UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CCET - CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

O NÚMERO DE MILNOR DE UMA SINGULARIDADE ISOLADA

Bruna Oréfice

São Carlos - SP
novembro de 2011

O NÚMERO DE MILNOR DE UMA SINGULARIDADE ISOLADA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CCET - CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

O NÚMERO DE MILNOR DE UMA SINGULARIDADE ISOLADA

Bruna Oréfice
Orientador: Prof. Dr. João Nivaldo Tomazella
Co-orientador: Prof. Dr. Juan José Nuño Ballesteros.

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática.

São Carlos - SP
29 de novembro de 2011

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária/UFSCar

O66nm

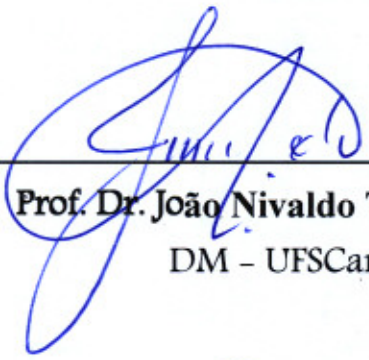
Oréfice, Bruna.
O número de Milnor de uma singularidade isolada / Bruna Oréfice. -- São Carlos : UFSCar, 2011.
72 f.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2011.

1. Geometria - topologia. 2. Número de Milnor. 3. Bruce-Roberts, Número de. 4. Variedades determinantais. 5. Hipersuperfícies. I. Título.

CDD: 516 (20ª)

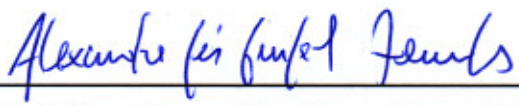
Banca Examinadora:



Prof. Dr. João Nivaldo Tomazella
DM – UFSCar



Prof. Dr. Juan Jose Nuño Ballesteros
Universidade de Valência



Prof. Dr. Alexandre Cesar Gurgel Fernandes
UFC



Profa. Dra. Maria Aparecida Soares Ruas
ICMC – USP



Prof. Dr. Washington Luiz Marar
ICMC – USP

Agradecimentos

A Deus, pela vida e pela saúde para realizar mais este sonho.

À minha família, pelo incentivo e pelo apoio. Em especial, à minha mãe, Claudete, por estar sempre presente nos momentos felizes e nos momentos de crise. Aos meus irmãos, Homero e Patrícia, pelo incentivo e pelo amor incondicional.

Ao meu noivo, Fabrício, pelo amor, apoio, companheirismo e paciência. Pelos abraços nos momentos de desânimo e pela alegria à cada conquista.

Ao meu amigo e orientador, Tomazella, por toda a atenção dedicada à minha formação. Obrigada pela excelente orientação deste trabalho, pelas palavras de incentivo e por todo o apoio.

Ao também meu amigo e co-orientador, Juan, pela paciência e atenção na resolução das minhas dúvidas e por todas as sugestões oferecidas ao desenvolvimento deste trabalho. Obrigada, também, pela sua acolhida em Valéncia, oferecendo todo o suporte necessário.

Aos colegas de pós-graduação da UFSCar pela amizade e pelo companheirismo que desenvolvemos nesses anos. Obrigada por tudo o que aprendemos juntos.

Ao professores e funcionários do Departamento de Matemática, pela formação profissional excelente que recebi. Obrigada, também, pelo carinho e pela atenção a mim dedicados enquanto estudante desta casa.

Aos professores, funcionários e colegas da Universidad de Valéncia, pelo carinho e pela atenção com que me receberam para os meses de pesquisa.

Ao grupo de singularidades de São Carlos, pelo suporte oferecido ao desenvolvimento deste trabalho.

Ao professor Ton Marar, pela sugestão da aplicação do lema 1.21 à demonstração do teorema 4.12.

À FAPESP, processo 2008/53944-8, e à CAPES, processo BEX 2820/10-2, pelo suporte financeiro.

Resumo

Dados $(X,0) \subset (\mathbb{C}^N,0)$ um germe de hipersuperfície quase homogêneo com singularidade isolada e $f : (\mathbb{C}^N,0) \to \mathbb{C}$ um germe de função finitamente determinado com respeito a X, mostramos que $\mu_{BR}(f,X) = \mu(f) + \mu(X,f)$, onde $\mu(f)$ e $\mu(X,f)$ denotam o número de Milnor de f e da fibra $X \cap f^{-1}(0)$, respectivamente, e $\mu_{BR}(f,X)$ é o número de Bruce-Roberts de f com respeito a X. Mostramos que a variedade logarítmica característica $LC(X)$ é Cohen-Macaulay e obtemos relações entre o número de Bruce-Roberts e a obstrução de Euler.

Dado $F : (\mathbb{C}^N,0) \to M_{m,n}(\mathbb{C})$ um germe de função holomorfa, seja $(X,0)$ a singularidade determinantal isolada dada por $X = F^{-1}(M^s_{m,n}(\mathbb{C}))$ onde $M^s_{m,n}(\mathbb{C})$ é o conjunto das matrizes complexas com posto menor que s, com s um número inteiro entre 0 e $\min\{m,n\}$ tal que $N < (m-s+2)(n-s+2)$, definimos a característica de Euler evanescente de $(X,0)$ e o número de Milnor de um germe de função holomorfa com uma singularidade isolada em X, $f : (X,0) \to \mathbb{C}$.

Abstract

Given $(X,0) \subset (\mathbb{C}^N,0)$ a weighted homogeneous germ of hypersurface with isolated singularity and $f : (\mathbb{C}^N,0) \to \mathbb{C}$ a germ of function finitely determined with respect to X, we show that $\mu_{BR}(f,X) = \mu(f) + \mu(X,f)$, where $\mu(f)$ and $\mu(X,f)$ denote the Milnor numbers of f and of the fiber $X \cap f^{-1}(0)$, respectively, and $\mu_{BR}(f,X)$ is the Bruce-Roberts number of f with respect to X. We show that the logarithmic characteristic subvariety, $LC(X)$, is Cohen-Macaulay and we get relations between the Bruce-Roberts number and the Euler obstruction.

Given $F : (\mathbb{C}^N,0) \to M_{m,n}(\mathbb{C})$ a holomorphic function germ, let $(X,0)$ be the isolated determinantal singularity given by $X = F^{-1}(M^s_{m,n}(\mathbb{C}))$ where $M^s_{m,n}(\mathbb{C})$ is the set of the complex matrices with rank less then s, with s an integer number between 0 and $\min\{m,n\}$ such that $N < (m-s+2)(n-s+2)$, we will define the vanishing Euler characteristic of $(X,0)$ and the Milnor number of a holomorphic function germ with an isolated singularity at X, $f : (X,0) \to \mathbb{C}$.

Sumário

Introdução **v**

1 Pré-requisitos **1**

1.1 Germes de Função e Germes de Variedade 1
1.2 Equivalência de Germes 2
1.3 Álgebra Comutativa 2
1.4 Deformações e suavizações 5
1.5 Estratificação de Whitney e Transversalidade 5
1.6 A característica de Euler 7
1.7 O número de Milnor 8
1.8 Aplicações Finitas e Grau de Aplicação 10
1.9 Multiplicidades polares e obstrução de Euler 11

2 O número de Bruce-Roberts **13**

2.1 Campos de vetores tangentes a uma variedade 13
2.2 O número de Bruce-Roberts 17
2.3 Relação entre o número de Bruce-Roberts e o número de Milnor . . . 18
2.4 O caso quase homogêneo 23
2.5 O número de Bruce-Roberts e a obstrução de Euler 28

3 Teoria de Morse **32**

3.1 Teoria de Morse Clássica 32
3.2 Teoria de Morse Generalizada 33

4 Variedades determinantais e suas suavizações **38**

4.1 Variedades determinantais 38
4.2 Suavização de uma variedade determinantal 42

5 Variedades determinantais de codimensão 2 em $\mathbb{C}^4$ 46

5.1 O número de Milnor de uma variedade de codimensão 2 em $\mathbb{C}^4$ 47

5.2 O número de Milnor de uma função em uma variedade determinantal 52

6 A característica de Euler evanescente de uma SDI 56

6.1 A característica de Euler evanescente do conjunto dos pontos singulares de uma aplicação 62

6.2 Relações com multiplicidades polares e obstrução de Euler 63

6.3 O número de Milnor de uma função em uma SDI 65

Referências Bibliográficas 69

Introdução

Um importante invariante em Teoria de Singularidades é o número de Milnor (quando definido) de um germe de função ou de variedade analítica com singularidade isolada. Destacamos que este número é um invariante topológico da singularidade em questão, mais precisamente, se dois germes de hipersuperfícies complexas com singularidades isoladas são homeomorfos, então possuem o mesmo número de Milnor. Também, segundo [30], para $(n \neq 3)$, se uma família de hipersuperfícies tem número de Milnor constante então as hipersuperfícies da família são topologicamente equivalentes. Algumas definições e propriedades para este número podem ser encontradas no célebre livro de Milnor [36] para germes de funções, em [32] para germes de variedades que são Interseção Completa com Singularidade Isolada (ICIS), em [7] para germes de curvas. A busca por generalizações destas definições e propriedades para germes que não são curvas ou ICIS é um objetivo atual em teoria de Singularidades.

Bruce e Roberts, em [6], estendem a definição de número de Milnor, $\mu(f)$, de um germe de função $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to \mathbb{C}$. Dado um germe de variedade $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$, eles definem o número de Milnor de f relativo. Este número, o qual chamamos de número de Bruce-Roberts de f com respeito a X, é definido por $\mu_{BR}(f, X) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_n/df(\theta_X)$, onde θ_X é o módulo formado pelos campos de vetores em $\mathbb{C}^n$ que são tangentes a X. Se $X = \emptyset$ então $\mu_{BR}(f, X) = \mu(f)$. O número de Bruce-Roberts está relacionado a algumas propriedades geométricas de f e de X. Por exemplo, se $\mathcal{R}_X$ é o grupo formado pelos germes de difeomorfismos de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^n$ que preservam X, então $\mu_{BR}(f, X)$ é finito se, e somente se, f é finitamente $\mathcal{R}_X$-determinado. Nesse caso, $\mu_{BR}(f, X)$ é igual à codimensão da órbita de f pela ação de $\mathcal{R}_X$ em $\mathcal{O}_n$. No mesmo artigo, Bruce e Roberts definem a variedade logarítmica característica de X, $LC(X)$, e mostram importantes propriedades de $\mu_{BR}(f, X)$ quando $LC(X)$ é Cohen-Macaulay. Se X é uma curva plana eles mostram que $LC(X)$ é Cohen-Macaulay, quando X é uma hipersuperfície o problema está ainda em aberto.

No capítulo 2 deste trabalho, obtemos, sob as hipóteses de $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$

ser um germe de hipersuperfície quase homogêneo com singularidade isolada e $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to \mathbb{C}$ ser um germe de função finitamente $\mathcal{R}_X$-determinado, uma fórmula que relaciona o número de Bruce e Roberts de f com respeito a X ao número de Milnor de f e ao número de Milnor da ICIS $X \cap f^{-1}(0)$. De fato, mostramos que

$$\mu_{BR}(f, X) = \mu(f) + \mu(X \cap f^{-1}(0), 0).$$

Ainda neste capítulo, supondo também que o módulo θ_X é um módulo livre gerado por campos vetoriais quase homogêneos e que o germe de função f é consistente com X, exibimos fórmulas para o cálculo de $\mu_{BR}(f, X)$ em termos dos pesos e das filtrações envolvidas. Mostramos que se X é uma hipersuperfície quase homogênea com singularidade isolada, então $LC(X)$ é Cohen-Macaulay e, como consequência, por resultado de Grulha em [10], é mostrado uma relação entre $\mu_{BR}(f, X)$, a obstrução de Euler X, e a obstrução de Euler de f com respeito a X. Estes resultados estão reunidos no artigo [40].

No capítulo 3, apresentamos os resultados de teoria de Morse. Começamos relembrando os célebres resultados demonstrados por Milnor em [35]. Apesar de ser natural pensar em aplicar teoria de Morse para germes de função, não temos conhecimento de referências que formalizem tais resultados. Então, recorrendo aos resultados de Palais e Smale em [43], mostramos que dado um germe de variedade analítica suave $(X, 0)$ e uma função $f : X \to \mathbb{C}$ com pontos críticos não degenerados, existe um representante X de $(X, 0)$ tal que podemos aplicar teoria de Morse a $f : X \to \mathbb{C}$.

No capítulo 4, trabalhamos com germes de variedades determinantais, isto é, germes de variedades dados como zeros de menores de matrizes. Esse tipo de germe aparece com frequência em teoria de singularidades, é o caso dos ideais de Fitting e do conjunto dos pontos singulares de uma aplicação $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$. Nesse capítulo, apresentamos uma classe especial de variedade determinantal, o qual chamamos variedade determinantal isolada e denotamos por SDI; exibimos uma suavização de uma SDI X através de uma deformação da aplicação F que a define. Isto é, se $(X, 0)$ é a SDI dada por $F^{-1}(M^s_{m,n})$ com $F : (\mathbb{C}^N, 0) \to M_{m,n}(\mathbb{C})$, denotamos $X_A = (F + A)^{-1}(M^s_{m,n})$ onde $(F + A)(x) = F(x) + A$, mostramos que existe um aberto de Zariski W em $M_{m,n}(\mathbb{C})$ tal que X_A é suave para toda matriz $A \in W$.

No capítulo 5, definimos o número de Milnor de germes de variedade determinantal de codimensão 2 em $\mathbb{C}^4$ por $\mu(X, 0) = \#\Sigma p|_{X_t} - \mu(X \cap p^{-1}(0), 0)$ com $X_t = X_{tA}$ para alguma matriz A no aberto de Zariski W definido no parágrafo ante-

rior, $p : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}$ uma projeção linear genérica, $\#\Sigma p|_{X_t}$ o número de pontos críticos de p em X_t e $\mu(X \cap p^{-1}(0), 0)$ o número de Milnor da curva $(X \cap p^{-1}(0), 0)$ como descrito em [7]. Recorrendo aos resultados do capítulo 3, mostramos que este número está bem definido e exibimos algumas de suas propriedades. Definimos também o número de Milnor de um germe de função f com singularidade isolada em $(X, 0)$.

No capítulo 6, generalizamos os resultados mostrados no capítulo 5 para uma SDI qualquer. Começamos pela demonstração de que existe um aberto de Zariski W em $M_{m,n}(\mathbb{C})$ tal que X_A é suave para toda matriz A em W e a característica de Euler de X_A, $\chi(X_A)$, é independente de $A \in W$. Definimos, então a característica de Euler evanescente de uma SDI $(X, 0)$ por $\nu(X, 0) = (-1)^{\dim X}(\chi(X_A) - 1)$. Verificamos que alguns resultados conhecidos para ICIS continuam verdadeiros para uma SDI e mostramos que, se $\dim X = 1$, $\nu(X, 0)$ é igual ao número de Milnor de $(X, 0)$ definido por Buchweitz e Greuel em [7]. Definimos, também, o número de Milnor de um germe de função f com uma singularidade isolada em $(X, 0)$ e mostramos que vale uma fórmula como a de Lê Greuel para ICIS, ou seja, mostramos que $\nu(X, 0) = \mu(f) - \nu(X \cap f^{-1}(0), 0)$.

Observamos que, de maneira independente, Pereira e Ruas, em [44], e Damon e Pike, em [9], também trabalham com o número de Milnor para germes de variedades determinantais.

Capítulo 1

Pré-requisitos

1.1 Germes de Função e Germes de Variedade

No decorrer deste trabalho, consideramos propriedades locais de funções holomorfas, $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$, onde $\mathbb{C}$ é o corpo dos números complexos. Para tanto, estudamos os germes de função em um ponto $a \in \mathbb{C}^n$, ou seja, as classes de equivalência pela seguinte relação no conjunto das funções diferenciáveis de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^p$: f é equivalente a g se existe uma vizinhança U de a em $\mathbb{C}^n$ onde f e g coincidem. Denotamos o germe cujo representante é a função f por $f : (\mathbb{C}^n, a) \to \mathbb{C}^p$ e denotamos o conjunto de todos os germes em a de função diferenciável de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^p$ por $\mathcal{O}^p_{(n,a)}$. No caso em que $p = 1$, escrevemos simplesmente $\mathcal{O}_{(n,a)}$. Se, além disso, $a = 0$, escrevemos $\mathcal{O}_n$.

Com as operações usuais de soma e multiplicação das funções representante, $\mathcal{O}_{(n,a)}$ é um anel comutativo com elemento unidade, noetheriano e local, cujo ideal maximal, $\mathcal{M}_n$, é o conjunto dos germes que levam $a \in \mathbb{C}^n$ no zero de $\mathbb{C}$.

Dado um germe $f = (f_1, \ldots, f_p) \in \mathcal{O}^p_n$, denotamos por $Jf(x) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)$ a matriz jacobiana de f em x, onde $(x_1, ..., x_n)$ é um sistema de coordenadas em $\mathbb{C}^n$. Se a matriz $Jf(x)$ não tem posto máximo, dizemos x é um ponto singular de f. Se existe uma vizinhança de x na qual nenhum outro ponto é um ponto singular de f, então x é uma singularidade isolada de f.

Trabalhamos, também, com germes de variedade. Consideramos, no conjunto de todas as variedades analíticas contidas em $\mathbb{C}^n$, a seguinte relação de equivalência: V e W são equivalentes se existe uma vizinhança U de 0 em $\mathbb{C}^n$ de modo que $U \cap V = U \cap W$. Os germes de variedade em $\mathbb{C}^n$ são as classes de equivalência por essa relação e denotamos por $(X, 0)$ o germe de variedade cujo representante é X. Se um germe de variedade analítica $(X, 0)$ é dado como o conjunto dos zeros de apenas

um germe de função $f \in \mathcal{O}_n$, dizemos que $(X, 0)$ é um germe de hipersuperfície.

Dado um ideal I de $\mathcal{O}_n$, definimos a variedade de I por

$$v(I) := \{x \in \mathbb{C}^n : f(x) = 0,\ \forall f \in I\}$$

e, dada qualquer variedade analítica V, definimos o ideal de V por

$$i(V) = \{f \in \mathcal{O}_n :\ f(x) = 0,\ \forall x \in V\}$$

1.2 Equivalência de Germes

Em Teoria de singularidades, estamos sempre interessados em saber quando dois germes estão, de alguma forma, relacionados. Nesta seção, definimos as relações às quais nos referimos no decorrer deste trabalho.

Tais equivalências podem ser definidas através da ação de certos grupos em $\mathcal{O}_n$. São eles:

- Grupo $\mathcal{R}$: grupo formado pelos difeomorfismos de $\mathbb{C}^n$. A ação deste grupo em $\mathcal{O}_n$ toma $\phi \in \mathcal{R}$ e $f \in \mathcal{O}_n$ e leva em $f \circ \phi$. Dizemos que f e g são $\mathcal{R}$-equivalentes, e escrevemos $f \sim_{\mathcal{R}} g$, se f e g pertencem à mesma órbita por esta ação;

- Grupo $\mathcal{R}_X$: subgrupo de $\mathcal{R}$ formado pelos difeomorfismos que preservam X, onde X é um germe de variedade analítica. A ação desse grupo em $\mathcal{O}_n$ é dada pela restrição da ação de $\mathcal{R}$ em $\mathcal{O}_n$. Se f e g pertencem à mesma órbita por essa ação, dizemos que f e g são $\mathcal{R}_X$-equivalentes e denotamos $f \sim_{\mathcal{R}_X} g$.

Dado um número natural k, dizemos que um germe $f \in \mathcal{O}_n$ é k-determinado com respeito a $\mathcal{G}$, onde $\mathcal{G}$ é um dos grupos $\mathcal{R}$ ou $\mathcal{R}_X$, se g for $\mathcal{G}$-equivalente a f sempre que o k-jato de g, $j^k g$, for igual ao k-jato de f, $j^k f$. Um germe f é finitamente $\mathcal{G}$-determinado se for k-determinado com respeito a $\mathcal{G}$ para algum número natural k.

1.3 Álgebra Comutativa

Nesta seção trazemos definições e resultados de álgebra utilizados no decorrer do trabalho. Para um estudo mais detalhado, recomendamos [33].

Seja A uma anel local (com ideal maximal $\mathcal{M}$), noetheriano, comutativo com unidade e M um A-módulo. O supremo dos comprimentos, r, sobre todas as cadeias estritamente decrescentes de ideais primos de A

$$P_0 \supset P_1 \supset \ldots \supset P_r$$

é chamado de dimensão de Krull, ou simplesmente, dimensão de A, e denotado por $\dim A$. A dimensão de M, $\dim M$, é definida como sendo a dimensão do anel $A/ann(M)$, onde $ann(M)$ denota o ideal anulador de M.

Seja k o corpo $A/\mathcal{M}$. A dimensão embedding de A é a dimensão de $\mathcal{M}/\mathcal{M}^2$ como um k-espaço vetorial. Dizemos que A é um anel local regular se a dimensão embedding de A é igual à dimensão de Krull de A. Se R é um anel comutativo qualquer, dizemos que R é um anel regular se a localização de R em todo ideal primo de R é um anel local regular

Um elemento $a \in A$ é M-regular se $ax \neq 0$ para todo $x \neq 0$ em M. Uma sequência $a_1, ..., a_n$ de elementos de A é uma M-sequência, ou uma sequência M-regular, se as duas condições a seguir se verificam:

1. a_1 é M-regular, a_2 é M/a_1M-regular, $\ldots$, a_n é $M/\sum_{i=1}^{n-1} a_iM$-regular;

2. $M/\sum_{i=1}^{n} a_iM$ é diferente de zero.

Seja I um ideal de A. Se $a_1, \ldots, a_n$ são elementos de I, dizemos que $a_1, \ldots, a_n$ é uma M-sequência maximal em I se $a_1, \ldots, a_n$ é uma M-sequência e, para qualquer $b \in I$, $a_1, \ldots, a_n, b$ não o é. Definimos a I-profundidade de M, e denotamos $\text{depth}(I, M)$, o número de elementos de uma M-sequência maximal em I. Se A é local com ideal maximal $\mathcal{M}$, definimos a profundidade de M, e denotamos $\text{depth}(M)$, como sendo $\text{depth}(\mathcal{M}, M)$.

Dizemos que M é um módulo Cohen-Macaulay (e escrevemos CM) se $M \neq 0$ e $\text{depth}(M) = \dim M$ ou se $M = 0$. Se A é Cohen-Macaulay como um A-módulo, dizemos que A é um anel Cohen-Macaulay.

O teorema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [11], exibe um exemplo de anel Cohen-Macaulay.

Teorema 1.1. *Seja R um anel noetheriano de dimensão d, U uma matriz $p \times q$ com entradas em R e I_r o ideal gerado pelos menores de ordem r de U. Então,*

1. $\dim(R/I_r) \geq d - (p - r + 1)(q - r + 1)$;

2. *se R é Cohen-Macaulay e* $\dim(R/I_r) = d-(p-r+1)(q-r+1)$ *então o anel* R/I_r *é Cohen-Macaulay.*

Definimos que um A-módulo M é simples se não possui submódulos além de zero e M. Uma cadeia

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_r$$

de submódulos de um módulo M é chamada decomposição em série se M_i/M_{i+1} é um módulo simples para todo i, r é chamado o comprimento da seção em série. O comprimento de uma seção em séries de M é chamado comprimento de M e denotado por $l(M)$, se M não tem uma seção em série convencionamos que $l(M) = \infty$. Em geral, se N é um submódulo de M, temos

$$l(M) = l(N) + l(M/N).$$

Se $0 \to M_1 \to M_2 \to \ldots \to M_n$ é uma sequência exata de A-módulos de comprimentos finitos, então

$$\sum_{i=1}^{n} l(M_i) = 0$$

Seja I um ideal de definição de A, isto é, um ideal $\mathcal{M}$-primário. A multiplicidade de Samuel de I é igual a

$$e(I, A) = lim_{n\to\infty} \frac{d!}{n^d} l(A/I^n),$$

com $d = \dim A$ (ver [33]).

Definição 1.2. Um syzygy de k elementos, $f_1, \ldots, f_k$, de um A-módulo, M, é uma k-upla, $(g_1, \ldots, g_k)$ de elementos de A que satisfaz

$$\sum_{i=1}^{k} g_i f_i = 0.$$

O conjunto de todos os syzygies de $(f_1, \ldots, f_k)$ é um submódulo de A^k.

1.4 Deformações e suavizações

Consideramos uma singularidade $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ definida pelas equações analíticas

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = \ldots = f_k(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Sejam $F_1, \ldots, F_K \in \mathcal{O}_{n+1}$ tais que $F_i(x, 0) = f_i(x)$, para $i = 1, \ldots, k$.

Definição 1.3. Nesta situação, seja $(\mathcal{X}, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ definida por $F_1, \ldots, F_k$. A aplicação $\Pi : (\mathcal{X}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ é uma deformação de $(X, 0)$ se $\mathcal{O}_{(\mathcal{X},0)}$ é um $\mathcal{O}_1$-módulo flat via π^*. Se $\pi^{-1}(t)$ é uma variedade suave para t não nulo suficientemente pequeno, dizemos que π é uma suavização de $(X, 0)$.

Lembramos que $\pi^* : \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_X$ é dada por $\pi^*(g) = g \circ \pi$ e é denominada o pull-back de π e que um $\mathcal{O}_1$-módulo M é flat se, e somente se, t não é um divisor de zero de M (ver [26]).

Com o intuito de verificar se uma aplicação é uma deformação, é comum recorrermos ao seguinte teorema.

Teorema 1.4. *([33, teorema 23.1]) Sejam (A, m) e (B, n) anéis noetherianos locais, $\phi : A \to B$ um homomorfismo local e $F = B/mB$. Se A é um anel regular, B é Cohen-Macaulay e*

$$\dim B = \dim A + \dim F,$$

então B é flat sobre A.

1.5 Estratificação de Whitney e Transversalidade

Definição 1.5. Uma estratificação de um subconjunto Z de uma variedade diferenciável M é uma partição localmente finita $\mathcal{S}$ de Z por subvariedades diferenciáveis de M, chamadas de estratos, satisfazendo a condição de fronteira: se $X, Y \in \mathcal{S}$ e $\overline{X} \cap Y \neq \emptyset$ então $Y \subset \overline{X}$.

Relacionadas a estraficações, temos as condições de Whitney:

Condição A de Whitney: O par de estratos (X, Y) satisfaz a condição A de Whitney em um ponto $y \in Y$ se todo limite de hiperplanos tangentes a X em y contém o espaço tangente a Y em y.

Condição B de Whitney: O par de estratos (X, Y) satisfaz a condição B de Whitney em um ponto $y \in Y$ se para todas as sequências (x_i), (y_i) em X e Y respectivamente, ambas convergindo para y, se a sequência de espaços tangentes $(T_{x_i}X)$ converge para um subespaço T e se a sequência de linhas secantes ligando x_i a y_i converge para a linha L, então $L \subset T$.

Definição 1.6. Uma estratificação de Whitney de um subconjunto Z de uma variedade diferenciável M é uma estratificação $\mathcal{S}$ de Z tal que cada par de estratos, (X, Y), satisfaz as condições A e B de Whitney em todo ponto $y \in Y$.

O primeiro Lema de isotopia de Thom mostra que as condições de Whitney são condições suficientes para a trivialidade topológica.

Definição 1.7. Sejam N e P variedades diferenciáveis e A um subconjunto de N, $\mathcal{S}$ uma estratificação de A e seja $f : N \to P$ uma aplicação diferenciável. Dizemos que o conjunto $(A, \mathcal{S})$ é trivial sobre P se existem um conjunto estratificado $(F, \mathcal{F})$ e um homeomorfismo $h : A \to P \times F$, com $f = \pi_P \circ h$, enviando $\mathcal{S}$ na estratificação produto $P \times \mathcal{F}$.

Teorema 1.8. (Primeiro Lema de Isotopia de Thom, [17]) *Sejam N e P variedades diferenciáveis e A um subconjuto localmente fechado de N, $\mathcal{S}$ uma estratificação de Whitney de A, e seja $f : N \to P$ uma aplicação diferenciável tal que para cada estrato $X \in \mathcal{S}$, $f|_X$ é uma submersão e $f|_{\overline{X}\cap A}$ é própria. Então $(A, \mathcal{S})$ é localmente trivial sobre P. Isto é, para cada ponto $y \in P$ existe vizinhança U tal que $(A \cap f^{-1}(U), \mathcal{S} \cap f^{-1}(U))$ é trivial sobre U.*

Lembramos que um subconjunto de um espaço topológico é chamado localmente fechado se é igual à interseção de um subconjunto aberto com um subconjunto fechado do espaço.

Sejam X e Y variedades diferenciáveis, $f : X \to Y$ uma aplicação diferenciável e W uma subvariedade suave de Y. Dizemos que f intersepta W transversalmente em $x \in X$ se $f(x)$ não pertence a W ou se

$$T_{f(x)}Y = T_{f(x)}W + (df)_x(T_xX).$$

Dizemos que f intersepta W transversalmente se f intersepta W transversalmente em x para todo x em X.

Segundo o Teorema da Transversalidade de Thom (ver [18, Corolário 4.12]), se X e Y são variedades suaves com W uma subvariedade de Y, o conjunto das

aplicações suaves de X em Y que interseptam W transversalmente é denso em $C^\infty(X,Y)$.

Lema 1.9. *([18], Lema 4.6 - página 53) Sejam X, B e Y variedades suaves com W uma subvariedade de Y. Seja $j : B \to C^\infty(X,y)$ uma aplicação e defina $\phi : X \times B \to Y$ por $\phi(x,b) = j(b)(x)$. Supondo que ϕ é suave e que ϕ é transversal a W, o conjunto $\{b \in B : j(b)$ é transversal a $W\}$ é denso em B.*

Lema 1.10. *([3], Lema 4.2) Sejam $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ um germe de aplicação analítica e J um ideal de $\mathcal{O}_p$ tal que $\mathcal{O}_p/J$ é um anel regular. Seja $I = f^*(J)$ e suponhamos que $v(I)$ e $v(J)$ tenham a mesma codimensão. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

1. *f é transversal a $v(J)$,*
2. *$\mathcal{O}_n/I$ é regular,*
3. *$\mathcal{O}_n/I$ tem multiplicidade 1.*

1.6 A característica de Euler

Seja $\beta_n(X)$ o n-ésimo número de Betti de um espaço topológico, X, ou seja, a dimensão de $H_n(X,\mathbb{C})$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Definição 1.11. A característica de Euler de um espaço topológico, X, é dada pela seguinte soma alternada

$$\chi(X) = \sum (-1)^n \beta_n(X).$$

Dados espaços topológicos X e Y, duas aplicações $f_0, f_1 : X \to Y$ são chamadas homotópicas se existe uma aplicação $F : X \times I \to Y$, onde I é o intervalo $[0,1]$, tal que $F(x,0) = f_0(x)$ e $F(x,1) = f_1(x)$, para todo x em X. A aplicação F é chamada homotopia entre f_0 e f_1.

Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ são aplicações entre espaços topológicos tais que as composições $f \circ g$ e $g \circ f$ são homotópicas às respectivas identidades, dizemos que f e g são inversas homotópicas uma da outra. Uma aplicação $f : X \to Y$ é uma equivalência de homotopia se possui uma inversa homotópica. Neste caso, dizemos que X e Y possuem o mesmo tipo de homotopia.

Proposição 1.12. *Se X e Y têm o mesmo tipo de homotopia, então $H_n(X)$ é isomorfo a $H_n(Y)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Corolário 1.13. *Se X e Y possuem o mesmo tipo de homotopia, então $\chi(X) = \chi(Y)$.*

1.7 O número de Milnor

Dada uma aplicação contínua $\pi : E \to B$ e um espaço topológico X, dizemos que (X, p) satisfaz a propriedade do levantamento de homotopia, ou que p satisfaz a propriedade do levantamento de homotopia com respeito a X, se, para qualquer homotopia $f : X \times [0,1] \to B$ e para qualquer aplicação $\tilde{f}_0 : X \to E$ levantando $f_0 = f|_{X\times\{0\}}$ (isto é, tal que $f_0 = \pi\tilde{f}_0$), existe uma homotopia $\tilde{f} : X \times [0,1] \to E$ que levanta f (isto é, tal que $f = \pi\tilde{f}$) com $\tilde{f}_0 = \tilde{f}|_{X\times\{0\}}$.

Definição 1.14. Uma fibração é uma aplicação contínua $p : E \to B$ que satisfaz a propriedade do levantamento de homotopia com respeito a qualquer espaço.

Se $p : E \to B$ é uma fibração, chamamos os conjuntos $p^{-1}(b)$ com $b \in B$ de fibras de p. Observamos que se o espaço topológico B é conexo por caminhos então as fibras $p^{-1}(b)$ têm todas o mesmo tipo de homotopia (ver [34]).

Dado um germe de função holomorfa com singularidade isolada $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, seja $V = f^{-1}(0)$. Sendo $\epsilon > 0$, escrevemos

$$D_\epsilon = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| \leq \epsilon\},$$

$$S_\epsilon = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = \epsilon\},$$

$$K = V \cap S_\epsilon.$$

Seja $\phi : S_\epsilon \setminus K \to S^1$ dada por

$$\phi(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|}.$$

Denotamos $F_\theta = \phi^{-1}(e^{i\theta})$. Milnor, em [36], mostra que para ϵ suficientemente pequeno, $S_\epsilon \setminus K$ é um fibrado diferenciável localmente trivial sobre S^1 com fibra F_θ tal que cada fibra tem o tipo de homotopia de um bouquet $S^{n-1}\mathrm{v}\ldots\mathrm{v}S^{n-1}$ de esferas. O número de esferas deste bouquet é chamado o número de Milnor de f e denotado por $\mu(f)$. Existem várias caracterizações de $\mu(f)$, por exemplo, Milnor mostra que $\mu(f)$ é igual ao grau topológico da aplicação $\frac{\nabla(f)}{||\nabla(f)||} : S_\epsilon \to S^1$, portanto, $\mu(f) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_n/J(f)$, onde $J(f)$ denota o ideal de $\mathcal{O}_n$ gerado pelas derivadas parciais de f.

Esse número descreve alguns aspectos geométricos de f. Por exemplo, f é finitamente $\mathcal{R}$-determinado se, e somente se, o número de Milnor de f é finito e, nesse caso, $\mu(f)$ é igual à codimensão da órbita de f pela ação de $\mathcal{R}$ em $\mathcal{O}_n$.

A definição de número de Milnor para um germe de função $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to \mathbb{C}$ foi posteriormente generalizada por Hamm ([24, 25]) para uma ICIS $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$, isto é um germe de variedade de dimensão $n - k$ dado como zeros de uma aplicação $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_k) : (\mathbb{C}^n, 0) \to \mathbb{C}^k$ tal que $\phi_1, \ldots, \phi_k$ é uma sequência regular em $\mathcal{O}_n$. O número de bouquets de esferas na fibra de Milnor de uma ICIS $(X, 0)$ é chamado o número de Milnor de $(X, 0)$ e denotado por $\mu(X, 0)$.

Usaremos a seguinte fórmula de Lê-Greuel (ver [32]), a qual dá o número de Milnor de uma ICIS.

Teorema 1.15. *Sejam $\phi_1, \ldots, \phi_k \in \mathcal{O}_N$ e suponhamos que $X_1 = v(\phi_1, \ldots, \phi_{k-1})$ e $X = v(\phi_1, \ldots, \phi_{k-1}, \phi_k)$ são ICIS. Então,*

$$\mu(X, 0) + \mu(X_1, 0) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_N}{\langle \phi_1, \ldots, \phi_{k-1} \rangle + J(\phi_1, \ldots, \phi_k)},$$

onde $J(\phi_1, \ldots, \phi_k)$ denota o ideal gerado pelos menores de ordem maximal da matriz jacobiana de $(\phi_1, \ldots, \phi_k)$.

O número de Tjurina de f, $\tau(f)$, é a dimensão do espaço vetorial complexo $\frac{\mathcal{O}_n}{\langle f, J(f) \rangle}$, onde $\langle f, J(f) \rangle$ é o ideal de $\mathcal{O}_n$ gerado por f e pelas derivadas parciais de f.

Definição 1.16. (a) Dados $(w_1, ..., w_n : d_1, ..., d_p)$, w_i, $d_j \in \mathbb{Z}^+$, um germe de aplicação $\phi : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$, é quase homogêneo de tipo $(w_1, ..., w_n : d_1, ..., d_p)$ se para todo $\lambda \in K - \{0\}$:

$$\phi(\lambda^{w_1} x_1, \lambda^{w_2} x_2, ..., \lambda^{w_n} x_n) = (\lambda^{d_1} \phi_1(x), \lambda^{d_2} \phi_2(x), ..., \lambda^{d_p} \phi_p(x))$$

Neste caso, chamamos ao valor w_i de peso da variável x_i e ao valor d_i, de filtração de ϕ_i em relação aos pesos $(w_1, ..., w_n)$. Notação: peso$(x_i) = w(x_i) = w_i$ e filtração$(\phi) =$ fil$(\phi) = (d_1, ..., d_p)$.

(b) Dados $(w_1, ..., w_n)$, para todo monômio $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}$, definimos a filtração fil$(x^\alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i$.

(c) Definimos a filtração em $\mathcal{O}_n$ via a função definida por

$$\text{fil}(f) = inf_\alpha \{\text{fil}(x^\alpha) : \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(0) \neq 0\}.$$

(d) Estendemos a filtração para θ_n (o $\mathcal{O}_n$-módulo dos campos de vetores em $\mathbb{C}^n$), definindo $w(\frac{\partial}{\partial x_j}) = -w_j$ para todo $j = 1, ..., n$, assim dado $\xi = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\partial}{\partial x_j} \in \theta_n$, então $\text{fil}(\xi) = \inf_j\{\text{fil}(\xi_j) - w_j\}$.

Definição 1.17. (i) Um germe de variedade $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ é quase homogêneo se pode ser definido por um germe de aplicação $\phi : (\mathbb{C}^n, 0) \to \mathbb{C}^p$ quase homogêneo.

(ii) Dado um germe de variedade quase homogêneo, $(X, 0)$, dizemos que um germe de aplicação $\psi : (\mathbb{C}^n, 0) \to \mathbb{C}^p$ é consistente com $(X, 0)$ se é quase homogêneo com os mesmos pesos de X.

Em [46], Saito demonstra o seguinte teorema sobre germes quase homogêneos.

Teorema 1.18. *([46]) Um germe é $\mathcal{R}$-equivalente a um germe quase homogêneo se, e somente se, seu número de Milnor é igual ao seu número de Tjurina.*

Em [37], Milnor e Orlik demonstram o seguinte:

Teorema 1.19. *([37]) Se $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ é um germe quase homogêneo com pesos $(w_1, ..., w_n)$ e filtração d e com singularidade isolada, então o seu número de Milnor é*

$$\mu(f) = \left(\frac{d - w_1}{w_1}\right) ... \left(\frac{d - w_n}{w_n}\right).$$

1.8 Aplicações Finitas e Grau de Aplicação

Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma aplicação. Dizemos que f é fechada se a imagem de cada conjunto fechado em X é também fechada em Y. Dizemos, também, que f é finita se f é contínua, fechada e $f^{-1}\{y\}$ é um conjunto finito para todo $y \in Y$.

Lema 1.20. *([26], Teorema 3.4.24 - página 120) Seja $f : (X, x) \to (Y, y)$ uma aplicação entre germes de espaço analítico. São equivalentes:*

- *f é finita;*
- *$\mathcal{O}_{X,x}$ é um $\mathcal{O}_{Y,y}$- módulo finitamente gerado;*
- *$\frac{\mathcal{O}_{X,x}}{\mathcal{M}_{Y,y}\mathcal{O}_{X,x}}$ é um $\mathbb{C}$-espaço vetorial de dimensão finita;*
- *$f^{-1}(y) = \{x\}$.*

Lema 1.21. *([20], Teorema 2 - página 53) Se $V \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ é um germe de conjunto analítico e $\pi : V \to (\mathbb{C}^p, 0)$ é uma aplicação finita, então $\pi(V)$ é um conjunto analítico.*

Lema 1.22. *([39]) Seja $f : (X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0) \to \mathbb{C}^d$ um germe de aplicação finita com $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ um germe de variedade analítica de dimensão d. Então existe um representante $f : U \to V$, com U e V vizinhanças abertas da origem em X e em $\mathbb{C}^d$, respectivamente, e um conjunto analítico $B \subset V$ tal que*

(i) *$V \setminus B$ é conexo;*

(ii) *f é própria e $f^{-1}(0) = \{0\}$;*

(iii) *$U \setminus f^{-1}(B)$ é suave de dimensão d e $f|_{U\setminus f^{-1}(B)} : U \setminus f^{-1}(B) \to V \setminus B$ é regular.*

Dos itens (i) e (iii), temos que $f|_{U\setminus f^{-1}(B)}$ é uma fibração sobre o conexo $V \setminus B$. Assim, as fibras $f^{-1}(b)$ são homotópicas para todo $b \in V \setminus B$ e faz sentido escrever:

Definição 1.23. Seja $f : (X, 0) \subset (\mathbb{C}^d, 0) \to \mathbb{C}^d$ um aplicação finita com $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^d, 0)$ um germe de variedade analítica de dimensão d. Consideramos um representante $f : U \to V$ e um subconjunto analítico $B \subset V$ que verifica as condições (i), (ii) e (iii) do lema anterior. Definimos o grau de f por

$$\text{grau}(f) = \#f^{-1}(z),$$

para qualquer $z \in V \setminus B$.

O grau de uma aplicação finita pode ser calculado algebricamente pela fórmula de Samuel: se $f = (f_1, \ldots, f_d) : (X, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^d, 0)$ é um germe de aplicação finita, então

$$\text{grau}(f) = e(\langle f_1, \ldots, f_d\rangle, \mathcal{O}_{X,0}),$$

onde $e(\langle f_1, \ldots, f_d\rangle, \mathcal{O}_{X,0})$ denota a multiplicidade de Samuel do ideal $\langle f_1, \ldots, f_d\rangle$ em $\mathcal{O}_{X,0}$ (ver [39]).

1.9 Multiplicidades polares e obstrução de Euler

Dado um germe de variedade analítica $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ de dimensão d, sua k-ésima variedade polar, com $0 \leq k \leq d - 1$, é obtida tomando-se o fecho do

conjunto dos pontos críticos da restrição de uma projeção genérica $p : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^{d-k+1}$ à parte regular de X. Denotamos a k-ésima variedade polar de X por $P_k(X, 0, p)$. A multiplicidade de $P_k(X, 0, p)$ em 0 é chamada a k-multiplicidade polar de X e denotada por $m_k(X)$.

Se $(X, 0) = ((\phi_1, \ldots, \phi_{n-d})^{-1}(0), 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ é uma ICIS de dimensão d, Lê, em [29], prova que, para $k = 1, \ldots, d-1$, a k-ésima multiplicidade polar de X por

$$m_k(X) = \mu^{(k+1)}(X) + \mu^{(k)}(X)$$

onde $\mu^{(l)}(X)$ denota o número de Milnor de $X \cap H^l$ com H^l um hiperplano genérico de dimensão $d - l$.

Em [15], Gaffney define a d-ésima multiplicidade polar de X por

$$m_d(X) = \mu(X) + \mu(X \cap l^{-1}(0)),$$

com $l : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$ uma projeção linear genérica.

Lê e Teissier demonstram o seguinte teorema, o qual relaciona obstrução de Euler e variedades polares.

Teorema 1.24. *([31]) Seja $X \subset \mathbb{C}^N$ um espaço analítico reduzido de dimensão d. Então,*

$$Eu(X, 0) = \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^{d-i-1} m_i(X),$$

onde $Eu(X, 0)$ denota a obstrução de Euler local de $(X, 0)$.

No decorrer deste trabalho, adotamos esta fórmula como definição de obstrução de Euler local.

Capítulo 2

O número de Bruce-Roberts

Um invariante importante para um germe de função $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to \mathbb{C}$ é o seu número de Milnor, o qual, como descrito anteriormente, pode ser definido como a dimensão do espaço vetorial complexo $\frac{\mathcal{O}_n}{J(f)}$ e está relacionado a algumas propriedades geométricas do germe f, por exemplo, f é finitamente $\mathcal{R}$-determinado se, e somente se, seu número de Milnor é finito. Neste caso, $\mu(f)$ é igual à codimensão da órbita de f pela ação do grupo $\mathcal{R}$ em $\mathcal{O}_n$.

Consideramos, agora, um germe de variedade analítica, $(X, 0)$ em $(\mathbb{C}^n, 0)$. Em [6], Bruce e Roberts definem uma generalização do número de Milnor para um germe de função $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to \mathbb{C}$ relacionado a $(X, 0)$. Tal número, o qual chamamos de número de Bruce-Roberts de f com respeito a X e denotamos por $\mu_{BR}(f, X)$, está relacionado a algumas propriedades do germe f como, por exemplo, f é finitamente $\mathcal{R}_X$-determinado se, e somente se, seu número de Bruce-Roberts com respeito a X é finito. Neste caso, $\mu_{BR}(f, X)$ é igual à codimensão da órbita de f pela ação de $\mathcal{R}_X$ em $\mathcal{O}_n$. Ver [6] para mais detalhes.

Neste capítulo, vemos a definição do número de Bruce-Roberts e algumas de suas propriedades, particularmente no caso em que X é um germe de hipersuperfície quase homogêneo com singularidade isolada. Sob essas hipóteses, obtemos uma fórmula que relaciona o número de Bruce e Roberts de f com respeito a X ao número de Milnor de f e ao número de Milnor da ICIS $X \cap f^{-1}(0)$. Mostramos, também sob essas hipóteses, que a variedade logarítmica característica de X é Cohen-Macaulay.

2.1 Campos de vetores tangentes a uma variedade

Denotamos por θ_n o $\mathcal{O}_n$-módulo dos campos de vetores de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^n$ e, se X for um germe de variedade, denotamos por θ_X o submódulo de θ_n constituído

pelos germes de campos de vetores que são tangentes a X, isto é

$$\theta_X = \{\xi \in \theta_n : d\phi(\xi) \in i(X),\ \forall \phi \in i(X)\}.$$

A proposição a seguir exibe algumas propriedades do $\mathcal{O}_n$-módulo θ_X.

Proposição 2.1. *([6])*

- *O germe em* 0 *de um campo vetorial* δ *pertence a* θ_X *se, e somente se,* δ *é tangente a* X_i *em* x *para cada ponto* x *de cada componente* X_i *de* X*.*
- *Se* $X = \cup_{i=1}^{s} X_i$ *é a decomposição de* X *em componentes irredutíveis, então* $\theta_X = \cap_{i=1}^{s} \theta_{X_i}$*.*
- *Seja* $\delta \in \theta_X$ *com* $\delta(0) = 0$*. O fluxo* ϕ_t *gerado por* δ *preserva* X*. Assim,* $\phi_t \in \mathcal{R}_X$ *para todo* t*.*

Exibir geradores para o módulo θ_X não é uma tarefa trivial. Entretanto, Wahl, em [49], explicita um conjunto de geradores para θ_X se X for uma ICIS quase homogênea. Mais precisamente:

Proposição 2.2. *(Wahl, [49]) Seja* $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ *uma ICIS definida por uma aplicação quase homogênea* $\phi = (\phi_1, ..., \phi_p) : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ *com pesos* $w_1, ..., w_n$*. Então,* θ_X *é gerado pelos campos de vetores* $\phi_i \partial/\partial x_j$*, com* $i = 1, ..., p,\ j = 1, ..., n$*; o campo de Euler* $\epsilon = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \partial/\partial x_i$ *e os "campos de vetores triviais":*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_{i_{p+1}}} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_{i_{p+1}}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \phi_p}{\partial x_{i_1}} & \cdots & \frac{\partial \phi_p}{\partial x_{i_{p+1}}} \end{vmatrix}$$

para todas as $(p+1)$*-uplas* $i_1, ..., i_{p+1}$ *satisfazendo* $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_{p+1} \leq n$*.*

Observação 2.3. No decorrer deste trabalho usamos as duas notações a seguir para um campo de vetores em $\mathbb{C}^n$:

$$\sum_{i=1}^{n} g_i \frac{\partial}{\partial x_i} \equiv (g_1, \ldots, g_n).$$

Exemplo 2.4. Se $X = \phi^{-1}(0)$ com $\phi : (\mathbb{C}^3, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ dada por

$$\phi(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^5,$$

então,

$$\begin{aligned}\theta_X &= \big\langle (x^2+y^3+z^5, 0, 0), (0, x^2+y^3+z^5, 0), (0, 0, x^2+y^3+z^5), \\ &\quad (15x, 10y, 6z), (3y^2, -2x, 0), (5z^4, 0, -2x), (0, 5z^4, -3y^2) \big\rangle .\end{aligned}$$

Observação 2.5. Se o germe $(X, 0)$ não for quase homogêneo, ainda podemos encontrar os geradores de θ_X através do software SINGULAR, ([21]).

Observamos que se $X = \phi^{-1}(0)$ com $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_p) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p$, então um campo $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ pertence a θ_X se, e somente se,

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} \in \langle \phi_1, \ldots, \phi_p \rangle , \ \forall k = 1, \ldots, p,$$

ou seja, se, e somente se, existem $\alpha_{1k}, \ldots, \alpha_{pk}$ em $\mathcal{O}_n$ tais que

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i \frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_{ik}\phi_i = 0, \ \forall k = 1, \ldots, p.$$

Ou ainda, se, e somente se, existem $\alpha_{1k}, \ldots, \alpha_{pk}$ em $\mathcal{O}_n$ tais que

$$(\eta_1, \ldots, \eta_n, \alpha_{1k}, \ldots, \alpha_{pk}) \in \text{syzygy}(\frac{\partial \phi_k}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \phi_k}{\partial x_n}, \phi_1, \ldots, \phi_p), \ \forall k = 1, \ldots, p.$$

Assim, para encontrarmos tais campos η's com o SINGULAR, basta definirmos ideais I_k em $\mathcal{O}_n$ gerados por

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \phi_k}{\partial x_n}, \phi_1, \ldots, \phi_p$$

e calcularmos, para cada k, o syzygy de I_k. O SINGULAR devolverá módulos gerados por vetores com $n + p$ coordenadas. Definimos, então, módulos I'_k gerado pelos vetores com n coordenadas obtidos eliminando as últimas p coordenadas dos geradores de I_k. O módulo θ_X é igual à interseção $\cap_{k=1}^{p} I'_k$.

Exemplo 2.6. Seja $X = \phi^{-1}(0)$, onde $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ é dada por

$$\phi(x, y) = x^3 + x^2y^2 + y^7.$$

Através do software SINGULAR ([21]), calculamos o número de Milnor de ϕ:
$> ring\, r = 0,(x,y),(c,ds);$
$> poly\, phi = x3 + x2y2 + y7;$
$> vdim(std(jacob(phi)));$
11
e o número de Tjurina de ϕ:
$> vdim(std(ideal(phi) + jacob(phi)));$
10.

Vemos, assim, que $(X,0)$ não é um germe quase homogêneo. Ainda com a ajuda do SINGULAR, encontramos geradores para o módulo θ_X:
$> ideal\, i = diff(phi,x), diff(phi,y), phi;$
$> module\, M = syz(i);$
$> M;$
$M[1] = [441x2 - 40xy + 21xy2 - 14y4, 4x + 189xy - 16y2, -1323x + 112y]$
$M[2] = [160xy - 84xy2 - 9261xy3 + 56y4 - 441y5, -16x + 126xy + 64y2 - 3969y4, -448y + 27783y3]$,
os geradores de θ_X são as imagens de $M[1]$ e $M[2]$ pela projeção nas duas primeiras coordenadas, ou seja,

$$\theta_X = \langle (441x2 - 40xy + 21xy2 - 14y4, 4x + 189xy - 16y2),$$
$$(160xy - 84xy2 - 9261xy3 + 56y4 - 441y5, -16x + 126xy + 64y2 - 3969y4)\rangle .$$

Definição 2.7. Um germe de hipersuperfície reduzido $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ é chamado um divisor livre se θ_X é um $\mathcal{O}_n$-módulo livre.

Proposição 2.8. *([6]) Seja $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ uma hipersuperfície analítica reduzida e sejam $\delta_i = \sum_{j=1}^{n} \xi_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}$, para $j = 1,\ldots,n$ elementos de θ_X tais que o determinante da matriz (ξ_{ij}) é uma equação que define X. Então, $(X,0)$ é um divisor livre e θ_X é gerado livremente por $\delta_1,\ldots,\delta_n$.*

Exemplo 2.9. Seja $(X,0) = (\phi^{-1}(0),0)$ com $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ definida por $\phi(x,y) = x^2 + y^3$. Sejam, também, $\delta_1 = (3x,2y)$ e $\delta_2 = (3y^2,-2x)$. Temos que δ_1 e δ_2 pertencem a θ_X e

$$\det \begin{pmatrix} 3x & 2y \\ 3y^2 & -2x \end{pmatrix} = -6\phi.$$

Portanto, $(X,0)$ é um divisor livre e θ_X é gerado por δ_1 e δ_2.

2.2 O número de Bruce-Roberts

Definição 2.10. Sejam $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to \mathbb{C}$ um germe de função holomorfa e $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ um germe de variedade analítica. O número de Bruce-Roberts de f com respeito a X é a dimensão do $\mathbb{C}$-espaço vetorial $\frac{\mathcal{O}_n}{df(\theta_X)}$. Denotamos tal número por $\mu_{BR}(f, X)$.

Através da proposição 2.2, vemos que se $(X, 0) = (\phi^{-1}(0), 0)$ for uma ICIS quase homogênea com pesos $(w_1, ..., w_n)$, $df(\theta_X)$ é o ideal em $\mathcal{O}_n$ gerado por

$$\phi_i \frac{\partial f}{\partial x_j}, df(\epsilon), J(f, \phi), i = 1...p, j = 1, ..., n,$$

onde ϕ_i, $i = 1, \ldots, p$ são as coordenadas de ϕ, $df(\epsilon) = \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}$ e $J(f, \phi)$ é o ideal gerado pelos menores de ordem maximal da matriz jacobiana de (f, ϕ).

Como mostra o teorema a seguir, se $(X, 0) = (\phi^{-1}(0), 0)$ é um germe de hipersuperfície quase homogêneo com singularidade isolada, é possível reduzir o número de geradores de $df(\theta_X)$.

Teorema 2.11. *Seja $(X, 0) = (\phi^{-1}(0), 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ um germe de hipersuperfície quase homogêneo com singularidade isolada. Dado um germe de função holomorfa $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to \mathbb{C}$, temos que*

$$df(\theta_X) = \langle df(\epsilon), J(f, \phi) \rangle .$$

Demonstração: Para $k = 1, ..., n$,

$$\begin{aligned}
\phi \frac{\partial f}{\partial x_k} &= \left(\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) \frac{\partial f}{\partial x_k} \\
&= \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \left(w_1 x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + ... + w_n x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)
\end{aligned}$$

■

Exemplo 2.12. Sejam $X = \phi^{-1}(0)$, com

$$\phi(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^5,$$

e $f(x,y,z) = xy + z^2$, então,

$$df(\theta_X) = \left\langle 25xy + 12z^2, 3y^3 - 2x^2, 5yz^4 - 4xz, 5xz^4 - 6y^2z \right\rangle.$$

Assim,

$$\mu_{BR}(f,X) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{df(\theta_X)} = 8.$$

2.3 Relação entre o número de Bruce-Roberts e o número de Milnor

Observamos que, dados qualquer germe de variedade $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ e qualquer germe de função $f : (\mathbb{C}^n,0) \to \mathbb{C}$, o ideal $df(\theta_X)$ está contido no ideal $J(f)$, donde concluímos que o número de Bruce-Roberts de um germe f com respeito a uma variedade X é sempre maior que ou igual ao número de Milnor de f. É natural nos perguntarmos qual a relação que existe entre esses dois números, ou seja, o que devemos somar ao número de Milnor de um germe f para obter o seu número de Bruce-Roberts com respeito a uma variedade.

Nesta seção, explicitamos essa relação no caso em que a variedade é uma hipersuperfície quase homogênea com singularidade isolada.

Dada uma ICIS quase homogênea, $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$, e um germe de função, $f : (\mathbb{C}^n,0) \to \mathbb{C}$, em [6], Bruce e Roberts consideram o ideal de $\mathcal{O}_n$

$$df(\theta_X^-) = \langle i(X), df(\theta_X) \rangle$$

e demonstram:

Proposição 2.13. *([6, Proposição 7.7]) Seja $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ uma ICIS quase homogênea e seja $f : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C},0)$ um germe de função finitamente $\mathcal{R}_X$-determinado. Então, $Y = f^{-1}(0) \cap X$ é uma ICIS cujo número de Milnor, $\mu(Y,0)$ é igual à dimensão do $\mathbb{C}$-espaço vetorial $\frac{\mathcal{O}_n}{df(\theta_X^-)}$.*

Dado um germe de função $f : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C},0)$, observamos que se $(X,0) = (\phi^{-1}(0),0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ é um germe de hipersuperfície quase homogêneo com singularidade isolada e $f : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C},0)$ é um germe finitamente $\mathcal{R}_X$-determinado, quase homogêneo consistente com ϕ e com filtração m, pela fórmula

de Euler, $df(\epsilon) = mf$, então, pela fórmula de Lê-Greuel,

$$\begin{aligned}\mu_{BR}(f,X) &= \dim \frac{\mathcal{O}_n}{\langle df(\epsilon), J(f,\phi)\rangle} \\ &= \dim \frac{\mathcal{O}_n}{\langle f, J(f,\phi)\rangle} \\ &= \mu(f) + \mu(X \cap f^{-1}(0)).\end{aligned}$$

No teorema a seguir, vemos que essa igualdade continua válida no caso em que f não é um germe quase homogêneo.

Teorema 2.14. *Sejam $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ um germe de hipersuperfície quase homogêneo com singularidade isolada e $f : (\mathbb{C}^n,0) \to \mathbb{C}$ um germe de função finitamente $\mathcal{R}_X$-determinado. Então,*

$$\mu_{BR}(f,X) = \mu(f) + \mu(X \cap f^{-1}(0),0).$$

Para a demonstração deste teorema, recorremos ao lema a seguir.

Lema 2.15. *([6, Corollary 7.9]) Sejam R um anel local Cohen-Macaulay de dimensão p, A uma matriz $q \times p$, com $p \geq q$ com entradas em R e v uma sequência de p elementos de R. Denotamos por $\hat{A}$ a matriz $(q-1)\times p$ obtida deletando-se a última linha de A e escrevemos*

$$u = (u_1,...,u_q)^T = A.v^T$$

$$\hat{u} = (u_1,...,u_{q-1})^T = \hat{A}.v^T.$$

Sejam

$$I_1 = I_{q-1}(\hat{A}) + \langle u_1,...,u_{q-1}\rangle R$$

$$I_2 = I_q(A) + \langle u_1,...,u_q\rangle R$$

$$I = I_q(A) + \langle u_1,...,u_{q-1}\rangle R,$$

onde $I_q(A)$ é o ideal de R gerado pelos menores de ordem q da matriz A e $I_{q-1}(\hat{A})$ é aquele gerado pelos menores de ordem $q-1$ de $\hat{A}$.

Então, se $l(R/I) < \infty$,

$$l(R/I) = l(R/I_1) + l(R/I_2).$$

Demonstração do Teorema 2.14:

Seja $X = \phi^{-1}(0)$, com $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ quase homogênea com pesos $w_1, ..., w_n$. Então, pelo teorema 2.11, $df(\theta_X)$ é o ideal de $\mathcal{O}_n$ gerado por

$$J(f, \phi), w_1 x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + ... + w_n x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Sejam, seguindo a notação do lema 2.15, $R = \mathcal{O}_n$, $p = n$, $q = 2$, $v = (w_1 x_1, ..., w_n x_n)$ e

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Então, ainda seguindo a notação do lema 2.15,

$$I_1 = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}, w_1 x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + ... + w_n x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle = J(f);$$

$$I = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial \phi}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial \phi}{\partial x_i}, w_1 x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + ... + w_n x_x \frac{\partial f}{\partial x_n}, 1 \leq i < j \leq n \right\rangle = df(\theta_X)$$

e

$$I_2 = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial \phi}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial \phi}{\partial x_i}, w_1 x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + ... + w_n x_x \frac{\partial f}{\partial x_n}, \phi, 1 \leq i < j \leq n \right\rangle = df(\theta_{\bar{X}}).$$

Assim,

$$\mu_{BR}(f, X) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{I} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{I_1} + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{I_2} = \mu(f) + \mu(X \cap f^{-1}(0), 0),$$

pela proposição 2.13. ■

Segundo a fórmula de Lê-Greuel,

$$\mu(f) + \mu(X \cap f^{-1}(0), 0) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle f, J(f, \phi)\rangle},$$

donde temos o seguinte resultado.

Corolário 2.16. *Se $(X, 0) = (\phi^{-1}(0), 0)$ é um germe de hipersuperfície quase homogêneo com singularidade isolada e $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ é um germe finitamente $\mathcal{R}_X$-determinado, então,*

$$\mu_{BR}(f, X) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle f, J(f, \phi)\rangle}.$$

Observação 2.17. Este número, $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle f, J(f,\phi)\rangle}$, pode ser interpretado geometricamente como o número de Milnor do germe ϕ restrito a hipersuperfície $f^{-1}(0)$, o que soa um pouco estranho pois o número de Bruce-Roberts de f com respeito a X deveria estar relacionado ao número de Milnor do germe f restrito a X.

O exemplo a seguir mostra que o teorema 2.14 não se verifica se o germe de hipersuperfície $(X, 0)$ não for quase homogêneo.

Exemplo 2.18. Sejam $X = \phi^{-1}(0)$, onde $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ é dada por

$$\phi(x, y) = x^3 + x^2y^2 + y^7,$$

e $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ o germe de função dado por

$$f(x, y) = x^2 + y^5.$$

Como calculado no exemplo 2.6,

$$\begin{aligned} \theta_X &= \big\langle (14y^4 - 21xy^2 - 441x^2 + 40xy, -189xy + 16y^2 - 4x), \\ &\quad (-7y^4 - 147xy^2 - 20xy, -63y^3 - 8y^2 + 2x) \big\rangle . \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} df(\theta_X) &= \big\langle 882x^3 - 80x^2y + 42x^2y^2 - 8xy^4 + 945xy^5 - 80y^6, \\ &\quad -8x^3 + 42x^2y^3 - 8xy^5 + 45y^8 \big\rangle \end{aligned}$$

Portanto, $\mu_{BR}(f, X) = 15$.
Pelo teorema 1.19,

$$\mu(f) = \frac{(10-5)(10-2)}{5.2} = \frac{40}{10} = 4.$$

Pela fórmula de Lê-Greuel,

$$\mu(X \cap f^{-1}(0)) = \dim \frac{\mathcal{O}_2}{\langle \phi, J(\phi, f)\rangle} - \mu(\phi) = 25 - 11 = 14.$$

Assim,

$$\mu_{BR}(f, X) \neq \mu(f) + \mu(X \cap f^{-1}(0)).$$

O exemplo a seguir mostra que o teorema 2.14 não se verifica se $(X, 0)$ for uma ICIS quase homogênea mas não uma hipersuperfície.

Exemplo 2.19. Se $(X,0) = (\phi^{-1}(0),0)$, com $\phi : (\mathbb{C}^3,0) \to (\mathbb{C}^2,0)$ dada por

$$\Phi(x,y,z) = (xy - z^4, x^2 + y^2 + z^4),$$

e

$$f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^6.$$

Pela proposição 2.2, temos que

$$\begin{aligned}\theta_X = \; & \langle(-z^4+xy,0,0),(0,0,-z^4+xy),(0,-z^4+xy,0),(z^4+x^2+y^2,0,0),\\ & (0,z^4+x^2+y^2,0),(0,0,z^4+x^2+y^2),(2x,2y,z),\\ & (4xz3+8yz3,-8xz3-4yz3,-2x2+2y2)\rangle\,.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}df(\theta_X) = \; & \langle -3x^2z^4+3x^3y, -6z^9+6xyz^5, -3y^2z^4+3xy^3, 3x^2z^4+3x^4+3x^2y^2,\\ & 3y^2z^4+3x^2y^2+3y^4, 6z^9+6x^2z^5+6y^2z^5, 6z^6+6x^3+6y^3,\\ & -12x^2z^5+12y^2z^5+12x^3z^3+24x^2yz^3-24xy^2z^3-12y^3z^3\rangle\,.\end{aligned}$$

Fazendo o cálculo da dimensão de $\mathcal{O}_3/df(\theta_X)$ no SINGULAR, vemos que

$$\mu_{BR}(f,X) = \dim \frac{\mathcal{O}_3}{df(\theta_X)} = 55.$$

Como f é um germe quase homogêneo do tipo $(2,2,1:6)$, pelo teorema 1.19,

$$\mu(f) = \frac{(6-2)(6-2)(6-1)}{2.2.1} = 20.$$

Além disso, como $X \cap f^{-1}(0)$ é uma ICIS, pela Fórmula de Lê-Greuel,

$$\mu(X \cap f^{-1}(0),0) + \mu(f,\phi_1) = \dim \frac{\mathcal{O}_3}{\langle f,\phi_1\rangle + J(f,\phi_1,\phi_1,\phi_2)},$$

ainda pela fórmula de Lê-Greuel,

$$\mu(f,\phi_1) + \mu(f) = \dim \frac{\mathcal{O}_3}{\langle f\rangle + J(f,\phi_1)},$$

onde $\phi = (\phi_1,\phi_2)$. Assim,

$$\mu(X \cap f^{-1}(0),0) \;=\; \dim \frac{\mathcal{O}_3}{\langle f,\phi_1\rangle + J(f,\phi_1,\phi_1,\phi_2)} - \mu(f,\phi_1)$$

$$\begin{aligned} &= \dim \frac{\mathcal{O}_3}{\langle f, \phi_1\rangle + J(f, \phi_1, \phi_1, \phi_2)} - \dim \frac{\mathcal{O}_3}{\langle f\rangle + J(f, \phi_1)} + \mu(f) \\ &= 54 - 51 + 20 \\ &= 23 \end{aligned}$$

Assim,

$$\mu(f) + \mu(X \cap f^{-1}(0), 0) = 20 + 23 \neq 55 = \mu_{BR}(f, X)$$

2.4 O caso quase homogêneo

Como vimos no teorema 1.19, Milnor e Orlik exibem uma maneira de escrever o número de Milnor de um germe de função $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ quase homogêneo e com singularidade isolada em função dos pesos e da filtração de f. Nesta seção, sob algumas hipóteses, escrevemos o número de Bruce-Roberts em função de pesos e filtrações.

Para isso, precisamos dos lemas a seguir.

Lema 2.20. *([37]) Se uma aplicação $G : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ é tal que sua i-ésima componente é um polinômio homogêneo de grau d_i e $G^{-1}(0) = 0$, então o grau de G em zero é igual a $d_1...d_n$.*

Lema 2.21. *Se uma aplicação polinomial $G : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ quase homogênea do tipo $(w_1, ..., w_n : d_1, ..., d_n)$ é tal que $G^{-1}(0) = 0$, então o grau de G em zero é igual a $\frac{d_1...d_n}{w_1...w_n}$.*

Demonstração: Definimos $H : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ por $H(x_1, ..., x_n) = (x_1^{w_1}, ..., x_n^{w_n})$.

Para $i = 1, ..., n$, a i-ésima coordenada de $G \circ H$ é homogênea de grau d_i. De fato, denotando $G = (G_1, ..., G_n)$, como G_i é quase homogênea com pesos $w_1, ..., w_n$ e filtração d_i, G_i se escreve como uma combinação linear de monômios da forma $x_1^{i_1}...x_n^{i_n}$ com $i_1w_1 + ... + i_nw_n = d_i$. Assim, cada parcela da soma que define $G_i \circ H$ tem grau $i_1w_1 + ... + i_nw_n = d_i$.

Pelo lema 2.20, grau$(G \circ H) = d_1...d_n$. Portanto,

$$\text{grau}(G) = \frac{\text{grau}(G \circ H)}{\text{grau}(H)} = \frac{d_1...d_n}{w_1...w_n}.$$

■

Observação 2.22. Se $(X,0)$ é um germe de variedade quase homogêneo, sempre podemos obter geradores quase homogêneos para θ_X. Uma demonstração deste fato pode ser encontrada em [8].

Recordamos que um germe $f:(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C},0)$ é consistente com X se f é quase homogêneo com os mesmos pesos que X.

Exemplo 2.23. Sejam $\phi:(\mathbb{C}^2,0)\to\mathbb{C}$ o germe de função dado por $\phi(x,y)=x^4+xy$ e $(X,0)=(\phi^{-1}(0),0)$. Observamos que X é quase homogêneo com pesos $w_1=1$ e $w_2=3$.

Consideramos os dois germes de função $f,g:(\mathbb{C}^2,0)\to\mathbb{C}$ dados por

$$f(x,y)=x^6+y^2 \text{ e } g(x,y)=x^2+y^3.$$

Os dois germes f e g são quase homogêneos. Mas os pesos de f são $w_1=1$ e $w_2=3$, ou seja, f é consistente com X. Diferente de g que tem pesos $w_1=3$ e $w_2=2$, isto é, g não é consistente com X.

Lema 2.24. *([45]) Sejam $(X,0)\subset(\mathbb{C}^n,0)$ um germe de variedade quase homogêneo, $\{\alpha_1,...,\alpha_r\}$ um conjunto de geradores quase homogêneos de θ_X e $f:(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C},0)$ um germe de função quase homogêneo consistente com X. Então $df(\alpha_i)$ é uma função quase homogênea com filtração $fil(df(\alpha_i))=fil(f)+fil(\alpha_i)$ para cada $i=1,...,r$.*

Demonstração: Escrevemos $\alpha_i=\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}$, temos $df(\alpha_i)=\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}\alpha_{ij}$.

$$\text{fil}(\frac{\partial f}{\partial x_j}\alpha_{ij})=\text{fil}(f)-w_j+\text{fil}(\alpha_i)+w_j=\text{fil}(f)+\text{fil}(\alpha_i)$$

para $\forall\ j=1,...,n$, portanto $\text{fil}(df(\alpha_i))=\text{fil}(f)+\text{fil}(\alpha_i)$, e segue o resultado. ■

Inspirados no resultado de Milnor e de Orlik, obtemos:

Teorema 2.25. *Sejam $(X,0)\subset(\mathbb{C}^n,0)$ um germe de variedade quase homogêneo com pesos $w_1,...,w_n$ e $f:(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C},0)$ um polinômio quase homogêneo consistente com X e finitamente $\mathcal{R}_X$-determinado. Se θ_X é um módulo livre gerado por $\alpha_1,...,\alpha_n$, campos de vetores quase homogêneos, então*

$$\mu_{BR}(f,X)=\left(\frac{fil(f)+fil(\alpha_1)}{w_1}\right)...\left(\frac{fil(f)+fil(\alpha_n)}{w_n}\right).$$

Demonstração: Seja $G(x_1,...,x_n)=(df(\alpha_1),...,df(\alpha_n))$, então, pelo lema 2.24 G é quase homogênea do tipo $(w_1,...,w_n:\text{fil}(f)+\text{fil}(\alpha_1),...,\text{fil}(f)+\text{fil}(\alpha_n))$.

Assim,

$$\begin{aligned}\mu_{BR}(f,X) &= \dim \frac{\mathcal{O}_n}{\langle df(\alpha_1),...,df(\alpha_n)\rangle} \\ &= \text{grau}(G) \\ &\overset{(*)}{=} \frac{(\text{fil}(f)+\text{fil}(\alpha_1))...(\text{fil}(f)+\text{fil}(\alpha_n))}{w_1...w_n}\end{aligned}$$

onde $(*)$ segue do lema 2.21 ■

Exemplo 2.26. Seja $X = \phi^{-1}(0)$, com $\phi : (\mathbb{C}^3, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ dada por

$$\phi(x,y,z) = 144xy^2z - 27y^4 - 4x^3y^2 - 128x^2z^2 + 256z^3 + 16x^4z.$$

Observamos que X é quase homogêneo do tipo $(2,3,4:12)$ e é o discriminante da deformação versal de x^4. Em [5], Bruce mostra que

$$\theta_X = \left\langle (2x,3y,4z), \left(16z-4x^2,-8xy,3y^2\right), \left(6y,8z-2x^2,-xy\right)\right\rangle = \langle \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle$$

Seja $f : (\mathbb{C}^3,0) \to (\mathbb{C},0)$ dado por $f(x,y,z) = x^6 + y^4 + z^3$, temos que $\text{fil}(f) = 12$, $\text{fil}(\alpha_1) = 0$, $\text{fil}(\alpha_2) = 2$ e $\text{fil}(\alpha_3) = 1$. Assim,

$$\mu_{BR}(f,X) = \frac{(12+0)(12+2)(12+1)}{2.3.4} = 91.$$

Juntando o teorema anterior ao teorema 2.14 e ao resultado de Milnor e Orlik, temos o seguinte corolário.

Corolário 2.27. *Sejam $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ um germe de hipersuperfície com singularidade isolada, quase homogêneo com pesos $w_1,...,w_n$ e $f : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C},0)$ um polinômio quase homogêneo consistente com X. Se θ_X é um módulo livre gerado por $\alpha_1,...,\alpha_n$, campos de vetores quase homogêneos, então*

$$\mu(X \cap f^{-1}(0),0) = \frac{(fil(f)+fil(\alpha_1))...(fil(f)+fil(\alpha_n))}{w_1...w_n} - \left(\frac{fil(f)-w_1}{w_1}\right)...\left(\frac{fil(f)-w_n}{w_n}\right).$$

Em particular, se $X = \phi^{-1}(0)$ onde $\phi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ é um germe de hipersuperfície com singularidade isolada e quase homogêneo com pesos (w_1,w_2), então um conjunto de geradores quase homogêneos para θ_X é $\{\alpha_1,\alpha_2\}$, com

$$\alpha_1 = w_1x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + w_2x_2\frac{\partial}{\partial x_2},\ \alpha_2 = -\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Portanto,

$$\text{fil}(\alpha_1) = w_1 - w_1 = 0,\ \text{fil}(\alpha_2) = \text{fil}(\phi) - w_2 - w_1.$$

Assim, obtemos:

Teorema 2.28. *Seja* $(X,0) = (\phi^{-1}(0),0)$*, com* $\phi : (\mathbb{C}^2,0) \to (\mathbb{C},0)$ *um germe quase homogêneo do tipo* $(w_1, w_2 : \mathit{fil}(\phi))$ *com singularidade isolada na origem e seja* $f : (\mathbb{C}^2,0) \to (\mathbb{C},0)$ *um germe quase homogêneo consistente com* ϕ *e finitamente* $\mathcal{R}_X$*-determinado. Então,*

$$\mu_{BR}(f,X) = \mathit{fil}(f)\left(\frac{\mathit{fil}(f) + \mathit{fil}(\phi) - w_2 - w_1}{w_1 w_2}\right)$$

e, portanto,

$$\mu(X \cap f^{-1}(0),0) = \frac{\mathit{fil}(f)\mathit{fil}(\phi)}{w_1 w_2} - 1.$$

Demonstração:

Pelo teorema 2.25, temos que

$$\begin{aligned}
\mu_{BR}(f,X) &= \left(\frac{\text{fil}(f) + \text{fil}(\alpha_1)}{w_1}\right)\left(\frac{\text{fil}(f) + \text{fil}(\alpha_2)}{w_2}\right) \\
&= \left(\frac{\text{fil}(f) + 0}{w_1}\right)\left(\frac{\text{fil}(f) + \text{fil}(\phi) - w_2 - w_1}{w_2}\right) \\
&= \text{fil}(f)\left(\frac{\text{fil}(f) + \text{fil}(\phi) - w_2 - w_1}{w_1 w_2}\right).
\end{aligned}$$

Pelo corolário 2.27,

$$\begin{aligned}
\mu(X \cap f^{-1}(0),0) &= \frac{(\text{fil}(f) + \text{fil}(\alpha_1))(\text{fil}(f) + \text{fil}(\alpha_2))}{w_1 w_2} - \\
&\quad \left(\frac{\text{fil}(f) - w_1}{w_1}\right)\left(\frac{\text{fil}(f) - w_2}{w_2}\right) \\
&= \frac{(\text{fil}(f) + 0)(\text{fil}(f) + \text{fil}(\phi) - w_2 - w_1)}{w_1 w_2} - \\
&\quad \left(\frac{\text{fil}(f) - w_1}{w_1}\right)\left(\frac{\text{fil}(f) - w_2}{w_2}\right) \\
&= \frac{\text{fil}(f)\text{fil}(\phi)}{w_1 w_2} - 1.
\end{aligned}$$

■

Em [42], Nuño-Ballesteros e Tomazella mostram que se $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ é

uma curva reduzida e $f : (X, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ é um germe finito, então

$$\mu(f|_X) = \mu(X, 0) + \text{grau}(f) - 1,$$

onde $\mu(X, 0)$ é o número de Milnor da curva como definido por Buchweitz e Greuel em [7] e $\mu(f|_X)$ é o número de Milnor de f sobre a curva como definido por Goryunov, em [23] para curvas em $\mathbb{C}^3$ e depois por Mond, em [38], para o caso geral. Observamos que, no caso de $(X, 0)$ ser uma ICIS de dimensão 1, $X \cap f^{-1}(0)$ é uma ICIS de dimensão 0. Assim,

$$\text{grau}(f) - 1 = \mu(X \cap f^{-1}(0), 0),$$

ver [32]. Desse resultado e do teorema 2.28, temos:

Corolário 2.29. *Seja $(X, 0) = (\phi^{-1}(0), 0)$, com $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe quase homogêneo do tipo $(w_1, w_2 : fil(\phi))$ com singularidade isolada na origem e seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe consistente com ϕ, finitamente $\mathcal{R}_X$-determinado e tal que $f|_X : X \to \mathbb{C}$ é finito. Então*

$$\mu(f|_X) = \frac{fil(\phi)(fil(f) + fil(\phi) - (w_1 + w_2))}{w_1 w_2}.$$

Assim, sob as mesmas hipóteses do corolário anterior, o número de Milnor sobre a curva é invariante sob deformações que preservam pesos e filtrações.

Uma outra maneira de escrever o número de Bruce-Roberts em função dos pesos e das filtrações das funções envolvidas é a seguinte: segundo Bivià e Nuño-Ballesteros em [2], temos que se $(\phi_1, \phi_2) : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ é uma ICIS quase homogênea do tipo $(w_1, \ldots, w_n : d_1, d_2)$, então

$$\begin{aligned}\mu(\phi_1, \phi_2) &= \frac{d_1}{w_1 \ldots w_n} \sum_{j=1}^{n} (d_1 - w_1) \ldots (d_1 - w_{j-1})(d_2 - w_{j+1}) \ldots (d_2 - w_n) \\ &\quad - \frac{(d_1 - w_1) \ldots (d_1 - w_n)}{w_1 \ldots w_n}.\end{aligned}$$

Deste resultado, e dos teoremas 2.14 e 1.19, temos:

Corolário 2.30. *Seja $(X, 0) = (\phi^{-1}(0), 0)$ um germe de hipersuperfície quase homogêneo com singularidade isolada do tipo $(w_1, \ldots, w_n : d_2)$ e seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe quase homogêneo do tipo $(w_1, \ldots, w_n : d_1)$ e $\mathcal{R}_X$-finitamente determinado.*

Então,

$$\mu_{BR}(f,X) = \frac{d_1}{w_1 \dots w_n} \sum_{j=1}^{n} (d_1 - w_1) \dots (d_1 - w_{j-1})(d_2 - w_{j+1}) \dots (d_2 - w_n).$$

2.5 O número de Bruce-Roberts e a obstrução de Euler

Se X é uma variedade analítica reduzida em $\mathbb{C}^n$ e U é uma vizinhança suficientemente pequena de 0 em $\mathbb{C}^n$, dado qualquer ponto $x \in U$, denotamos por $\theta_X(x)$ o subespaço linear de T_xU gerado pelos vetores $\delta(x)$ com $\delta \in \theta_{X,x}$.

Lema 2.31. *([6]) Existe uma única estratificação $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ de U com as seguintes propriedades:*

1. *Cada estrato X_α é uma subvariedade conexa imersa de U e U é igual à união disjunta $\cup_{\alpha \in I} X_\alpha$;*
2. *Se $x \in U$ pertence a um estrato X_α então o espaço tangente T_xX_α coincide com $\theta_X(x)$;*
3. *Se X_α e X_β são dois estratos diferentes tais que X_α intercepta o fecho de X_β então X_α está contido na fronteira de X_β.*

A estratificação $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ do lema anterior é chamada estratificação logarítmica de X e o estrato X_α, estrato logarítmico. Dizemos que $(X, 0)$ é holonômica se, para alguma vizinhança U de 0 em $\mathbb{C}^n$, a estratificação logarítmica tem um número finito de estratos.

Exemplo 2.32. Se $(X, 0)$ é uma ICIS quase homogênea em $(\mathbb{C}^n, 0)$ e $C_1, \dots, C_k$ são as componentes irredutíveis de X, a estratificação logarítmica de X é dada pelos seguintes estratos (ver [6]):

$$X_0 = \mathbb{C}^n - X,\ X_i = C_i - \{0\},\ i = 1, \dots, k \text{ e } X_{k+1} = \{0\}.$$

Portanto, X é holonômica.

Em [6], Bruce e Roberts exibem propriedades importantes do número de Bruce-Roberts de um germe de função com respeito a um germe variedade analítica $(X, 0)$ com a hipótese de que a variedade logarítmica característica de X, $LC(X)$, seja Cohen-Macaulay. Vemos, a seguir, a definição de $LC(X)$.

Definição 2.33. Suponhamos que os campos vetoriais $\delta_1, \dots, \delta_m$ geram θ_X para alguma vizinhança U de 0 em $\mathbb{C}^n$. Então, se $T^*_U\mathbb{C}^n$ é a restrição do fibrado cotangente de $\mathbb{C}^n$ a U, definimos

$$LC_U(X) := \{(x, \xi) \in T^*_U\mathbb{C}^n : \xi(\delta_i(x)) = 0, i = 1, \dots, m\}.$$

$LC(X)$ é o germe de $LC_U(X)$ em $T^*_0\mathbb{C}^n$, o espaço cotangente a $\mathbb{C}^n$ em 0.

Esta definição é independente da escolha dos campos δ_i (ver [6]).
Consideramos $T^*\mathbb{C}^n \equiv \mathbb{C}^{2n}$ pela identificação

$$(x_1, \ldots, x_n, p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n) = (x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n).$$

Na seção 7 de [6], Bruce e Roberts mostram que se $X = \Phi^{-1}(0)$, onde

$$\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_p) : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$$

é uma ICIS quase homogênea com pesos $(w_1, \ldots, w_n)$, então $LC(X)$ é dada pelos zeros de

$$\langle \phi_i p_j, \epsilon, I_{p+1}(A) : i = 1, \ldots, p,\ j = 1, \ldots, n \rangle$$

onde $\epsilon = \sum_{j=1}^{n} w_i x_i p_i$ e $I_{p+1}(A)$ é o ideal gerado pelos menores de ordem $p+1$ da matriz

$$A = \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & p_n \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \phi_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Segundo Bruce e Roberts, se X tem uma singularidade isolada e não é uma hipersuperfície, então $LC(C)$ não é Cohen-Macaulay ([6], Proposição 7.3), mas se X é uma curva plana, então $LC(X)$ é Cohen-Macaulay ([6], Proposição 6.3). É um problema aberto se $LC(X)$ é ou não Cohen-Macaulay para uma hipersuperfície qualquer com singularidade isolada. Trazemos aqui uma resposta positiva para o caso em que X é quase homogênea, lembrando que, por ([6], Proposição 1.14), X é holonômica se, e somente se, $\dim LC(X) = n$.

Teorema 2.34. *Se $(X, 0)$ é um germe de hipersuperfície quase homogêneo com singularidade isolada, então $LC(X)$ é Cohen-Macaulay.*

Demonstração: Seja $\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ quase homogêneo com $X = \phi^{-1}(0)$, então $LC(X)$ é dado pelos zeros de ϕp_j, ϵ e $I_2(A)$, onde

$$A = \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & p_n \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Como ϕ é quase homogênea, pela fórmula de Euler, temos

$$\begin{aligned} \text{fil}(\phi)\phi p_j &= \left(\sum_{k=1}^{n} w_k x_k \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right) p_j \\ &= \sum_{k=1}^{n} w_k x_k p_j \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} w_k x_k \left(p_j \frac{\partial \phi}{\partial x_k} - p_k \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \left(w_1 x_1 p_1 + ... + w_n x_n p_n \right).$$

Isso implica que $\langle \phi p_j, I_2(A), \epsilon \rangle = \langle I_2(A), \epsilon \rangle$.

Escrevemos

$$\mathcal{O}_{LC(X)} = \frac{\mathcal{O}_{2n}}{\langle I_2(A), \epsilon \rangle} = \frac{R}{I_2(A)},$$

onde $R = \mathcal{O}_{2n}/\langle \epsilon \rangle$. Como $I_2(A)$ é um ideal determinantal em R e

$$\dim \frac{R}{I_2(A)} = \dim \mathcal{O}_{LC(X)} = n = (2n-1) - (n-2+1) = \dim(R) - (n-2+1),$$

segue do teorema 1.1 que $LC(X)$ é Cohen-Macaulay. ■

Dada $(X, 0)$ uma ICIS de dimensão d, temos a d-ésima multiplicidade polar definida por Gaffney em [15]:

$$m_d(X) = \mu(l|_X),$$

com $l : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ uma função linear genérica. Pela fórmula de Lê-Greuel, temos que

$$m_d(X) = \mu(X, 0) + \mu(X, l).$$

Denotemos as componentes irredutíveis de $LC(X)$ por $Y_0, \ldots, Y_{k+1}$ e por m_i a multiplicidade de Y_i em $LC(X)$, com $Y_0 = \mathbb{C}^n \times \{0\}$, $Y_{k+1} = X \times \{0\}$ e as outras componentes Y_i, com $i = 1, \ldots, k$ são associadas aos estratos $X_i = C_i - \{0\}$.

Corolário 2.35. *Seja $(X, 0)$ o germe de uma hipersuperfície quase homogênea com singularidade isolada e seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ o germe de uma função com um ponto crítico isolado com respeito a X. Então*

$$\mu_{BR}(f, X) = \mu(f) + \sum_{i=1}^{k} n_i + m_{n-1}(X) - \mu(X, 0),$$

onde n_i é o número de pontos críticos de uma morsificação de f em X_i.

Demonstração: Como $LC(X)$ é Cohen-Macaulay, pelo Corolário 5.8 de [6],

$$\mu_{BR}(f, X) = \sum_{i=0}^{k+1} m_i n_i.$$

Segundo [6], página 80, $m_i = 1$ para $i = 0, \ldots, k$. Assim,

$$\begin{aligned} \mu_{BR}(f, X) &= \sum_{i=0}^{k} n_i + m_{k+1} n_{k+1} \\ &\overset{(*)}{=} \mu(f) + \sum_{i=1}^{k} n_i + n_{k+1} m_{k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\overset{(**)}{=} \quad \mu(f) + \sum_{i=1}^{k} n_i + m_{k+1} \\ &\overset{(***)}{=} \quad \mu(f) + \sum_{i=1}^{k-1} n_i + \mu(X, l) \\ &= \quad \mu(f) + \sum_{i=1}^{k} n_i + m_{n-1}(X) - \mu(X, 0) \end{aligned}$$

onde $l : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ é uma projeção linear genérica, $(*)$ segue do Corolário 5.14 de [6], $(**)$ segue do fato de que uma morsificação de f em $\{0\}$ só pode ter um ponto crítico e $(***)$, da Proposição 7.7 de [6]. ■

Observação 2.36. Observamos que este teorema também pode ser obtido do Corolário 5.14 demonstrado por Grulha em [10].

Em [27], Perez e Saia mostram que

$$1 + (-1)^d \mu(X, 0) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i m_i(X),$$

onde $m_i(X)$ é a i-ésima multiplicidade polar. Por outro lado, esta soma alternada está relacionada com a obstrução de Euler, $\mathrm{Eu}(X)$, pela seguinte fórmula de Lê-Tessier:

$$\mathrm{Eu}(X) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^{d-i-1} m_i(X)$$

Combinando os dois resultados, temos

$$m_d(X) - \mu(X, 0) = \mathrm{Eu}(X) + (-1)^d$$

Corolário 2.37. *Com as mesmas hipóteses do corolário anterior,*

$$\mu_{BR}(f, X) = \mu(f) + \sum_{i=1}^{k} n_i + Eu(X) + (-1)^{n-1}.$$

Observamos que a soma $\sum_{i=1}^{k} n_i$ é igual ao número de pontos críticos de uma morsificação de f em $X_1 \cup \ldots \cup X_k = X - \{0\} = X_{reg}$. Segundo Seade-Tibar-Verjovsky, esse número coincide com $(-1)^{n-1}\mathrm{Eu}(X, f)$, onde $\mathrm{Eu}(X, f)$ é a obstrução local de Euler de f com respeito a X. Temos, assim, o seguinte corolário.

Corolário 2.38. *Com as mesmas hipóteses do corolário anterior*

$$\mu_{BR}(f, X) = \mu(f) + Eu(X) + (-1)^{n-1}(Eu(X, f) + 1).$$

Capítulo 3

Teoria de Morse

A teoria de Morse estuda as mudanças que ocorrem na pré imagem de um intervalo do tipo $(-\infty, a]$ por uma função de Morse $f : M \to \mathbb{R}$ conforme a passa por um valor crítico de f, onde M é uma variedade suave.

Neste capítulo, descrevemos os resultados de Teoria de Morse clássica demonstrados por Milnor em [35]. Depois, utilizando os resultados demonstrados por Palais e Smale em [43], mostramos que, dados um germe de variedade analítica suave $(X, 0)$ e uma função de Morse $f : X \to \mathbb{C}$, sempre podemos escolher um representante X de $(X, 0)$ de modo a poder aplicar a Teoria de Morse a $f : X \to \mathbb{C}$.

3.1 Teoria de Morse Clássica

Seja f uma função real definida em uma variedade suave M. Um ponto p de M é um ponto crítico de f se a aplicação $df(p) : T_pM \to \mathbb{R}$ é identicamente nula. Se escolhemos um sistema de coordenadas $(x_1, ..., x_n)$ numa vizinhança U de p, p é um ponto crítico de f se, e somente se, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0$ para $i = 1, ..., n$. Se c é um número real tal que $f^{-1}(c)$ tem um ponto crítico de f, dizemos que c é um valor crítico de f, caso contrário, dizemos que c é um valor regular de f.

Um ponto crítico p de f é chamado não degenerado se a matriz $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\right)$ tem determinante diferente de zero. Se todos os pontos críticos de $f : M \to \mathbb{R}$ são não degenerados, dizemos que f é uma função de Morse. Considere a forma bilinear definida em $T_pM \times T_pM$ pela matriz $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\right)$, a dimensão do espaço vetorial de maior dimensão onde esta forma é negativo-definida é chamado o índice de f em p.

O teorema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [19], será utilizado no decorrer deste trabalho para garantir que uma função holomorfa com uma singularidade isolada na origem pode ser deformada a uma função de Morse.

Teorema 3.1. *([19], Teorema 2.2.3) Sejam Z um subconjunto analítico fechado de uma variedade analítica M e P uma variedade suave de dimensão finita. Seja, ainda, $F : P \times M \to \mathbb{R}$ uma função suave. Para cada $\alpha \in P$, denotamos $f_\alpha(x) = F(\alpha, x)$. Definimos $\phi : P \times M \to T^*M$ por $\phi(\alpha, x) = (x, df_\alpha(x))$. Se ϕ é uma submersão, então, para quase todo $\alpha \in P$, $f_{\alpha|_Z}$ é uma função de Morse.*

O comportamento de uma função suave numa vizinhança de um ponto crítico não degenerado pode ser completamente determinado pelo seu índice no ponto, como mostra o lema a seguir cuja demonstração pode ser encontrada em [35].

Lema 3.2. *(Lema de Morse, [35]) Seja p um ponto crítico não degenerado de f. Então existe um sistema de coordenadas local $(y_1, ..., y_n)$ numa vizinhança U de p com $y_i(p) = 0$ tal que*

$$f(y_1, \ldots, y_n) = f(p) - y_1^2 - ... - y_\lambda^2 + y_{\lambda+1}^2 + ... + y_n^2,$$

onde λ é o índice de f em p.

Corolário 3.3. *([35]) Pontos críticos não degenerados são isolados.*

Denotamos por M^a o conjunto dos pontos $x \in M$ tal que $f(x) \leq a$, o teorema a seguir, cuja demonstração também pode ser encontrada em [35], estuda a topologia de M^a conforme a passa pelos valores críticos de f.

Teorema 3.4. *([35]) Seja f uma função real definida numa variedade suave M.*

- *Sejam $a < b$ números reais e suponhamos que o conjunto $f^{-1}([a, b])$ é compacto e não contém pontos críticos de f. Então, M^a é difeomorfa a M^b. De fato, M^a é uma deformação retrátil de M^b, de modo que a aplicação inclusão de M^a em M^b é uma equivalência de homotopia.*

- *Sejam p um ponto crítico não degenerado de f e $c = f(p)$. Suponhamos que, para algum $\epsilon > 0$, $f^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon])$ é compacto e não contém pontos críticos de f além de p. Então, para todo ϵ suficientemente pequeno, o tipo de homotopia de $M^{c+\epsilon}$ é igual ao tipo de homotopia de $M^{c-\epsilon}$ com uma célula de dimensão igual ao índice de f em p colada.*

3.2 Teoria de Morse Generalizada

Em [43], Palais e Smale demonstram uma generalização da teoria de Morse, a qual passamos a descrever. Sejam M uma variedade riemanniana C^2 sem bordo e completa num espaço de Hilbert separável e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função C^2. Consideramos a seguinte condição sobre M e f, a qual chamaremos de condição (C) de Palais e Smale:

(C): Se (x_i) é uma sequência em M na qual $|f|$ é limitada e $||\nabla f(x_i)||$ tende a zero quando i tende a infinito, então existe uma subsequência (x_{i_k}) de (x_i) tal que (x_{i_k}) converge a algum ponto crítico x_0 de f em M.

Usando as palavras de Kaveh, em [28], podemos dizer que a condição (C) pede que f não tenha "pontos críticos no infinito".

Palais e Smale demonstram o seguinte teorema.

Teorema 3.5. *([43]) Seja (M, f) satisfazendo a condição* (C) *de Palais e Smale e suponha que todos os pontos críticos de f são não degenerados. Então*

- *Para quaisquer números reais $a < b$, existe apenas um número finito de pontos críticos de f em $f^{-1}([a, b])$. Portanto, os valores críticos de f são isolados.*

- *Sejam a e b valores regulares de f tais que existem r pontos críticos de f em $f^{-1}([a,b])$ com índices finitos $d_1, ..., d_r$. Então $f^{-1}((-\infty, b])$ tem o mesmo tipo de homotopia que $f^{-1}((-\infty, a])$ com r células de dimensão $d_1, ..., d_r$ coladas.*

Durante este trabalho, estamos estudando germes de função e germes de variedade. Recorrendo ao teorema a seguir, podemos garantir que, se $(X, 0) \subset (\mathbb{R}^n, 0)$ é um germe de variedade suave, sempre podemos escolher representantes de X e de germes de função em X que satisfazem a condição (C) de Palais e Smale.

Teorema 3.6. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade suave e $M = X \cap B(0, \epsilon)$ para algum $\epsilon > 0$. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função de Morse sem pontos críticos em $X \cap S_\epsilon$. Então (M, f) satisfaz a condição* (C) *de Palais e Smale.*

Demonstração:

Primeiro observamos que, pelo teorema do mergulho de Whitney (ver [18], Proposição 5.9), podemos considerar M mergulhada em $\mathbb{R}^{2\dim M+1}$ através de um mergulho próprio ϕ. Assim, $\phi(M)$ é fechada e, portanto, completa. Considerando M com a métrica induzida por ϕ, temos que M é completa.

Seja (x_i) uma sequência em M na qual $|f|$ é limitada e $||\nabla f(x_i)|| \to 0$.

Podemos considerar (x_i) como uma sequência em $\overline{M}$, o qual é compacto (fechado e limitado). Então existe uma subsequência (x_{i_k}) de (x_i) que converge para algum x_0 em $\overline{M}$.

Como f é analítica, $||\nabla f(.)||$ é uma função contínua. Logo, $||\nabla f(x_0)|| = 0$.

Assim, x_0 é um ponto crítico de f. Por hipótese, $x_0 \notin X \cap S_\epsilon = \partial M$. Portanto $x_0 \in M$, ou seja, existe um ponto crítico de f no fecho de $\{x_1, x_2, ...\}$.

Logo, (M, f) satisfaz a condição (C) de Palais e Smale. ■

Em [28], Kaveh demonstra um teorema que relaciona as características de Euler de uma variedade algébrica e das fibras de um funcional linear genérico definido nesta variedade ao número de pontos críticos de tal funcional. Inspirados neste resultado, obtemos:

Teorema 3.7. *Sejam $X \subset \mathbb{C}^n$ uma variedade analítica suave de dimensão d e $M = X \cap B(0, \epsilon)$ para algum $\epsilon > 0$. Seja, ainda, $f : X \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa com pontos críticos não degenerados e sem pontos críticos em $X \cap S_\epsilon$. Então*

$$\chi(f^{-1}(c) \cap M) = \chi(M) + (-1)^{d+1} \# \Sigma f_{|_M},$$

onde c é um valor regular de $f_{|_M}$ e $\#\Sigma f_{|_M}$ é o número de pontos críticos de $f_{|_M}$.

Para demonstrar este resultado, recorremos ao seguinte lema.

Lema 3.8. *Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ um germe de função holomorfa. Escrevemos $f = f_1 + if_2$, sendo $f_1 = \Re(f)$ a parte real de f e $f_2 = \Im(f)$, sua parte imaginária.*

1. *f tem um ponto crítico na origem se, e somente se, f_1 tem um ponto crítico na origem.*

2. *Se f tem um ponto crítico na origem e a matriz hessiana de f na origem tem posto igual a r, então a matriz hessiana de f_1 na origem tem posto igual a $2r$ e índice r.*

3. *f tem um ponto crítico não degenerado na origem se, e somente se, f_1 tem um ponto crítico não degenerado na origem (de índice n).*

Demonstração:

Consideramos a expressão de f em séries de potências:

$$f(z) = \sum_{j=1}^{n} a_j z_j + \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} z_j z_k + \dots$$

onde os pontos denotam termos de grau superior.

1. Se f é regular em 0, então, depois de uma mudança de coordenadas linear, podemos supor que f é da forma:

$$f(z) = z_1 + \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} z_j z_k + \dots$$

Se realizamos agora a mudança $z_j = x_j + iy_j$, obtemos:

$$f(z) = x_1 + iy_1 + \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x_j + iy_j)(x_k + iy_k) + \dots$$

Assim,

$$f_1(z) = x_1 + \sum_{j,k=1}^{n} b_{jk} x_j y_j + \dots$$

para certos $b_{jk} \in \mathbb{R}$. Desta forma, f_1 é regular em 0.

Reciprocamente, se f tem um ponto crítico em 0, temos

$$f(z) = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} z_j z_k + \dots$$

donde

$$f_1(z) = \sum_{j,k=1}^{n} b_{jk} x_j y_j + \dots$$

e f_1 tem um ponto crítico em 0.

2. Suponhamos que f tem um ponto crítico em 0. Pela classificação das formas quadráticas, depois de uma mudança de coordenadas linear, podemos supor que

$$f(z) = z_1^2 + \dots + z_r^2 + \dots$$

sendo r o posto da matriz hessiana. Substituindo $z_j = x_j + iy_j$ temos,

$$f(z) = x_1^2 - y_1^2 + \dots + x_r^2 - y_r^2 + 2i(x_1 y_1 + \dots + x_r y_r) + \dots$$

Portanto,

$$f_1(z) = x_1^2 - y_1^2 + \dots + x_r^2 - y_r^2 + \dots$$

Assim, a matriz hessiana de f_1 tem posto $2r$ e índice r.

3. É consequência imediata de (2).

■

Demonstração do Teorema 3.7: Consideremos M como uma variedade real de dimensão $2d$.

Usando o lema anterior, vemos que f_1 não tem pontos críticos em $X \cap S_\epsilon$ e que $f_1 : X \to \mathbb{R}$ é uma função de Morse. Assim, (M, f_1) é um par que satisfaz as hipóteses do teorema 3.6.

Sejam $a < b$ valores regulares de $f_{1|_M}$ tais que b é maior que o máximo de f_1 em $\overline{M}$ e o conjunto dos valores críticos de $f_{1|_M}$ esteja contido em (a, b). Tais a e b existem porque o conjunto dos valores críticos de $f_{1|_M}$ é finito. De fato, se f_1 tem um número infinito de valores críticos, então, f_1 tem um número infinito de pontos críticos em M. Seja (x_i) uma sequência de pontos críticos diferentes em M, em particular, (x_i) é uma sequência em $\overline{M}$, o qual é compacto, assim, existe uma subsebsequência (x_{i_k}) de (x_i) convergente. Logo, pelo Lema da Seleção da Curva (ver [32]), existe uma curva composta de pontos críticos de f_1 em M, ou seja, o conjunto dos pontos críticos de $f_{1|_M}$ não é discreto, o que contradiz o fato de $f_{1|_M}$ ser uma função de Morse.

Temos que

$$\begin{aligned} M = f_{1|_M}^{-1}(-\infty, \infty) &= f_{1|_M}^{-1}(-\infty, b] \\ &\overset{(*)}{\approx} f_1^{-1}(-\infty, a] \,\text{com}\, \#\Sigma f_{1|_M} \,\text{células de dimensão}\, d \,\text{coladas.} \end{aligned}$$

onde $\approx$ denota que dois espaços topológicos têm o mesmo tipo homotopia e $(*)$ segue do teorema 3.5.

Assim,

$$\chi(M) = \chi(f_{1|_M}^{-1}(-\infty, a]) + (-1)^d \#\Sigma f_{1|_M}.$$

Observamos que $M \cap f_1^{-1}(-\infty, a]$ é um subconjunto localmente fechado de $\mathbb{C}^n$, $f|_{M \cap f_1^{-1}(-\infty,a]}$ é uma submersão e $f|_{\overline{M} \cap f_1^{-1}(-\infty,a]}$ é uma aplicação própria, assim, pelo 1º Lema de Isotopia de Thom, $f_{|_M}$ é uma fibração em $f_1^{-1}(-\infty, a]$, ou seja, $f_1^{-1}(-\infty, a]$ tem o mesmo tipo de homotopia que $f^{-1}(a) \times \mathbb{C}$. Portanto,

$$\chi(f_{1|_M}^{-1}(-\infty, a]) = \chi(f_{|_M}^{-1}(a))\chi(\mathbb{C}) = \chi(f_{|_M}^{-1}(a)).$$

Além disso, M é localmente fechado, $f|_{M \setminus \Sigma f}$ é uma submersão e $f|_{\overline{M \setminus \Sigma f}}$ é própria, novamente pelo 1º Lema de Isotopia de Thom, $f_{|_M}$ é uma fibração sobre $\mathbb{C}$ menos o conjunto dos valores críticos de $f_{|_M}$, o tipo de homotopia de $f_{|_M}^{-1}(c)$ é independente do valor regular c de f. Assim,

$$\chi(M) = \chi(f_{|_M}^{-1}(c)) + (-1)^d \#\Sigma f_{1|_M},$$

para qualquer valor regular c de f.

Ou seja,

$$\chi(f^{-1}(c) \cap M) = \chi(M) + (-1)^{d+1} \# \Sigma f_{|_M}.$$

■

Capítulo 4

Variedades determinantais e suas suavizações

Um tipo de variedade analítica que pode ser naturalmente considerado como uma generalização para ICIS é a variedade determinantal com singularidade isolada, isto é, germes de variedades em $\mathbb{C}^N$ dados como zeros de certos menores de matrizes cujos elementos são germes de função em $\mathcal{O}_N$.

Variedades determinantais aparecem de maneira natural em teoria de singularidades. Um exemplo é o conjunto dos pontos singulares, $S(f)$, de um germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$, o qual é dado pelos menores de ordem maximal da matriz jacobiana de f.

Neste capítulo, definimos um tipo especial de germe de variedade determinantal, o qual chamamos SDI, e exibimos uma suavização para tais germes.

4.1 Variedades determinantais

Sejam $0 < s \leq m \leq n$ três números naturais e $M_{m,n} = M_{m,n}(\mathbb{C})$ o conjunto das matrizes complexas de ordem $m \times n$. Denotamos

$$M^s_{m,n} := \{A \in M_{m,n} : \text{posto}(A) < s\}$$

e

$$\Sigma^s = \{A \in M_{m,n} : \text{posto}(A) = s\}.$$

Teorema 4.1. *([1])*

1. *$M^s_{m,n}$ é uma subvariedade algébrica irredutível de $M_{m,n}$ de codimensão $(m - s + 1)(n - s + 1)$.*
2. *O conjunto singular de $M^s_{m,n}$ é $M^{s-1}_{m,n}$.*
3. *$\mathcal{S} = \{\Sigma^i\}_{0 \leq i \leq s-1}$ é uma estratificação de Whitney de $M^s_{m,n}$.*

Consideramos uma aplicação

$$\begin{array}{rccc} F: & (\mathbb{C}^N, 0) & \longrightarrow & (M_{m,n}, F(0)) \\ & x & \longmapsto & (f_{ij}(x))_{m \times n} \end{array}$$

onde f_{ij} é um elemento de $\mathcal{O}_N$ para todos os número naturais i, j tais que $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Definição 4.2. Seja $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ o germe de variedade definido por

$$(X, 0) = (F^{-1}(M^s_{m,n}), 0).$$

Dizemos que tal $(X, 0)$ é um germe de variedade determinantal do tipo $(m, n; s)$ em $\mathbb{C}^N$ se a dimensão de X é igual a

$$N - (m - s + 1)(n - s + 1).$$

Observamos que $(M^s_{m,n}, 0)$ define um germe de variedade determinantal. De fato, basta considerar a aplicação $F : (\mathbb{C}^{mn}, 0) \to (M_{m,n}, F(0))$ que identifica $\mathbb{C}^{mn}$ e $M_{m,n}$, ou seja, a aplicação que leva a $mn-$upla $(x_1, ..., x_{mn})$ na matriz $m \times n$ cujos elementos são x_i para $i = 1, \ldots, mn$. Então $M^s_{m,n}$ se identifica com $F^{-1}(M^s_{m,n})$.

Consideramos $(X, 0)$ com a estrutura analítica definida por F e $M^s_{m,n}$, isto é, dada pelos menores de ordem s de F. Observamos que se $s = 1$, então $(X, 0)$ é uma interseção completa.

Em geral, se $(X, 0) = (F^{-1}(M^s_{m,n}), 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ é um germe de variedade determinantal, então $(X, 0)$ é Cohen-Macaulay. De fato, o anel $\mathcal{O}_X$ é igual ao anel $\mathcal{O}_N/I_s$, onde I_s denota o ideal em $\mathcal{O}_N$ gerado pelos menores de ordem s da matriz $m \times n$ que define a aplicação F, além disso,

$$\dim \mathcal{O}_X = N - (m - s + 1)(n - s + 1) = \dim \mathcal{O}_N - (m - s + 1)(n - s + 1),$$

assim, pelo teorema 1.1, $\mathcal{O}_X$ é Cohen-Macaulay.

Exemplo 4.3. Sejam

$$\begin{array}{rccc} F: & (\mathbb{C}^4, 0) & \longrightarrow & M_{2,3} \\ & (x, y, z, w) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & w \end{pmatrix} \end{array}$$

e $(X, 0) = (F^{-1}(M^2_{2,3}), 0)$.

Então, $X = v(xz - y^2, yw - z^2, xw - yz)$ é uma variedade de dimensão

$$2 = 4 - (2 - 2 + 1)(3 - 2 + 1).$$

Portanto, $(X, 0)$ é um germe de variedade determinantal do tipo $(2, 3; 2)$ em $\mathbb{C}^4$.

Exemplo 4.4. Sejam

$$\begin{array}{rccc} F: & (\mathbb{C}^4, 0) & \longrightarrow & M_{2,3} \\ & (x, y, z, w) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x^3 & yx & x \\ z^2 & w & y - z \end{pmatrix} \end{array}$$

e $(X, 0) = (F^{-1}(M^2_{2,3}), 0)$.

Temos que X é uma variedade de dimensão

$$3 \neq 4 - (2 - 2 + 1)(3 - 2 + 1).$$

Portanto, $(X, 0)$ não é um germe de variedade determinantal.

Sejam $(X, 0) = (F^{-1}(M^s_{m,n}), 0)$ um germe de variedade determinantal em $(\mathbb{C}^N, 0)$ e sejam $g_1, ..., g_k$ os menores de ordem s de F, portanto, $X = v(g_1, ..., g_k)$. Sendo X uma variedade determinantal, temos que a codimensão de X é igual a $(m - s + 1)(n - s + 1)$, então, o conjunto singular de X, $\Sigma(X)$, é o conjunto dos pontos $x \in X$ tais que

$$\text{posto}(J(g_1, ..., g_k)(x)) < (m - s + 1)(n - s + 1),$$

onde $J(g_1, ..., g_k)(x)$ denota a matriz jacobiana de $(g_1, ..., g_k)$ em x.

Exemplo 4.5. Sejam

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{C}^4 & \longrightarrow & M_{2,3} \\ & (x,y,z,w) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & w \end{pmatrix} \end{array}$$

e $X = F^{-1}(M^2_{2,3})$.

Vamos calcular o conjunto singular de X. Denotamos

$$\begin{array}{rcl} g_1(x,y,z,w) & = & -z^2 + yw \\ g_2(x,y,z,w) & = & -yz + xw \\ g_3(x,y,z,w) & = & y^2 - xz \end{array}$$

Seja $I_2(J(g_1, g_2, g_3))$ o ideal em $\mathcal{O}_4$ gerado pelos menores de ordem 2 da matriz jacobiana de (g_1, g_2, g_3),

$$J(g_1, g_2, g_3) = \begin{pmatrix} 0 & w & -2z & y \\ w & -z & -y & x \\ -z & 2y & -x & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{array}{rcl} I_2(J(g_1,g_2,g_3)) & = & \langle -x^2, 2y^2 + xz, -yz - xw, -xy, 4yz - xw, -2z^2, -2xy, \\ & & z^2 - 2yw, -2y^2, -zw, -xz, -yz, 2z^2 + yw, -2zw, y^2 - 2xz, \\ & & -w^2, -yz - xw, yw \rangle \\ & = & \langle x^2, xy, y^2 - 2xz, xz, yz + xw, 2z^2 + yw, xw, yw, zw, w^2 \rangle . \end{array}$$

O conjunto dos pontos singulares de X é dado por

$$\begin{array}{rcl} \Sigma(X) & = & v(\langle I_2(J(g_1,g_2,g_3)), g_1, g_2, g_3 \rangle) \\ & = & v(\langle x^2, xy, y^2 - 2xz, xz, yz + xw, 2z^2 + yw, xw, yw, zw, w^2, \\ & & -z^2 + yw, -yz + xw, y^2 - xz \rangle) \\ & = & \{(0,0,0,0)\} \end{array}$$

Portanto, o único ponto singular de $(X,0)$ é $(0,0,0,0)$.

Apresentamos um conceito novo de singularidade determinantal isolada, o qual é ligeiramente diferente daquele apresentado por Ebeling e Gusein-Zade em [12]. Por razões técnicas, deste ponto em diante nos restringimos aos casos:

$$(*)\quad s=1 \text{ ou } N<(m-s+2)(n-s+2).$$

Observamos que a condição $(*)$ será utilizada para exibir uma suavização de $(X,0)$, não sabemos se os nossos resultados continuam válidos se tal hipótese for retirada.

Definição 4.6. Seja $(X,0)\subset(\mathbb{C}^N,0)$ um germe de variedade determinantal do tipo $(m,n;s)$ definido por $(X,0)=F^{-1}(M^s_{m,n})$, satisfazendo a condição $(*)$. Dizemos que $(X,0)$ é uma singularidade determinantal isolada, ou SDI, se X é suave em x e $\text{posto}(F(x))=s-1$, para todo $x\neq 0$ numa vizinhança da origem.

Uma SDI tem singularidade isolada no sentido usual, mas acrescentamos a hipótese sobre o posto de F. Essa condição será necessária para definir a característica de Euler evanescente.

Em [12], Ebeling e Gusein-Zade definem um tipo especial de germe de variedade determinantal, o qual eles denominam *essentially isolated determinantal singularity* e abreviam por EIDS. Apresentamos, a seguir, a definição de EIDS.

Definição 4.7. ([12]) Um ponto $x\in F^{-1}(M^s_{m,n})$ é essencialmente não singular se, nesse ponto, a aplicação F é transversal ao estrato correspondente da variedade $M^s_{m,n}$ (isto é, a Σ^{i-1}, com $i=\text{rank}(F(x))+1$).

Um germe $(X,0)\subset(\mathbb{C}^N,0)$ de uma variedade determinantal do tipo $(m,n;s)$ tem um ponto essencialmente singular isolado na origem (ou é uma singularidade determinantal essencialmente isolada, EIDS) se tem apenas pontos essencialmente não singulares numa vizinhança da origem em X.

Por causa da condição $(*)$, nossa definição de SDI é equivalente ao conceito de EIDS, como mostra o lema a seguir.

Lema 4.8. *Seja $(X,0)\subset(\mathbb{C}^N,0)$ uma variedade determinantal do tipo $(m,n;s)$ definida por $(X,0)=F^{-1}(M^s_{m,n})$ satisfazendo a condição $(*)$. Então, $(X,0)$ é uma SDI se, e somente se, F é transversal à estratificação $\mathcal{S}=\{\Sigma^i\}_{0\leq i\leq s-1}$ numa vizinhança da origem.*

Demonstração: Suponhamos que $(X,0)$ é uma SDI. Seja $x\in X$, $x\neq 0$. Então X é suave em x e $\text{posto}(F(x))=s-1$. Seja, na notação do lema 1.10, J o ideal em $\mathcal{O}_{(mn,F(x))}$ gerado pelos menores de ordem s da matriz $(x_{ij})_{m\times n}$, onde x_{ij} é um sistema de coordenadas local em $(\mathbb{C}^{mn},F(x))$.

Como Σ^{s-1} é um aberto em $M^s_{m,n}$, pois seu complementar é igual a $M^s_{m,n}\cap v(I_{s-1}(x_{ij}))$ é um fechado em $M^s_{m,n}$, o anel local $\mathcal{O}_{(mn,F(x))}/i(\Sigma^{s-1})$ é igual ao anel local $\mathcal{O}_{(mn,F(x))}/J$. Assim, $\mathcal{O}_{(mn,F(x))}/J$ é um anel regular e, pelo lema 1.10, como por hipótese, $\mathcal{O}_N/I$ é regular onde $I=F^*(J)$, F é transversal a Σ^{s-1} em $F(x)$.

Assumamos, agora, que F é transversal a $\mathcal{S}$. Seja $x \in X$, $x \neq 0$. Como $N < (m-s+2)(n-s+2)$ e F é transversal a Σ^i com $i = \text{posto}(F(x))$, temos que

$$\begin{array}{rcl} mn & \leq & N + mn - (m-i)(n-i) \\ & < & (m-s+2)(n-s+2) + mn - (m-i)(n-i) \end{array}$$

ou seja, $(m-s+2)(n-s+2) > (m-i)(n-i)$. Se $i \leq s-2$, então, $(m-i)(n-i) \geq (m-s+2)(n-s+2)$. Portanto, $i = s-1$.

Assim, novamente pelo lema 1.10, como F é transversal a $v(J) = \Sigma^{s-1}$, (X, x) é regular.

■

Observação 4.9. Se $s = 1$, a condição $(*)$ é automaticamente satisfeita e, nesse caso, $(X, 0)$ é uma SDI se, e somente se, $(X, 0)$ é uma ICIS.

Para alguns resultados posteriores necessitaremos do fato que uma SDI $(X, 0)$ é reduzida, isso pode ser verificado garantindo-se que $(X, 0)$ satisfaz as condições R0 e S1 de Serre (ver [33]). Em linhas gerais, essas condições dizem que $(O_X)_p$ é um anel regular para todo ideal primo p de $\mathcal{O}_X$ com altura igual a zero (R0) e a profundidade de $(O_X)_p$ é maior que ou igual ao máximo entre a altura de p e 1 para todo ideal primo p de $\mathcal{O}_X$ (S1). A primeira condição vale se o conjunto singular de X for uma variedade de codimensão maior que ou igual a 1 (ver demonstração do teorema 18.15 de [13]) e a segunda é equivalente a dizer que $\mathcal{O}_X$ é Cohen-Macaulay (ver [33]). No nosso caso, temos que uma SDI $(X, 0)$ é Cohen-Macaulay e, como tem singularidade isolada, se a dimensão de X for maior que 0, então o conjunto singular de X tem codimensão, no mínimo, igual a 1. Assim, X satisfaz as condições R_0 e S_1 de Serre, portanto, temos:

Teorema 4.10. *Se $(X, 0)$ é uma SDI de dimensão maior que zero, então $(X, 0)$ é reduzida.*

4.2 Suavização de uma variedade determinantal

Dado um germe de variedade determinantal $(X, 0) = (F^{-1}(M^s_{m,n}), 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$, vamos construir um suavização de $(X, 0)$ através de uma deformação de F. Seja $A = (a_{ij})_{m \times n}$ com $a_{ij} \in \mathbb{C}$ números genéricos. Denotamos

$$\begin{array}{rccc} F_A: & \mathbb{C}^N & \to & M_{m,n} \\ & x & \mapsto & F(x) + A \end{array}$$

e $X_A = F_A^{-1}(M^s_{m,n})$.

Exemplo 4.11. Sejam

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{C}^4 & \to & M_{2,3} \\ & (x, y, z, w) & \mapsto & \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & w \end{pmatrix} \end{array}$$

e $X = F^{-1}(M^2_{2,3})$.

Seja

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

com $a_{i,j} \in \mathbb{C}$ genéricos. Então

$$F_A(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} x+a_{11} & y+a_{12} & z+a_{13} \\ y+a_{21} & z+a_{22} & w+a_{23} \end{pmatrix} \quad \text{e,}$$

$$\begin{aligned} X_A \;=\; & v(xz + xa_{22} + a_{11}z + a_{11}a_{22} - y^2 - ya_{21} - a_{12}y - a_{12}a_{21}, xw + xa_{23} \\ & + a_{12}a_{23} - z^2 - za_{22} + a_{11}w + a_{11}a_{23} - zy - za_{21} - a_{13}y - a_{13}a_{21}, \\ & yw + ya_{23} + a_{12}w - a_{13}z - a_{13}a_{22}). \end{aligned}$$

Se $A = 0$, $X_A = X$.

Se $A \neq 0$, X_A é suave para quase toda matriz $A \in M_{2,3}$ (ver teorema 4.12). Para ilustrar este fato, acrescentamos um exemplo de cálculo efetuado no SINGULAR.

Primeiro definimos a matriz $M = (f_{ij})$:

$> matrixM[2][3] = x, y, z, y, z, w;$

Encontramos, agora, uma matriz genérica $A \in M_{2,3}$:

$> matrixA[2][3] = random(-100, 100), random(-100, 100), random(-100, 100),$
$random(-100, 100), random(-100, 100), random(-100, 100);$

Fazemos $M_A := M + A$:

$> matrixMA[2][3] = M + A;$

Calculamos a matriz jacobiana da função definida pelos menores de ordem 2 de $M + A$:

$> idealiA = minor(MA, 2);$
$> matrixJ[3][4] = diff(iA[1], x), diff(iA[1], y), diff(iA[1], z), diff(iA[1], w),$
$diff(iA[2], x), diff(iA[2], y), diff(iA[2], z), diff(iA[2], w), diff(iA[3], x),$
$diff(iA[3], y), diff(iA[3], z), diff(iA[3], w);$

Encontramos os menores de ordem 2 e somamos o ideal iA gerado pelos menores de ordem 2 da matriz $M + A$:

$> ideal\, jA = minor(J, 2);$
$> ideal\, lA = iA + jA;$
$> std(lA);$
$[1] = 1$

O conjunto singular de X_A é formado pelos zeros comuns dos elementos do ideal $lA = \langle 1 \rangle$. Portanto, X_A não possui pontos críticos, ou seja, X_A é suave.

Para construir, em geral, uma suavização como a do exemplo anterior, utilizamos o teorema a seguir.

Teorema 4.12. *Seja $(X, 0) = (F^{-1}(M^s_{m,n}), 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ uma SDI. Escolhemos um representante suficientemente pequeno de $X = F^{-1}(M^s_{m,n})$. Existe um aberto de*

Zariski não vazio $W \subset M_{m,n}$ tal que X_A é suave e posto$(F_A(x)) = s-1$ para todo $x \in X_A$ e $A \in W$.

Demonstração: Escolhemos uma bola aberta $B \subset \mathbb{C}^N$ tal que X é suave e posto$(F(x)) = s-1$ para todo $x \in B \setminus \{0\}$.

Denotamos

$$\tilde{C} = \{(A,x) \in M_{m,n} \times \mathbb{C}^N : x \,\text{é um ponto singular de}\, X_A\}$$

e

$$C = \{A \in M_{m,n} : X_A \text{ não é regular}\}.$$

$\tilde{C} = v(I_{\text{codim}X}(J_A), g_{1A}, \ldots, g_{kA})$, onde

$$J_A = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{1A}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_{1A}}{\partial x_N} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_{kA}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_{kA}}{\partial x_N} \end{pmatrix}$$

e $g_{1A}, \ldots, g_{kA} \in \mathcal{O}_{N+mn}$ são os menores de ordem s de $F + A$. Portanto, $\tilde{C}$ é um subconjunto analítico de $M_{m,n} \times \mathbb{C}^N$.

Consideramos

$$\begin{array}{rccc} \pi: & (\tilde{C},0) & \to & (M_{m,n}(\mathbb{C}),0) \\ & (A,x) & \mapsto & A \end{array}$$

Como $(X,0)$ tem uma singularidade isolada na origem, $\pi^{-1}(0) = \{0\}$. Assim, pelo lema 1.20, π é uma aplicação finita e, pelo lema 1.21, $C = \pi(\tilde{C})$ é um subconjunto analítico de $M_{m,n}(\mathbb{C})$.

Tomamos o aberto de Zariski $W = M_{m,n} \setminus C$. Precisamos mostrar que W é não vazio.

Seja

$$\begin{array}{rccc} \phi: & M_{m,n}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^N & \longrightarrow & M_{m,n}(\mathbb{C}) \\ & (A,x) & \longmapsto & F(x) + A \end{array}$$

ϕ é uma submersão. De fato, identificando $M_{m,n}(\mathbb{C})$ com $\mathbb{C}^{mn}$ e denotando $F = (f_{ij})$, a matriz jacobiana de ϕ é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \frac{\partial f_{11}}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_{11}}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \frac{\partial f_{mn}}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_{mn}}{\partial x_N} \end{pmatrix}$$

a qual tem um menor de ordem máxima cujo determinante é igual a 1.

Assim, ϕ é uma submersão e, portanto, é transversal a toda subvariedade de $M_{m,n}$, em particular, a Σ^{s-i} para $i = 1, \ldots, s$.

Fazendo, na notação do lema 1.9, $j : M_{2,3} \longrightarrow C^\infty(\mathbb{C}^N, M_{m,n})$,

$$\begin{array}{rccc} j(A) = \phi_A: & \mathbb{C}^N & \longrightarrow & M_{m,n}(\mathbb{C}) \\ & x & \longmapsto & F(x) + A \end{array}$$

temos que ϕ_A é transversal a Σ^{s-i} com $i = 1, \ldots, s$ para quase toda matriz A.

Seja, então, $A \in M_{m,n}$ tal que ϕ_A é transversal a Σ^{s-i}, para $1 \leq i \leq s$. Temos que

$$\dim \Sigma^{s-i} = mn - (m-s+i)(n-s+i),$$

portanto, se $i > 1$,

$$\dim \mathbb{C}^N + \dim \Sigma^{s-i} = N + mn - (m-s+i)(n-s+i) < mn,$$

pois, por hipótese, $N < (m-s+2)(n-s+2)$. Logo, como ϕ_A é transversal a Σ^{s-i}, $\phi_A(\mathbb{C}^N) \cap \Sigma^{s-i} = \emptyset$, para $2 \leq i \leq s$. Além disso, como ϕ_A é transversal a Σ^{s-1}, $\phi_A^{-1}(\Sigma^{s-1})$ é suave. Donde,

$$X_A = \phi_A^{-1}(M_{m,n}^s) = \cup_{i=1}^s \phi_A^{-1}(\Sigma^{s-i}) = \phi_A^{-1}(\Sigma^{s-1})$$

é suave. Além disso, pelo lema 4.8, posto$(F_A(x)) = s-1$, para todo $x \in X_A$.

Portanto, W é um conjunto não vazio. ■

Observação 4.13. Observamos que, pela demonstração do teorema anterior, temos que, se $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ for um germe de variedade determinantal com singularidade isolada do tipo $(m, n; s)$ tal que $N < (m-s+2)(n-s+2)$, então X_A é suave para toda matriz A num aberto de Zariski em $M_{m,n}$.

Em geral, quando pensamos em suavizações de germes de conjuntos analíticos, consideramos os parâmetros num subconjunto de $\mathbb{C}$ e não de $M_{m,n}$ como estamos fazendo. O lema a seguir nos permite justificar que existe uma matriz de números complexos $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ tal que $X_{tA} = (F + tA)^{-1}(M_{m,n}^s(\mathbb{C}))$ é suave para todo t numa vizinhança da origem.

Lema 4.14. *Seja $V \subset \mathbb{C}^n$ um subconjunto analítico próprio. Então existe uma reta L em $\mathbb{C}^n$ tal que $L \cap V = \{0\}$.*

Demonstração: Sejam $V = v(I)$ um conjunto analítico e $\pi : (V, 0) \to (\mathbb{C}^k, 0)$ definida por $\pi(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_k)$.

Pelo Teorema da Normalização de Noether (ver [26], por exemplo), temos que $\mathcal{O}_V = \mathcal{O}_n/I$ é um $\mathcal{O}_k$-módulo finitamente gerado. Assim, pelo lema 1.20, π é uma aplicação finita. Então, $\pi^{-1}(0) \cap V = \{0\}$. Mas $\pi^{-1}(0)$ é um $(n-k)-$plano. Então, existe uma reta $L \subset \pi^{-1}(0)$ tal que $L \cap V = \{0\}$. ■

Como consequência, temos o seguinte teorema.

Teorema 4.15. *Sejam $(X, 0) = (F^{-1}(M_{m,n}^s), 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ uma SDI e $A = (a_{ij})_{m\times n}$ uma matriz genérica. Denotamos*

$$\begin{array}{rccc} F_t: & \mathbb{C}^N & \longrightarrow & M_{m,n} \\ & x & \longmapsto & F(x) + tA \end{array}$$

e $X_t = F_t^{-1}(M_{m,n}^s)$. Então X_t é uma suavização de X.

Observação 4.16. Schaps, em [47], demonstra a existência de uma suavização de uma SDI com uma abordagem diferente da utilizada neste capítulo.

Capítulo 5

Variedades determinantais de codimensão 2 em $\mathbb{C}^4$

Se $(X,0) = (\cap_{i=1}^{k}\phi_i^{-1}(0),0) \subset (\mathbb{C}^N,0)$ for uma ICIS, por Lê-Greuel, temos que

$$\mu(X,0) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_N}{\langle \phi_1,\ldots,\phi_k\rangle + J(p,\phi_1,\ldots,\phi_k)} - \mu(X\cap p^{-1}(0)), \qquad (5.1)$$

para qualquer função $p:\mathbb{C}^N\to\mathbb{C}$ tal que $X\cap p^{-1}(0)$ também seja uma ICIS.

Na tentativa de estender a definição do número de Milnor para um germe de variedade determinantal $(X,0)$, observamos que, em geral, $\mu(X\cap p^{-1}(0),0)$ não está bem definido, entretanto, se $(X,0)$ for uma variedade de dimensão 2, então, para uma aplicação linear genérica $p:\mathbb{C}^N\to\mathbb{C}$, $X\cap p^{-1}(0)$ é uma curva e, portanto, $\mu(X\cap p^{-1}(0))$ é definido por Buchweitz e Greuel em [7].

Destacamos que se $(X,0) = (\cap_{i=1}^{k}\phi_i^{-1}(0),0) \subset (\mathbb{C}^N,0)$ é uma ICIS, $P:(\mathcal{X},0)\to\mathbb{C}$ é uma suavização de $(X,0)$ e $(\mathcal{Y},0)$ é o germe de conjunto descrito por

$$\mathcal{Y} = \{(x,t)\in\mathbb{C}^N\times\mathbb{C} : x \,\text{é ponto singular de}\, X_t\},$$

onde denotamos $X_t = P^{-1}(t)$, então $(\mathcal{Y},0)$ é um germe de variedade Cohen-Macaulay (de fato, $(\mathcal{Y},0)$ é determinantal). Assim,

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_N}{\langle \phi_1,\ldots,\phi_k\rangle + J(p,\phi_1,\ldots,\phi_k)} &= \dim_{\mathbb{C}} \tfrac{\mathcal{O}_{\mathcal{Y}}}{\langle t\rangle} \\
&= e(\langle t\rangle, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}) \\
&= \text{grau}(\pi) \\
&= \#\pi^{-1}(t) \\
&= \#\Sigma p|_{X_t},
\end{aligned}$$

com $\pi:(\mathcal{Y},0)\to\mathbb{C}$ dada por $\pi(x,t)=t$. Podemos, então, substituir o número $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_N}{\langle \phi_1,\ldots,\phi_k\rangle + J(p,\phi_1,\ldots,\phi_k)}$ por $\#\Sigma p|_{X_t}$ na fórmula de Lê-Greuel, obtendo

$$\mu(X,0) = \#\Sigma p|_{X_t} - \mu(X\cap p^{-1}(0)).$$

Neste capítulo, mostramos que se $(X,0)$ for uma variedade determinantal

de dimensão 2, então

$$\#\Sigma p|_{X_t} - \mu(X \cap p^{-1}(0)) = (-1)^{\dim X}(\chi(X_t) - 1).$$

Em [49], Wahl demonstra que, se $(X, 0)$ for um germe de variedade Cohen-Macaulay (o que é o caso de uma variedade determinantal) de codimensão 2, então a característica de Euler de uma suavização X_t de $(X, 0)$ independe da suavização escolhida.

Baseados nestas informações, nos restringimos neste capítulo a superfícies de dimensão 2 em $\mathbb{C}^4$ e definimos

$$\mu(X, 0) = \#\Sigma p|_{X_t} - \mu(X \cap p^{-1}(0)).$$

5.1 O número de Milnor de uma variedade de codimensão 2 em $\mathbb{C}^4$

0 teorema 3.1 mostra que uma função real analítica sobre uma variedade suave pode ser deformada a uma função de Morse. O lema a seguir estende este resultado para uma função holomorfa.

Lema 5.1. *Sejam $V \subset \mathbb{C}^n$ um subconjunto analítico suave, $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa e $g_\alpha(z_1..., z_n) := g(z_1, ..., z_n) + \alpha_1 z_1 + ... + \alpha_n z_n$ se $\alpha = (\alpha_1..., \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$. Então, $g_{\alpha|_V}$ é uma função de Morse para quase todo ponto $\alpha \in \mathbb{C}^n$.*

Demonstração: Definamos $F : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ por

$$F(a, b, x, y) = \Re(g_\alpha(z))$$

com $z := (z_1, \ldots, z_n), z_j = x_j + iy_j, a := (a_1, \ldots, a_n), b := (b_1, \ldots, b_n)$ e $\alpha_j := a_j + ib_j$.

Na notação do teorema 3.1,

$$\begin{aligned} f_\alpha(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) &= \Re(g_\alpha(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)) \\ &= \Re(g(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)) + \sum_{k=1}^{n}(a_k x_k - b_k y_k) \end{aligned}$$

e $\phi : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to T^*\mathbb{R}^{2n} \equiv \mathbb{R}^{4n}$ (com a identificação $(x_1, \ldots, x_{2n}, p_1 dx_1 + \ldots + p_{2n} dx_{2n}) = (x_1, \ldots, x_{2n}, p_1, \ldots, p_{2n})$) é dada por

$$\begin{aligned} \phi(a, b, x, y) &= (x, y, \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_1}, \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_n}, \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_n}) \\ &= (x, y, \frac{\partial \Re(g)}{\partial x_1} + a_1, \frac{\partial \Re(g)}{\partial y_1} - b_1, \ldots, \frac{\partial \Re(g)}{\partial x_n} + a_n, \frac{\partial \Re(g)}{\partial y_n} - b_n) \end{aligned}$$

Assim, a matriz jacobiana de ϕ é

$$\begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 1 & 0 & ... & \frac{\partial^2 \Re(g)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \Re(g)}{\partial x_1 y_1} & ... & \frac{\partial^2 \Re(g)}{\partial x_1 \partial y_n} \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & ... & -1 & \frac{\partial^2 \Re(g)}{\partial y_n x_1} & \frac{\partial^2 \Re(g)}{\partial y_n y_1} & ... & \frac{\partial^2 \Re(g)}{\partial y_n^2} \end{pmatrix}$$

a qual tem determinante igual a 1 ou -1. Portanto, ϕ é uma submersão. Logo, pelo teorema 3.1, $\Re(g_{\alpha|_V})$ é uma função de Morse para quase todo ponto $\alpha \in \mathbb{C}^n$. Assim, pelo lema 3.8, $g_{\alpha|_V}$ é uma função de Morse para quase todo ponto $\alpha \in \mathbb{C}^n$ ■

Lema 5.2. *Dada uma variedade determinantal com singularidade isolada $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ do tipo $(m, n; s)$ com $N < (m-s+2)(n-s+2)$, existe uma projeção linear $p : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$ tal que $p|_{X_A}$ é uma função de Morse para toda matriz $A \in W$, com W um subconjunto aberto de Zariski em $M_{m,n}$.*

Demonstração: Seja $A_0 \in M_{m,n}$ tal que X_{A_0} é suave (tal A_0 existe pelo teorema 4.12). Denotando $p_a(x_1, \ldots, x_N) = a_1 x_1 + \ldots + a_N x_N$ para cada $a = (a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{C}^N$, pelo lema 5.1, fazendo $g \equiv 0$, para quase todo ponto $a \in \mathbb{C}^N$, $p_a|_{X_{A_0}}$ é Morse e $p_a|_{X-\{0\}}$ é Morse. Escolhemos uma destas $p_a's$.

Seja,

$$\begin{aligned} \tilde{C} &= \{(x, A) \in \mathbb{C}^N \times M_{m,n} : x \text{ é ponto singular de } X_A \text{ ou } x \text{ é ponto crítico} \\ &\quad \text{degenerado de } p_a|_{X_A}\}. \end{aligned}$$

Temos que $\tilde{C}$ é um subconjunto analítico de $\mathbb{C}^N \times M_{m,n}$. De fato, seja (x_0, A) tal que $X_A = v(g_{1A}, \ldots, g_{rA})$ é suave em x_0 e seja

$$\tilde{C}_A = \{x \in \mathbb{C}^N : x \text{ é ponto crítico degenerado de } p_a|_{X_A}\},$$

Observamos que

$$\tilde{C}_A = v(\langle g_{1A}, \ldots, g_{rA} \rangle + J_{n-d+1}(g_{1A}, \ldots, g_{rA}, p_a) + J_N(g_{1A}, \ldots, g_{rA}, h_{1A}, \ldots, h_{sA})),$$

onde d é a dimensão de X e $J_{N-d+1}(g_{1A}, \ldots, g_{rA}, p_a) = \langle h_1, \ldots, h_s \rangle$ pois, depois de uma mudança de coordenadas, podemos supor que

$$g_{1A}, \ldots, g_{rA} = x_{d+1}, \ldots, x_N.$$

Portanto, $p_a|_{X_A} : X_A \to \mathbb{C}$ é dada por $p_a|_{X_A}(x_1, \ldots, x_d) = p_a(x_1, \ldots, x_d, 0, \ldots, 0)$.

Assim, o conjunto dos pontos críticos degenerados de p_a é dado por

$$v(g_{1A}, \ldots, g_{rA}, \frac{\partial p_a}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial p_a}{\partial x_d}, I_d(\frac{\partial^2 p_a}{\partial x_i x_j})).$$

Por outro lado, temos que

$$J_{N-d+1}(g_{1A},\ldots,g_{rA},p_a) = J_{N-d+1}(x_{d+1},\ldots,x_N,p_a) = \left\langle \frac{\partial p_a}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial p_a}{\partial x_d} \right\rangle.$$

Então,
$\langle g_{1A},\ldots,g_{rA}\rangle + J_{N-d+1}(g_{1A},\ldots,g_{rA},p_a) + J_N(g_{1A},\ldots,g_{rA},h_{1A},\ldots,h_{sA}) =$
$\langle g_{1A},\ldots,g_{rA}\rangle + \left\langle \frac{\partial p_a}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial p_a}{\partial x_d} \right\rangle + J_N(x_{d+1},\ldots,x_N,\frac{\partial p_a}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial p_a}{\partial x_d})$.

Além disso, $J_N(x_{d+1},\ldots,x_N,\frac{\partial p_a}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial p_a}{\partial x_d}) = I_d(\frac{\partial^2 p_a}{\partial x_i \partial x_j})_{1\leq i,j\leq d}$. Portanto,

$$\tilde{C}_A = v(\langle g_{1A},\ldots,g_{rA}\rangle + J_{n-d+1}(g_{1A},\ldots,g_{rA},p_a) + J_N(g_{1A},\ldots,g_{rA},h_1,\ldots,h_s)).$$

Seja x um ponto singular de X_A, então, $x \in \tilde{C}_A$, pois $J_{N-d}(g_{1A},\ldots,g_{rA}) = 0$. Logo,

$$\tilde{C} = v(\langle g_{1A},\ldots,g_{rA}\rangle + J_{n-d+1}(g_{1A},\ldots,g_{rA},p_a) + J_N(g_{1A},\ldots,g_{rA},h_{1A},\ldots,h_{sA})),$$

é um conjunto analítico.

Fazendo como na demonstração do teorema 4.12, temos que $C = \pi(\tilde{C})$ é analítico, onde $\pi : \tilde{C} \to M_{m,n}$ é definida por $\pi(x,A) = A$. Como $A_0 \notin C$, C é próprio.

O conjunto $W = M_{m,n} \setminus C$ é o aberto de Zariski procurado. ■

Assim, pelo lema 4.14, existe matriz $A \in M_{m,n}$ e projeção linear $p : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$ tal que $p|_{X_t}$ é uma função de Morse para todo t, onde, se $(X,0) = (F^{-1}(M^s_{m,n}),0)$, $X_t = (F+tA)^{-1}(M^s_{m,n})$.

Se $(X,0) = (F^{-1}(M^s_{m,n}),0) \subset (\mathbb{C}^4,0)$ é uma variedade determinantal com singularidade isolada de dimensão 2, a variedade analítica $X \cap p^{-1}(0)$ é uma curva e, portanto tem número de Milnor $\mu(X \cap p^{-1}(0),0)$ bem definido, ver ([7]).

Denotamos por $\#(\Sigma(p|_{X_t}))$ o número de pontos críticos de $p|_{X_t} = p : X_t \to \mathbb{C}$. No caso de X ser uma ICIS, por Lê-Greuel, temos que

$$\#(\Sigma(p|_{X_t})) - \mu(X \cap p^{-1}(0),0)$$

é igual ao número de Milnor de $(X,0)$. Veremos a seguir que se $(X,0)$ é uma variedade determinantal com singularidade isolada de dimensão 2 em $\mathbb{C}^4$, esta diferença é bem definida, ou seja, não depende da deformação e nem da projeção p escolhidas.

Lema 5.3. *Se $(X,0)$ é uma variedade determinantal com singularidade isolada de dimensão 2 em $\mathbb{C}^4$,*

$$\#(\Sigma(p|_{X_t})) - \mu(X \cap p^{-1}(0),0) = \chi(X_t) - 1,$$

onde $p : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}$ é uma projeção linear genérica e X_t é uma suavização de X como no capítulo anterior.

Demonstração: Seja c_t um valor regular de $p|_{X_t}$, então $X_t \cap p^{-1}(c_t)$ é uma

suavização de $X \cap p^{-1}(0)$. Logo,

$$\begin{aligned} \#\Sigma p|_{X_t} - \mu(X \cap p^{-1}(0), 0) &\overset{(*)}{=} \#\Sigma p|_{X_t} - (1 - \chi(X_t \cap p^{-1}(c_t))) \\ &= \#\Sigma p|_{X_t} + \chi(X_t \cap p^{-1}(c_t)) - 1 \\ &\overset{(**)}{=} \chi(X_t) - 1 \end{aligned}$$

onde $\chi(Y)$ denota a característica de Euler de Y, $(*)$ segue do fato de que $X_t \cap p^{-1}(c_t)$ é uma suavização de $X \cap p^{-1}(0)$ (ver [7]) e a igualdade $(**)$ segue do teorema 3.7.■

Consideramos o teorema a seguir, dado por Wahl em [49].

Teorema 5.4. *([49]) Se X é uma variedade Cohen-Macaulay de codimensão 2 e se $\pi : \mathcal{V} \to T$ é uma suavização de X, então $\chi(\pi^{-1}(t))$ não depende da suavização.*

Assim,

$$\#\Sigma p|_{X_t} - \mu(X \cap p^{-1}(0), 0) = \chi(X_t) - 1$$

não depende de p, de A ou de t. Então, podemos definir:

Definição 5.5. Seja $(X, 0) = (F^{-1}(M^s_{m,n}), 0) \subset (\mathbb{C}^4, 0)$ um germe de variedade determinantal com singularidade isolada com $4 < (m - s + 2)(n - s + 2)$. Definimos o número de Milnor de X por

$$\mu(X, 0) = \#\Sigma p|_{X_t} - \mu(X \cap p^{-1}(0), 0),$$

onde $p : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}$ é uma projeção linear genérica e X_t é igual a $(F + tA)^{-1}(M^s_{m,n})$ com $A \in M_{m,n}$ uma matriz cujos elementos são números complexos genéricos.

Exemplo 5.6. Sejam $X = F^{-1}(M^2_{2,3})$ com

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{C}^4 & \longrightarrow & M_{2,3} \\ & (x, y, z, w) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & w \end{pmatrix} \end{array}$$

$X_t = (F + tA)^{-1}(M^2_{2,3})$, com $A = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ e $p(x, y, z, w) = 3x + 4y - z + w$.

Denotamos por g_{1t}, g_{2t} e g_{3t} os menores de ordem 2 de $F+tA$ e consideramos

$$J(p, g_t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} & \frac{\partial p}{\partial z} & \frac{\partial p}{\partial w} \\ \frac{\partial g_{1t}}{\partial x} & \frac{\partial g_{1t}}{\partial y} & \frac{\partial g_{1t}}{\partial z} & \frac{\partial g_{1t}}{\partial w} \\ \frac{\partial g_{2t}}{\partial x} & \frac{\partial g_{2t}}{\partial y} & \frac{\partial g_{2t}}{\partial z} & \frac{\partial g_{2t}}{\partial w} \\ \frac{\partial g_{3t}}{\partial x} & \frac{\partial g_{3t}}{\partial y} & \frac{\partial g_{3t}}{\partial z} & \frac{\partial g_{3t}}{\partial w} \end{pmatrix}$$

Seja $I_3(J(p,g_t))$ o ideal em $\mathcal{O}_4$ gerado pelos menores de ordem 3 de $J(p,g_t)$, então $\Sigma(p|_{X_t}) = v(I_3(J(p,g_t)), g_{1t}, g_{2t}, g_{3t})$. Usando o software Mathematica, verificamos que $\#(\Sigma(p|_{X_t})) = 3$.

Para calcular $\mu(X,0)$, precisaríamos, agora, calcular $\mu(X \cap p^{-1}(0),0)$. Como $Y = X \cap p^{-1}(0)$ é uma curva, como feito em [42], podemos calcular seu número de Milnor através do número de Milnor $\mu(g|_Y)$ e do grau local grau(g) de uma função $g : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}$ na curva Y: $\mu(g|_Y) = \mu(Y,0) + \text{grau}(g|_Y) - 1$.

Seja $g = -x + 3y - 2z + w$. Então,

$$\mu(g|_Y) = \#\Sigma g|_{Y_t} = 4$$

com $Y_t = X_t \cap p^{-1}(0)$.

Por outro lado,

$$\text{grau}(g|_Y) = \#\{Y_t \cap g^{-1}(0)\} = 3.$$

Portanto, $\mu(X,0) = \mu(p) - \mu(Y,0) = 3 - (4 - 3 + 1) = 1$.

Observamos que a curva $X \cap p^{-1}(0)$ aparece na tabela de formas normais das curvas determinantais simples dada por [14] com $p(x,y,z,w) = w$, ali também podemos ver que $\mu(X \cap p^{-1}(0)) = 2$ e continuar os nossos cálculos com esta projeção.

Observação 5.7. Sabemos que se $(X,0)$ é uma ICIS de dimensão d, então

$$\mu(X,0) = (-1)^d(\chi(X_t) - 1),$$

onde X_t é uma suavização de X. Se X é uma variedade determinantal com singularidade isolada do tipo $(m,n;s)$ em $\mathbb{C}^4$ com $4 < (m-s+2)(n-s+2)$, então, pelo lema 5.3, também temos que

$$\mu(X,0) = \chi(X_t) - 1 = (-1)^{\dim X}(\chi(X_t) - 1).$$

Sabemos, também, que se $(X,0)$ é uma ICIS de dimensão d, o número de Milnor de X é igual ao d-ésimo número de Betti de uma deformação de X, $\beta_d(X_t)$. Em [4], Greuel e Steenbrink mostram que se $(X,0)$ é normal (o que é o caso de uma singularidade determinantal pois satisfaz as condições R1 (conjunto singular tem codimensão maior que ou igual a 2) e S2 (é Cohen-Macaulay) de Serre, ver [33, teorema 23.8]), então $\dim H_1(X_t) = 0$. Além disso, como X_t é conexa (pois, por [22, teorema 1], $\pi_0(X_t) = 0$), $\dim H_0(X_t) = 1$. Assim,

$$\mu(X) = \chi(X_t) - 1 = \beta_0(X_t) - \beta_1(X_t) + \beta_2(X_t) - 1 = \beta_2(X_t).$$

onde $\beta_i(X_t) = \dim H_i(X_t)$ denota o i-ésimo número de Betti de X_t. Concluímos, assim, que neste caso a nossa definição de número de Milnor de uma variedade determinantal coincide com aquela dada por Pereira e Ruas em [44].

5.2 O número de Milnor de uma função em uma variedade determinantal

Sejam $(X,0) = (F^{-1}(M^s_{m,n}),0) \subset (\mathbb{C}^4,0)$ com $4 < (m-s+2)(n-s+2)$ um germe de variedade determinantal com uma singularidade isolada na origem e $f : (\mathbb{C}^4,0) \to (\mathbb{C}, f(0))$ um germe de função holomorfa.

Consideramos o seguinte lema.

Lema 5.8. *Existe um aberto de Zariski não vazio W em $\mathbb{C}^4 \times M_{m,n}$ tal que $f_a|_{X_A}$ é uma função de Morse para todo $(a,A) \in W$, onde, se $a = (a_1,a_2,a_3,a_4)$, $f_a(x,y,z,w) = f(x,y,z,w) + a_1x + a_2y + a_3z + a_4w$ e $X_A = (F+A)^{-1}(M^s_{m,n})$.*

Demonstração: Sejam

$$C = \{(a,A) \in \mathbb{C}^4 \times M_{m,n} : f_a|_{X_A} \text{ não é função de Morse}\} \quad \text{e}$$

$$\tilde{C} = \{(a,A,x) \in \mathbb{C}^4 \times M_{2,3} \times \mathbb{C}^4 : x \text{ é um ponto crítico de } X_A \text{ ou } x \text{ é um ponto crítico degenerado de } f_a|_{X_A}\}$$

Temos que $\tilde{C}$ é um conjunto analítico. De fato, seja (x_0,A) tal que $X_A = v(g_{1A},\ldots,g_{rA})$ é suave em x_0 e seja

$$\tilde{C}_A = \{x \in \mathbb{C}^N : x \text{ é ponto crítico degenerado de } f|_{X_A}\},$$

Observamos que

$$\tilde{C}_A = v(\langle g_{1A},\ldots,g_{rA}\rangle + J_{N-d+1}(g_{1A},\ldots,g_{rA},f) + J_N(g_{1A},\ldots,g_{rA},h_{1A},\ldots,h_{sA})),$$

onde d é a dimensão de X e $J_{N-d+1}(g_{1A},\ldots,g_{rA},f) = \langle h_1,\ldots,h_s\rangle$. Pois, depois de uma mudança de coordenadas, podemos supor que

$$g_{1A},\ldots,g_{rA} = x_{d+1},\ldots,x_N.$$

Portanto, $f|_{X_A} : X_A \to \mathbb{C}$ é dada por $f|_{X_A}(x_1,\ldots,x_d) = f(x_1,\ldots,x_d,0,\ldots,0)$.

Assim, o conjunto dos pontos críticos degenerados de f é dado por

$$v\left(g_{1A},\ldots,g_{rA},\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_d},I_d\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}\right)\right).$$

Por outro lado, temos que

$$J_{N-d+1}(g_{1A},\ldots,g_{rA},f) = J_{N-d+1}(x_{d+1},\ldots,x_N,f) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_d}\right\rangle.$$

Então,

$$\langle g_{1A},\ldots,g_{rA}\rangle + J_{N-d+1}(g_{1A},\ldots,g_{rA},f) + J_N(g_{1A},\ldots,g_{rA},h_{1A},\ldots,h_{sA})$$

é igual a

$$\langle g_{1A},\ldots,g_{rA}\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_d}\right\rangle + J_N\left(x_{d+1},\ldots,x_N,\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_d}\right).$$

Além disso, $J_N(x_{d+1},\ldots,x_N,\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_d}) = I_d(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})_{1\leq i,j\leq d}$. Portanto,

$$\tilde{C}_A = v(\langle g_{1A},\ldots,g_{rA}\rangle + J_{N-d+1}(g_{1A},\ldots,g_{rA},f) + J_N(g_{1A},\ldots,g_{rA},h_1,\ldots,h_s)).$$

Seja x um ponto singular de X_A, então, $x \in \tilde{C}_A$, pois $J_{N-d}(g_{1A},\ldots,g_{rA}) = 0$. Logo,

$$\tilde{C} = v(\langle g_{1A},\ldots,g_{rA}\rangle + J_{N-d+1}(g_{1A},\ldots,g_{rA},f) + J_N(g_{1A},\ldots,g_{rA},h_{1A},\ldots,h_{sA})),$$

é um conjunto analítico.

Definimos $\pi : (\tilde{C},0) \to (\mathbb{C}^4 \times M_{m,n}(\mathbb{C}),0)$ por $\pi(a,A,x) = (a,A)$. Como feito no teorema 4.12, $C = \pi(\tilde{C})$ é um subconjunto analítico de $\mathbb{C}^4 \times M_{m,n}(\mathbb{C})$.

Seja $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ tal que X_A é suave (tal A existe pelo lema 4.12). Pelo lema 5.1, existe $a \in \mathbb{C}^4$ tal que $f_a|_{X_A}$ é Morse. Portanto, C é próprio.

$W = \mathbb{C}^4 \times M_{m,n} \setminus C$ é o aberto de Zariski procurado. ■

Assim, pelo lema 4.14, existe uma matriz $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ e um vetor $a \in \mathbb{C}^4$ tal que $f_t|_{X_t} = f_{ta}|_{X_{tA}}$ é uma função de Morse para todo t suficientemente próximo da origem.

Novamente, no caso de $(X,0)$ ser uma ICIS, temos que o número de pontos críticos de $f_t|_{X_t}$ não depende das deformações envolvidas e, neste caso, este número coincide com o número de Milnor de $f_{|X}$. O teorema a seguir mostra que no caso em que estamos trabalhando, $\#\Sigma(f_t|_{X_t})$ também não depende das deformações envolvidas.

Teorema 5.9. *Se $(X,0) \subset (\mathbb{C}^4,0)$ é um germe da variedade determinantal do tipo $(m,n;s)$ com $4 < (m-s+2)(n-s+2)$ com singularidade isolada e $f : (\mathbb{C}^4,0) \to \mathbb{C}$ é um germe de função holomorfa tal que $f_{|X}$ tem uma singularidade isolada na origem, então $\#\Sigma f_t|_{X_t}$ não depende das escolhas de A, a e t, onde f_t e X_t são como acima.*

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$ tal que $f_t|_{X_t}$ não tenha pontos críticos em $X_t \cap S_\epsilon$ para todo t suficientemente pequeno, onde $S_\epsilon = \{x \in \mathbb{C}^4 : ||x|| = \epsilon\}$. Tal $\epsilon > 0$ existe pois, como $f_{|X}$ tem uma singularidade isolada na origem, existe $\epsilon > 0$ tal que $f_{|X}$ não tem pontos críticos em S_ϵ, ou seja, $||\nabla f_{|X}(.)||$ é maior que zero em S_ϵ. Como S_ϵ é compacta, $||\nabla f_{|X}(.)||$ atinge um mínimo, $||\nabla f_{|X}(x_0)||$, em S_ϵ. Agora, $||\nabla f_t|_{X_t}(x)||$ é uma função contínua em x e em t. Portanto, se t é suficientemente pequeno, $||\nabla f_{|X}(.)||$ é diferente de zero em S_ϵ, ou seja, $f_t|_{X_t}$ não tem pontos críticos em S_ϵ.

Pelo teorema 3.7 fazendo $M = X_t \cap B(0,\epsilon)$, se c_t é um valor regular de $f_t|_{X_t}$, temos que

$$\begin{aligned}\#\Sigma f_t|_{X_t} &= \chi(X_t) - \chi(X_t \cap f_t^{-1}(c_t)) \\ &= \chi(X_t) - 1 + 1 - \chi(X_t \cap f_t^{-1}(c_t)) \\ &= \mu(X,0) + \mu(X \cap f^{-1}(0),0)\end{aligned}$$

pois $X_t \cap f_t^{-1}(c_t)$ é uma suavização da curva $X \cap f^{-1}(0)$ e $\mu(X \cap f^{-1}(0), 0) = 1 - \chi(X_t \cap f_t^{-1}(c_t))$ segundo [7]. ■

Com base neste teorema, podemos definir o número de Milnor de uma função holomorfa sobre uma variedade determinantal. Mais precisamente:

Definição 5.10. Se $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^4, 0)$ é um germe da variedade determinantal com singularidade isolada e $f : (\mathbb{C}^4, 0) \to \mathbb{C}$ é um germe de função holomorfa tal que $f_{|X}$ tem uma singularidade isolada na origem, definimos o número de Milnor de $f_{|X}$ por

$$\mu(f_{|X}) = \#\Sigma f_t|_{X_t},$$

onde $f_t(x, y, z, w) = f(x, y, z, w) + t(a_1x + a_2y + a_3z + a_4w)$ e $X_t = (F + tA)^{-1}(M^2_{2,3})$ com (a_1, a_2, a_3, a_4, A) no aberto de Zariski W dado pelo lema 5.8.

Se $(X, 0) = v(\phi_1, ..., \phi_k)$ é uma ICIS e $f : (\mathbb{C}^N, 0) \to \mathbb{C}$ é uma função tal que $(X \cap f^{-1}(0), 0)$ é também uma ICIS, então por Lê-Greuel

$$\mu(X, 0) = \#\Sigma f|_{X_t} - \mu(X \cap f^{-1}(0), 0).$$

Pelos cálculos feitos na demonstração do teorema 5.9, vale uma fórmula do tipo Lê-Greuel no caso de X ser uma variedade determinantal:

Teorema 5.11. *Dada uma função $f|_X : (X, 0) \to \mathbb{C}$ com singularidade isolada em uma IDS $(X, 0)$, temos:*

$$\mu(f_{|X}) = \mu(X, 0) + \mu(X \cap f^{-1}(0), 0).$$

Exemplo 5.12. Sejam $X = F^{-1}(M^2_{2,3})$ com

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{C}^4 & \longrightarrow & M_{2,3} \\ & (x, y, z, w) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & w \end{pmatrix} \end{array}$$

e $f : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}$ a função dada por $f(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + zw$.

Usamos o software mathematica para calcular o número de Milnor de f em X. Uma vez que os resultados dos cálculos realizados no mathematica podem ser muito longos, substituímos estes por breves explicações do que cada comando realiza.

Definimos A uma matriz genérica e $M_t = M + tA$, onde $M = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & w \end{pmatrix}$:
$A = Table[Random[Integer, \{-10, 10\}], \{i, 1, 2\}, \{j, 1, 3\}]$
(este comando define uma matriz 2×3 cujas entradas são inteiros aleatórios).
$Mt = \{\{x, y, z\}, \{y, z, w\}\} + tA$
Encontramos os menores de ordem 2 de M_t:
$I = Minors[Mt, 2]$
$It = Flatten[I]$
(este comando elimina as chaves, ou seja, escreve I em forma de um ideal)
Definimos uma deformação qualquer de f:
$f = x^2 + y^2 + zw + t(-2x + 3y + z + 4w)$

Acrescentamos f ao ideal I_t e definamos a matriz jacobiana da função dada por f e pelos menores de M_t:

$Ht = Append[It, f]$

$M2t = \{D[Ht, x], D[Ht, y], D[Ht, z], D[Ht, w]\}$

Encontramos os menores de ordem 3:

$Jt = Flatten[Minors[M2t, 3]]$

Encontramos uma base de Groebner para o ideal gerado pelos menores de ordem 3 de M_{2t} e pelos menores de ordem dois de M_t. O número de Milnor de f em X é igual ao número de zeros deste ideal:

$St = GroebnerBasis[Join[It, Jt], \{x, y, z, w\}]$

Definimos um valor para t, encontramos os zeros de S_t e o número de tais zeros, ou seja, o número de Milnor de f:

$t = 1/100$

$NSolve[St = 0, \{x, y, z, w\}]$

$Dimensions[\%]$

$mu(f) = \%[[1]]$

$Out := 10.$

Portanto, o número de Milnor de f em X é igual a 10.

Capítulo 6

A característica de Euler evanescente de uma SDI

No capítulo anterior, definimos o número de Milnor de uma SDI $(X,0)$ de codimensão 2 em $\mathbb{C}^4$ e o número de Milnor de uma função sobre $(X,0)$ com singularidade isolada. Agora, gostaríamos de generalizar estas definições para uma SDI qualquer.

Observamos que, se $(X,0)$ é uma SDI como as do capítulo 5, o número de Milnor ali definido coincide com a característica de Euler evanescente de $(X,0)$, isto é,

$$\mu(X,0) = (-1)^d(\chi(X_t) - 1),$$

onde d é a dimensão de X.

Neste capítulo, definimos a característica de Euler evanescente de uma SDI qualquer de dimensão igual a d por

$$\nu(X,0) = (-1)^d(\chi(X_A) - 1),$$

onde X_A é uma suavização especial de $(X,0)$. A princípio, chamamos $\nu(X,0)$ de número de Milnor de $(X,0)$, mas, por sugestão do professor James Damon, resolvemos chamar $\nu(X,0)$ de característica de Euler evanescente de $(X,0)$ devido ao fato de que não podemos garantir que $\nu(X,0)$ é igual ao d-ésimo número de Betti de $(X,0)$, o que geralmente se pede do número de Milnor de $(X,0)$.

Definimos, também no atual capítulo, o número de Milnor de um germe de função com singularidade isolada sobre uma SDI.

No capítulo anterior, a hipótese sobre a codimensão da SDI $(X,0)$, $\text{codim}X = 2$, foi essencial para a utilização do teorema 5.4, o qual garante que a característica de Euler, $\chi(X_t)$, é independente da suavização X_t de tal SDI. Para trabalhar com uma SDI qualquer precisamos estender este resultado.

Considerando uma SDI

$$(X,0) = (F^{-1}(M^s_{m,n}),0) \subset (\mathbb{C}^N,0),$$

denotamos $X_A = (F+A)^{-1}(M^s_{m,n})$.

Teorema 6.1. *Seja* $(X,0) = (F^{-1}(M^s_{m,n}),0) \subset (\mathbb{C}^N,0)$ *uma SDI. Escolhemos um*

representante suficientemente pequeno de $X = F^{-1}(M^s_{m,n})$. *Existe um aberto de Zariski não vazio* $W \subset M_{m,n}$ *tal que* X_A *é suave, posto*$(F_A(x)) = s-1$ *para todo* $x \in X_A$ *e* $A \in W$ *e a característica de Euler de* X_A, $\chi(X_A)$, *não depende de* $A \in W$.

Demonstração: Observamos primeiramente que se X_A é suave, então ϕ_A é transversal a Σ^{s-1}, onde para cada $A \in M_{m,n}$, $\phi_A : \mathbb{C}^N \to M_{m,n}$ é dada por $\phi_A(x) = F(x) + A$.

De fato, seja $M \in \phi_A(\mathbb{C}^N) \cap \Sigma^{s-1}$. Então, como Σ^{s-1} é um aberto em $M^s_{m,n}$, o anel local $\frac{\mathcal{O}_{(mn,M)}}{i(\Sigma^{s-1})}$ é igual ao anel local $\frac{\mathcal{O}_{(mn,M)}}{J}$, onde J é o ideal gerado pelos menores de ordem s da matriz $m \times n$ cujas entradas são as coordenadas em $\mathbb{C}^{mn} \equiv M_{m,n}$. Assim, $\frac{\mathcal{O}_{(mn,M)}}{J}$ é um anel regular e, pelo lema 1.10, como, por hipótese, $\mathcal{O}_N/I$ é regular onde $I = \phi_A^*(J)$, ϕ_A é transversal a Σ^{s-1} em M.

Seja W o aberto de Zariski não vazio dado pelo teorema 4.12.

Consideramos, agora,

$$\begin{array}{rcl} \pi : \phi^{-1}(\Sigma^{s-1}) & \longrightarrow & W \\ (A, x) & \to & A \end{array}$$

o qual é uma submersão, pois se A pertence a W, então, ϕ_A é transversal a Σ^{s-1}, donde, para cada $x \in \phi_A^{-1}(\Sigma^{s-1})$,

$$d\phi_A|_x(\mathbb{C}^N) + T_{\phi_A(x)}\Sigma^{s-1} = M_{m,n}.$$

Seja $D \in M_{m,n}$. Então D é igual a $B + B'$, com $B = d\phi_A|_x(y)$ para algum y em $\mathbb{C}^N$ e B' um elemento de $T_{\phi_A(x)}\Sigma^{s-1}$. Temos que

$$d\pi_{(A,x)}(D, -y) = D,$$

$$\begin{aligned} d\phi|_{(A,x)}(D,-y) &= d\phi|_{(A,x)}(B + B', -y) \\ &= d\phi|_{(A,x)}(B,-y) + d\phi|_{(A,x)}(B',0) \\ &= d\phi|_{(A,x)}(d\phi_A|_x(y), -y) + d\phi|_{(A,x)}(B',0) \\ &= d\phi|_{(A,x)}((\Sigma_{k=1}^N \tfrac{\partial f_{ij}}{\partial x_k}(x)y_k)_{m\times n}, -y) + d\phi|_{(A,x)}(B',0) \\ &= (\Sigma_{k=1}^N \tfrac{\partial f_{ij}}{\partial x_k}(x)y_k + \Sigma_{k=1}^N \tfrac{\partial f_{ij}}{\partial x_k}(x)(-y_k))_{m\times n} \\ &\quad +(b'_{ij} + \Sigma_{k=1}^N \tfrac{\partial f_{ij}}{\partial x_k}(x)0)_{m\times n} \\ &= 0 + B' \in T_{\phi(A,x)}\Sigma^{s-1} \end{aligned}$$

ou seja, $(D, -y)$ pertence a $(d\phi_{(A,x)})^{-1}(T_{\phi(A,x)}\Sigma^{s-1}) = T_{(A,x)}\phi^{-1}(\Sigma^{s-1})$.

Assim, $d\pi_{(A,x)}$ é sobrejetora, para toda matriz A em W e para todo x tal que $\phi(A, x)$ pertence a Σ^{s-1}. Ou seja, π é uma fibração sobre o conexo W. Portanto, todas as fibras são homotópicas. Logo,

$$\begin{aligned} \chi(X_A) &= \chi(\{A\} \times X_A) \\ &= \chi(\{(A, x) : x \in X_A\}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \chi(\{(A,x) : \text{posto}(\phi(A,x)) = s-1\}) \\ &= \chi(\{(A,x) \in \phi^{-1}(\Sigma^{s-1})\}) \\ &= \chi(\pi^{-1}(A)) \end{aligned}$$

não depende de A em W. ■

Se $(X,0)$ é uma ICIS (quando $s=1$), X_A pode ser visto como a fibração de Milnor de $(X,0)$. Neste caso, X_A tem o tipo de homotopia de um bouquet de esferas e o número de Milnor de $(X,0)$ é a quantidade de tais esferas (veja, por exemplo, [32]). Em particular, esse número satisfaz

$$\mu(X,0) = (-1)^{\dim X}(\chi(X_t) - 1),$$

Inspirados neste fato e apoiados no teorema 6.1, fazemos a seguinte definição no caso de uma SDI qualquer.

Definição 6.2. Seja $(X,0) = (F^{-1}(M^s_{m,n}),0) \subset (\mathbb{C}^N,0)$ uma SDI. Definiremos a característica de Euler evanescente de X por

$$\nu(X,0) = (-1)^{\dim X}(\chi(X_A) - 1),$$

com $A \in W$, sendo W o conjunto dado pelo lema 4.12.

Veremos, agora, que essa fórmula é válida quando consideramos uma suavização determinantal qualquer da SDI X no lugar da suavização especial X_A.

Definição 6.3. 1. Uma deformação determinantal da SDI

$$(X,0) = (F^{-1}(M^s_{m,n}),0) \subset (\mathbb{C}^N,0)$$

é uma aplicação

$$H : (\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}, 0) \to M_{m,n}$$

tal que $H(x,0) = F(x)$ para todo $x \in \mathbb{C}^N$.

Denotamos $F_t(x) = H(x,t)$ e $X_t = F_t^{-1}(M^s_{m,n})$.

2. Dizemos que H define uma suavização determinantal de $(X,0)$ se, além disso, X_t é suave e $\text{posto}(F_t(x)) = s-1$ para todo $x \in X_t$ e todo $t \neq 0$ suficientemente pequeno.

Observamos que uma suavização determinantal de uma SDI é uma suavização no sentido da definição 1.3. De fato, seja $H : (\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}, 0) \to M_{m,n}$ uma deformação determinantal da SDI $(X,0) = (F^{-1}(M^s_{m,n}),0) \subset (\mathbb{C}^N,0)$ e escrevemos $\mathcal{X} = H^{-1}(M^s_{m,n}) \subset (\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}, 0)$, ou seja, $\mathcal{X} = \{(x,t) : x \in X_t\}$. Definimos

$$\begin{array}{rcl} \pi : (\mathcal{X},0) & \longrightarrow & (\mathbb{C},0) \\ (x,t) & \to & t \end{array}$$

Consideramos o homomorfismo induzido por π, $\pi^* : \mathcal{O}_1 \longrightarrow \mathcal{O}_{(\mathcal{X},0)}$. Temos que $\text{codim}(\mathcal{X}) = \text{codim}(X)$, portanto $(\mathcal{X},0)$ é determinantal e, assim, Cohen-Macaulay,

além disso, $\dim(\mathcal{X},0) = \dim(X,0)+1 = \dim \mathcal{O}_{(X,0)} + \dim \mathcal{O}_1$. Então, pelo teorema 1.4, π^* é uma aplicação plana. Logo, como $\pi^{-1}(t)$ é suave para t não nulo suficientemente pequeno, π é uma suavização no sentido da definição 1.3.

Teorema 6.4. *Seja $H : (\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}, 0) \to M_{m,n}$ uma suavização determinantal de $(X,0)$. Então, para $t \neq 0$ suficientemente pequeno,*

$$\nu(X,0) = (-1)^{\dim X}(\chi(X_t) - 1).$$

Demonstração: Escolhemos um representante $H : B \times D \to M_{m,n}$ com B e D bolas centradas na origem em $\mathbb{C}^N$ e $\mathbb{C}$, repectivamente, suficientemente pequenas para que X_t seja suave e $\text{posto}(F_t(x)) = s-1$ para todo $x \in X_t$ e todo $t \in D \setminus \{0\}$. Seja W o conjunto aberto de Zariski dado pelo lema 4.12.

Dadas as deformações X_t e X_A, construímos uma nova deformação como soma das duas deformações: dados $A \in M_{m,n}$ e $t \in D$, denotamos

$$X_{(A,t)} = (F_t + A)^{-1}(M^s_{m,n}).$$

Mostraremos que existe um conjunto aberto de Zariski não vazio $W_0 \subset M_{m,n} \times D$ tal que

1. $X_{(A,t)}$ é suave e $\text{posto}(F_t(x) + A) = s-1$, para todo $x \in X_{(A,t)}$ e para todo $(A,t) \in W_0$,
2. $\chi(X_{(A,t)})$ não depende de $(A,t) \in W_0$.

Para mostrar 1., tomamos

$$\tilde{C} = \{(A,r,x) : x \text{ é um ponto singular de } X_{(A,r)} \text{ ou } \text{posto}(F_r(x)+A) < s-1\}$$

e $W_0 = M_{m,n} \setminus C$, onde

$$\begin{aligned} C &= \{(A,r) \in M_{m,n} \times \mathbb{C} : X_{(A,r)} \text{ não é regular ou } \text{posto}(F_r(x)+A) < \\ &\quad s-1, \text{ para algum } x \in X_{(A,r)}\}. \end{aligned}$$

$\tilde{C}$ é um subconjunto analítico de $M_{m,n} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N$. De fato,

$$\tilde{C} = v(g_{1(A,r)}, \ldots, g_{k(A,r)}, I_{\text{codim}X}(J_{(A,r)}) \cup v(g_{1(A,r)}, \ldots, g_{k(A,r)}, I_{s-1}(F_r(x)+A)),$$

onde $g_{1(A,r)}, \ldots, g_{k(A,r)}$ são os menores de ordem s de $F_r(x) + A$ e $J_{(A,r)}$ é a matriz jacobiana de $g_{1(A,r)}, \ldots, g_{k(A,r)}$ como uma aplicação em $\mathbb{C}^N$.

Portanto, $C = \pi(\tilde{C})$, com $\pi : (\tilde{C}, 0) \to (M_{m,n} \times C, 0)$, é um subconjunto analítico de $M_{m,n} \times \mathbb{C}$ (análogo ao que foi feito na demonstração do teorema 4.12). Precisamos mostrar que C é próprio. Seja

$$\begin{aligned} \phi : M_{m,n} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N &\longrightarrow M_{m,n} \\ (A,r,x) &\longmapsto F_r(x) + A \end{aligned}$$

ϕ é uma submersão, então ϕ é transversal a Σ^{s-i} para todo i tal que $1 \leq i \leq s$. Assim, $\phi_{(A,r)}$ é transversal a Σ^{s-i} para quase todo (A,r) onde $\phi_{(A,r)}(x) = \phi(A,r,x)$.

Seja (A,r) tal que $\phi_{(A,r)}$ é transversal a Σ^{s-i}, observamos que

$$\dim \mathbb{C}^N + \dim \Sigma^{s-i} = N + mn - (m-s+i)(n-s+i) < mn$$

se $i > 1$, portanto $\phi_{(A,r)}(\mathbb{C}^N) \cap \Sigma^{s-i} = \emptyset$.

Assim, $X_{(A,r)} = \phi^{-1}_{(A,r)}(\Sigma^{s-1})$ é suave e C é próprio.

Mostramos, agora, que vale 2., isto é, que $\chi(X_{(A,r)})$ não depende de $(A,r) \in W$. Consideramos

$$\begin{array}{rcl} \pi : \phi^{-1}(\Sigma^{s-1}) & \longrightarrow & W \\ (A,r,x) & \longmapsto & (A,r), \end{array}$$

π é uma submersão. De fato, se $(A,r) \in W$, então $X_{(A,r)}$ é suave, donde $\phi_{(A,r)}$ é transversal a Σ^{s-1} (4.8), ou seja,

$$d\phi_{(A,r,x)}(0 \times 0 \times T_x\mathbb{C}^N) + T_{\phi_{(A,r,x)}}\Sigma^{s-1} = T_{\phi_{(A,r,x)}}M_{m,n},$$

donde

$$\begin{array}{rcl} T_{(A,r,x)}M_{m,n} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N & = & (d\phi_{(A,r,x)})^{-1}(T_{\phi(A,r,x)}M_{m,n}) \\ & = & 0 \times 0 \times T_x\mathbb{C}^N + (d\phi_{(A,r,x)})^{-1}T_{\phi(A,r,x)}\Sigma^{s-1} \\ & = & 0 \times 0 \times T_x\mathbb{C}^N + T_{(A,r,x)}\phi^{-1}(\Sigma^{s-1}). \end{array}$$

Assim, $d\pi_{(A,r,x)}(T_{(A,r,x)}\phi^{-1}(\Sigma^{s-1})) = T_{(A,r)}M_{m,n} \times \mathbb{C}$, portanto, (A,r) é um valor regular de π.

Logo, π é uma fibração sobre o conexo W. Então,

$$\begin{array}{rcl} \chi(X_{(A,r)}) & = & \chi(\{(A,r)\} \times X_{(A,r)}) \\ & = & \chi(\{(A,r,x) : x \in X_{(A,r)}\}) \\ & = & \chi(\{(A,r,x) : \text{posto}(\phi(A,,r,x)) = s-1\}) \\ & = & \chi(\{(A,r,x) \in \phi^{-1}(\Sigma^{s-1})\}) \\ & = & \chi(\pi^{-1}(A,r)) \end{array}$$

Consideramos, agora, $A \in W$ e $r \in D \setminus \{0\}$. Temos que $(A,0),(0,r) \in W_0$ (pois $X_{(A,0)} = X_A$ é suave, $\text{posto}(F_0(x)+A) = \text{posto}(F(x)+A) = s-1$ para todo $x \in X_A$, $X_{(0,t)} = X_t$ é suave e $\text{posto}(F_t(x)) = s-1$ para todo $t \in X_t$). Então,

$$\begin{array}{rcl} \nu(X,0) & = & (-1)^{\dim X}(\chi(X_A) - 1) \\ & = & (-1)^{\dim X}(\chi(X_{(A,0)}) - 1) \\ & = & (-1)^{\dim X}(\chi(X_{(0,r)}) - 1) \\ & = & (-1)^{\dim X}(\chi(X_r) - 1). \end{array}$$

■

Costumamos definir o número de Milnor de um germe de variedade $(X,0)$ de dimensão d como o d-ésimo número de Betti de uma fibra genérica X_t de X. Ou seja,

$$\mu(X) := \beta_d(X_t).$$

Observamos que, se $\dim X = 2$,

$$\begin{aligned}\nu(X,0) &= \chi(X_t) - 1 \\ &= \beta_0(X_t) - \beta_1(X_t) + \beta_2(X_t) - 1 \\ &= -\beta_1(X_t) + \beta_2(X_t)\end{aligned}$$

Como $(X,0)$ é normal, pelo teorema 2 de [22], $\beta_1(X_t) = 0$. Assim,

$$\nu(X,0) = \beta_2(X_t).$$

Portanto, se $(X,0)$ é uma SDI de dimensão 2, podemos chamar $\nu(X,0)$ de número de Milnor de X.

Observação 6.5. Se $(X,0)$ é uma SDI de dimensão e codimensão iguais a dois, ou seja, se $(X,0)$ é um germe de superfície em $\mathbb{C}^4$, $\nu(X) = \beta_2(X)$, o qual coincide com o número de Milnor de $(X,0)$ definido no capítulo anterior.

Se $(X,0)$ é uma ICIS de dimensão 0, temos (ver [32]) que seu número de Milnor é igual a $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{(X,0)} - 1$. Vemos, através do seguinte corolário, que este resultado continua válido para o caso de $(X,0)$ ser uma SDI.

Corolário 6.6. *Seja $(X,0)$ uma SDI de dimensão 0. Então,*

$$\nu(X,0) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X,0} - 1.$$

Demonstração: Seja $H : (\mathbb{C}^N \times \mathbb{C}, 0) \to M_{m,n}$ uma suavização determinantal de $(X,0)$. Denotamos $(\mathcal{X},0) = H^{-1}(M^s_{m,n})$ o espaço total da deformação. Então $\dim(\mathcal{X},0) = 1$ e $(\mathcal{X},0)$ é também uma SDI e, assim, reduzida. Consideramos a restrição da projeção sobre o segundo fator $\pi_2 : (\mathcal{X},0) \to (\mathbb{C},0)$, a qual é uma aplicação finita cuja fibra genérica é $\pi_2^{-1}(t) = X_t$. O número de pontos de X_t é o grau de π_2 o qual pode ser computado pela fórmula de Samuel como

$$\text{grau}(\pi_2) = e(\langle t\rangle, \mathcal{O}_{\mathcal{X},0}),$$

onde $e(I,R)$ denota a multiplicidade de Hilbert-Samuel de um ideal I em um anel local R (ver [39]). Além disso, como $(\mathcal{X},0)$ é Cohen-Macaulay, temos

$$e(\langle t\rangle, \mathcal{O}_{\mathcal{X},0}) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathcal{X},0}}{\langle t\rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X,0}.$$

Finalmente, pelo teorema 6.4,

$$\nu(X,0) = \chi(X_t) - 1 = \#X_t - 1 = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X,0} - 1,$$

onde $\#X_t$ denota o número de pontos de X_t. ■

Buchweitz e Greuel definiram em [7] o número de Milnor de uma curva reduzida $(X,0)$ e mostraram que se $(X,0)$ admite uma suavização com $\pi : \mathcal{X} \to D$ um bom representante, então, para $t \in D \setminus \{0\}$,

$$\mu(X,0) = 1 - \chi(X_t).$$

Se $(X,0)$ é uma SDI de dimensão 1, isto é, $(X,0)$ é uma curva, então $(X,0)$ admite uma suavização e, pelo teorema 6.4, para qualquer suavização determinantal $(X,0)$,

$$\nu(X,0) = 1 - \chi(X_t).$$

Assim, temos o seguinte corolário.

Corolário 6.7. *Se $(X,0)$ é uma SDI de dimensão 1, o característica de Euler evanescente de $(X,0)$ coincide com o número de Milnor de $(X,0)$ definido por Buchweitz e Greuel em [7].*

Assim, se $\dim X = 1$, podemos chamar $\nu(X,0)$ de número de Milnor de $(X,0)$ e denotar tal número por $\mu(X,0)$

6.1 A característica de Euler evanescente do conjunto dos pontos singulares de uma aplicação

Um exemplo importante de variedade determinantal é o conjunto dos pontos críticos de uma aplicação holomorfa $f : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C}^p,0)$, dado pelos pontos $x \in \mathbb{C}^N$ tais que $Df(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)$ não tem posto máximo, onde $f = (f_1,\ldots,f_p)$.

Suponhamos, por exemplo que $n \leq p$ e que $f = (f_1,\ldots,f_p) : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C}^p,0)$. O conjunto singular de f é

$$S(f) = \{x \in \mathbb{C}^n : \text{posto}(Df(x)) < n\} = (Df)^{-1}(M^n_{n,p}).$$

onde $Df : (\mathbb{C}^n,0) \to M_{n,p}$ é a matriz jacobiana $Df(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)$, com $x = (x_1,\ldots,x_n)$.

Se f é finitamente $\mathcal{A}$-determinado,

$$\dim S(f) = n - (p - n + 1) = n - (n - n + 1)(p - n + 1),$$

ver [16], ou seja, $S(f)$ é uma variedade determinantal do tipo $(n,p;n)$ em $\mathbb{C}^n$. Suponhamos que $n < 2(n - p + 2)$, então $S(f)$ é uma SDI. De fato, f é estável fora da origem pelo critério de determinação de Mather e Gaffney ([50]) e, assim, Df é transversal aos estratos singulares $\Sigma^i, i = 1,\ldots,n$. Então, faz sentido considerar a característica de Euler evanescente $\nu(S(f),0)$.

Seja f_s uma estabilização de f (ou, mais geralmente, uma deformação genérica de f), então $S(f_s)$ é suave e define uma suavização determinantal de $S(f)$. Pelo teorema 6.4,

$$\nu(S(f),0) = (-1)^{2n-p-1}(\chi(S(f_s)) - 1).$$

Analogamente, se $n > p$,

$$S(f) = \{x \in \mathbb{C}^n : \text{posto}(Df(x)) < p\} = (Df)^{-1}(M^p_{n,p}).$$

é uma variedade determinantal do tipo $(p,n;p)$ em $\mathbb{C}^n$ se f é $\mathcal{A}$-finitamente deter-

minado. Suponhamos que $n < 2(n-p+2)$. Então,

$$\nu(S(f),0) := (-1)^{p-1}(\chi(S(f_s)) - 1),$$

onde f_s é uma estabilização de f.

6.2 Relações com multiplicidades polares e obstrução de Euler

Seja $(X,0) = (F^{-1}(M^s_{m,n}),0) \subset (\mathbb{C}^N,0)$ uma SDI. Exibiremos, nesta seção, uma fórmula recursiva para o cálculo da característica de Euler evanescente de $(X,0)$.

Seja $p : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$ uma função linear genérica. Então $(X \cap p^{-1}(0),0)$ é também uma SDI do tipo $(m,n;s)$ no hiperplano $p^{-1}(0)$. Assim, faz sentido considerar a característica de Euler evanescente $\nu(X \cap p^{-1}(0),0)$.

Lema 6.8. *Sejam $p : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$ uma função linear genérica , $A \in M_{m,n}$ uma matriz genérica e $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ suficientemente pequeno. Então,*

$$\begin{aligned}\nu(X \cap p^{-1}(0),0) &= (-1)^{d-1}(\chi(X \cap p^{-1}(c)) - 1)\\ &= (-1)^{d-1}(\chi(X_A \cap p^{-1}(0)) - 1)\\ &= (-1)^{d-1}(\chi(X_A \cap p^{-1}(c)) - 1),\end{aligned}$$

onde $d = \dim(X,0)$.

Demonstração: Tomando uma mudança de coordenadas linear apropriada, podemos assumir que $p(x_1,\ldots,x_N) = x_N$. Para cada $c \in \mathbb{C}$, denotamos

$$F_c(x_1,\ldots,x_{N-1}) = F(x_1,\ldots,x_{N-1},c).$$

Temos as seguintes identificações:

1. $(X \cap p^{-1}(0),0)$ é homeomorfo a SDI $(Y,0) \subset (\mathbb{C}^{N-1},0)$ dada por $(Y,0) = F_0^{-1}(M^s_{m,n})$.
2. $X_A \cap p^{-1}(0)$ é homeomorfo a $Y_A = (F_0 + A)^{-1}(M^s_{m,n})$, a suavização determinantal especial de $(Y,0)$.
3. $X \cap p^{-1}(c)$ é homeomorfo a $Y_c = (F_c)^{-1}(M^s_{m,n})$, uma suavização determinantal de $(Y,0)$.
4. $X_A \cap p^{-1}(c)$ é isomorfo a $Y_{(A,c)} = (F_c + A)^{-1}(M^s_{m,n})$, a soma das deformações, como feito na prova do teorema 6.4.

Então, o resultado é uma consequência direta do teorema 6.4. ■

Teorema 6.9. *Sejam $p : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$ uma projeção linear genérica e $A \in M_{m,n}$ uma matriz genérica. Então*

$$\#\Sigma p|_{X_A} = \nu(X,0) + \nu(X \cap p^{-1}(0),0),$$

onde $\#\Sigma p|_{X_A}$ denota o número de pontos críticos de $p|_{X_A}$.

Demonstração: Escolhemos uma matriz genérica $A \in M_{m,n}$ tal que X_A é suave e $p|_{X_A}$ é uma função de Morse (tal matriz existe pelo teorema 4.12 e pelo lema 5.2). Seja $c \in \mathbb{C}$ um valor regular de $p|_{X_A}$, pelo teorema 3.7 e pelo lema 6.8,

$$\begin{aligned} \#\Sigma p|_{X_A} &= (-1)^{d+1}(\chi(p^{-1}(c) \cap X_A) - \chi(X_A)) \\ &= (-1)^{d+1}(\chi(p^{-1}(c) \cap X_A) - 1 + 1 - \chi(X_A)) \\ &= (-1)^{d+1}((-1)^{d-1}\nu(X \cap p^{-1}(0), 0) + (-1)^{d+1}\nu(X, 0)) \\ &= \nu(X, 0) + \nu(X \cap p^{-1}(0), 0). \end{aligned}$$

■

Perez e Saia mostram, em [27], que se X é uma ICIS de dimensão d, então

$$1 + (-1)^d \mu(X, 0) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i m_i(X, 0),$$

onde $m_i(X, 0), 0 \leq i \leq d-1$ é a i-ésima multiplicidade polar de $(X, 0)$ e $m_d(X, 0)$ é a d-ésima multiplicidade polar como definida por Gaffney em [15] apenas para ICIS. Novamente, mostraremos um resultado análogo para SDI.

Definição 6.10. Definimos a d-ésima multiplicidade polar de X por

$$m_d(X, 0) := \#\Sigma p|_{X_A},$$

onde $p : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$ é uma projeção linear genérica, $A \in M_{m,n}$ é uma matriz genérica e d é a dimensão de $(X, 0)$.

Então, pelo teorema 6.9,

$$m_d(X, 0) = \nu(X, 0) + \nu(X \cap p^{-1}(0), 0).$$

Segundo Lê e Teissier ([31]) temos que

$$\mathrm{Eu}(X, 0) = \chi(X \cap p^{-1}(t)) = (-1)^{d-1}\nu(X \cap p^{-1}(0), 0) + 1,$$

onde $\mathrm{Eu}(X, 0)$ é a obstrução de Euler local. Assim,

$$m_d(X) = \nu(X, 0) + (-1)^{d-1}\mathrm{Eu}(X) + (-1)^d,$$

o que mostra que $m_d(X)$ está bem definida, isto é, não depende da função linear p escolhida. Mais ainda:

Teorema 6.11. *Seja* $(X, 0) = (F^{-1}(M^s_{m,n}), 0) \subset (\mathbb{C}^N, 0)$ *uma SDI. Então*

$$Eu(X) + (-1)^d m_d(X) = 1 + (-1)^d \nu(X, 0).$$

Exemplo 6.12. Consideramos $(X,0)$ a superfície determinantal em $(\mathbb{C}^4,0)$ definida pelos menores 2×2 da matriz

$$F(x,y,z,w)=\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & w \end{pmatrix}.$$

Tomamos $A=\frac{1}{50}\begin{pmatrix} 6 & -8 & 5 \\ 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ e $p=2x-3y+4z-w$. Fazendo cálculos no MATHEMATICA, vemos que

$$m_2(X,0)=\#\sum p|_{X_A}=3.$$

Como $Y=X\cap p^{-1}(0)$ é uma curva, como feito em [42], temos que

$$\mu(g_{|_Y})=\mu(Y,0)+\text{grau}(g_{|_Y})-1,$$

para uma função $g:\mathbb{C}^4\to\mathbb{C}$. Escolhendo $g=x-2y+5z+5w$, temos

$$\mu(g_{|_Y})=\#\sum g|_{X_A\cap p^{-1}(0)}=4$$

e

$$deg(g_{|_Y})=\#\{X_A\cap p^{-1}(0)\cap g^{-1}(0)\}=3.$$

Portanto,

$$\mu(Y,0)=4-3+1=2.$$

Assim,

$$\text{Eu}(X,0)=1-\mu(Y,0)=-1$$

e

$$\nu(X,0)=m_2(X,0)-\mu(Y,0)=3-2=1.$$

6.3 O número de Milnor de uma função em uma SDI

Sejam $(X,0)=(F^{-1}(M^s_{m,n}),0)\subset(\mathbb{C}^N,0)$ um germe de variedade determinantal com uma singularidade isolada na origem e $f:(\mathbb{C}^N,0)\to(\mathbb{C},f(0))$ um germe de função holomorfa tal que $f_{|_X}$ tenha uma singularidade isolada na origem. Nesta seção, definimos o número de Milnor de f em X. Para fazer isso, necessitamos novamente de um resultado sobre generalidade.

Supomos que $(X,0)$ é do tipo $(m,n;s)$ e é definida por $(X,0)=F^{-1}(M^s_{m,n})$. Dado $(a,A)\in\mathbb{C}^N\times M_{m,n}$, consideramos a função $f_a|_{X_A}:X_A\to\mathbb{C}$ definida por

$$f_a(x_1,\ldots,x_N)=f(x_1,\ldots,x_N)+a_1x_1+\ldots a_Nx_N,$$

e $X_A=(F+A)^{-1}(M^s_{m,n})$.

Lema 6.13. *Existe um conjunto aberto e Zariski não vazio $W\subset\mathbb{C}^N\times M_{m,n}$ tal que, para $(a,A)\in W$, X_A é suave e $f_a|_{X_A}$ é uma função de Morse. Além disso, o*

número de pontos críticos de $f_a|_{X_A}$ é independente de $(a, A) \in W$.

Demonstração: A prova da primeira parte será omitida pois os argumentos são análogos a aqueles usados na demonstração do teorema 5.8.

Para verificar a segunda parte, consideramos $(C, 0)$ como o germe de conjunto em $(\mathbb{C}^{2N+mn}, 0)$ das triplas (x, a, A) tais que x é um ponto singular de X_A ou x é um ponto crítico de $f_a|_{X_A}$. Então $(C, 0)$ é analítico e a aplicação $\pi : (C, 0) \to (\mathbb{C}^{N+mn}, 0)$ dada por $\pi(x, a, A) = (a, A)$ é um germe de aplicação finita (pois $\pi^{-1}(0) = \{0\}$). Assim, $\dim C \leq N + mn$.

Se $\dim C = N + mn$, temos que o número de pontos críticos de $f_a|_{X_A}$ é igual ao grau local de π o qual é independente de (a, A). Se $\dim C < N + mn$, então, a dimensão de $\pi(C)$ é menor que $N + mn$, ou seja, a imagem de π é um conjunto de medida nula, portanto, o número de pontos críticos de $f_a|_{X_A}$ é igual a $\#\pi^{-1}(A, a) = 0$, para quase todo (a, A). ■

Através do lema 6.13, vemos que o número $\#\Sigma\,(f_a|_{X_A})$ é independente de $(a, A) \in W$, assim, podemos definir:

Definição 6.14. Definimos o número de Milnor de $f|_X : (X, 0) \to \mathbb{C}$ por

$$\mu(f|_X) = \#\Sigma\,(f_a|_{X_A})\,,$$

onde $(a, A) \in W$ e W é o aberto de Zariski dado pelo lema 6.13.

Teorema 6.15. *Se $(a, A, c) \in \mathbb{C}^N \times M_{m,n} \times \mathbb{C}$ são valores genéricos tais que X_A é suave, $f_a|_{X_A}$ é uma função de Morse e c é um valor regular de $f_a|_{X_A}$, então,*

$$\mu(f|_X) - \nu(X) = (-1)^{\dim X - 1}(\chi(X_A \cap f_a^{-1}(c)) - 1).$$

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$ tal que $f_a|_{X_A}$ não tem pontos críticos em $X_A \cap S_\epsilon$ para toda matriz A numa vizinhança suficientemente pequena da origem em $M_{m,n}$ (a garantia da existência de tal ϵ é análoga à feita na demonstração do teorema 5.9). Pelo teorema 3.7, sendo $M = X_A \cap B(0, \epsilon)$, se c é um valor regular de $f_a|_{X_A}$, temos:

$$\begin{aligned}
\#\Sigma\,(f_a|_{X_A}) &= (-1)^{\dim X}(\chi(X_A) - \chi(X_A \cap f_a^{-1}(c))) \\
&= (-1)^{\dim X}(\chi(X_A) - 1 + 1 - \chi(X_A \cap f_a^{-1}(c))) \\
&= (-1)^{\dim X}(\chi(X_A) - 1) + (-1)^{\dim X - 1}(\chi(X_A \cap f_a^{-1}(c)) - 1) \\
&= \nu(X) + (-1)^{\dim X - 1}(\chi(X_A \cap f_a^{-1}(c)) - 1).
\end{aligned}$$

donde segue o resultado. ■

Usando o teorema acima, temos que $(-1)^{\dim X - 1}(\chi(X_A \cap f_a^{-1}(c)) - 1)$ é independente de $(a, A, c) \in \mathbb{C}^N \times M_{m,n} \times \mathbb{C}$ tais que X_A é suave, $f_a|_{X_A}$ é uma função de Morse e c é um valor regular de $f_a|_{X_A}$. Então, podemos definir:

Definição 6.16. A característica de Euler evanescente da fibra $X \cap f^{-1}(0)$ é

$$\nu(X \cap f^{-1}(0)) = (-1)^{\dim X - 1}(\chi(X_A \cap f_a^{-1}(c)) - 1),$$

onde $(a, A, c) \in \mathbb{C}^N \times M_{m,n} \times \mathbb{C}$ são valores genéricos tais que X_A é suave, $f_a|_{X_A}$ é uma função de Morse e c é um valor regular de $f_a|_{X_A}$.

Como um corolário, obtemos uma fórmula do tipo Lê-Greuel para uma SDI, mais precisamente:

Corolário 6.17. $\mu(f|_X) = \nu(X) + \nu(X \cap f^{-1}(0))$.

Observação 6.18. 1. Se $(X, 0)$ é uma SDI de dimensão dois, $X \cap f^{-1}(0)$ é uma curva e $X_A \cap f_a^{-1}(c)$ define uma suvização desta. Assim,

$$\nu(X \cap f^{-1}(0)) = 1 - \chi(X_A \cap f_a^{-1}(c)) = \mu(X \cap f^{-1}(0)),$$

o número de Milnor da curva como definido por Buchweitz e Greuel em [7].

2. Se 0 é um ponto regular de $f : (\mathbb{C}^N, 0) \to \mathbb{C}$, podemos considerar $X \cap f^{-1}(0)$ como uma variedade determinantal na variedade suave $f^{-1}(0)$. Nesse caso, nossa definição de característica de Euler evanescente coincide com a definição de característica de Euler evanescente de uma SDI.

Comentários Finais

Apresentamos aqui algumas de nossas ideias para a continuação do trabalho.

1. Sobre a variedade logarítmica característica:

   Verificar se $LC(X)$ é Cohen-Macaulay para um hipersuperfície qualquer X com singularidade isolada.

2. Sobre o número de Bruce-Roberts:

   (a) Dados um germe de variedade analítica $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ com singularidade isolada e um germe de função $f : (\mathbb{C}^n,0) \to \mathbb{C}$ finitamente $\mathcal{R}_X$-determinado, verificar se existe uma relação análoga à demonstrada no teorema 2.14 no caso em que X é uma hipersuperfície com singularidade isolada ou uma ICIS.

   (b) Estudar do número de Bruce-Roberts de um germe de função $f : (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C},0)$ com respeito a uma variedade determinantal $(X,0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$.

3. Extensão de outras propriedades já verificadas pelo número de Milnor de uma ICIS para o número de Milnor, ou a característica de Euler evanescente de um germe de variedade determinantal

Referências Bibliográficas

[1] Arbarello, E.; Cornalba, M.; Griffiths P. A.; Harris, J. *Geometry of Algebraic Curves*, Nova York: Springer - Verlag, 1985. 386 p.

[2] Bivià-Ausina, C.; Nuño-Ballesteros, J. J. *Multiplicity of iterated Jacobian extensions of weighted homogeneous map germs*, Hokkaido Math. J. **29** (2000), No. 2, 341–368.

[3] Bivià-Ausina, C.; Nuño-Ballesteros, J. J. *The deformation multiplicity of a map germ with respect to a Boardman symbol*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. **131A** (2001), No. 5, 1003–1022.

[4] Brieskorn, E.; Greuel, G. M. *Singularities of complete intersections*, Manifolds—Tokyo 1973 (Proc. Internat. Conf., Tokyo, 1973), 123–129.

[5] Bruce, J. W. *Functions on discriminants*, J. London Math. Soc. (2) **30** (1984), No. 3, 551–567.

[6] Bruce, J. W.; Roberts, R. M. *Critical points of functions on analytic varieties*, Topology **27** (1988), No. 1, 57–90.

[7] Buchweitz, R. O.; Greuel, G. M. *The Milnor number and deformations of complex curve singularities*, Invent. Math. **58** (1980), No. 3, 241–248.

[8] Damon, J. *On the freeness of equisingular deformations of plane curve singularities*, Topology Appl. **118** (2002), No. 1–2, 31–43.

[9] Damon, J.; Pike, B. *Solvabel groups, free divisors and nonisolated matrix singularities II: vaishing topology*, preprint.

[10] De Góes Grulha, N., Jr. *The Euler obstruction and Bruce-Roberts' Milnor number*, Q. J. Math. **60** (2009), No. 3, 291–302.

[11] Eagon, J. A.; Hochster, M. *Cohen-Macaulay rings, invariant theory, and the generic perfection of determinantal loci*, Amer. J. Math. **93** (1971), 1020–1058.

[12] Ebeling, W.; Gusein-Zade, S.M. *On indices of 1-forms on determinantal singularities* arXiv:0806.0219v1

[13] Eisenbud, D. *Commutative algebra wuth a view toward algebraic geometry*

[14] Frühbis-Krüger, A. *Classification of simple space curve singularities*, Comm. in Alg. **27** (1999), 3993–4013.

[15] Gaffney, T. *Multiplicities and equisingularity of ICIS germs*, Invent. Math. **123** (1996), No. 2, 209–220.

[16] Gibson, C. G. *Singular points of smooth mappings*, Pitman Publishing Limited (1979).

[17] Gibson, C. G.; Wirthmüller, K.; Du Plessis, A. A.; Looijenga, E. J. N. *Topological stability of smooth mappings*, Lecture Notes in Math. **552** (1976), Springer-Verlag, New York.

[18] Golubtsky, M.; Guillemin, V. *Stable maps and their singularities*, Springer, (1973).

[19] Goresky, M.; MacPherson, R. *Stratified Morse Theory*, Springer, (1980).

[20] Grauert, H.; Remmert, R. *Theory of Stein spaces*, Springer (1979).

[21] Greuel, G. M.; Pfister, G. *A singular introduction to commutative algebra*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2008).

[22] Greuel, G. M.; Steenbrink, J. *On the topology of smoothable singularities. Singularities*, Proc. Sympos. Pure Math. **40**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1983, 535–545.

[23] Goryunov, V. V. *Functions on space curves*, J. London Math. Soc. (2) **61** (2000), 807–822.

[24] Hamm, H. *Topology of isolated singularities of complex spaces*, Proceedings of Liverpool Singularities Symposium, II (1969/1970), 213–217. Lecture Notes in Math., Vol. 209, Springer, Berlin, 1971.

[25] Hamm, H. *Lokale topologische Eigenschaften komplexer Räume*, (German) Math. Ann. **191** (1971) 235–252.

[26] de Jong, T.; Pfister, G. *Local Analytic Geometry. Basic Theory and Applications* basic Theory and applications. Advanced Lectures in Mathematics. Friedr. Vieeweg & Sohn, Braunschweig, 2000.

[27] Jorge Perez, V. H.; Saia, M. J. *Euler Obstruction, polar multiplicities and equisingularity of map germs in* $\mathcal{O}(n,p)$, $n < p$, Internat. J. Math. **17** (2006), No. 8, 887–903.

[28] Kaveh, K. *Morse theory and Euler characteristic of sections of spherical varieties*, Tranform. Groups, **9** (2004), No. 1, 47–63.

[29] Lê D. T. *Le concept de singularite isolee de fontion analytique*, Adv. Stu. Pure Math. **8** (1986);

[30] Lê D. T. *Topologie des Singularites des Hypersurfaces Complexes*, Asterisque 7, 8 (1973), 171-182.

[31] Lê D. T.; Teissier, B. *Varietes polaires locales et classes de Chern des varietes singulieres*, Ann. of Math. **114** (1981), 457-491

[32] Looijenga, E. J. N. *Isolated singular points on complete intersections*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 77. Cambridge University Press (1984).

[33] Matsumura, H. *Commutative Ring Theory*, Cambridge University Press (1989).

[34] May, J. P. *A concise course in algebraic topology*, Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1999. x+243 pp.

[35] Milnor, J. *Morse Theory*, Princeton University Press.

[36] Milnor J. *Singular Points of Complex Hypersurfaces.* Annals of Math. Studies, Princeton University Press (1968).

[37] Milnor, J.; Orlik, P. *Isolated singularities defined by weighted homogeneous polynomials*, Topology **9** (1970), 385–393;

[38] Mond, D.; van Straten, D. *Milnor number equals Tjurina number for functions on space curves*, J. London Math. Soc. (2) **63** (2001), 177–187.

[39] Mumford, D. *Algebraic geometry. I. Projective varieties.* In A series of comprehensivestudies in mathematics, vol. 221 Springer, (1976).

[40] Nuño-Ballesteros, J. J.; Oréfice, B.; Tomazella, J. N. *The Bruce-Roberts number of a function on a weighted homogeneous hypersurface*, aceito para publicação no The Quaterly Journal of Mathematics, (2011).

[41] J. J. Nuño-Ballesteros, B. Oréfice e J. N. Tomazella, *The vanishing Euler characteristic of an isolated determinantal variety*, preprint (2011).

[42] Nuño-Ballesteros, J. J.; Tomazella, J. N. *The Milnor number of a function on a space curve germ*, Bull. Lond. Math. Soc. **40** (2008), no. 1, 129–138.

[43] Palais, R. S.; Smale, S. *A generalized Morse theory.* Bull. Amer. Math. Soc. **70** (1964), 165-–172.

[44] Pereira, M. S.; Ruas, M. A. S. *Codimension Two Determinantal Varieties with Isolated Singularities*, preprint.

[45] Ruas, M. A. S.; Tomazella, J. N. *Topological triviality of families of functions on analytic varieties*, Nagoya Math. J., **175** (2004), 39–50.

[46] Saito, K. *Quasi-homogene isolierte singularitäten von hyperflächen*, Invent. Math. **14** (1971), 123–142.

[47] Schaps, M. *Nonsingular deformations of a determinantal scheme*, Pacific J. Math. **65** (1976), no. 1, 209—215.

[48] Vick, J. W. *Homology Theory: an introduction to algebraic topology*, Academic Press, Inc., New York (1973);

[49] Wahl, J. N. *Derivations, automorphisms and deformations of quasi-homogeneous singularities*, Proc. Symp. Pure Math. **40** (1983), 613–624.

[50] Wall, C. T. C. *Finite determinacy of smooth map germs*, Bull. London. Math. Soc. **13** (1981), 481–539.