Resolubilidade local para classes de operadores de ordem um

Luciele Nunes

IMEF-FURG

Resumo

Um dos problemas mais básicos da teoria de equações diferenciais parciais lineares é decidir sobre a resolubilidade local de uma equação diferencial parcial linear. Na segunda metade da década de 50 surgiram dois trabalhos cruciais sobre o tema. No primeiro deles H. Lewy mostrou que o operador de primeira ordem

$$L = -\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2} + 2i(x_1 + ix_2)\frac{\partial}{\partial x_3} \tag{1}$$

não é resolúvel em ponto algum de $\mathbb{R}^3$. No segundo trabalho, L. Hormander, determinou uma condição pontual para que um operador diferencial parcial linear não seja localmente resolúvel em uma vizinhança de um dado ponto. O operador (1) satisfaz tal condição em todos os pontos. No decorrer da década seguinte, uma condição necessária e suficiente para a resolubilidade de um operador diferencial parcial linear foi enunciada por L. Nirenberg e F. Treves, condição (P), e pode-se afirmar que ela tem sua origem na análise por eles feita, dos chamados Operadores de Mizohata, que são dados por

$$M_\ell = \frac{\partial}{\partial t} + i(\ell+1)t^l\frac{\partial}{\partial x}, \quad \ell \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Pela condição (P) o operador (2) é resolúvel na origem se, e somente se, ℓ é par. Além disso, se $\ell = 1$ o operador (2) satizfaz a condição de Hormander em pontos da forma $(x, 0)$.

Para uma classe de operadores que contém os operadores (2), L. Nunes e J. R. Santos apresentaram uma condição necessária e suficiente para resolubilidade local em pontos da forma $(x, 0)$. Generalizações para o operador de Lewy e condições para a resolubilidade desses operadores vem sendo trabalhadas por esses autores.

Referências

[1] L. Hörmander, Differential equations without solutions, Math. Ann., 140, 1960, 169-173.

[2] H. Lewy, An example of a smoth linear partial differential equation without solution, Ann. of Math., 66, 1957, 155-158.

[3] L. Nirenberg and F. Treves, On local solvability of linear partial differential equations, I. Necessary conditions, II. Sufficient conditions, Comm. Pure Appl. Math, 23, 1970, 1-38, 23, 1970, 459-510; 24, 1971. 279-288.

[4] L. R. Nunes, J. R. Dos Santos Filho. On local solvability for a class of generalized Mizohata equations. Communications on Pure and Applied Analysis, 2021, 20(6): 2323-2340.