Exame de Qualificação de Doutorado
Análise Funcional

DM-UFSCar — agosto/2011

Obs.: Selecione apenas três entre as quatro questões abaixo, indicando claramente quais as selecionadas. $\mathcal{N}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{H}$ denotam espaços normados, de Banach e Hilbert, respectivamente, e seus duais serão $\mathcal{N}^*, \mathcal{B}^*, \mathcal{H}^*$.

1. Sejam X um espaço compacto de Hausdorff e $\psi_n, \psi \in \mathrm{C}(X)$.

   (a) Usando o Teorema de Riesz-Markov e verificando que para cada $t \in X$, $\delta_t : \mathrm{C}(X) \to \mathbb{F}$, $\delta_t \phi = \phi(t)$, para toda $\phi \in \mathrm{C}(X)$, é um elemento de $\mathrm{C}(X)^*$, mostre que se $\int \psi_n d\mu \to \int \psi d\mu$, para toda $\mu \in M(X)$, então $\sup_n \|\psi_n\| < \infty$ e $\psi_n \to \psi$ pontualmente.

   (b) A partir do Teorema da Convergência Dominada, mostre que vale a recíproca do resultado no item (a), ou seja, se $\sup_n \|\psi_n\| < \infty$ e $\psi_n \to \psi$ pontualmente, então $\int \psi_n d\mu \to \int \psi d\mu$, $\forall \mu \in M(X)$.

2. Sejam $\mathcal{N}$ um espaço normado não-trivial. Mostre que:

   (i) Se $0 \neq \xi \in \mathcal{N}$, então existe $f \in \mathcal{N}^*$ com $f(\xi) = \|\xi\|$ e $\|f\| = 1$.

   (ii) Se $\eta \neq \xi$ são elementos de $\mathcal{N}$, então existe $f \in \mathcal{N}^*$ com $f(\xi) \neq f(\eta)$.

   (iii) Se $\xi \in \mathcal{N}$ satisfaz $f(\xi) = 0$, $\forall f \in \mathcal{N}^*$, então $\xi = 0$.

   (iv) Se $\xi \in \mathcal{N}$, então

   $$\|\xi\| = \sup_{0 \neq f \in \mathcal{N}^*} \frac{|f(\xi)|}{\|f\|} = \max_{0 \neq f \in \mathcal{N}^*} \frac{|f(\xi)|}{\|f\|}$$

3. (a) Use a desigualdade de Bessel para demonstrar o Lema de Riemann-Lebesgue, ou seja,

   $$\lim_{n \to \infty} \int_0^{2\pi} e^{-int} \psi(t)\, dt = 0, \quad \forall \psi \in \mathrm{L}^1[0, 2\pi].$$

   (b) Dê condições suficientes sobre o núcleo $K(t, s)$ para que o operador linear $T_K : \mathrm{L}^2[0,1] \to \mathrm{L}^2[0,1]$, com ação

   $$(T_K \psi)(t) = \int_{[0,1]} K(t,s) \psi(s)\, ds, \quad \psi \in \mathrm{L}^2[0,1],$$

   seja de Hilbert-Schmidt.

4. Seja $T \in \mathrm{B}(\mathcal{H})$ um operador auto-adjunto. Mostre que:
   (a) Se $T^n = 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então $T = 0$.
   (b) O espectro residual de T é vazio.
   (c) Se T é compacto, então $-\|T\|$ ou $\|T\|$ é um autovalor de T.