $L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, considere v_n a função truncamento de v, dada por:

$$v_n(x) = \begin{cases} v(x), \ se \ \mid v(x) \mid \leq n, \\ 0, \ se \ \mid v(x) \mid > n \end{cases}$$

e

$$\widetilde{u}_n(x) = \begin{cases} \frac{\widetilde{\Phi}(v_n(x)/\lambda)}{v_n(x)/\lambda}, \ se \ v_n(x) \neq 0 \\ 0, \ c.c. \end{cases}$$

onde $\lambda = \| \ \Psi \ \|_*$. Note que $(\widetilde{u}_n) \subset L^\infty(\Omega)$.
Para justificarmos que $v \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$,

Justificaremos agora que $v \in L^1(\Omega)$, obtida pelo Teorema de Radon-Nikodyn, pertence a $L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, considere v_n a função truncamento de v, dada por:

$$v_n(x) = \begin{cases} v(x), \ se \ \mid v(x) \mid \leq n, \\ 0, \ se \ \mid v(x) \mid > n \end{cases}$$

e

$$\widetilde{u}_n(x) = \begin{cases} \frac{\widetilde{\Phi}(v_n(x)/\lambda)}{v_n(x)/\lambda}, \ se \ v_n(x) \neq 0 \\ 0, \ c.c. \end{cases}$$

onde $\lambda = \| \ \Psi \ \|_*$. Note que $(\widetilde{u}_n) \subset L^\infty(\Omega)$.
Para justificarmos que $v \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$, basta provar que

(8) $$\int_\Omega \widetilde{\Phi}\left(\frac{v_n}{\lambda}\right) dx$$

Justificaremos agora que $v \in L^1(\Omega)$, obtida pelo Teorema de Radon-Nikodyn, pertence a $L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, considere v_n a função truncamento de v, dada por:

$$v_n(x) = \begin{cases} v(x), \ se \ \mid v(x) \mid \leq n, \\ 0, \ se \ \mid v(x) \mid > n \end{cases}$$

e

$$\widetilde{u}_n(x) = \begin{cases} \frac{\widetilde{\Phi}(v_n(x)/\lambda)}{v_n(x)/\lambda}, \ se \ v_n(x) \neq 0 \\ 0, \ c.c. \end{cases}$$

onde $\lambda = \| \Psi \|_*$. Note que $(\widetilde{u}_n) \subset L^\infty(\Omega)$.
Para justificarmos que $v \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$, basta provar que

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}\left(\frac{v_n}{\lambda}\right) dx \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

pois assim segue do Lema de Fatou

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}\Big(\frac{v}{\lambda}\Big)dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega \widetilde{\Phi}\Big(\frac{v_n}{\lambda}\Big)dx \leq 1,$$

pois assim segue do Lema de Fatou

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}\Big(\frac{v}{\lambda}\Big)dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega \widetilde{\Phi}\Big(\frac{v_n}{\lambda}\Big)dx \leq 1,$$

implicando que $v \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$

pois assim segue do Lema de Fatou

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}\Big(\frac{v}{\lambda}\Big)dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega \widetilde{\Phi}\Big(\frac{v_n}{\lambda}\Big)dx \leq 1,$$

implicando que $v \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$ e além disso

$$\mid v \mid_{\widetilde{\Phi}} \leq \lambda = \parallel \Psi \parallel_* .$$

pois assim segue do Lema de Fatou

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}\Big(\frac{v}{\lambda}\Big)dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega \widetilde{\Phi}\Big(\frac{v_n}{\lambda}\Big)dx \leq 1,$$

implicando que $v \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$ e além disso

$$| \, v \, |_{\widetilde{\Phi}} \leq \lambda = \| \, \Psi \, \|_* \, .$$

Desde que $(\widetilde{u}_n) \subset L^\infty(\Omega)$,

pois assim segue do Lema de Fatou

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}\Big(\frac{v}{\lambda}\Big)dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega \widetilde{\Phi}\Big(\frac{v_n}{\lambda}\Big)dx \leq 1,$$

implicando que $v \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$ e além disso

$$\mid v \mid_{\widetilde{\Phi}} \leq \lambda = \parallel \Psi \parallel_* .$$

Desde que $(\widetilde{u}_n) \subset L^\infty(\Omega)$, temos de (7)

$$\Psi(\widetilde{u}_n) \quad = \quad \int_\Omega \widetilde{u}_n v dx$$

pois assim segue do Lema de Fatou

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}\left(\frac{v}{\lambda}\right)dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega \widetilde{\Phi}\left(\frac{v_n}{\lambda}\right)dx \leq 1,$$

implicando que $v \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$ e além disso

$$\mid v \mid_{\widetilde{\Phi}} \leq \lambda = \parallel \Psi \parallel_* .$$

Desde que $(\widetilde{u}_n) \subset L^\infty(\Omega)$, temos de (7)

$$\begin{aligned} \Psi(\widetilde{u}_n) &= \int_\Omega \widetilde{u}_n v dx \\ &= \int_{[v_n \neq 0]} \frac{\widetilde{\Phi}(v_n/\lambda)}{v_n/\lambda} v dx \end{aligned}$$

pois assim segue do Lema de Fatou

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}\Big(\frac{v}{\lambda}\Big)dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega \widetilde{\Phi}\Big(\frac{v_n}{\lambda}\Big)dx \leq 1,$$

implicando que $v \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$ e além disso

$$\mid v \mid_{\widetilde{\Phi}} \leq \lambda = \parallel \Psi \parallel_* .$$

Desde que $(\widetilde{u}_n) \subset L^\infty(\Omega)$, temos de (7)

$$\begin{aligned}
\Psi(\widetilde{u}_n) &= \int_\Omega \widetilde{u}_n v dx \\
&= \int_{[v_n \neq 0]} \frac{\widetilde{\Phi}(v_n/\lambda)}{v_n/\lambda} v dx \\
&= \lambda \int_{[v_n \neq 0]} \widetilde{\Phi}(v_n/\lambda)\frac{v}{v_n} dx
\end{aligned}$$

pois assim segue do Lema de Fatou

$$\int_\Omega \widetilde{\Phi}\Big(\frac{v}{\lambda}\Big)dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega \widetilde{\Phi}\Big(\frac{v_n}{\lambda}\Big)dx \leq 1,$$

implicando que $v \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$ e além disso

$$\mid v \mid_{\widetilde{\Phi}} \leq \lambda = \parallel \Psi \parallel_* .$$

Desde que $(\widetilde{u}_n) \subset L^\infty(\Omega)$, temos de (7)

$$\begin{aligned}
\Psi(\widetilde{u}_n) &= \int_\Omega \widetilde{u}_n v dx \\
&= \int_{[v_n \neq 0]} \frac{\widetilde{\Phi}(v_n/\lambda)}{v_n/\lambda} v dx \\
&= \lambda \int_{[v_n \neq 0]} \widetilde{\Phi}(v_n/\lambda)\frac{v}{v_n} dx \\
&= \lambda \int_{[v_n \neq 0]} \widetilde{\Phi}(v_n/\lambda) dx. \qquad (9)
\end{aligned}$$

Por outro lado, note que

$$| \Psi(\widetilde{u}_n) | \quad \leq \quad \| \Psi \|_* | \widetilde{u}_n |_\Phi$$

Por outro lado, note que

$$\begin{aligned} |\,\Psi(\widetilde{u}_n)\,| &\leq \|\,\Psi\,\|_*|\,\widetilde{u}_n\,|_\Phi \\ &= \lambda\,|\,\widetilde{u}_n\,|_\Phi,\ n\in\mathbb{N}. \end{aligned} \tag{10}$$

Por outro lado, note que

$$\begin{aligned} |\ \Psi(\widetilde{u}_n)\ | &\leq \|\ \Psi\ \|_*|\ \widetilde{u}_n\ |_\Phi \\ &= \lambda\ |\ \widetilde{u}_n\ |_\Phi,\ n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{10}$$

Afirmamos que

$$|\ \widetilde{u}_n\ |_\Phi \leq 1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, note que

$$\begin{aligned} |\,\Psi(\widetilde{u}_n)\,| &\leq \|\,\Psi\,\|_*|\,\widetilde{u}_n\,|_\Phi \\ &= \lambda\,|\,\widetilde{u}_n\,|_\Phi,\ n\in\mathbb{N}. \end{aligned} \tag{10}$$

Afirmamos que

$$|\,\widetilde{u}_n\,|_\Phi \leq 1 \text{ para todo } n\in\mathbb{N}.$$

Se $|\,\widetilde{u}_n\,|_\Phi > 1$ para algum $n\in\mathbb{N}$

Por outro lado, note que

$$\begin{aligned} |\Psi(\widetilde{u}_n)| &\leq \|\Psi\|_*|\widetilde{u}_n|_\Phi \\ &= \lambda|\widetilde{u}_n|_\Phi,\ n\in\mathbb{N}. \end{aligned} \tag{10}$$

Afirmamos que

$$|\widetilde{u}_n|_\Phi \leq 1 \text{ para todo } n\in\mathbb{N}.$$

Se $|\widetilde{u}_n|_\Phi > 1$ para algum $n\in\mathbb{N}$, segue do Lema 3.6

$$|\widetilde{u}_n|_\Phi \leq \int_\Omega \Phi(\widetilde{u}_n)dx = \int_{[v_n\neq 0]} \Phi\Big(\frac{\widetilde{\Phi}(v_n/\lambda)}{v_n/\lambda}\Big)dx,$$

Por outro lado, note que

$$
\begin{aligned}
| \Psi(\widetilde{u}_n) | &\leq \| \Psi \|_* | \widetilde{u}_n |_\Phi \\
&= \lambda \, | \widetilde{u}_n |_\Phi, \ n \in \mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{10}
$$

Afirmamos que

$$| \widetilde{u}_n |_\Phi \leq 1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Se $| \widetilde{u}_n |_\Phi > 1$ para algum $n \in \mathbb{N}$, segue do Lema 3.6

$$| \widetilde{u}_n |_\Phi \leq \int_\Omega \Phi(\widetilde{u}_n) dx = \int_{[v_n \neq 0]} \Phi\Big(\frac{\widetilde{\Phi}(v_n/\lambda)}{v_n/\lambda}\Big) dx,$$

implicando do Lema 3.2 que

$$| \widetilde{u}_n |_\Phi < \int_{[v_n \neq 0]} \widetilde{\Phi}\Big(\frac{v_n}{\lambda}\Big) dx = \int_\Omega \widetilde{\Phi}\Big(\frac{v_n}{\lambda}\Big) dx. \tag{11}$$

De (10) e (11)

$$| \Psi(\widetilde{u}_n) | < \lambda \int_{[v_n \neq 0]} \widetilde{\Phi}\left(\frac{v_n}{\lambda}\right) dx$$

De (10) e (11)

$$| \Psi(\widetilde{u}_n) | < \lambda \int_{[v_n \neq 0]} \widetilde{\Phi}\Big(\frac{v_n}{\lambda}\Big) dx = \lambda \int_{\Omega} \widetilde{\Phi}\Big(\frac{v_n}{\lambda}\Big) dx,$$

De (10) e (11)

$$| \Psi(\widetilde{u}_n) | < \lambda \int_{[v_n \neq 0]} \widetilde{\Phi}\Big(\frac{v_n}{\lambda}\Big) dx = \lambda \int_{\Omega} \widetilde{\Phi}\Big(\frac{v_n}{\lambda}\Big) dx,$$

o que é uma contradição com (9). Logo, $| \widetilde{u}_n |_{\Phi} \leq 1, \ n \in \mathbb{N}$.

De (10) e (11)

$$| \Psi(\widetilde{u}_n) | < \lambda \int_{[v_n \neq 0]} \widetilde{\Phi}\Big(\frac{v_n}{\lambda}\Big) dx = \lambda \int_{\Omega} \widetilde{\Phi}\Big(\frac{v_n}{\lambda}\Big) dx,$$

o que é uma contradição com (9). Logo, $| \widetilde{u}_n |_{\Phi} \leq 1, \ n \in \mathbb{N}$.
Segue de (9) e (10) que

$$\lambda \geq | \Psi(\widetilde{u}_n) | = \Big| \lambda \int_{\Omega} \widetilde{\Phi}\Big(\frac{v_n}{\lambda}\Big) dx \Big|,$$

De (10) e (11)

$$| \Psi(\widetilde{u}_n) | < \lambda \int_{[v_n \neq 0]} \widetilde{\Phi}\Big(\frac{v_n}{\lambda}\Big) dx = \lambda \int_{\Omega} \widetilde{\Phi}\Big(\frac{v_n}{\lambda}\Big) dx,$$

o que é uma contradição com (9). Logo, $| \widetilde{u}_n |_{\Phi} \leq 1, \ n \in \mathbb{N}$.
Segue de (9) e (10) que

$$\lambda \geq | \Psi(\widetilde{u}_n) | = \Big| \lambda \int_{\Omega} \widetilde{\Phi}\Big(\frac{v_n}{\lambda}\Big) dx \Big|,$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} \widetilde{\Phi}\Big(\frac{v_n}{\lambda}\Big) dx \leq 1,$$

De (10) e (11)

$$| \Psi(\widetilde{u}_n) | < \lambda \int_{[v_n \neq 0]} \widetilde{\Phi}\Big(\frac{v_n}{\lambda}\Big) dx = \lambda \int_{\Omega} \widetilde{\Phi}\Big(\frac{v_n}{\lambda}\Big) dx,$$

o que é uma contradição com (9). Logo, $| \widetilde{u}_n |_{\Phi} \leq 1, \ n \in \mathbb{N}$. Segue de (9) e (10) que

$$\lambda \geq | \Psi(\widetilde{u}_n) | = \Big| \lambda \int_{\Omega} \widetilde{\Phi}\Big(\frac{v_n}{\lambda}\Big) dx \Big|,$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} \widetilde{\Phi}\Big(\frac{v_n}{\lambda}\Big) dx \leq 1,$$

mostrando assim (8).

Acabamos de concluir que dado $\Psi \in E^{\Phi}(\Omega)^*$,

Acabamos de concluir que dado $\Psi \in E^{\Phi}(\Omega)^*$, existe $v \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$,

Acabamos de concluir que dado $\Psi \in E^{\Phi}(\Omega)^*$, existe $v \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$, tal que

$$\Psi(u) = \int_{\Omega} uv dx, \ u \in L^{\infty}(\Omega).$$

Acabamos de concluir que dado $\Psi \in E^{\Phi}(\Omega)^*$, existe $v \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$, tal que

$$\Psi(u) = \int_{\Omega} uv dx, \ u \in L^{\infty}(\Omega).$$

Se tomarmos agora $u \in E_{\Phi}(\Omega)$,

Acabamos de concluir que dado $\Psi \in E^{\Phi}(\Omega)^*$, existe $v \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$, tal que

$$\Psi(u) = \int_{\Omega} uv dx, \ u \in L^{\infty}(\Omega).$$

Se tomarmos agora $u \in E_{\Phi}(\Omega)$, basta tomar uma sequência $\{u_n\} \subset L^{\infty}(\Omega)$ tal que

Acabamos de concluir que dado $\Psi \in E^{\Phi}(\Omega)^*$, existe $v \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$, tal que

$$\Psi(u) = \int_{\Omega} uvdx, \ u \in L^{\infty}(\Omega).$$

Se tomarmos agora $u \in E_{\Phi}(\Omega)$, basta tomar uma sequência $\{u_n\} \subset L^{\infty}(\Omega)$ tal que

$$\mid u_n - u \mid_{\Phi} \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

Acabamos de concluir que dado $\Psi \in E^{\Phi}(\Omega)^*$, existe $v \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$, tal que

$$\Psi(u) = \int_{\Omega} uvdx, \ u \in L^{\infty}(\Omega).$$

Se tomarmos agora $u \in E_{\Phi}(\Omega)$, basta tomar uma sequência $\{u_n\} \subset L^{\infty}(\Omega)$ tal que

$$\mid u_n - u \mid_{\Phi} \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

e teremos da Desigualdade de Holder

$$\int_{\Omega} u_n v dx \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_{\Omega} uvdx.$$

Acabamos de concluir que dado $\Psi \in E^{\Phi}(\Omega)^*$, existe $v \in L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)$, tal que

$$\Psi(u) = \int_{\Omega} uvdx, \ u \in L^{\infty}(\Omega).$$

Se tomarmos agora $u \in E_{\Phi}(\Omega)$, basta tomar uma sequência $\{u_n\} \subset L^{\infty}(\Omega)$ tal que

$$\mid u_n - u \mid_{\Phi} \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

e teremos da Desigualdade de Holder

$$\int_{\Omega} u_n v dx \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_{\Omega} uvdx.$$

E portanto

$$\Psi(u) = \int_{\Omega} uvdx, \ u \in E_{\Phi}(\Omega),$$

como queríamos demonstrar. ■

Teorema 3.2

$L_\Phi(\Omega)$ é reflexivo se, e só se, Φ e $\widetilde{\Phi}$ satisfazem a condição Δ_2.

Teorema 3.2

$L_\Phi(\Omega)$ é reflexivo se, e só se, Φ e $\widetilde{\Phi}$ satisfazem a condição Δ_2.

Demonstração: Se Φ e $\widetilde{\Phi}$ satisfazem a condição Δ_2,

Teorema 3.2

$L_\Phi(\Omega)$ é reflexivo se, e só se, Φ e $\widetilde{\Phi}$ satisfazem a condição Δ_2.

Demonstração: Se Φ e $\widetilde{\Phi}$ satisfazem a condição Δ_2, temos

$$E_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega) \text{ e } E_{\widetilde{\Phi}}(\Omega) = L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega).$$

Teorema 3.2

$L_\Phi(\Omega)$ é reflexivo se, e só se, Φ e $\widetilde{\Phi}$ satisfazem a condição Δ_2.

Demonstração: Se Φ e $\widetilde{\Phi}$ satisfazem a condição Δ_2, temos

$$E_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega) \text{ e } E_{\widetilde{\Phi}}(\Omega) = L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega).$$

Logo,

$$L_\Phi(\Omega)^* = E_\Phi(\Omega)^* = L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega) \tag{11}$$

Teorema 3.2

$L_\Phi(\Omega)$ é reflexivo se, e só se, Φ e $\widetilde{\Phi}$ satisfazem a condição Δ_2.

Demonstração: Se Φ e $\widetilde{\Phi}$ satisfazem a condição Δ_2, temos

$$E_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega) \text{ e } E_{\widetilde{\Phi}}(\Omega) = L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega).$$

Logo,

$$L_\Phi(\Omega)^* = E_\Phi(\Omega)^* = L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega) \tag{11}$$

e

$$L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)^* = E_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)^* = L_\Phi(\Omega). \tag{12}$$

Considere agora que $L_\Phi(\Omega)$ seja um espaço reflexivo

Considere agora que $L_\Phi(\Omega)$ seja um espaço reflexivo, isto é

$$L_\Phi(\Omega)^{**} = L_\Phi(\Omega).$$

Considere agora que $L_\Phi(\Omega)$ seja um espaço reflexivo, isto é

$$L_\Phi(\Omega)^{**} = L_\Phi(\Omega).$$

Reciprocamente, desde que $E_\Phi(\Omega)$ é um subespaço fechado de $L_\Phi(\Omega)$,

Considere agora que $L_\Phi(\Omega)$ seja um espaço reflexivo, isto é

$$L_\Phi(\Omega)^{**} = L_\Phi(\Omega).$$

Reciprocamente, desde que $E_\Phi(\Omega)$ é um subespaço fechado de $L_\Phi(\Omega)$,

$$E_\Phi(\Omega) \text{ é reflexivo, isto é, } E_\Phi(\Omega) = E_\Phi(\Omega)^{**}.$$

Considere agora que $L_\Phi(\Omega)$ seja um espaço reflexivo, isto é

$$L_\Phi(\Omega)^{**} = L_\Phi(\Omega).$$

Reciprocamente, desde que $E_\Phi(\Omega)$ é um subespaço fechado de $L_\Phi(\Omega)$,

$$E_\Phi(\Omega) \text{ é reflexivo, isto é, } E_\Phi(\Omega) = E_\Phi(\Omega)^{**}.$$

Segue do fato de

$$L_\Phi(\Omega) \subset L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)^* = [E_\Phi(\Omega)^*]^* = E_\Phi(\Omega),$$

Considere agora que $L_\Phi(\Omega)$ seja um espaço reflexivo, isto é

$$L_\Phi(\Omega)^{**} = L_\Phi(\Omega).$$

Reciprocamente, desde que $E_\Phi(\Omega)$ é um subespaço fechado de $L_\Phi(\Omega)$,

$$E_\Phi(\Omega) \text{ é reflexivo, isto é, } E_\Phi(\Omega) = E_\Phi(\Omega)^{**}.$$

Segue do fato de

$$L_\Phi(\Omega) \subset L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)^* = [E_\Phi(\Omega)^*]^* = E_\Phi(\Omega),$$

que E_Φ contém $L_\Phi(\Omega)$.

Considere agora que $L_\Phi(\Omega)$ seja um espaço reflexivo, isto é

$$L_\Phi(\Omega)^{**} = L_\Phi(\Omega).$$

Reciprocamente, desde que $E_\Phi(\Omega)$ é um subespaço fechado de $L_\Phi(\Omega)$,

$$E_\Phi(\Omega) \text{ é reflexivo, isto é, } E_\Phi(\Omega) = E_\Phi(\Omega)^{**}.$$

Segue do fato de

$$L_\Phi(\Omega) \subset L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)^* = [E_\Phi(\Omega)^*]^* = E_\Phi(\Omega),$$

que E_Φ contém $L_\Phi(\Omega)$.
Mostrando que $E_\Phi(\Omega) = L_\Phi(\Omega)$, e portanto Φ satisfaz a condição Δ_2.

Mostraremos agora que $\widetilde{\Phi}$ satisfaz a condição Δ_2.

Mostraremos agora que $\widetilde{\Phi}$ satisfaz a condição Δ_2.

Com efeito, suponha por contradição que $\widetilde{\Phi}$ não satisfaz a condição Δ_2.

Mostraremos agora que $\widetilde{\Phi}$ satisfaz a condição Δ_2.

Com efeito, suponha por contradição que $\widetilde{\Phi}$ não satisfaz a condição Δ_2.
Então

$$L^*_{\widetilde{\Phi}}(\Omega) \not\subset L_{\Phi}(\Omega).$$

Mostraremos agora que $\widetilde{\Phi}$ satisfaz a condição Δ_2.

Com efeito, suponha por contradição que $\widetilde{\Phi}$ não satisfaz a condição Δ_2.
Então

$$L^*_{\widetilde{\Phi}}(\Omega) \not\subset L_\Phi(\Omega).$$

No entanto, como $\Phi \in \Delta_2$

$$E_\Phi(\Omega) = E_\Phi(\Omega)^{**} = L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)^* \not\subset L_\Phi(\Omega),$$

Mostraremos agora que $\widetilde{\Phi}$ satisfaz a condição Δ_2.

Com efeito, suponha por contradição que $\widetilde{\Phi}$ não satisfaz a condição Δ_2.
Então

$$L^*_{\widetilde{\Phi}}(\Omega) \not\subset L_\Phi(\Omega).$$

No entanto, como $\Phi \in \Delta_2$

$$E_\Phi(\Omega) = E_\Phi(\Omega)^{**} = L_{\widetilde{\Phi}}(\Omega)^* \not\subset L_\Phi(\Omega),$$

o que é uma contradição. ■