EXAME DE QUALIFICAÇÃO EM ÁLGEBRA LINEAR (04/03/2015)

Nome:

1. (1.0) Seja W um subespaço de $(\mathbb{R}^4)^*$ formado pelos funcionais f tais que $Nuc(f)$ contém os vetores

$$(1,0,3,-2) \text{ e } (0,1,3,0).$$

Ache uma base de W.

2. (2.5) Seja $T:\mathbb{C}^4\to\mathbb{C}^4$ o operador linear entre $\mathbb{C}$-espaços definido por

$$[T]_{Can}=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

onde $Can=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ é a base canônica de $\mathbb{C}^4$.

a) Encontre uma base B de $\mathbb{C}^4$ tal que $[T]_B$ esteja na forma canônica de Jordan. Determine $[T]_B$ também.

b) Seja $G:\mathbb{C}^4\to\mathbb{C}^4$ um operador linear tal que

$$p_G(x)=p_T(x).$$

Suponha que $[G]_J$ está na forma canônica de Jordan para alguma base J de $\mathbb{C}^4$. Determine todas as possibilidades para a matriz $[G]_J$ (a menos de uma semelhança de matrizes).

3. (1.5) Considere o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $P_3(\mathbb{R})$ munido do produto interno

$$\langle p(x),q(x)\rangle=\int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

Determine o polinômio de grau 1 que melhor se aproxima de x^3.

4. (1.5) Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita e com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Se $T\in L(V,V)$ é um operador normal mostre que:

a) $Nuc(T)=Nuc(T^*)$.

b) $Im(T)=Im(T^*)$.

5. (3.5) Seja $A\in M_3(\mathbb{R})$ definida por

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & -2\\ 4 & 5 & 2\\ -2 & 2 & 8\end{pmatrix}.$$

Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno canônico e denote por $Can=\{e_1,e_2,e_3\}$ a base canônica.

a) Mostre que o operador $T\in L(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ definido pela matriz $[T]_{Can}=A$ é autoadjunto.

b) Encontre uma base ortonormal B' de $\mathbb{R}^3$ tal que $[T]_{B'}$ é diagonal.

c) Encontre $P\in M_3(\mathbb{R})$ invertível tal que P^tAP é diagonal.

d) Prove que o operador

$$T^2+T^3+T^5+T^7+T^{11}+T^{13}+T^{17}$$

está no subespaço gerado por $\{Id,T,T^2\}$.

e) O operador T é invertível?

f) Encontre $f\in Bil_s(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ tal que

$$[f]_{Can}=A.$$

Calcule $f((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3))$.

g) Encontre uma base ortonormal $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $[f]_B$ é diagonal.

h) Seja q a forma quadrática associada a f. Calcule

$$q(x_1, x_2, x_3) \quad \text{e} \quad q(x_1'v_1 + x_2'v_2 + x_3'v_3),$$

onde $x_1', x_2', x_3' \in \mathbb{R}$.

i) Descreva geometricamente o conjunto dos pontos $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$5x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3 = 9.$$

NOTAÇÕES

- $(\mathbb{R}^4)^*$: espaço dual do $\mathbb{R}$-espaço $\mathbb{R}^4$.
- $p_T(x)$: polinômio característico do operador T.
- $[T]_B$: matriz do operador linear T com relação a base B.
- $\mathbb{K}$: corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- $P_n(\mathbb{K})$: conjunto dos polinômios de grau $\leq n$ com coeficientes em $\mathbb{K}$.
- $M_n(\mathbb{K})$: matrizes $n \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$.
- T^*: operador adjunto de T.
- Id: operador identidade.
- $Bil_s(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$: conjunto das formas bilineares simétricas de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}$.
- Se $f \in Bil_s(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ então $[f]_B$ é matriz de f com relação a base B.