Introdução à K-Teoria

Aula 1/3

Fabio Ferrari Ruffino
DM – UFSCar – São Carlos

11 de fevereiro de 2025

Definição de fibrado vetorial

- Fixemos um espaço topológico X.

Definição de fibrado vetorial

- Fixemos um espaço topológico X.
- Intuitivamente, um *fibrado vetorial complexo* E em X é formado por um espaço vetorial E_x em cada ponto $x \in X$, com uma condição.

Definição de fibrado vetorial

- Fixemos um espaço topológico X.
- Intuitivamente, um *fibrado vetorial complexo* E em X é formado por um espaço vetorial E_x em cada ponto $x \in X$, com uma condição.
- Cada ponto $x \in X$ admite uma vizinhança U em que a família de espaços vetoriais E é *equivalente* a $U \times \mathbb{C}^n$.

Definição de fibrado vetorial

- Formalmente, um *fibrado vetorial complexo* em X é definido por:

Definição de fibrado vetorial

- Formalmente, um *fibrado vetorial complexo* em X é definido por:

  (i) um espaço topológico E e uma função contínua sobrejetora $\pi : E \to X$;

Definição de fibrado vetorial

- Formalmente, um *fibrado vetorial complexo* em X é definido por:

  (i) um espaço topológico E e uma função contínua sobrejetora $\pi : E \to X$;

  (ii) uma estrutura de espaço vetorial complexo de dimensão finita em $E_x := \pi^{-1}(\{x\})$ para todo $x \in X$;

Definição de fibrado vetorial

- Formalmente, um *fibrado vetorial complexo* em X é definido por:
  - (i) um espaço topológico E e uma função contínua sobrejetora $\pi : E \to X$;
  - (ii) uma estrutura de espaço vetorial complexo de dimensão finita em $E_x := \pi^{-1}(\{x\})$ para todo $x \in X$;
- de modo que valham as duas seguintes condições:

Definição de fibrado vetorial

- Formalmente, um *fibrado vetorial complexo* em X é definido por:

  (i) um espaço topológico E e uma função contínua sobrejetora $\pi\colon E \to X$;

  (ii) uma estrutura de espaço vetorial complexo de dimensão finita em $E_x := \pi^{-1}(\{x\})$ para todo $x \in X$;

- de modo que valham as duas seguintes condições:

  (iii) para todo $x \in X$ existem uma vizinhança aberta U e um *homeomorfismo* $\varphi\colon \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\approx} U \times \mathbb{C}^n$, de modo que $\varphi\big(\pi^{-1}(\{y\})\big) = \{y\} \times \mathbb{C}^n$ para todo $y \in U$;

Definição de fibrado vetorial

- Formalmente, um *fibrado vetorial complexo* em X é definido por:

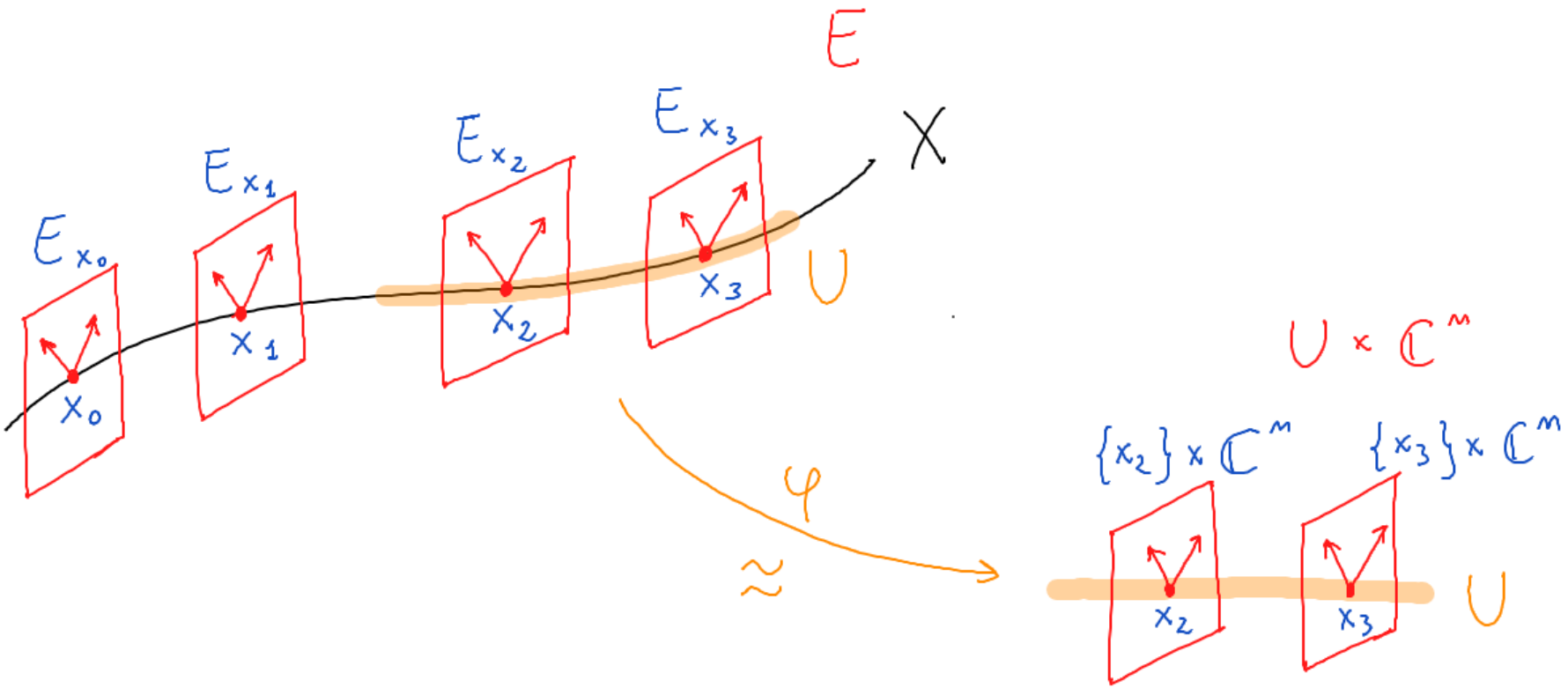
  (i) um espaço topológico E e uma função contínua sobrejetora $\pi\colon E \to X$;

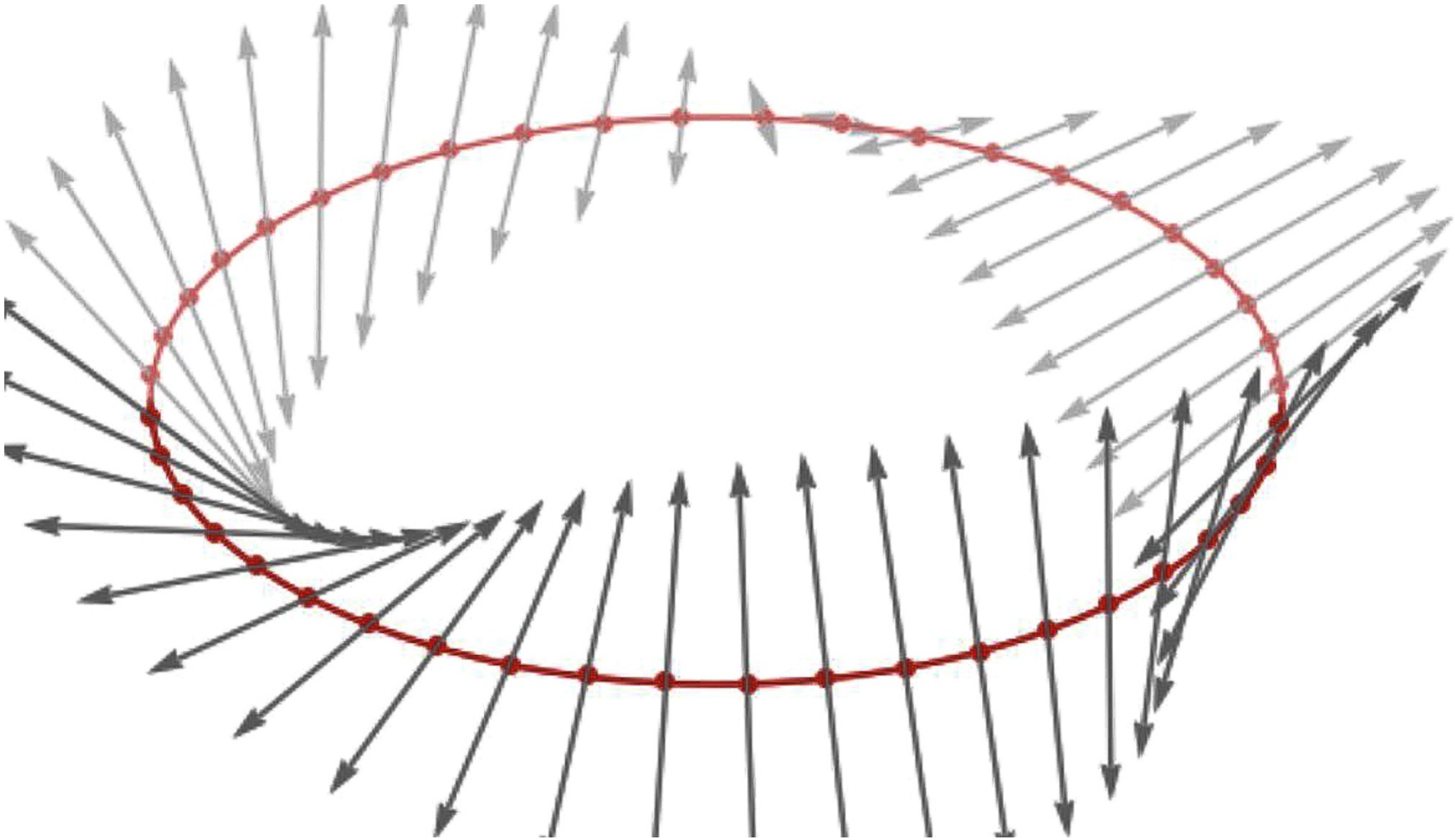
  (ii) uma estrutura de espaço vetorial complexo de dimensão finita em $E_x := \pi^{-1}(\{x\})$ para todo $x \in X$;

- de modo que valham as duas seguintes condições:

  (iii) para todo $x \in X$ existem uma vizinhança aberta U e um *homeomorfismo* $\varphi\colon \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\approx} U \times \mathbb{C}^n$, de modo que $\varphi\big(\pi^{-1}(\{y\})\big) = \{y\} \times \mathbb{C}^n$ para todo $y \in U$;

  (iv) os itens (ii) e (iii) têm que ser compatíveis no seguinte sentido: a bijeção $\varphi|_{\pi^{-1}(\{y\})}\colon \pi^{-1}(\{y\}) \xrightarrow{\approx} \mathbb{C}^n$ tem que ser *linear* para todo $y \in U$.


E
X
E_{x_0}
E_{x_1}
E_{x_2}
E_{x_3}
x_0
x_1
x_2
x_3
U
φ
$\approx$
$U \times \mathbb{C}^m$
$\{x_2\} \times \mathbb{C}^m$
$\{x_3\} \times \mathbb{C}^m$
x_2
x_3
U



Isomorfismo de fibrados vetoriais

- Dados dois fibrados vetoriais $\pi\colon E \to X$ e $\pi'\colon F \to X$, um *isomorfismo* de E a F é um homeomorfismo $f\colon E \xrightarrow{\approx} F$ tal que:

Isomorfismo de fibrados vetoriais

- Dados dois fibrados vetoriais $\pi\colon E \to X$ e $\pi'\colon F \to X$, um *isomorfismo* de E a F é um homeomorfismo $f\colon E \xrightarrow{\approx} F$ tal que:
  - $\pi' \circ f = \pi$ (equivalentemente, $f(E_x) = F_x$ para todo $x \in X$);

Isomorfismo de fibrados vetoriais

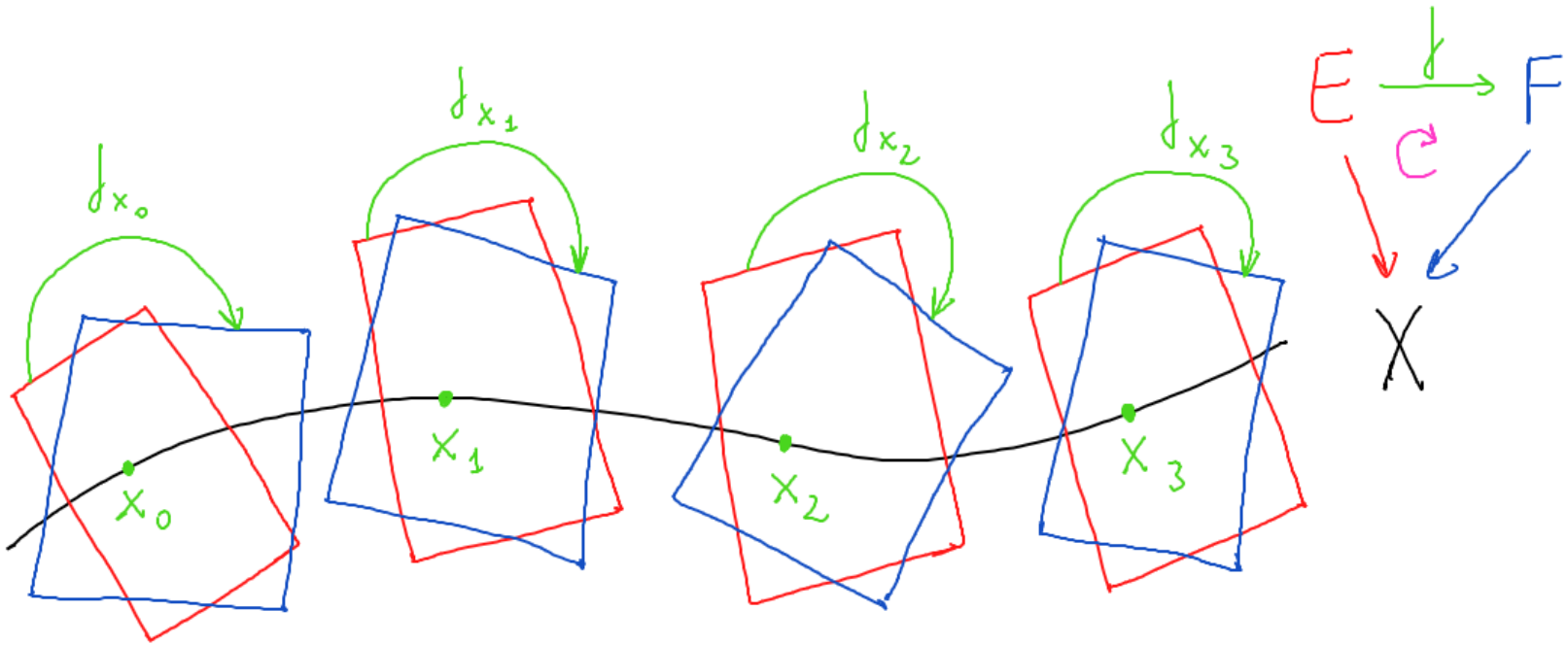
- Dados dois fibrados vetoriais $\pi\colon E \to X$ e $\pi'\colon F \to X$, um *isomorfismo* de E a F é um homeomorfismo $f\colon E \xrightarrow{\approx} F$ tal que:
  - $\pi' \circ f = \pi$ (equivalentemente, $f(E_x) = F_x$ para todo $x \in X$);
  - $f|_{E_x}\colon E_x \xrightarrow{\approx} F_x$ é linear para todo $x \in X$.

Isomorfismo de fibrados vetoriais

- Dados dois fibrados vetoriais $\pi\colon E \to X$ e $\pi'\colon F \to X$, um *isomorfismo* de E a F é um homeomorfismo $f\colon E \xrightarrow{\approx} F$ tal que:
  - $\pi' \circ f = \pi$ (equivalentemente, $f(E_x) = F_x$ para todo $x \in X$);
  - $f|_{E_x}\colon E_x \xrightarrow{\approx} F_x$ é linear para todo $x \in X$.
- Substituindo $\mathbb{C}^n$ por $\mathbb{R}^n$, obtemos a noção de *fibrado vetorial real*.

Isomorfismo de fibrados vetoriais

- Dados dois fibrados vetoriais $\pi\colon E \to X$ e $\pi'\colon F \to X$, um *isomorfismo* de E a F é um homeomorfismo $f\colon E \xrightarrow{\approx} F$ tal que:
  - $\pi' \circ f = \pi$ (equivalentemente, $f(E_x) = F_x$ para todo $x \in X$);
  - $f|_{E_x}\colon E_x \xrightarrow{\approx} F_x$ é linear para todo $x \in X$.
- Substituindo $\mathbb{C}^n$ por $\mathbb{R}^n$, obtemos a noção de *fibrado vetorial real*.
- Em ambos os casos, o número n é dito *posto* do fibrado vetorial.


ϕ_{x_0}
ϕ_{x_1}
ϕ_{x_2}
ϕ_{x_3}
X_0
X_1
X_2
X_3
E
F
X

Fibrados triviais

- A projeção natural $\pi : X \times \mathbb{C}^n \to X$ ou $\pi : X \times \mathbb{R}^n \to X$, com a estrutura natural de espaço vetorial em cada fibra, é um fibrado vetorial em X, dito *fibrado produto* de posto n.

Fibrados triviais

- A projeção natural $\pi : X \times \mathbb{C}^n \to X$ ou $\pi : X \times \mathbb{R}^n \to X$, com a estrutura natural de espaço vetorial em cada fibra, é um fibrado vetorial em X, dito *fibrado produto* de posto n.

- Um fibrado vetorial é dito *trivial* se for isomorfo ao fibrado produto do posto correspondente.

Fibrados triviais

- A projeção natural $\pi : X \times \mathbb{C}^n \to X$ ou $\pi : X \times \mathbb{R}^n \to X$, com a estrutura natural de espaço vetorial em cada fibra, é um fibrado vetorial em X, dito *fibrado produto* de posto n.
- Um fibrado vetorial é dito *trivial* se for isomorfo ao fibrado produto do posto correspondente.
- Por definição, todo fibrado vetorial é *localmente trivial*.

Operações entre fibrados vetoriais

- Dada uma operação "natural" entre espaços vetoriais, podemos construir a operação análoga entre fibrados vetoriais.

Operações entre fibrados vetoriais

- Dada uma operação "natural" entre espaços vetoriais, podemos construir a operação análoga entre fibrados vetoriais.
- `Exemplos:` Soma direta, produto tensorial, dualidade, potência tensorial ou (antis)simétrica, ...

Operações entre fibrados vetoriais

- Dada uma operação "natural" entre espaços vetoriais, podemos construir a operação análoga entre fibrados vetoriais.
- `Exemplos:` Soma direta, produto tensorial, dualidade, potência tensorial ou (antis)simétrica, ...
- `Ideia:` Aplicamos a operação pontualmente e damos uma topologia natural à união das fibras resultantes, de modo que se torne um fibrado vetorial.

Operações e isomorfismos

- Dados $\pi : E \to X$ e $\pi' : F \to X$, estamos particularmente interessados na *soma direta* $p : E \oplus F \to X$ e no *produto tensorial* $p' : E \otimes F \to X$.

Operações e isomorfismos

- Dados $\pi\colon E \to X$ e $\pi'\colon F \to X$, estamos particularmente interessados na *soma direta* $p\colon E \oplus F \to X$ e no *produto tensorial* $p'\colon E \otimes F \to X$.

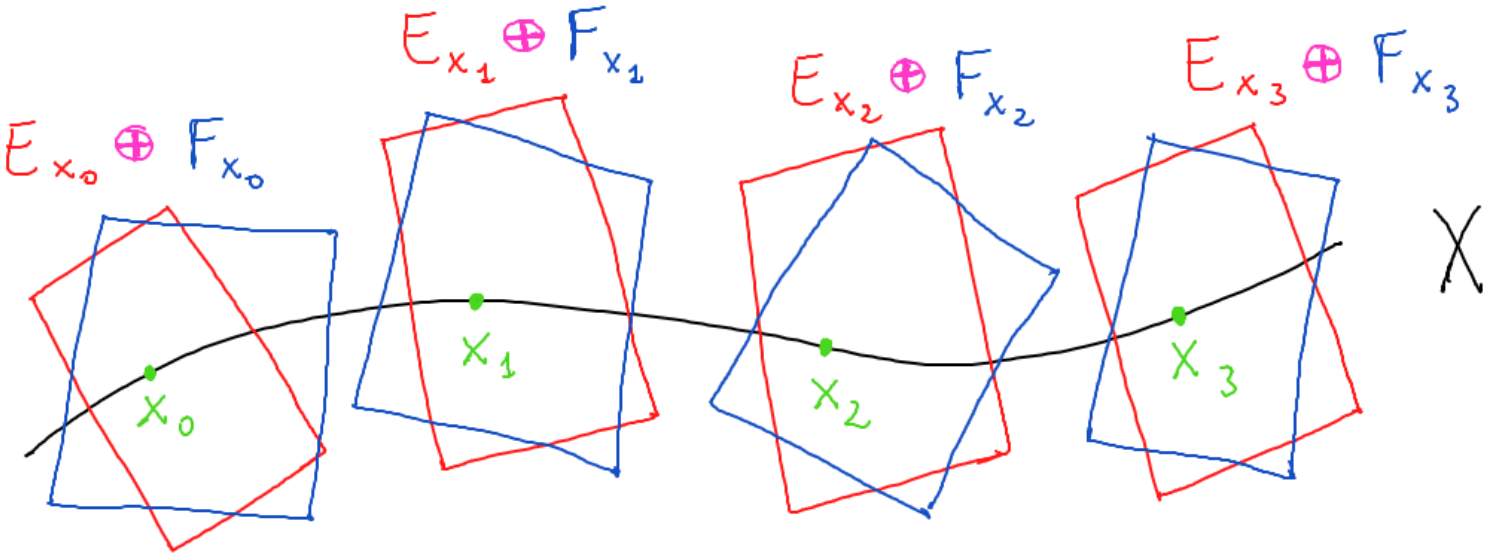
- As operações são compatíveis com a noção de isomorfismo. Em particular, se $E \simeq E'$ e $F \simeq F'$, então $E \oplus F \simeq E' \oplus F'$ e $E \otimes F \simeq E' \otimes F'$.

Operações e isomorfismos

- Dados $\pi\colon E \to X$ e $\pi'\colon F \to X$, estamos particularmente interessados na *soma direta* $p\colon E \oplus F \to X$ e no *produto tensorial* $p'\colon E \otimes F \to X$.

- As operações são compatíveis com a noção de isomorfismo. Em particular, se $E \simeq E'$ e $F \simeq F'$, então $E \oplus F \simeq E' \oplus F'$ e $E \otimes F \simeq E' \otimes F'$.

- Módulo isomorfismo, as operações de soma direta e produto tensor são associativas e comutativas, possuem um elemento neutro e o produto é distributivo em relação à soma.


$E_{x_0} \oplus F_{x_0}$
$E_{x_1} \oplus F_{x_1}$
$E_{x_2} \oplus F_{x_2}$
$E_{x_3} \oplus F_{x_3}$
x_0
x_1
x_2
x_3
X

Semi-anel dos fibrados vetoriais

- Denotamos por Vect_X o conjunto dos fibrados vetoriais em X módulo isomorfismo.

Semi-anel dos fibrados vetoriais

- Denotamos por Vect_X o conjunto dos fibrados vetoriais em X módulo isomorfismo.
- Fica definido o semi-anel $(\mathrm{Vect}_X, \oplus, \otimes)$, dotado de 0 e de 1.

Semi-anel dos fibrados vetoriais

- Denotamos por Vect_X o conjunto dos fibrados vetoriais em X módulo isomorfismo.
- Fica definido o semi-anel $(\mathrm{Vect}_X, \oplus, \otimes)$, dotado de 0 e de 1.
- O 0 do semi-anel é a classe de um fibrado vetorial de posto 0 e o 1 do anel é a classe do fibrado produto de posto 1.

Semi-anel dos fibrados vetoriais

- Denotamos por Vect_X o conjunto dos fibrados vetoriais em X módulo isomorfismo.
- Fica definido o semi-anel $(\mathrm{Vect}_X, \oplus, \otimes)$, dotado de 0 e de 1.
- O 0 do semi-anel é a classe de um fibrado vetorial de posto 0 e o 1 do anel é a classe do fibrado produto de posto 1.
- Em particular, $(\mathrm{Vect}_X, \oplus)$ é um monoide abeliano.

Para que estudamos os fibrados vetoriais?

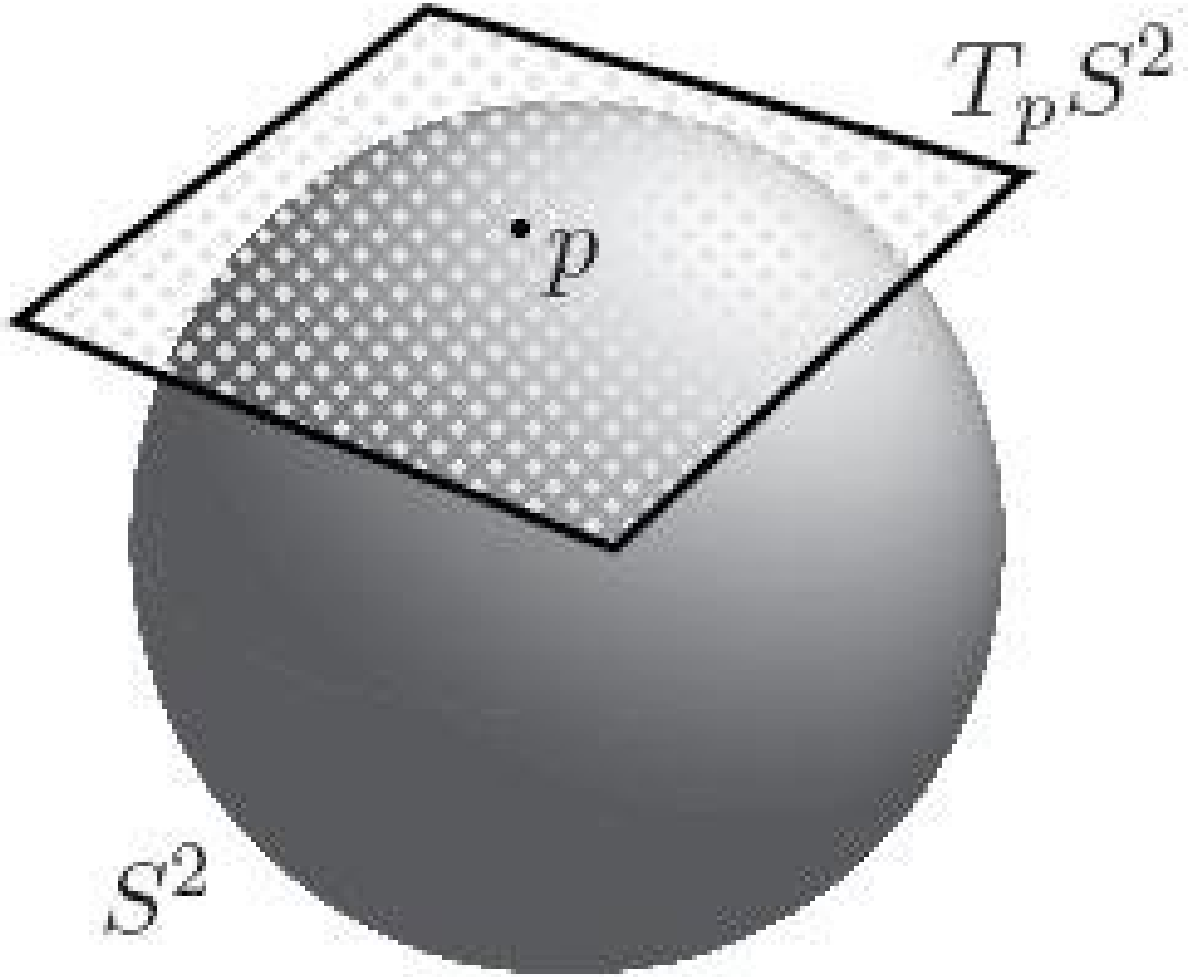
- Existem muitas aplicações da teoria dos fibrados vetoriais, que justificam o fato de estudá-la em detalhe.

Para que estudamos os fibrados vetoriais?

- Existem muitas aplicações da teoria dos fibrados vetoriais, que justificam o fato de estudá-la em detalhe.
- Alguns fibrados vetoriais são particularmente interessantes. Por exemplo: o *fibrado tangente* de uma variedade suave, o *fibrado de linhas canônico* de um espaço projetivo, ...

Para que estudamos os fibrados vetoriais?

- Existem muitas aplicações da teoria dos fibrados vetoriais, que justificam o fato de estudá-la em detalhe.
- Alguns fibrados vetoriais são particularmente interessantes. Por exemplo: o *fibrado tangente* de uma variedade suave, o *fibrado de linhas canônico* de um espaço projetivo, ...
- A partir do fibrado tangente, podem-se construir o dual (fibrado cotangente) e as potências tensorial, simétrica e antissimétrica, que são essenciais na Geometria Diferencial.


T_pS^2
p
S^2

Para que estudamos os fibrados vetoriais?

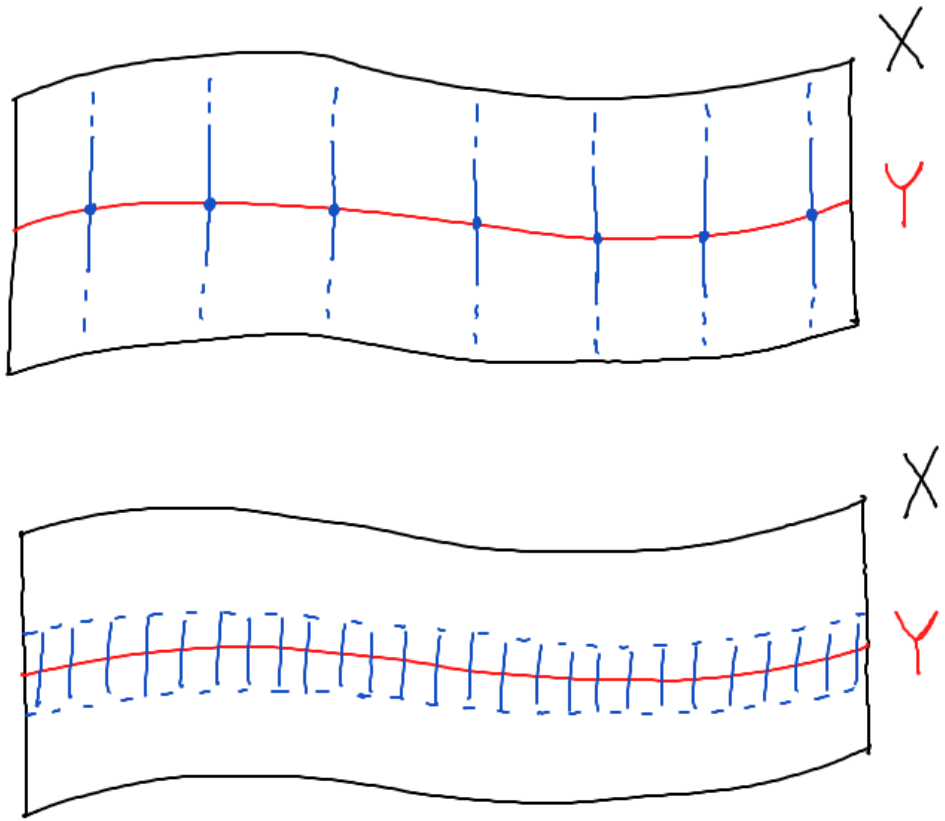
- O semi-anel $(\mathrm{Vect}_X, \oplus, \otimes)$ é um invariante por homeomorfismo do espaço X.

Para que estudamos os fibrados vetoriais?

- O semi-anel $(\mathrm{Vect}_X, \oplus, \otimes)$ é um invariante por homeomorfismo do espaço X.
- As classes de isomorfismo de fibrados de linhas (ou seja, de posto 1) com o produto tensorial formam um *grupo*. A unidade é a classe do fibrado trivial $X \times \mathbb{C}$ e o inverso da classe de um fibrado E é a classe do dual E^*. Este grupo é outro invariante por homeomorfismo.

Para que estudamos os fibrados vetoriais?

- O semi-anel $(\mathrm{Vect}_X, \oplus, \otimes)$ é um invariante por homeomorfismo do espaço X.
- As classes de isomorfismo de fibrados de linhas (ou seja, de posto 1) com o produto tensorial formam um *grupo*. A unidade é a classe do fibrado trivial $X \times \mathbb{C}$ e o inverso da classe de um fibrado E é a classe do dual E^*. Este grupo é outro invariante por homeomorfismo.
- Dado um mergulho de variedades suaves, fica definido o *fibrado normal correspondente*, cujo espaço total é difeomorfo a uma *vizinhança tubular*.


X
Y
X
Y

Para que estudamos os fibrados vetoriais?

- Portanto, estudando os fibrados vetoriais em uma variedade suave X podemos encontrar obstruções à existência de mergulhos suaves em outra variedade fixada.

Para que estudamos os fibrados vetoriais?

- Portanto, estudando os fibrados vetoriais em uma variedade suave X podemos encontrar obstruções à existência de mergulhos suaves em outra variedade fixada.

- As *classes características* são invariantes associados a um fibrado vetorial, que em vários casos são calculáveis explicitamente e constituem ferramentas muito eficazes em problemas de classificação, obstrução, ...

Para que estudamos os fibrados vetoriais?

- Portanto, estudando os fibrados vetoriais em uma variedade suave X podemos encontrar obstruções à existência de mergulhos suaves em outra variedade fixada.

- As *classes características* são invariantes associados a um fibrado vetorial, que em vários casos são calculáveis explicitamente e constituem ferramentas muito eficazes em problemas de classificação, obstrução, ...

  - Por exemplo, as classes características do fibrado tangente são essenciais para classificar as variedades suaves módulo cobordismo e para vários outros problemas desse tipo.

Para que estudamos os fibrados vetoriais?

- Portanto, estudando os fibrados vetoriais em uma variedade suave X podemos encontrar obstruções à existência de mergulhos suaves em outra variedade fixada.

- As *classes características* são invariantes associados a um fibrado vetorial, que em vários casos são calculáveis explicitamente e constituem ferramentas muito eficazes em problemas de classificação, obstrução, ...

  - Por exemplo, as classes características do fibrado tangente são essenciais para classificar as variedades suaves módulo cobordismo e para vários outros problemas desse tipo.

- ...

Problemas para calcular Vect_X

- *Problema:* Calcular explicitamente (isto é, caracterizar a menos de isomorfismo) o semi-anel $(\mathrm{Vect}_X, \oplus, \otimes)$ pode ser muito complicado, inclusive para espaços com que trabalhamos frequentemente.

Problemas para calcular Vect_X

- *Problema:* Calcular explicitamente (isto é, caracterizar a menos de isomorfismo) o semi-anel $(\mathrm{Vect}_X, \oplus, \otimes)$ pode ser muito complicado, inclusive para espaços com que trabalhamos frequentemente.

- *Exemplo:* Calcular $(\mathrm{Vect}_{S^n}, \oplus, \otimes)$, sendo S^n a esfera de dimensão n, é um problema bem difícil em geral (a resposta completa é ainda um problema aberto).

Problemas para calcular Vect_X

- *Problema:* Calcular explicitamente (isto é, caracterizar a menos de isomorfismo) o semi-anel $(\mathrm{Vect}_X, \oplus, \otimes)$ pode ser muito complicado, inclusive para espaços com que trabalhamos frequentemente.

- *Exemplo:* Calcular $(\mathrm{Vect}_{S^n}, \oplus, \otimes)$, sendo S^n a esfera de dimensão n, é um problema bem difícil em geral (a resposta completa é ainda um problema aberto).

- Vamos tentar entender o porquê.

Grupos de homotopia

- Dado um espaço topológico com ponto marcado (X, x_0), ficam definidos os *grupos de homotopia* $\pi_n(X, x_0)$, sendo $n \in \mathbb{N}^*$, da seguinte maneira.

Grupos de homotopia

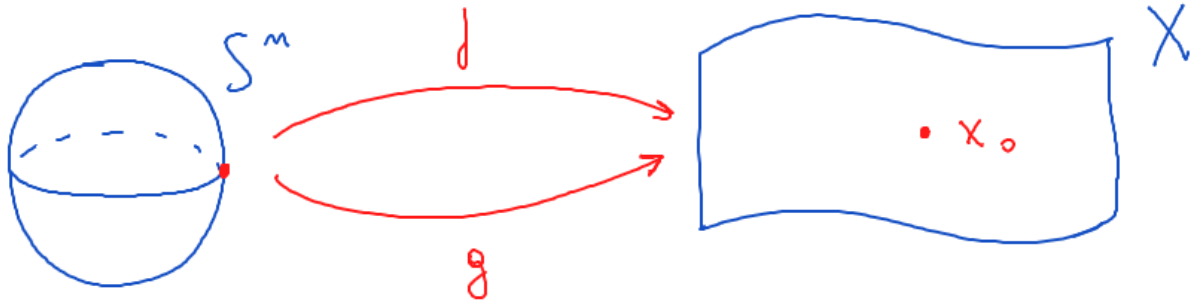
- Dado um espaço topológico com ponto marcado (X, x_0), ficam definidos os *grupos de homotopia* $\pi_n(X, x_0)$, sendo $n \in \mathbb{N}^*$, da seguinte maneira.

- Como conjunto, $\pi_n(X, x_0)$ contém as classes de homotopia de funções com ponto marcado de S^n a X.

Grupos de homotopia

- Dado um espaço topológico com ponto marcado (X, x_0), ficam definidos os *grupos de homotopia* $\pi_n(X, x_0)$, sendo $n \in \mathbb{N}^*$, da seguinte maneira.
- Como conjunto, $\pi_n(X, x_0)$ contém as classes de homotopia de funções com ponto marcado de S^n a X.
- A estrutura de grupo (abeliano para $n \geq 2$) é definida da seguinte maneira:

$[f], [g] \in \pi_n(X, x_0)$



$[f] \cdot [g] \in \pi_n(X, x_0)$



Fibrados vetoriais nas esferas

- Vamos considerar o problema de classificar os fibrados vetoriais nas esferas.

Fibrados vetoriais nas esferas

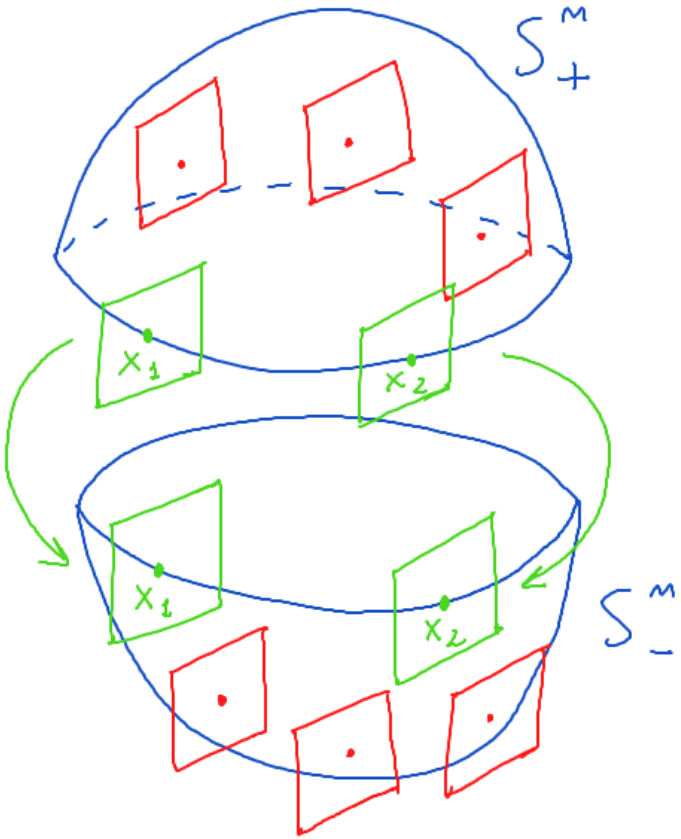
- Vamos considerar o problema de classificar os fibrados vetoriais nas esferas.
- Sejam S^n_+ e S^n_- os dois hemisférios de S^n.

Fibrados vetoriais nas esferas

- Vamos considerar o problema de classificar os fibrados vetoriais nas esferas.
- Sejam S^n_+ e S^n_- os dois hemisférios de S^n.
- Como S^n_+ e S^n_- são contráteis, todo fibrados vetorial em S^n, restrito a um hemisfério, é trivial.

Fibrados vetoriais nas esferas

- Vamos considerar o problema de classificar os fibrados vetoriais nas esferas.
- Sejam S^n_+ e S^n_- os dois hemisférios de S^n.
- Como S^n_+ e S^n_- são contráteis, todo fibrados vetorial em S^n, restrito a um hemisfério, é trivial.
- Portanto, a única informação significativa é a maneira em que dois fibrados vetoriais triviais (do mesmo posto) se colam no equador.



$$\begin{aligned} f_{x_1} &: \mathbb{C}^k \longrightarrow \mathbb{C}^k \\ f_{x_2} &: \mathbb{C}^k \longrightarrow \mathbb{C}^k \\ &\vdots \\ f &: S^{m-1} \longrightarrow GL(k;\mathbb{C}) \end{aligned}$$

Fibrados vetoriais nas esferas

- Pode-se demonstrar que a classe de isomorfismo do fibrado resultante só depende da classe de homotopia de f.

Fibrados vetoriais nas esferas

- Pode-se demonstrar que a classe de isomorfismo do fibrado resultante só depende da classe de homotopia de f.

- Portanto, obtemos uma bijeção natural entre o conjunto $\mathrm{Vect}^k_{S^n}$ e o conjunto $[S^{n-1}, \mathrm{GL}(k;\mathbb{C})]$.

Fibrados vetoriais nas esferas

- Pode-se demonstrar que a classe de isomorfismo do fibrado resultante só depende da classe de homotopia de f.
- Portanto, obtemos uma bijeção natural entre o conjunto $\mathrm{Vect}^k_{S^n}$ e o conjunto $[S^{n-1}, \mathrm{GL}(k;\mathbb{C})]$.
- Escolhendo um ponto marcado (essencialmente irrelevante), obtemos a *bijeção* $\mathrm{Vect}^k_{S^n} \simeq \pi_{n-1}\big(\mathrm{GL}(k;\mathbb{C})\big)$.

Fibrados vetoriais nas esferas

- O exemplo das esferas mostra que a dificuldade do problema de classificar os fibrados vetoriais em um espaço é análoga à do problema de calcular os grupos de homotopia.

Fibrados vetoriais nas esferas

- O exemplo das esferas mostra que a dificuldade do problema de classificar os fibrados vetoriais em um espaço é análoga à do problema de calcular os grupos de homotopia.
- Em particular, os grupos de homotopia de $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ estão relacionados com os das esferas.

Fibrados vetoriais nas esferas

- O exemplo das esferas mostra que a dificuldade do problema de classificar os fibrados vetoriais em um espaço é análoga à do problema de calcular os grupos de homotopia.
- Em particular, os grupos de homotopia de $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ estão relacionados com os das esferas.
- *Problema:* Calcular os grupos de homotopia de um espaço é bem difícil em geral. Por exemplo, o cálculo completo dos grupos de homotopia das esferas é ainda um problema aberto.

Localidade e globalidade

- Existem propriedades/objetos *locais* e *globais*.

Localidade e globalidade

- Existem propriedades/objetos *locais* e *globais*.
- Por exemplo, a continuidade ou a suavidade de uma função são propriedades locais.

Localidade e globalidade

- Existem propriedades/objetos *locais* e *globais*.
- Por exemplo, a continuidade ou a suavidade de uma função são propriedades locais.
- A compacidade e a contratibilidade são propriedades globais (por exemplo, S^n é localmente contrátil mas não é contrátil; $\mathbb{R}^n$ é localmente compacto mas não é compacto).

Localidade e globalidade

- Seja $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma cobertura aberta de X.

Localidade e globalidade

- Seja $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma cobertura aberta de X.
- Podemos pensar que X foi "montado" unindo as "peças" U_α.

Localidade e globalidade

- Seja $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma cobertura aberta de X.
- Podemos pensar que X foi "montado" unindo as "peças" U_α.
- Quando uma propriedade ou um objeto for local, é suficiente conhecê-lo em cada peça para reconstruí-lo globalmente.

Localidade e globalidade

- Seja $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma cobertura aberta de X.
- Podemos pensar que X foi "montado" unindo as "peças" U_α.
- Quando uma propriedade ou um objeto for local, é suficiente conhecê-lo em cada peça para reconstruí-lo globalmente.
- *Exemplo:* Uma função continua (ou suave) em cada U_α é contínua (ou suave). Conhecendo um produto interno ou hermitiano em cada aberto U_α de uma variedade, fica definido globalmente.

Localidade e globalidade

- Quando uma propriedade ou um objeto for global, não pode ser reconstruído desta maneira.

Localidade e globalidade

- Quando uma propriedade ou um objeto for global, não pode ser reconstruído desta maneira.
- *Exemplo:* Em uma variedade topológica, podemos escolher cada U_α contrátil. Neste caso, $\pi_n(U_\alpha) = 0$ para todo α, mas $\pi_n(X)$ não é trivial em geral.

Localidade e globalidade

- Quando uma propriedade ou um objeto for global, não pode ser reconstruído desta maneira.
- *Exemplo:* Em uma variedade topológica, podemos escolher cada U_α contrátil. Neste caso, $\pi_n(U_\alpha) = 0$ para todo α, mas $\pi_n(X)$ não é trivial em geral.
- No caso específico do grupo fundamental (ou seja, o π_1), estamos em uma situação intermediária, que chamamos de *semi-localidade*.

Semi-localidade

- Isso é devido ao *teorema de Seifert-Van Kanpen*.

Semi-localidade

- Isso é devido ao *teorema de Seifert-Van Kanpen*.
- Essencialmente, conhecendo os grupos fundamentais dos abertos U_α e das interseções $U_{\alpha\beta}$, junto com os push-forwards induzidos pelos mergulhos $U_{\alpha\beta} \hookrightarrow U_\alpha$, podemos reconstruir o grupo fundamental de X.

Semi-localidade

- Isso é devido ao *teorema de Seifert-Van Kanpen*.
- Essencialmente, conhecendo os grupos fundamentais dos abertos U_α e das interseções $U_{\alpha\beta}$, junto com os push-forwards induzidos pelos mergulhos $U_{\alpha\beta} \hookrightarrow U_\alpha$, podemos reconstruir o grupo fundamental de X.
- Isso significa que, conhecendo o grupo fundamental de cada peça e o comportamento do grupo fundamental durante o processo de montagem, podemos reconstruir $\pi_1(X)$. Por este motivo, falamos de *semi-localidade*.

Sequências exatas

- Vamos introduzir uma ferramenta relevante de Álgebra Homológica.

Sequências exatas

- Vamos introduzir uma ferramenta relevante de Álgebra Homológica.
- Uma sequência de grupos abelianos (ou módulos, espaços vetoriais, etc.) e morfismos, da forma

$$\cdots \xrightarrow{\varphi_{n-2}} G_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} G_n \xrightarrow{\varphi_n} G_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} \cdots ,$$

é dita *exata* se $\mathrm{Ker}(\varphi_n) = \mathrm{Im}(\varphi_{n-1})$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Sequências exatas

- Vamos introduzir uma ferramenta relevante de Álgebra Homológica.
- Uma sequência de grupos abelianos (ou módulos, espaços vetoriais, etc.) e morfismos, da forma

$$\cdots \xrightarrow{\varphi_{n-2}} G_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} G_n \xrightarrow{\varphi_n} G_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} \cdots,$$

  é dita *exata* se $\mathrm{Ker}(\varphi_n) = \mathrm{Im}(\varphi_{n-1})$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.
- O fato que uma sequência seja exata permite "preencher os buracos", isto é, calcular algumas entradas desconhecidas a partir das outras conhecidas.

Sequências exatas

- *Exemplo simples:* Suponhamos que a seguinte sequência seja exata:

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow ? \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots .$$

Sequências exatas

- *Exemplo simples:* Suponhamos que a seguinte sequência seja exata:

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow ? \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots .$$

- Temos que $\mathrm{Ker}(\varphi) = 0$ e $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{Z}$; portanto, φ é um isomorfismo.

Sequências exatas

- *Exemplo simples:* Suponhamos que a seguinte sequência seja exata:

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow ? \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots .$$

- Temos que $\mathrm{Ker}(\varphi) = 0$ e $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{Z}$; portanto, φ é um isomorfismo.

- Logo, o grupo desconhecido é isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Sequência de Mayer-Vietoris

- A (co)homologia singular é uma teoria semi-local por causa da *sequência de Mayer-Vietoris*.

Sequência de Mayer-Vietoris

- A (co)homologia singular é uma teoria semi-local por causa da *sequência de Mayer-Vietoris*.
- Seja X um espaço topológico e seja $X = \mathrm{Int}(U) \cup \mathrm{Int}(V)$, sendo $U, V \subset X$. Temos uma sequência exata da seguinte forma:

$$\cdots \longrightarrow H_n(U \cap V) \xrightarrow{\varphi_n} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{\psi_n} H_n(X) \xrightarrow{\beta_n} H_{n-1}(U \cap V) \longrightarrow \cdots,$$

Sequência de Mayer-Vietoris

- A (co)homologia singular é uma teoria semi-local por causa da *sequência de Mayer-Vietoris*.
- Seja X um espaço topológico e seja $X = \mathrm{Int}(U) \cup \mathrm{Int}(V)$, sendo $U, V \subset X$. Temos uma sequência exata da seguinte forma:

$$\cdots \longrightarrow H_n(U \cap V) \xrightarrow{\varphi_n} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{\psi_n} H_n(X) \xrightarrow{\beta_n} H_{n-1}(U \cap V) \longrightarrow \cdots,$$

sendo φ_n o push-forward induzidos por $U \cap V \hookrightarrow U$ e $U \cap V \hookrightarrow V$,

Sequência de Mayer-Vietoris

- A (co)homologia singular é uma teoria semi-local por causa da *sequência de Mayer-Vietoris*.
- Seja X um espaço topológico e seja $X = \mathrm{Int}(U) \cup \mathrm{Int}(V)$, sendo $U, V \subset X$. Temos uma sequência exata da seguinte forma:

$$\cdots \longrightarrow H_n(U \cap V) \xrightarrow{\varphi_n} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{\psi_n} H_n(X) \xrightarrow{\beta_n} H_{n-1}(U \cap V) \longrightarrow \cdots,$$

sendo φ_n o push-forward induzidos por $U \cap V \hookrightarrow U$ e $U \cap V \hookrightarrow V$, sendo ψ_n a diferença entre os push-forwards induzidos por $U \hookrightarrow X$ e $V \hookrightarrow X$

Sequência de Mayer-Vietoris

- A (co)homologia singular é uma teoria semi-local por causa da *sequência de Mayer-Vietoris*.

- Seja X um espaço topológico e seja $X = \mathrm{Int}(U) \cup \mathrm{Int}(V)$, sendo $U, V \subset X$. Temos uma sequência exata da seguinte forma:

$$\cdots \longrightarrow H_n(U \cap V) \xrightarrow{\varphi_n} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{\psi_n} H_n(X) \xrightarrow{\beta_n} H_{n-1}(U \cap V) \longrightarrow \cdots,$$

sendo φ_n o push-forward induzidos por $U \cap V \hookrightarrow U$ e $U \cap V \hookrightarrow V$, sendo ψ_n a diferença entre os push-forwards induzidos por $U \hookrightarrow X$ e $V \hookrightarrow X$ e sendo β_n essencialmente um operador de bordo.

Grupo de Grothendieck

- `Pergunta:` O semigrupo $(\mathrm{Vect}_X, \oplus)$ não é um grupo. Existe uma maneira natural de torná-lo um grupo? Caso isso aconteça, podemos esperar de construir uma teoria semi-local?

Grupo de Grothendieck

- `Pergunta:` O semigrupo $(\mathrm{Vect}_X, \oplus)$ não é um grupo. Existe uma maneira natural de torná-lo um grupo? Caso isso aconteça, podemos esperar de construir uma teoria semi-local?

- Em geral, existe uma "receita" para fazer com que um semigrupo abeliano se torne um grupo.

Grupo de Grothendieck

- `Pergunta:` O semigrupo $(\mathrm{Vect}_X, \oplus)$ não é um grupo. Existe uma maneira natural de torná-lo um grupo? Caso isso aconteça, podemos esperar de construir uma teoria semi-local?
- Em geral, existe uma "receita" para fazer com que um semigrupo abeliano se torne um grupo.
- Trata-se de generalizar o processo que permite construir $(\mathbb{Z}, +)$ a partir de $(\mathbb{N}, +)$.

Grupo de Grothendieck

- Definimos $(\mathbb{Z}, +)$ da seguinte maneira:

Grupo de Grothendieck

- Definimos $(\mathbb{Z}, +)$ da seguinte maneira:
  - como conjunto, $\mathbb{Z} := (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$, sendo $(n, m) \sim (n', m')$ se, e somente se, $n + m' = m + n'$;

Grupo de Grothendieck

- Definimos $(\mathbb{Z}, +)$ da seguinte maneira:
  - como conjunto, $\mathbb{Z} := (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$, sendo $(n, m) \sim (n', m')$ se, e somente se, $n + m' = m + n'$;
  - $[(n, m)] + [(n', m')] := [(n + n', m + m')]$.

Grupo de Grothendieck

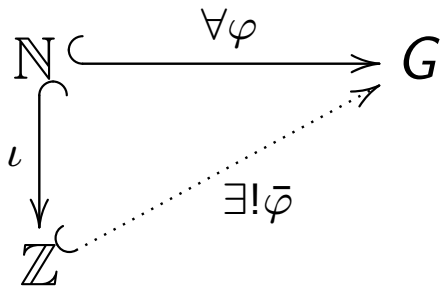
- Definimos $(\mathbb{Z}, +)$ da seguinte maneira:
  - como conjunto, $\mathbb{Z} := (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$, sendo $(n, m) \sim (n', m')$ se, e somente se, $n + m' = m + n'$;
  - $[(n, m)] + [(n', m')] := [(n + n', m + m')]$.
  - Fica definido o mergulho de semigrupos $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z}$, $n \mapsto [(n, 0)]$.

Grupo de Grothendieck

- Definimos $(\mathbb{Z}, +)$ da seguinte maneira:
  - como conjunto, $\mathbb{Z} := (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$, sendo $(n, m) \sim (n', m')$ se, e somente se, $n + m' = m + n'$;
  - $[(n, m)] + [(n', m')] := [(n + n', m + m')]$.
  - Fica definido o mergulho de semigrupos $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z}$, $n \mapsto [(n, 0)]$.
- Seja $(S, +)$ um semigrupo abeliano. Queremos definir o grupo $(K(S), +)$ de modo análogo. Todavia, a relação definida anteriormente não é de equivalência em geral (por causa da transitividade).

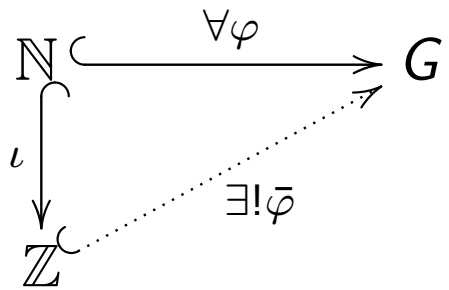
Grupo de Grothendieck

- No caso de $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, vale a seguinte propriedade universal: temos o mergulho de semigrupos $\iota\colon \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z}$, $n \mapsto [(n,0)]$, e, dados um grupo G e um mergulho de semigrupos $\varphi\colon \mathbb{N} \hookrightarrow G$, existe um único mergulho de grupos $\bar{\varphi}\colon \mathbb{Z} \to G$ tal que $\varphi = \bar{\varphi} \circ \iota$.



Grupo de Grothendieck

- No caso de $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, vale a seguinte propriedade universal: temos o mergulho de semigrupos $\iota\colon \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z}$, $n \mapsto [(n,0)]$, e, dados um grupo G e um mergulho de semigrupos $\varphi\colon \mathbb{N} \hookrightarrow G$, existe um único mergulho de grupos $\bar{\varphi}\colon \mathbb{Z} \to G$ tal que $\varphi = \bar{\varphi} \circ \iota$.



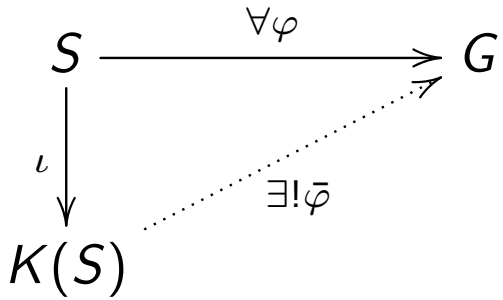
- Isso significa que $\mathbb{Z}$ é a *mínima extensão* de $\mathbb{N}$ a um grupo.

Grupo de Grothendieck

- Em geral, não existe um mergulho de um semigrupo abeliano S em um grupo, pois em S podem não valer as leis de cancelamento.

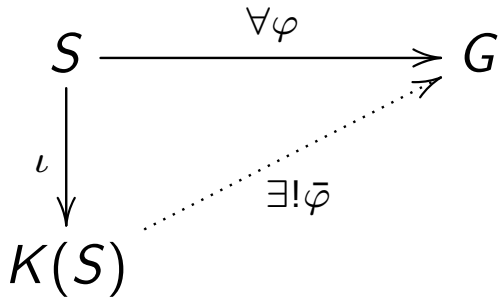
Grupo de Grothendieck

- Em geral, não existe um mergulho de um semigrupo abeliano S em um grupo, pois em S podem não valer as leis de cancelamento.
- Portanto, temos que eliminar a hipótese da injetividade.



Grupo de Grothendieck

- Em geral, não existe um mergulho de um semigrupo abeliano S em um grupo, pois em S podem não valer as leis de cancelamento.
- Portanto, temos que eliminar a hipótese da injetividade.



- O par $(K(S), \iota)$, sendo $K(S)$ um grupo abeliano, é dito *Grupo de Grothendiek* induzido por S.

Grupo de Grothendieck

- É fácil verificar que a seguinte relação em $S \times S$ é de equivalência:

$$(s,t) \sim (s',t') \overset{\text{Def.}}{\iff} \exists u \in S : s + t' + u = t + s' + u.$$

Grupo de Grothendieck

- É fácil verificar que a seguinte relação em $S \times S$ é de equivalência:

$$(s,t) \sim (s',t') \overset{\text{Def.}}{\iff} \exists u \in S : s + t' + u = t + s' + u.$$

- Esta definição coincide com a anterior quando valerem as *leis de cancelamento* no semigrupo $(S,+)$, como acontece no caso de $(\mathbb{N},+)$.

Grupo de Grothendieck

- É fácil verificar que a seguinte relação em $S \times S$ é de equivalência:

$$(s,t) \sim (s',t') \overset{\text{Def.}}{\iff} \exists u \in S : s + t' + u = t + s' + u.$$

- Esta definição coincide com a anterior quando valerem as *leis de cancelamento* no semigrupo $(S,+)$, como acontece no caso de $(\mathbb{N},+)$.

- Como conjunto, definimos $K(S) := (S \times S)/\sim$.

Grupo de Grothendieck

- Definimos $[(s,t)] + [(s',t')] := [(s+s', t+t')]$.

Grupo de Grothendieck

- Definimos $[(s,t)] + [(s',t')] := [(s+s', t+t')]$.
- Se S for um monoide, o zero de $K(S)$ é $[(0,0)]$. Em geral, é a classe $[(s,s)]$ para qualquer $s \in S$.

Grupo de Grothendieck

- Definimos $[(s,t)] + [(s',t')] := [(s+s', t+t')]$.
- Se S for um monoide, o zero de $K(S)$ é $[(0,0)]$. Em geral, é a classe $[(s,s)]$ para qualquer $s \in S$.
- É fácil verificar que $-[(s,t)] = [(t,s)]$.

Grupo de Grothendieck

- Definimos $[(s,t)] + [(s',t')] := [(s+s', t+t')]$.
- Se S for um monoide, o zero de $K(S)$ é $[(0,0)]$. Em geral, é a classe $[(s,s)]$ para qualquer $s \in S$.
- É fácil verificar que $-[(s,t)] = [(t,s)]$.
- Se S for um monoide, fica definido o *morfismo* (não necessariamente mergulho) de semigrupos $\iota\colon S \to K(S)$, $s \mapsto [(s,0)]$. Em geral, podemos definir $\iota(s) := [(s+s, s)]$.

Grupo de Grothendieck

- Temos que $\iota(s) = \iota(s')$ se, e somente se, existe $u \in S$ tal que $s + u = s' + u$. Portanto, ι é injetor se, e somente se, valem as leis de cancelamento.

Grupo de Grothendieck

- Temos que $\iota(s) = \iota(s')$ se, e somente se, existe $u \in S$ tal que $s + u = s' + u$. Portanto, ι é injetor se, e somente se, valem as leis de cancelamento.

- `Exemplo:` $K(\mathbb{N}, +) = K(\mathbb{N}^*, +) = (\mathbb{Z}, +)$.

Grupo de Grothendieck

- Temos que $\iota(s) = \iota(s')$ se, e somente se, existe $u \in S$ tal que $s + u = s' + u$. Portanto, ι é injetor se, e somente se, valem as leis de cancelamento.
- `Exemplo:` $K(\mathbb{N}, +) = K(\mathbb{N}^*, +) = (\mathbb{Z}, +)$.
- `Exemplo:` $K(\mathbb{N}^*, \cdot) = (\mathbb{Q}^+, \cdot)$.

Grupo de Grothendieck

- Temos que $\iota(s) = \iota(s')$ se, e somente se, existe $u \in S$ tal que $s + u = s' + u$. Portanto, ι é injetor se, e somente se, valem as leis de cancelamento.
- `Exemplo:` $K(\mathbb{N}, +) = K(\mathbb{N}^*, +) = (\mathbb{Z}, +)$.
- `Exemplo:` $K(\mathbb{N}^*, \cdot) = (\mathbb{Q}^+, \cdot)$.
- `Exemplo:` $K(\mathbb{N}, \cdot) = 0$. De fato, $[(n, m)] = [(0, 0)]$ para todos $n, m \in \mathbb{N}$.

Grupo de Grothendieck

- Temos que $\iota(s) = \iota(s')$ se, e somente se, existe $u \in S$ tal que $s + u = s' + u$. Portanto, ι é injetor se, e somente se, valem as leis de cancelamento.
- `Exemplo:` $K(\mathbb{N}, +) = K(\mathbb{N}^*, +) = (\mathbb{Z}, +)$.
- `Exemplo:` $K(\mathbb{N}^*, \cdot) = (\mathbb{Q}^+, \cdot)$.
- `Exemplo:` $K(\mathbb{N}, \cdot) = 0$. De fato, $[(n, m)] = [(0, 0)]$ para todos $n, m \in \mathbb{N}$. Portanto, $\iota\colon \mathbb{N} \to 0$ é o morfismo nulo, bem longe de ser injetor.

Grupo de K-teoria

- Seja X um espaço topológico compacto (de Hausdorff). Definimos:

$$K(X) := K(\mathrm{Vect}_X, \oplus).$$

Grupo de K-teoria

- Seja X um espaço topológico compacto (de Hausdorff). Definimos:

$$K(X) := K(\mathrm{Vect}_X, \oplus).$$

- Um elemento de $K(X)$ é uma classe $\big[([E],[F])\big]$, sendo $[E],[F] \in \mathrm{Vect}_X$.

Grupo de K-teoria

- Seja X um espaço topológico compacto (de Hausdorff). Definimos:

$$K(X) := K(\mathrm{Vect}_X, \oplus).$$

- Um elemento de $K(X)$ é uma classe $\big[([E],[F])\big]$, sendo $[E],[F] \in \mathrm{Vect}_X$.

- Fica definido o morfismo $\iota\colon \mathrm{Vect}_X \to K(X)$, $[E] \mapsto \big[([E],[0])\big]$, não injetor em geral.

Grupo de K-teoria

- Seja X um espaço topológico compacto (de Hausdorff). Definimos:

$$K(X) := K(\mathrm{Vect}_X, \oplus).$$

- Um elemento de $K(X)$ é uma classe $\big[([E],[F])\big]$, sendo $[E],[F] \in \mathrm{Vect}_X$.

- Fica definido o morfismo $\iota\colon \mathrm{Vect}_X \to K(X)$, $[E] \mapsto \big[([E],[0])\big]$, não injetor em geral.

- Temos que $\iota([E]) = \iota([E'])$ se, e somente se, existe $[G] \in \mathrm{Vect}_X$ tal que $[E] \oplus [G] = [E'] \oplus [G]$, ou seja, $E \oplus G \simeq E' \oplus G$.

Grupo de K-teoria

- Definimos a seguinte relação de equivalência em Vect_X:

$$[E] \sim [E'] \overset{\text{Def.}}{\iff} \exists [G] \in \mathrm{Vect}_X : [E] \oplus [G] = [E'] \oplus [G].$$

Grupo de K-teoria

- Definimos a seguinte relação de equivalência em Vect_X:

$$[E] \sim [E'] \overset{\text{Def.}}{\iff} \exists [G] \in \mathrm{Vect}_X : [E] \oplus [G] = [E'] \oplus [G].$$

- Temos que $\iota([E]) = \iota([E'])$ se, e somente se, $[[E]] = [[E']]$.

Grupo de K-teoria

- Definimos a seguinte relação de equivalência em Vect_X:

$$[E] \sim [E'] \overset{\text{Def.}}{\iff} \exists [G] \in \mathrm{Vect}_X : [E] \oplus [G] = [E'] \oplus [G].$$

- Temos que $\iota([E]) = \iota([E'])$ se, e somente se, $[[E]] = [[E']]$.
- $\big[([E],[F])\big] = \big[([E],[0])\big] - \big[([0],[F])\big] = \iota([E]) - \iota([F])$.

Grupo de K-teoria

- Definimos a seguinte relação de equivalência em Vect_X:

$$[E] \sim [E'] \overset{\text{Def.}}{\iff} \exists [G] \in \mathrm{Vect}_X : [E] \oplus [G] = [E'] \oplus [G].$$

- Temos que $\iota([E]) = \iota([E'])$ se, e somente se, $[[E]] = [[E']]$.
- $\big[([E],[F])\big] = \big[([E],[0])\big] - \big[([0],[F])\big] = \iota([E]) - \iota([F])$.
- Portanto, podemos escrever $\big[([E],[F])\big] = [[E]] - [[F]]$, identificando $\iota([E])$ com $[[E]]$.

Grupo de K-teoria

- Por simplicidade, usamos a notação $E - F$.

Grupo de K-teoria

- Por simplicidade, usamos a notação $E - F$.
- Desta maneira, um elemento de $K(X)$ é uma diferença formal de fibrados vetoriais $E - F$.

Grupo de K-teoria

- Por simplicidade, usamos a notação $E - F$.
- Desta maneira, um elemento de $K(X)$ é uma diferença formal de fibrados vetoriais $E - F$.
- Temos que $E = F$ em $K(X)$ se, e somente se, existe G tal que $E \oplus G \simeq F \oplus G$. Pode-se mostrar que é suficiente supor que G seja *trivial*.

Grupo de K-teoria

- Por simplicidade, usamos a notação $E - F$.
- Desta maneira, um elemento de $K(X)$ é uma diferença formal de fibrados vetoriais $E - F$.
- Temos que $E = F$ em $K(X)$ se, e somente se, existe G tal que $E \oplus G \simeq F \oplus G$. Pode-se mostrar que é suficiente supor que G seja *trivial*.
- Por isso, trata-se de uma relação de equivalência mais fraca do que a existência de um isomorfismo.