EXAME DE QUALIFICAÇÃO - ANÁLISE - MARÇO 2015

ANÁLISE FUNCIONAL

Prove todas as suas afirmações. Defina os conceitos e enuncie os teoremas que utiliza.

1ª Questão: (a) Sejam E e F dois espaços de Banach e seja $B : E \times F \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear satisfazendo:

(i) Para cada $x \in E$ fixo, a aplicação $y \to B(x, y)$ é contínua.

(ii) Para cada $y \in F$ fixo, a aplicação $x \to B(x, y)$ é contínua.

Prove que existe uma constante $C \geq 0$ tal que

$$|B(x, y)| \leq C\|x\|_E\|y\|_F. \quad \forall x \in E, \quad \forall y \in F.$$

Sugestão: Defina um operador linear $T : E \to F^*$ e prove que T é limitado.
Notação: F^* é o espaço dual de F.

2ª Questão: (a) Sejam E um espaço de Banach e $\mathcal{L}(E)$ o conjunto dos operadores lineares limitados definidos em E a valores em E. Se $\|T\| < 1$ então mostre que $(I - T)$ é invertível e

$$(I - T)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} T^j \quad \text{(convergência uniforme)}.$$

Aqui I é o operador identidade.

(b) Use (a) para mostrar que o subconjunto $\mathcal{J}(E)$ de $\mathcal{L}(E)$ de operadores invertíveis em $\mathcal{L}(E)$ é um subconjunto aberto.

(c) Mostre que a aplicação $\mathcal{J}(E) \ni T \to T^{-1} \in \mathcal{J}(E)$ é contínua.

Escolha uma e somente uma das duas questões abaixo:

3ª **Questão:** Seja E um espaço normado e seja $x_0 \neq 0$ um elemento de E. Prove que existe um funcional linear limitado f definido em E tal que $\|f\|_{E^*} = 1$ e $f(x_0) = \|x_0\|_E$. **Notação:** E^* é o espaço dual de E.

4ª **Questão:** Sejam $(e_n)_{n\geq 1}$ uma base ortonormal num espaço de Hilbert separável H e $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência limitada em $\mathbb{R}$. Considere o operador linear $T \in \mathcal{L}(H)$ definido por $Te_n = a_n e_n$, onde $\mathcal{L}(H)$ o conjunto dos operadores lineares limitados definidos em H a valores em H. Mostre que T é compacto se, e somente se, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.