UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Resolubilidade local para duas classes de campos de vetores suaves complexos

Luciele Rodrigues Nunes

São Carlos - SP
Julho de 2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Resolubilidade local para duas classes de campos de vetores suaves complexos

Luciele Rodrigues Nunes
Bolsista CAPES
Orientador: Prof Dr. José Ruidival Soares dos Santos Filho

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática, área de concentração: Análise.

São Carlos - SP
Julho de 2016

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária UFSCar
Processamento Técnico
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

N972r

Nunes, Luciele Rodrigues
Resolubilidade local para duas classes de campos de vetores suaves complexos / Luciele Rodrigues Nunes. -- São Carlos : UFSCar, 2016.
106 p.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2016.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Campos de vetores complexos suaves. 3. Resolubilidade local. 4. Operadores do tipo mizohata. I. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Folha de Aprovação

Assinaturas dos membros da comissão examinadora que avaliou e aprovou a Defesa de Tese de Doutorado da candidata Luciele Rodrigues Nunes, realizada em 28/07/2016:

Prof. Dr. Jose Ruidival Soares dos Santos Filho
UFSCar

Prof. Dr. Adalberto Panobianco Bergamasco
USP

Prof. Dr. Sérgio Luís Zani
USP

Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie
UFSCar

Prof. Dr. Gustavo Hoepfner
UFSCar

Aos meus pais Assis & Marlene

e ao meu grande amor Rafael,

companheiro de toda essa jornada.

Agradecimento

Agradeço,

a Deus, que sempre me deu forças para seguir meu sonho e sempre me guiou à fazer as escolhas certas;

aos meus pais Assis e Marlene, aos quais dedico e devo tudo que conquistei até hoje. Obrigada por sempre me apoiarem e me ajudarem em tudo que precisei. As conselhos pelo telefone do meu Pai, o qual sempre foi a palavra final em todas decisões que precisei tomar. Podem ter certeza que a parte mais difícil dessa etapa foi deixar vocês a mais de 1600km de mim... Mas, estou voltando!!!

ao Rafael, noivo, companheiro, amigo... Acho que isso descreve tudo que ele representa pra mim;

a minha irmã Luana, que me deu ao longo desse doutorado uma sobrinha (afilhada) linda, que sempre alegrou meus retornos para casa;

a duas companheirinhas de estudos, Paçoca e Lupita, que sempre estiveram ao lado dos livros estudando com a mamãe e nos momentos de descanso, deitadas em minha barriga;

ao Professor Ruidival e ao professor Maurício, pela sabedoria que orientaram meu doutorado e mestrado, respectivamente;

aos amigos, os que ganhei em São Carlos pelas alegrias, comemorações, aprendi muito com vocês e os que deixei em Rio Grande, onde sempre que voltava era como se nunca tivesse ido embora;

a CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

O presente trabalho estuda operadores diferenciais parciais lineares complexos de ordem um sem termos de ordem zero (campos de vetores complexos). Primeiramente apresentando uma condição necessária e suficiente para resolubilidade local de uma classe de operadores que deixam de ser elípticos precisamente em uma subvariedade 1-dimensional e por fim construindo soluções para uma classe de operadores que satisfazem a condição $(\mathcal{P})$ e que deixam de ser elípticos precisamente em um ponto.

Abstract

This work study complex linear partial differential operators of order one without having terms of zero order (complex vector fields). We have established a necessary and sufficient condition for local solvability of a class of operators which are not elliptic precisely in a 1-dimensional submanifold and we construct solutions for a class of operators satisfying the condition $(\mathcal{P})$ and which are not elliptic precisely in a point.

Sumário

Introdução **1**

1 Preliminares **5**

1.1 Tópicos de variáveis complexas 5

1.2 Mudanças de variáveis no símbolo principal de um operador 7

1.3 Operadores parcialmente hipoelípticos 11

1.4 Campos de vetores complexos 15

1.4.1 A estrutura algébrica de $\mathfrak{X}(\Omega)$ 16

1.4.2 Estruturas formalmente integráveis 18

1.4.3 Formas diferenciais 20

1.4.4 O conjunto característico 23

1.4.5 Estruturas localmente integráveis 24

1.4.6 Geradores locais 25

2 Operadores quase ℓ-Mizohata **27**

2.1 Uma classe de operadores 27

2.2 Forma normal - Parte 1 32

2.3 Forma Normal - Parte 2 42

3 Caracterização do conjunto imagem **55**

3.1 Estabelecimento da condição crucial 56

3.2 Teorema Principal 70
3.2.1 A condição é suficiente 71
3.2.2 A condição é necessária 72

4 Determinação de soluções para uma classe de operadores localmente resolúveis 81

4.1 Hipóteses sobre o operador 82
4.2 Lema técnico 82
4.3 Operador integral 86
4.4 Operadores satisfazendo as hipóteses (i), (ii) e (iii) da Seção 1 93
4.4.1 Exemplo 1 93
4.4.2 Exemplo 2 101

Introdução

Um dos problemas mais básicos da teoria de equações diferenciais parciais lineares é decidir sobre a resolubilidade local de uma equação diferencial parcial linear. Na segunda metade da década de 50 surgiram dois trabalhos cruciais sobre o tema. O primeiro deles apresenta o célebre exemplo de H. Lewy [14]. Em 1956 ele mostrou que o operador de primeira ordem

$$L = -\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2} + 2i(x_1 + ix_2)\frac{\partial}{\partial x_3}$$

não é resolúvel em ponto algum de $\mathbb{R}^3$. Na realidade o resultado é ainda mais forte: existe $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ para a qual a equação $Lu = f$ não tem solução em aberto algum (não vazio) de $\mathbb{R}^3$.

O segundo trabalho citado é o de L. Hörmander [10] e apresenta uma explicação para o exemplo de H. Lewy. Neste trabalho ele demonstra uma condição necessária para a resolubilidade local de um operador diferencial parcial linear P, em um dado ponto x_0, envolvendo o comutador entre P e seu conjugado complexo $\overline{P}$:

$$C = [P, \bar{P}] = \bar{P}P - P\bar{P}.$$

Deve-se observar que, se P é de ordem m, então C é de ordem $\leq 2m - 1$. A condição necessária mencionada é a seguinte:

Teorema 1. *Se P é resolúvel em x_0 então*

$$\sigma_p(P)(x_0,\xi)=0,\quad \xi\in\mathbb{R}^n \Rightarrow \quad \sigma_p(C)(x_0,\xi)=0.$$

A não resolubilidade do operador de H. Lewy é uma consequência imediata deste teorema.

Uma condição necessária e suficiente para a resolubilidade de um operador diferencial parcial linear (condição $(\mathcal{P})$) foi enunciada por L. Nirenberg e F. Treves [18] no decorrer da década seguinte e pode-se afirmar que ela tem sua origem na análise por eles feita, dos chamados operadores de Mizohata, que são dados por

$$M_\ell=\frac{\partial}{\partial t}+i(\ell+1)t^\ell\frac{\partial}{\partial x},\quad \ell\in\mathbb{N}.$$

Representamos aqui as variáveis em $\mathbb{R}^2$ por (x,t). Para enfatizar o índice ℓ chamaremos o operador M_ℓ de operador ℓ-Mizohata. O símbolo principal de M_ℓ é a função em $\mathbb{R}^4$

$$\sigma_p(M_\ell)(x,t,\xi,\tau)=\tau+i(\ell+1)t^\ell\xi.$$

Observe que se $t\neq 0$ então M_ℓ é elíptico em (x,t). Assim, os únicos pontos que necessitam de análise quanto a resolubilidade são os da forma $(x,0)$.

Observe que, se $\ell=1$, podemos aplicar o Teorema 1 e concluir que M_1 não é resolúvel na origem. Já, se $\ell\geq 2$ esse teorema não fornece nenhuma informação. Mas para esses operadores mostra-se razoavelmente de maneira elementar, o seguinte resultado

Teorema 2. *M_ℓ é resolúvel na origem se, e somente se, ℓ é par.*

No começo da década de 80, F. Treves [20] e J. Sjöstrand [21] consideraram uma classe de operadores do tipo Mizohata em $\mathbb{R}^2$, que por definição são campos de vetores L suaves complexos definidos perto da origem $(0,0)$, tais que

(i) $L(0,0),\overline{L}(0,0)$ são linearmente dependentes, e

(ii) $L(0,0), \left[(L(0,0), \overline{L}(0,0)\right]$ são linearmente independentes.

Assumindo que este campo de vetores L é da forma

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + i\lambda(x,t)\frac{\partial}{\partial x},$$

com λ definida perto da origem de $\mathbb{R}^2$, real e suave. Os seguintes resultados foram obtidos por F. Treves e J. Sjöstrand, respectivamente:

Teorema 3. *Assuma que L satisfaça $\lambda(0,0) = 0$ e $\frac{\partial a}{\partial t}(0,0) \neq 0$. L é localmente integrável na origem se, e somente se, existe uma mudança de coordenadas locais tal que L é um múltiplo, por uma função suave não nula, do operador 1-Mizohata.*

Teorema 4: *Assuma que L satisfaça $\lambda(0,0) = 0$ e $\frac{\partial a}{\partial t}(0,0) \neq 0$. Então existem funções suaves u^+ e u^- definidas em $t \geq 0$ e $t \leq 0$, respectivamente, tais que $u^{\pm}(x,0)$ são reais, $\frac{\partial u^{\pm}}{\partial x}(x,0) > 0$ e $Lu^{\pm} = 0$. Além disso, L é localmente integrável na origem se, e somente se, a função $(u^+)^{-1} \circ u^-(x,0)$ é analítica real na origem.*

Os resultados citados acima apresentam condições necessárias e suficientes para o operador L ser localmente integrável. Já na segunda metade da década de 80, N. Hanges em [9] apresentou um resultado sobre a resolubilidade local dessa classe de operadores, a qual ele chamou de operadores quase Mizohata. Em [9] ele apresentou uma condição para uma função suave definida em uma vizinhança da origem, estar na imagem desses operadores. Isto é, dada uma função suave f, ele encontrou condições necessárias e suficientes para existir uma solução distribuicional u tal que $Lu = f$.

Uma extensão para essa classe de operadores foi apresentada por H. Ninomiya em [17] no final da década de 90. Neste trabalho ele considerou uma classe de operadores que contém o Operador ℓ-Mizohata, no caso em que ℓ é ímpar, que por definição são os campos de vetores L suaves, complexos, definidos em uma vizinhança da origem de $\mathbb{R}^2$ satisfazendo:

(i) $L(x,0)$ e $C_n(x,0)$ são linearmente dependentes para $n = 0, 1, \ldots, \ell - 1$, e

(ii) $L(x,0)$ e $C_\ell(x,0)$ são linearmente independentes,

onde $C_0 = \overline{L}, C_1 = \left[L, \overline{L}\right], C_2 = [L, C_1], \ldots, C_n = [L, C_{n-1}], n = 1, 2, \cdots, \ell$. Em [17] foi apresentada uma condição necessária e suficiente para integrabilidade local dessa classe de operadores.

Na primeira parte do nosso trabalho, consideramos uma classe de operadores como em [17]. Apresentamos uma extensão do trabalho de N. Hanges. Chamamos esta classe de operadores quase ℓ-Mizohata em uma subvariedade Σ. Consideramos a subvariedade $\Sigma = \{t = 0\}$ e nos restringimos ao caso que ℓ é ímpar.

No Capítulo 2 apresentamos uma integral primeira para este operador restrito aos semiplanos $t \geq 0$ e $t \leq 0$ e uma forma normal para essa classe de operadores. Já no Capítulo 3, obtemos uma condição necessária e suficiente para uma função suave f pertencer a imagem deste operador.

Observamos que para generalizar o resultado acima teriamos que lidar com operadores do tipo $L = \frac{\partial}{\partial t} + i\lambda(x,t)\frac{\partial}{\partial x}$, com $\lambda(x,t) = x^2 - t^2$, que não é um campo localmente resolúvel exatamente nas retas $t = \pm x$. No entanto, exceto pela origem, mas sobre estas retas ele é 1-Mizohata, já na origem ele é quase 2-Mizohata. Na busca de uma técnica apropriada para abordar essa tal situação consideramos o artigo de C. Campana, P. Dattori e A. Meziani (ver [4]), que apesar de lidar com o caso de operadores localmente resolúveis, nos pareceu apropriado tratar o caso em que λ se anula exatamente num ponto. A saber em [4] foi considerado representação explícita de soluções no caso em que $\lambda \geq 0$ e se anula identicamente em $t = 0$. Nosso segundo resultado, apresentado no Capítulo 4, vem de encontro em estender o teorema apresentado em [4] quando λ se anula apenas na origem. Em particular, quando L tem a forma

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + i(x^2 + t^2)\lambda_0(x,t)\frac{\partial}{\partial x}, \quad \text{com } \lambda_0(0,0) \neq 0. \tag{1}$$

Capítulo

1

Preliminares

Este capítulo será destinado a apresentar definições e resultados que serão utilizados ao longo do texto.

1.1 Tópicos de variáveis complexas

Nesta seção apresentaremos alguns resultados e definições da teoria de funções de variáveis complexas, apenas a título de referência. Os mesmos serão utilizados no Capítulo 3.

Seja U uma vizinhança da origem de $\mathbb{R}^2$, definimos os conjuntos

$$U^- = \{(x,t) \in U : t < 0\} \text{ e}$$

$$U^+ = \{(x,t) \in U : t > 0\}.$$

Definição 1.1.1 (Holomorfa de crescimento lento)**.** *Uma função H é holomorfa de crescimento lento no semiplano inferior se existem uma vizinhança U da origem no plano complexo, constante $C > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ tal que H é holomorfa em U^- e*

$$|H(x+it)| \leq \frac{C}{|t|^N}, \quad x+it \in U^-.$$

Teorema 1.1.2. *Sejam H uma função holomorfa de crescimento lento no semiplano inferior e $U = I_1 \times I_2$ uma vizinhança da origem em $\mathbb{R}^2$ tal que I_1 e I_2 são intervalos abertos em $\mathbb{R}$. Então $H(\cdot + it)$ tem limite $H_0 \in \mathscr{D}'^{N+1}(I_1)$ (N como da definição anterior) quando $t \to 0$, que é*

$$\langle H_0, \phi \rangle = \lim_{t \to 0^-} \int H(x + it)\phi(x)\,\mathrm{dx}, \quad \phi \in C_c^{N+1}(I_1).$$

(Ver [11], página 63).

Teorema 1.1.3. *Seja H uma função holomorfa em U^-, onde U é uma vizinhança da origem como no teorema anterior. Se $\lim_{t \to 0} H(\cdot + it)$ existe em $\mathscr{D}'^{N}(I_1)$ então*

$$|H(x + it)| \leq \frac{C}{|t|^{N+1}}, \quad x + it \in U',$$

onde U' é o produto de um intervalo $I_1' \subset\subset I_1$ e do intervalo $(-\frac{\delta}{2}, 0)$, sendo $I_2 = (-\delta, \delta)$. Ou seja, H é uma função holomorfa de crescimento lento no semiplano inferior.

(Ver [11], página 66).

Os próximos resultados serão utilizados na Seção 2 do Capítulo 3.

Proposição 1.1.4 (Desigualdades de Cauchy)**.** *Seja $f \in C^\infty(I)$ para algum intervalo aberto I. A função f é analítica real em I se, e somente se, para cada $\alpha \in I$, existe um intervalo aberto J, com $\alpha \in J \subseteq I$ e constantes $C > 0$ e $R > 0$ tal que as derivadas de f satisfazem*

$$|f^{(j)}(x)| \leq C\frac{j!}{R^j}, \quad \forall x \in J.$$

Proposição 1.1.5. *Dado aberto $D \subset \mathbb{C}^n$, $G(z, \xi)$ contínua em $D \times \mathbb{R}^m$, $z \longmapsto G(z, \xi)$ holomorfa em D e $|G(z, \xi)| \leq h(\xi) \in L^1$. Então,*

$$P(z) = \int G(z, \xi)\,\mathrm{d}\xi \ \text{ é holomorfa em } D.$$

Teorema 1.1.6 (Teorema de Montel). *Sejam $D \subseteq \mathbb{C}$ aberto e F uma família de funções holomorfas em D. Suponha que F é localmente limitada. Então F é normal, isto é, cada sequência de elementos de F tem subsequência convergindo uniformemente em cada subconjunto compacto de D.*

1.2 Mudanças de variáveis no símbolo principal de um operador

O objetivo principal desta seção é mostrar como o símbolo principal de um operador diferencial parcial linear (ODPL) se transforma através de mudança de variáveis. Esse resultado será útil ao longo de todo texto quando realizarmos uma mudança de variáveis no operador.

Consideraremos nesta seção como um ODPL de ordem $k \in \mathbb{N}$ em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ uma aplicação $P : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$, definida da seguinte forma

$$P(x, D) = P = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha,$$

sendo $D^\alpha = (-i)^{|\alpha|}\partial^\alpha$ e $a_\alpha \in C^\infty(U), |\alpha| \leq k$. Associamos a P os seguintes polinômios em ξ:

$$p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x)\xi^\alpha, \quad x \in U, \xi \in \mathbb{R}^n$$

e

$$p_k(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x)\xi^\alpha, \quad x \in U, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Definimos o *símbolo* de P e o *símbolo principal* de P por

$$\sigma(P)(x, \xi) = p(x, \xi)$$

e

$$\sigma_p(P)(x,\xi) = p_k(x,\xi),$$

respectivamente. Temos os seguintes resultados a respeito do símbolo principal de um operador diferencial P.

Lema 1.2.1. *Sejam P um operador diferencial definido em U, $x \in U$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$. Se $f, \varphi \in C^\infty(U)$ são tais que $f(x) = 1$ e $d\varphi(x) = \xi$, então*

$$\sigma_p(P)(x,\xi) = \lim_{t\to\infty} t^{-k} e^{-it\varphi(x)} P(e^{it\varphi} f)(x).$$

Demonstração. Segue da aplicação da fórmula de Leibniz.

Consideraremos agora um difeomorfismo $h : U \to U'$, onde U' é outro aberto de $\mathbb{R}^n$. O difeomorfismo h induz as seguintes aplicações:

$$\begin{aligned} h^* : C^\infty(U') &\to C^\infty(U) \\ f &\mapsto f \circ h; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_* : End(C^\infty(U)) &\to End(C^\infty(U')) \\ Q &\mapsto (h^*)^{-1} \circ Q \circ h^*; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T^*h : U' \times \mathbb{R}^n &\to U \times \mathbb{R}^n \\ (y,\eta) &\mapsto (h^{-1}(y), dh(h^{-1}(y)) \cdot \eta) \end{aligned}$$

e T^*h induz a aplicação

$$\begin{aligned} (T^*h)^* : C^\infty(U \times \mathbb{R}^n) &\to C^\infty(U' \times \mathbb{R}^n) \\ \sigma &\mapsto \sigma \circ (T^*h). \end{aligned}$$

Com isso temos a seguinte

Proposição 1.2.2. *A aplicação h_* aplica um operador diferencial definido em U bijetivamente em um operador diferencial definido em U'. Além disso,*

$$\sigma_p(h_*(P)) = (T*h)^*(\sigma_p(P)), \text{ em } U' \times \mathbb{R}^n.$$

Demonstração. A prova da primeira aplicação segue da regra da cadeia e da fórmula de Leibniz. Já para a segunda afirmação, fixamos $(x, \xi) \in U \times \mathbb{R}^n$ e tomamos

$$(y, \eta) = (h(x), \xi \cdot (dh(x))^{-1})$$

e $f, \varphi \in C^\infty(U')$ tais que $f(y) = 1$ e $d\varphi(y) = \eta$. Com isso aplicando o lema anterior duas vezes, concluímos o resultado. ∎

Exemplo 1.2.3. *Seja P um operador diferencial de ordem um definido em um subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^2$. Digamos que P tem a forma*

$$P = A(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + B(x,t)\frac{\partial}{\partial t}. \tag{1.1}$$

Então após mudança de variáveis $\varphi : U \to U'$, $\varphi(x,t) = (y(x,t), s(x,t))$ temos que o operador P tem a forma

$$\tilde{P} = \varphi_*(P) = P(y)(x,t)\frac{\partial}{\partial y} + P(s)(x,t)\frac{\partial}{\partial s}. \tag{1.2}$$

Demonstração. De fato, note que

$$\sigma_p(P)(x,t,\xi,\eta) = A(x,t)\xi + B(x,t)\eta, \quad (x,t) \in U, (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2.$$

Assim, pelo lema anterior temos

$$\begin{aligned}
\sigma_p(\tilde{P})(\varphi(x,t),\xi,\eta) &= (T^*\varphi)^*(\sigma_p(P))(\varphi(x,t),\xi,\eta) \\
&= \sigma_p(P)\circ(T^*h)^*(\varphi(x,t),\xi,\eta) \\
&= \sigma_p(P)(x,t,d\varphi(x,t)\cdot(\xi,\eta)) \\
&= \sigma_p(P)(x,t,\xi y_x+\eta s_x,\xi y_t+\eta s_t) \\
&= A(x,t)(\xi y_x+\eta s_x)+B(x,t)(\xi y_t+\eta s_t) \\
&= (A(x,t)y_x+B(x,t)y_t)\xi+(B(x,t)s_x+B(x,t)s_t)\eta \\
&= P(y)(x,t)\xi+P(s)(x,t)\eta.
\end{aligned}$$

Logo $\tilde{P}$ tem a forma (1.2). ∎

Exemplo 1.2.4. *Seja L como em (1.1), com A ou B não identicamente nulos. Então L pode ser escrito como um múltiplo não nulo de*

$$L=\frac{\partial}{\partial t}+i\lambda(x,t)\frac{\partial}{\partial x}, \tag{1.3}$$

com λ real, suave e definida em uma vizinhança da origem.

Demonstração. De fato, após translação podemos assumir que L está definido em uma vizinhança da origem. Podemos assumir também que $B(0,0)\neq 0$. Assim, existe uma vizinhança da origem tal que $B(x,t)\neq 0$. Logo, tomando $C=\frac{A}{B}$, teremos

$$L=B\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial x}\right)=B\left(\frac{\partial}{\partial t}+C\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Assim, vamos supor que L tem a forma

$$L=\frac{\partial}{\partial t}+C(x,t)\frac{\partial}{\partial x},$$

onde, $C(x,t) = C_1(x,t) + iC_2(x,t)$.

Logo queremos uma mudança de variáveis da forma $x = x(y,s)$ e $t = s$ tal que

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial t} + C_1(x,t)\frac{\partial}{\partial x}.$$

Assim, tomamos $y(x,t)$ solução do seguinte P.V.I

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} + C_1(x,t)\dfrac{\partial y}{\partial x} = 0 \\ y|_{t=0} = x, \end{cases}$$

o qual possui única solução.

Note que $(x,t) \longmapsto (y,s)$ é uma mudança de variáveis em uma vizinhança da origem. Assim, pelo Exemplo 1.2.3 temos que L se transforma por mudança de variáveis em um operador da forma

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= \left(\frac{\partial y}{\partial t} + C(x,t)\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial s} \\ &= \left(\frac{\partial y}{\partial t} + C_1(x,t)\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial y} + iC_2(x,t)\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial s} \\ &= \frac{\partial}{\partial s} + iC_2(x,t)\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial s} + i\lambda(y,s)\frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

com λ real e suave.

Renomeando as variáveis temos que L tem a forma (1.3). ∎

1.3 Operadores parcialmente hipoelípticos

Em um trabalho de L. Garding e B. Malgrange em 1961 (ver [7]) foi apresentada pela primeira vez a definição de operador parcialmente hipoelíptico. Nesse trabalho, os autores

consideraram operadores com coeficientes constantes. No ano seguinte, S. Mizohata (ver [16]) publicou um trabalho onde ele mostra como lidamos com esses resultados para o caso de coeficientes variáveis.

Consideraremos nessa seção, $P(D)$ e $P(x,D)$ operadores diferenciáveis com coeficientes constantes e coeficientes variáveis, respectivamente.

Definição 1.3.1 (Operador hipoelíptico)**.** *Um operador $P(x,D)$ é dito ser hipoelíptico se, e somente se, para cada conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ temos*

$$SS(P(x,D)u) = SS(u).$$

Definição 1.3.2 (Distribuição parcialmente regular)**.** *Seja Ω um conjunto aberto de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ e $u(x,t) \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Dizemos que u é regular em t se, para todo par de abertos $V \subset \mathbb{R}^m$, $W \subset \mathbb{R}^n$, $V \times W \subset \Omega$ e toda $\varphi \in C_c^\infty(V)$, a distribuição u_φ em W definida por*

$$u_\varphi : \phi(t) \longmapsto \langle u(x,t), \phi(t)\varphi(x)\rangle$$

é uma função suave de t.

Notação: $u \in C^\infty(W, \mathscr{D}'(V))$.

Definição 1.3.3 (Operador parcialmente hipoelíptico)**.** *Seja $L = L(x,t,D_x,D_t)$ um operador diferencial. L é dito ser hipoelíptico em t se, para cada f regular em t tem-se que a distribuição u tal que $Lu = f$ é regular em t.*

Para um operador com coeficientes constante, $P(D_x,D_t)$, podemos dar a seguinte condição equivalente para hipoelipticidade parcial. Mas antes precisaremos da seguinte definição:

Definição 1.3.4 (Operador estritamente menos forte)**.** *Seja P um operador hipoelíptico.*

Dizemos que um operador Q é estritamente menos forte que P (escrevemos $Q << P$),se

$$\frac{\sigma(Q)(\xi)}{\sigma(P)(\xi)} \longrightarrow 0 \quad \textit{quando } \xi \to \infty.$$

Teorema 1.3.5 ([7], página 9)**.** *Para que $P = P(D_x, D_t)$ seja parcialmente hipoelíptico em t é necessário e suficiente que as seguinte condições sejam equivalentes:*

1. $\sigma(P)(\xi, \eta) = 0$, $\operatorname{Re}\xi$ *e* η *limitados* $\Rightarrow \operatorname{Im}\xi$ *limitado;*

2. *P pode ser escrito como uma soma finita da forma*

$$\sigma(P)(\xi, \eta) = \sigma(P_0)(\eta) + \sum \sigma(P_j)(\eta)\sigma(Q_j)(\xi), \quad j > 0,$$

onde P_0 é hipoelíptico e $P_j << P_0$.

Já para um operador com coeficientes variáveis, S. Mizohata, mostrou um resultado equivalente. Para isso, consideramos $P(x, t, D_t)$ um operador com coeficientes variáveis e tal que, em uma vizinhança de (x_0, t_0), P se expressa por

$$P(x, t, D_t) = \sum a_j(x, t)M_j(D_t) \tag{1.4}$$

onde,

1º) os coeficientes $a_j's$ são suaves;

2º) $M(D_t) = \sum a_j(x_0, t_0)M_j(D_t)$ é hipoelíptico;

3º) os operadores $M_j's$ são hipoelípticos e equivalentes à M.

Teorema 1.3.6 ([16], página 423). *Seja $L(x,t,D_x,D_t)$ um operador diferencial linear com coeficientes suaves. Suponha que*

$$L = P(x,t,D_t) + \sum P_j(x,t,D_t)Q_j(D_x) \tag{1.5}$$

verifica as condições:

(i) *o operador P satisfaz (1.4);*

(ii) *cada operador P_j é estritamente menos forte que o operador M;*

(iii) *os $Q_j's$ são operadores com coeficientes constantes.*

Então, L é hipoelíptico em t.

Exemplo 1.3.7. *Consideramos um operador diferencial de ordem um da seguinte forma*

$$L = D_t + \lambda(x,t)D_x,$$

onde é λ suave e definido no conjunto aberto Ω de $\mathbb{R}^2$. Então L é hipoelíptico em t.

Demonstração. Podemos escrever L da forma

$$L = P(D_t) + P_0(D_t)Q_0(D_x),$$

onde $P(D_t) = D_t$, $P_0(D_t) = \lambda(x,t)$ (operador de ordem zero) e $Q_0(D_x) = D_x$. Temos que L verifica as condições (i)-(iii). De fato, P satisfaz (1.4), pois $P = D_t$ é hipoelíptico, Q_0 é um operador com coeficientes constante. Além disso,

$$\frac{\sigma(P_0)(\eta)}{\sigma(P)(\eta)} = \frac{\lambda(x,t)}{\eta} \to 0 \text{ quando } \eta \to 0,$$

ou seja, P_0 é estritamente menos forte que P. Portanto, L é hipoelíptico (parcialmente hipoelíptico) em t. ∎

1.4 Campos de vetores complexos

Nesta seção apresentaremos definições e resultados necessários que apareceram ao longo deste trabalho. O conteúdo dessa seção encontra-se no Capítulo 1 de [3].

Ao longo de toda esta seção, consideraremos Ω uma variedade diferenciável de dimensão n.

Definição 1.4.1. *Um campo de vetores complexo (suave) sobre Ω é uma aplicação $\mathbb{C}$-linear*

$$L : C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$$

que satisfaz a regra de Leibniz

$$L(fg) = f(Lg) + g(Lf), \quad f, g \in C^\infty(\Omega).$$

Vamos denotar por $\mathfrak{X}(\Omega)$ o conjunto de todos os campos de vetores complexos sobre Ω.

Exemplo 1.4.2. *Um operador diferencial parcial linear de ordem um com coeficientes em C^∞ sem termo de ordem zero é um exemplo de um campo de vetor.*

Proposição 1.4.3. *Se $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ e se f é constante então $Lf = 0$. Além disso,*

$$S(Lf) \subset S(f), \quad \forall f \in C^\infty(\Omega), L \in \mathfrak{X}(\Omega).$$

Como consequência desse resultado podemos definir a restrição de um elemento $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ a um conjunto aberto W de Ω, da seguinte maneira, se $p \in W$ e $f \in C^\infty(W)$,

definimos a aplicação

$$L_W(f)(p) = L(\widetilde{f})(p),$$

onde $\widetilde{f}$ é qualquer elemento em $C^\infty(\Omega)$ que coincide com f em uma vizinhança de p. Cada L_W define um elemento em $\mathfrak{X}(W)$. Usualmente vamos escrever L ao invés de L_W.

1.4.1 A estrutura algébrica de $\mathfrak{X}(\Omega)$

Dado $g \in C^\infty(\Omega)$ e $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ podemos definir $gL \in \mathfrak{X}(\Omega)$ por

$$(gL)(f) = g \cdot L(f), \quad f \in C^\infty(\Omega).$$

Tal multiplicação externa dá a $\mathfrak{X}(\Omega)$ uma estrutura de C^∞-módulo.

Uma operação (interna) importante em $\mathfrak{X}(\Omega)$ é chamada de *comutador* (ou *colchete de Lie*) entre dois campos de vetores. Dados L, $M \in \mathfrak{X}(\Omega)$ definimos

$$[L, M](f) = L(M(f)) - M(L(f)), \quad f \in C^\infty(\Omega).$$

Verifica-se que $[L, M] \in \mathfrak{X}(\Omega)$. Esta operação transforma $\mathfrak{X}(\Omega)$ em uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{C}$.

Seja (U, x) uma carta local em Ω e seja também $L \in \mathfrak{X}(U)$. Fixemos $p \in U$ e escrevemos

$$\mathrm{x}(q) = (x_1(q), x_2(q), \ldots, x_n(q)), \quad q \in U.$$

Agora, tomamos $V \subset U$ um conjunto aberto tal que $\mathrm{x}(V)$ é uma bola aberta centrada em $\mathrm{x}(p) = a = (a_1, \ldots, a_n)$. Dada $f \in C^\infty(U)$, escreve $f^* = f \circ \mathrm{x}^{-1}$. Se $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{x}(V)$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo aplicado a função

$$t \longmapsto f^*(a_1 + t(x_1 - a_1), \ldots, a_n + t(x_n - a_n))$$

segue que

$$f^*(x_1,\ldots,x_n) = f^*(a_1,\ldots,a_n) + \sum_{j=1}^{n} h_j(x_1,\ldots,x_n)(x_j - a_j),$$

onde $h_j \in C^\infty(\mathrm{x}(V))$ e $h_j(a) = \left(\frac{\partial f^*}{\partial x_j}\right)(a)$. Se definirmos $g_j = h_j \circ \mathrm{x} \in C^\infty(U)$, obtemos

$$f(q) = f(p) + \sum_{j=1}^{n} g_j(q)(x_j(q) - x_j(p)), \quad q \in V$$

e consequentemente pela Regra de Leibniz

$$L(f)(p) = \sum_{j=1}^{n} g_j(p)(Lx_j)(p). \tag{1.6}$$

Definição 1.4.4. *A aplicação $\mathbb{C}-$linear $C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ dada por*

$$f \mapsto \frac{\partial f^*}{\partial x_j} \circ \mathrm{x}$$

define um elemento em $\mathfrak{X}(U)$, que é denotado por $\frac{\partial}{\partial x_j}$.

Assim, podemos escrever

$$g_j(p) = h_j(\mathrm{x}(p)) = \frac{\partial f^*}{\partial x_j}(\mathrm{x}(p)) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)(f)(p). \tag{1.7}$$

Agora, substituindo (1.7) em (1.6) obtemos

$$L(f)(p) = \sum_{j=1}^{n} (Lx_j)(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)(f)(p).$$

Como $p \in U$ é arbitrário, obtemos a representação de L nas coordenadas locais $(x_1,\ldots,x_n)$ por

$$L = \sum_{j=1}^{n} (Lx_j)\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Observação 1.4.5. *Essa representação mostra que um campo de vetor é um operador diferencial parcial de ordem um com coeficientes em C^∞, sem termo de ordem zero.*

Além disso, em particular, essa representação mostra que $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ é uma base de $\mathfrak{X}(U)$. Observe também que se $M \in \mathfrak{X}(U)$ então a representação de $[L, M]$ em coordenadas locais $(x_1, \ldots, x_n)$ é dada por dada por

$$[L, M] = \sum_{j=1}^{n} \{L(Mx_j) - M(Lx_j)\} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

1.4.2 Estruturas formalmente integráveis

Denote por $\mathscr{B}_p$ o conjunto de todos os pares (V, f), onde V é uma vizinhança aberta de p e $f \in C^\infty(V)$. Em $\mathscr{B}_p$ introduzimos a seguinte relação de equivalência:

- $(V_1, f_1) \sim (V_2, f_2)$ se existe uma vizinhança aberta V de p, $V \subset V_1 \cap V_2$, tal que f_1 e f_2 coincidem em V.

Um *germe* de uma função C^∞(suave) em p é um elemento do espaço quociente

$$C^\infty(p) \doteq \mathscr{B}_p / \sim .$$

Observamos que $C^\infty(p)$ é também uma $\mathbb{C}$-álgebra. Dada uma função f suave definida em uma vizinhança aberta de p, o germe em p definido por f será denotado por $\underline{f}$. Note que existe um homeormorfismo natural $C^\infty(p) \to \mathbb{C}$ definido por $\underline{f} \to f(p)$.

Definição 1.4.6. *Um vetor tangente complexo (em Ω) em p é uma aplicação $\mathbb{C}$-linear*

$$v : C^\infty(p) \to \mathbb{C}$$

satisfazendo

$$v(\underline{fg}) = f(p)v(\underline{g}) + g(p)v(\underline{f}).$$

O conjunto de todos vetores tangentes complexos em p será denotado por $\mathbb{C}T_p\Omega$, tendo uma estrutura de espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ e será chamado *espaço tangente complexo de* Ω *em* p.

Se $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ então $L_p : C^\infty(p) \to \mathbb{C}$ definido por

$$L_p(\underline{f}) = L(f)(p)$$

pertence à $\mathbb{C}T_p\Omega$. Reciprocamente, suponha que para cada $p \in \Omega$ um elemento $v_p \in \mathbb{C}T_p\Omega$ é dado tal que

$$p \mapsto v_p(\underline{f}) \in C^\infty(\Omega), \quad \forall f \in C^\infty(\Omega).$$

Então existe $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ tal que $L_p = v_p$ para todo $p \in \Omega$.

O *fibrado tangente complexificado* de Ω é definido como a união disjunta

$$\mathbb{C}T\Omega = \bigcup_{p\in\Omega} \mathbb{C}T_p\Omega.$$

Vamos precisar também da notação de um *subfibrado vetorial complexo* de $\mathbb{C}T\Omega$ de posto n. Por esse, nos referimos a união disjunta

$$\mathcal{V} = \bigcup_{p\in\Omega} \mathcal{V}_p \subset \mathbb{C}T\Omega$$

satisfazendo as seguintes condições:

(a) para cada $p \in \Omega$, $\mathcal{V}_p$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{C}T_p\Omega$ de dimensão n;

(b) dado $p_0 \in \Omega$ existem um conjunto aberto U_0 contendo p_0 e campos de vetores $L_1, \ldots, L_n \in$

$\mathfrak{X}(U_0)$ tais que $L_{1p}, \ldots, L_{np}$ geram $\mathcal{V}_p$ para cada $p \in U_0$.

O espaço vetorial $\mathcal{V}_p$ é chamado de *fibra* de $\mathcal{V}$ em p.

Dados um subfibrado vetorial complexo $\mathcal{V}$ de $\mathbb{C}T\Omega$ e um subconjunto aberto W de Ω, uma *seção de $\mathcal{V}$ sobre W* é um elemento L de $\mathfrak{X}(W)$ tal que $L_p \in \mathcal{V}_p$ para cada $p \in W$.

Agora estamos prontos para definir o que vem a ser um dos conceitos mais importantes dessa teoria.

Definição 1.4.7. *Uma estrutura formalmente integrável sobre Ω é um subfibrado vetorial complexo $\mathcal{V}$ de $\mathbb{C}T\Omega$ satisfazendo a condição involutiva:*

- *Se $W \subset \Omega$ é aberto e $L, M \in \mathfrak{X}(W)$ são seções de $\mathcal{V}$ sobre W então $[L, M]$ é também uma seção de $\mathcal{V}$ sobre W.*

1.4.3 Formas diferenciais

Vamos denotar por $\mathfrak{N}(\Omega)$ o dual de $\mathfrak{X}(\Omega)$ e vamos nos referir aos seus elementos como como formas diferenciais sobre Ω de grau um (ou 1-formas). Em outras palavras, uma 1-forma em Ω é uma aplicação $C^\infty(\Omega)$-linear

$$\omega : \mathfrak{X}(\Omega) \to C^\infty(\Omega).$$

Se definirmos

$$\mathbb{C}T_p^*\Omega \doteq \text{dual de } \mathbb{C}T_p\Omega,$$

para cada $w \in \mathfrak{N}(\Omega)$ podemos associar um elemento $\omega_p \in \mathbb{C}T_p^*\Omega$ pela fórmula

$$\omega_p(v) = \omega(L)(p),$$

onde $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ é tal que $L_p = v$.

Proposição 1.4.8. $CT_p^*\Omega = \{\omega_p : \omega \in \mathfrak{N}(\Omega)\}$.

Definição 1.4.9. *Dada* $f \in C^\infty(\Omega)$ *definimos* $\mathrm{d}\, f \in \mathfrak{N}(\Omega)$ *pela fórmula*

$$\mathrm{d}\, f(L) = L(f), \quad L \in \mathfrak{X}(\Omega).$$

Podemos obter uma representação em coordenadas locais dada por

$$\mathrm{d}\, f = \sum_{j=1}^{N} \mathrm{d}\, f \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \mathrm{d}\, x_j = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_j}\, \mathrm{d}\, x_j.$$

Agora introduzimos o *fibrado cotangente complexificado* de Ω como sendo a união disjunta

$$\mathbb{C}T^*\Omega \doteq \bigcup_{p\in\Omega} \mathbb{C}T_p^*\Omega.$$

Como anteriormente podemos definir a noção de subfibrado vetorial complexo de $\mathbb{C}T^*\Omega$ de posto m como sendo a união disjunta

$$\mathcal{W} = \bigcup_{p\in\Omega} \mathcal{W}_p,$$

onde cada $\mathcal{W}_p$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{C}T_p^*\Omega$ de dimensão m, satisfazendo a seguinte propriedade:

- Dado $p_0 \in \Omega$ existem um conjunto aberto U_0 contendo p_0 e 1-formas $\omega_1, \ldots, \omega_m \in \mathfrak{N}(U_0)$ tais que $\omega_{1p}, \ldots, \omega_{mp}$ geram $\mathcal{W}_p$ para cada $p \in U_0$.

Como anteriormente vamos nos referir ao espaço $\mathcal{W}_p$ como uma fibra de $\mathcal{W}$ no ponto p.

Proposição 1.4.10. *Seja* $\mathcal{V} = \bigcup_{p\in\Omega} \mathcal{V}_p$ *um subfibrado vetorial complexo de* $\mathbb{C}T\Omega$ *e seja, para cada* $p \in \Omega$

$$\mathcal{V}_p^\perp \doteq \left\{\lambda \in \mathbb{C}T_p^*\Omega : \lambda = 0 \ em\ \mathcal{V}_p\right\}.$$

Então $\mathcal{V}^{\perp} \doteq \bigcup_{p\in\Omega} \mathcal{V}_p^{\perp}$ *é um subfibrado vetorial complexo de* $\mathbb{C}T^*\Omega$.

Quando $\mathcal{V}$ é uma estrutura formalmente integrável sobre Ω de dimensão N vamos denotar o subfibrado $\mathcal{V}^{\perp}$ por T'. Vamos também denotar por n o posto de $\mathcal{V}$ e por m o posto de T'. Em particular, $n + m = N$.

Vamos usar também as seguintes notações:

$$T_p\Omega \doteq \{v \in \mathbb{C}T_p\Omega : v \text{ é real}\};$$

$$T_p^*\Omega \doteq \left\{\xi \in \mathbb{C}T_p^*\Omega : \xi \text{ é real}\right\};$$

$$T\Omega \doteq \bigcup_{p\in\Omega} T_p\Omega;$$

$$T^*\Omega \doteq \bigcup_{p\in\Omega} T_p^*\Omega.$$

Dado $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ seu conjugado (complexo) é o campo de vetores $\overline{L} \in \mathfrak{X}(\Omega)$ definido por

$$\overline{L}(f) = \overline{L(\overline{f})}, \quad f \in C^{\infty}(\Omega).$$

Em particular, dizemos que L é um campo vetorial real se $L = \overline{L}$.

Exemplo 1.4.11. *Se* $L = A(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + B(x,t)\frac{\partial}{\partial t}$, *onde* A, B *são funções suaves complexas definidas em um subconjunto aberto* W *de* $\mathbb{R}^2$ *então*

$$\overline{L}(f)\overline{L(\overline{f})} = \overline{A}\frac{\partial f}{\partial x} + \overline{B}\frac{\partial f}{\partial t}.$$

Do mesmo modo podemos definir o conjugado (complexo) de um elemento em $\mathbb{C}T_p\Omega$. Dado um subespaço $\mathcal{V}_p \subset \mathbb{C}T_p\Omega$ definimos

$$\overline{\mathcal{V}}_p \doteq \{\overline{v} : v \in \mathcal{V}_p\}.$$

É claro da definição que se $\mathcal{V}$ é um subfibrado vetorial complexo de $\mathbb{C}T\Omega$ então o mesmo é verdade para $\overline{\mathcal{V}} \doteq \bigcup_{p\in\Omega} \overline{\mathcal{V}}_p$. Vamos no referir a $\overline{\mathcal{V}}$ como o conjugado (complexo) do subfibrado $\mathcal{V}$. Analogamente definições e resultados podem ser introduzidos e obtidos para $\mathbb{C}T^*\Omega$ e suas fibras $\mathbb{C}T_p^*\Omega$. É importante também mencionar a igualdade

$$\overline{\mathcal{V}}^{\perp} = \overline{\mathcal{V}^{\perp}},$$

a qual é válida para cada subfibrado vetorial complexo $\mathcal{V}$ de $\mathbb{C}T\Omega$.

1.4.4 O conjunto característico

Seja $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}T\Omega$ uma estrutura formalmente integrável sobre Ω. O conjunto característico de $\mathcal{V}$ é o subconjunto de $T^*\Omega$ definido por

$$T^0 \doteq T' \cap T^*\Omega.$$

Dado $p \in \Omega$, vamos também escrever $T_p^0 = T_p' \cap T_p^*\Omega$. Recordamos que o símbolo de um campo de vetor $L \in \mathfrak{X}(\Omega)$ é uma função $\sigma(L) : T^*\Omega \to \mathbb{C}$ dada por

$$\sigma(L)(\xi) = \xi(L_p), \text{ se } \xi \in T_p^*\Omega.$$

Então vemos que $\xi \in T_p^0$ se, e somente se $\sigma(L)(\xi) = 0$, para cada seção L de $\mathcal{V}$.

Seja (U, x), $\mathrm{x} = (x_1, \ldots, x_N)$ uma carta local de Ω. Tome $p \in U$ e $\xi \in T_p^*\Omega$. Se escrevermos $\xi = \sum_{j=1}^{N} \xi_j \, \mathrm{d}\, x_{jp}$ $(\xi_j \in \mathbb{R})$ e $L = \sum_{j=1}^{N} a_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ então

$$\sigma(L)(\xi) = \sum_{j=1}^{N} a_j(p)\xi_j.$$

Assim, se $L_j = \sum_{k=1}^{N} a_{jk}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)$ são n seções linearmente independentes de $\mathcal{V}$ sobre U podemos descrever $T^0 \cap T^*U$ pelo sistema de equações

$$\sum_{k=1}^{N} a_{jk}(p)\xi_k = 0, \quad p \in U, \xi_k \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

1.4.5 Estruturas localmente integráveis

Um subfibrado vetorial complexo $\mathcal{V}$ de $\mathbb{C}T\Omega$, de posto n, define uma *estrutura localmente integrável* se dado um ponto arbitrário $p_0 \in \Omega$, existem uma vizinhança aberta U_0 de p_0 e funções $Z_1, \ldots, Z_m \in C^\infty(U_0)$, com $m = N - n$, tais que

$$spam\,\{\mathrm{dZ}_{1p}, \ldots, \mathrm{dZ}_{mp}\} = \mathcal{V}_p^\perp, \quad \forall p \in U_0.$$

Se observarmos que a diferencial de uma função suave g é uma seção de $\mathcal{V}^\perp$ se, e somente se, $Lg = 0$ para cada seção de $\mathcal{V}$, segue claramente que toda estrutura localmente integrável define uma estrutura formalmente integrável.

Temos:

- A estrutura formalmente integrável $\mathcal{V}$ é localmente integrável se, e somente se, dados $p_0 \in \Omega$ e campos de vetores $L_1, \ldots, L_n$, os quais geram $\mathcal{V}$ em uma vizinhança aberta U_0 de p_0, existem uma vizinhança aberta $V_0 \subset U_0$ de p_0 e funções suaves $Z_1, \ldots, Z_m \in C^\infty(V_0)$ tais que:

$$\mathrm{dZ}_1 \wedge \ldots \mathrm{dZ}_m \neq 0 \text{ em } V_0;$$

$$L_j Z_k = 0, \quad j = 1, \ldots, n, k = 1, \ldots, m.$$

As funções $Z_1, \ldots, Z_m$ são chamadas de *integrais primeiras* de $\mathcal{V}$.

Definição 1.4.12. *Seja $\mathcal{V}$ uma estrutura formalmente integrável sobre Ω. Dizemos que $\mathcal{V}$*

é uma estrutura elíptica se $T_p^0 = 0$, *para todo* $p \in \Omega$.

Teorema 1.4.13 ([6], página 9)**.** *Toda estrutura elíptica é localmente integrável.*

1.4.6 Geradores locais

Vamos aqui apresentar resultados bastante úteis que garantem a existência de coordenadas locais e geradores locais do subfibrado T' quando a estrutura $\mathcal{V}$ é localmente integrável.

Teorema 1.4.14. *Seja* $\mathcal{V}$ *uma estrutura localmente integrável definida em uma variedade* Ω. *Seja* $p \in \Omega$ *e* d *a dimensão real de* T_p^0. *Então existe um sistema de coordenadas que se anulam em* p,

$$\{x_1, \ldots, x_\nu, y_1, \ldots, y_\nu, s_1, \ldots, s_d, t_1, \ldots, t_{n'}\}$$

e funções reais, suaves $\phi_1, \ldots, \phi_d$ *definidas em uma vizinhança da origem e satisfazendo*

$$\phi_k(0) = 0, \quad \mathrm{d}\,\phi_k(0) = 0, \quad k = 1, \cdots, d,$$

tais que a diferencial das funções

$$Z_j(x, y) = z_j \doteq x_j + iy_j, \quad j = 1, \ldots, \nu;$$

$$W(x, y, s, t) = s_k + i\phi_k(z, s, t), \quad k = 1, \ldots, d,$$

geram T' *em uma vizinhança da origem. Em particular, temos* $\nu + d = m$, $\nu + n' = n$ *e também*

$$T_p^0 = span\left\{\mathrm{ds}_1\,|_0, \ldots, \mathrm{ds}_d\,|_0\right\}.$$

Corolário 1.4.15. *Com as mesmas hipóteses do teorema anterior. Então existe um sis-*

tema de coordenadas que se anulam em p,

$$\{x_1, \ldots, x_m, t_1, \ldots, t_n\}$$

e funções reais, suaves $\phi_1, \ldots, \phi_m$ *definidas em uma vizinhança da origem e satisfazendo*

$$\phi_k(0,0) = 0, \mathrm{d}_x\, \phi_k(0,0) = 0, \quad k = 1, \ldots, m,$$

tais que a diferencial das funções

$$Z_x(x,t) = x_k + i\phi_x(x,t), \quad k = 1, \ldots, m,$$

geram $T^{'}$ *em uma vizinhança da origem.*

Capítulo

2

Operadores quase ℓ-Mizohata

2.1 Uma classe de operadores

Nosso primeiro objetivo nesse trabalho será de estabelecer o conjunto imagem em C^∞ dos Operadores ℓ-Mizohata

$$M_\ell = \frac{\partial}{\partial t} + i(\ell+1)t^\ell \frac{\partial}{\partial x}, \quad \ell \in \mathbb{N},$$

no caso em que ℓ é ímpar. Motivados pela classe de operadores definida nos artigos de F. Treves [20] e J. Sjötrand [21] a qual contém o Operador de Mizohata M_1 e pela classe de operadores definida por H. Ninomiya [17] a qual contém operador M_ℓ, consideramos a seguinte classe de operadores.

Definição 2.1.1 (Operador quase ℓ-Mizohata)**.** *Dados L um campo de vetores complexo, suave, definido em um subconjunto aberto Ω de $\mathbb{R}^2$ e ℓ um inteiro, $\ell \geq 1$. Dizemos que L é um operador quase ℓ-Mizohata em uma subvariedade Σ de Ω, se:*

(i) *L e C_n são linearmente dependentes para $n = 0, 1, \ldots, \ell - 1$ em Σ;*

(ii) *L e C_ℓ são linearmente independentes em Σ,*

onde $C_0 = \overline{L}, C_1 = \left[L, \overline{L}\right], C_2 = [L, C_1], \ldots, C_n = [L, C_{n-1}], n = 1, 2, \cdots, \ell$.

Observação 2.1.2. *O conjunto onde L e $\overline{L}$ são linearmente dependentes é igual ao conjunto onde L deixa de ser elíptico, logo a subvariedade Σ está contida nesse conjunto.*

Observação 2.1.3. *A classe dos operadores quase ℓ-Mizohata é invariante por mudança de variáveis e por multiplicação por funções suaves que não se anulam.*

Demonstração. Vamos analisar o caso particular em que

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + \lambda(x,t)\frac{\partial}{\partial x},$$

com λ suave, complexa, definida em um subconjunto aberto Ω de $\mathbb{R}^2$ e $\Sigma = \{(x,t) \in \Omega, t = 0\}$. Suponhamos que L é um operador quase ℓ-Mizohata em Σ e vamos calcular os comutadores C_n, para $n = 1, \ldots, \ell$.

1º) L e $\overline{L}$ serem linearmente dependentes em Σ significa que, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $L = \alpha\overline{L}$ em Σ, então

$$\frac{\partial}{\partial t} + \lambda\frac{\partial}{\partial x} = \alpha\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overline{\lambda}\frac{\partial}{\partial x}\right) \text{ em } t = 0.$$

Assim,

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \lambda = \alpha\overline{\lambda} \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda} \text{ em } t = 0. \end{cases}$$

Logo, $\lambda|_{t=0}$ é real.

2º) Vamos agora calcular o comutador C_1

$$\begin{aligned} C_1 = \left[L, \overline{L}\right] &= \left[\frac{\partial}{\partial l} + \lambda\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial l} + \overline{\lambda}\frac{\partial}{\partial x}\right] \\ &= \left(\frac{\overline{\partial\lambda}}{\partial t} - \frac{\partial\lambda}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\lambda\frac{\overline{\partial\lambda}}{\partial x} - \overline{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned}$$

Agora, como $\lambda|_{t=0}$ é real o mesmo vale para $\frac{\partial\lambda}{\partial x}|_{t=0}$. Então,

$$C_1 = -2i\text{Im}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial x} \text{ em } t=0.$$

Assim, se existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha L + \beta C_1 = 0 \text{ em } t=0.$$

Então

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha\lambda - 2\beta i\text{Im}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial t}\right) = 0 \text{ em } \end{cases} \Rightarrow \text{Im}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial t}\right) = 0 \text{ em } t=0.$$

Logo, L e C_1 são linearmente dependentes se, e somente se, $\frac{\partial\lambda}{\partial t}$ é real em $t=0$.

3º) Vamos agora calcular o comutador C_2. Utilizando que λ e $\frac{\partial\lambda}{\partial t}$ são reais em $t=0$ temos que o mesmo vale para $\frac{\partial\lambda}{\partial x}$ e $\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial t}$. Assim, mostra-se que

$$\begin{aligned} C_2 = \left[L,\left[L,\overline{L}\right]\right] &= \left[\frac{\partial}{\partial l} + \lambda\frac{\partial}{\partial x}, \left(\overline{\frac{\partial\lambda}{\partial t}} - \frac{\partial\lambda}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\lambda\overline{\frac{\partial\lambda}{\partial x}} - \overline{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}\right] \\ &= -2i\text{Im}\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2}\right)\frac{\partial}{\partial x} \text{ em } t=0. \end{aligned}$$

Logo, como anteriormente, L e C_2 são linearmente dependentes se, e somente se, $\text{Im}\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2}\right) = 0$ em $t=0$. Ou seja, $\frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2}$ é real em $t=0$.

Procedendo de maneira análoga mostra-se que L e C_n são linearmente dependentes em $t=0$ se, e somente se,

$$\frac{\partial^n\lambda}{\partial t^n} \text{ é real em } t=0.$$

Dado $p \in \Sigma$, consideramos

$$\varphi : U \to \varphi(U)$$
$$(x,t) \mapsto (y,s)$$

uma mudança de variáveis em uma vizinhança U de p. Pelo Exemplo 1.2.3 após mudança de variáveis L tem a forma

$$\begin{aligned}\tilde{L} &= Ly(x,t)\frac{\partial}{\partial y} + Ls(x,t)\frac{\partial}{\partial s} \\ &= Ly\circ\varphi^{-1}(y,s)\frac{\partial}{\partial y} + Ls\circ\varphi^{-1}(y,s)\frac{\partial}{\partial s} \\ &= \tilde{A}(y,s)\frac{\partial}{\partial y} + \tilde{B}(y,s)\frac{\partial}{\partial s}.\end{aligned}$$

Supondo que $\tilde{B} \neq 0$ em $\varphi(U)$ podemos escrever

$$\tilde{C}(y,s) = \frac{\tilde{A}(y,s)}{\tilde{B}(y,s)} = \frac{Ly(x,t)}{Ls(x,t)} = \frac{y_t(x,t) + \lambda(x,t)y_x(x,t)}{s_t(x,t) + \lambda(x,t)s_x(x,t)},$$

assim, $\tilde{L}$ é um multiplo do operador

$$\tilde{L} = \frac{\partial}{\partial s} + \tilde{C}(y,s)\frac{\partial}{\partial y}$$

(continuamos denotando por $\tilde{L}$). Queremos mostrar que $\tilde{L}$ é um operador quase ℓ-Mizohata em $\varphi(\Sigma)$. Para isso vamos mostrar que

$$\frac{\partial^n \tilde{C}}{\partial s^n} = 0 \text{ em } \varphi(\Sigma).$$

Mas isso segue das propriedades sobre a função λ. De fato, dado $(x,t) \in \Sigma$ temos que

$$\tilde{C}(\varphi(x,0)) = \frac{y_t(x,0) + \lambda(x,0)y_x(x,t)}{s_t(x,0) + \lambda(x,0)s_x(x,0)} \in \mathbb{R},$$

pois λ é real em $t = 0$ e as funções y e s são reais.

Analogamente para as derivadas de $\tilde{C}$. ∎

Observação 2.1.4. *O operador ℓ-Mizohata pertence a classe dos operadores quase ℓ-*

Mizohata em $\Sigma = \{(x,t) \in \Omega; t = 0\}$*, para cada* $\ell \in \mathbb{N}$*.*

Demonstração. Primeiramente vamos obter uma expressão para os comutadores C_n, $n \geq 0$, no caso em que $L = M_\ell$. Para $n = 0$ segue que

$$C_0 = \overline{M_\ell} = \frac{\partial}{\partial t} - i(\ell+1)t^\ell \frac{\partial}{\partial x}.$$

Já para $1 \leq n \leq \ell$ podemos mostrar por indução sobre n que

$$C_n = [M_\ell, C_{n-1}] = -2i(\ell+1)(\ell)(\ell-1)\dots(\ell-(n-1))t^{\ell-n}\frac{\partial}{\partial x}. \tag{2.1}$$

De fato, para $n = 1$ temos

$$C_1 = \left[M_\ell, \overline{M_\ell}\right] = \left[\frac{\partial}{\partial t} + i(\ell+1)t^\ell\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} - i(\ell+1)t^\ell\frac{\partial}{\partial x}\right] = -2i(\ell+1)lt^{\ell-1}\frac{\partial}{\partial x}.$$

Agora supondo que vale (2.1) para n vamos calcular o comutador

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= [M_\ell, C_n] \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial t} + i(\ell+1)t^\ell\frac{\partial}{\partial x}, -2i(\ell+1)\ell\cdots(\ell-(n-1))t^{\ell-n}\frac{\partial}{\partial x}\right] \\ &= -2i(\ell+1)\ell\cdots(\ell-(n-1))(\ell-n)t^{\ell-n-1}\frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned}$$

O que mostra (2.1).

Note que

$$\alpha\left(\frac{\partial}{\partial t} + i(\ell+1)t^\ell\frac{\partial}{\partial x}\right) + \beta\left(-2i(\ell+1)(\ell)(\ell-1)\dots(\ell-(n-1))t^{\ell-n}\frac{\partial}{\partial x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ e } \alpha(\ell+1)t^\ell - \beta 2(\ell+1)(\ell)(\ell-1)\dots(\ell-(n-1))t^{\ell-n} = 0.$$

Mas

$$2(\ell+1)(\ell)(\ell-1)\dots(\ell-(n-1))t^{\ell-n} \neq 0 \Leftrightarrow \ell = n$$

pois, estamos analisando nos pontos da forma $(x,0)$.

Portanto, M_ℓ e C_n são linearmente independentes em Σ se, e somente se, $n=\ell$. ■

Observação 2.1.5. *De fato, temos mais ainda, se M_ℓ é um operador quase ℓ-Mizohata em uma subvariedade 1-dimensional Σ então*

$$\Sigma = \{(x,t) \in \Omega; t = 0\}. \tag{2.2}$$

Com isso, a partir de agora, consideraremos L um operador quase ℓ-Mizohata em Σ, com Σ dada por (2.2).

2.2 Forma normal - Parte 1

Nosso objetivo nessa e na próxima seção será obter uma representação para a forma normal da classe dos operadores quase ℓ-Mizohata em Σ.

Nesta seção apresentaremos alguns lemas que serão necessários para construção dessa forma normal. Assumiremos que L é um campo de vetores complexo, suave, definido em um subconjunto aberto Ω de $\mathbb{R}^2$.

O próximo lema dá uma caracterização em coordenadas, em uma vizinhança da origem, para as propriedades (i) e (ii) da Definição 2.1.1.

Lema 2.2.1. *Se L é um operador quase ℓ-Mizohata em Σ. Então existe uma vizinhança da origem U tal que L tem a seguinte forma*

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + i\lambda(x,t)\frac{\partial}{\partial x}, \tag{2.3}$$

com λ real, suave e verificando em $U \cap \{t=0\}$:

(i) $\dfrac{\partial^n \lambda}{\partial t^n} = 0$, *se* $n = 0, 1, \ldots, \ell - 1$;

(ii) $\dfrac{\partial^\ell \lambda}{\partial t^\ell} \neq 0$.

Demonstração. Pelo Exemplo 1.2.4, após mudança de variáveis, temos que existe uma vizinhança da origem U tal que L tem a forma (2.3) em U. Além disso, pela Observação 2.1.3, L dado por (2.3) é um operador quase ℓ-Mizohata em

$$\widetilde{\Sigma} = \{(x,t) \in U; t = 0\} = U \cap \{t = 0\}.$$

Logo resta mostrar que λ verifica (i) e (ii) em $\widetilde{\Sigma}$. Para isso, fixado $(x_0, 0) \in \widetilde{\Sigma}$. Como a função λ é real então a função $i\lambda$ é complexa. Assim, pelo que foi mostrado na Observação 2.1.3 se L e C_n são linearmente dependentes em $(x_0, 0)$, $n = 0, \ldots, \ell - 1$, então

$$\frac{\partial^n (i\lambda)}{\partial t^n}(x_0, 0) \text{ ser real.}$$

O que equivale a dizer que

$$\frac{\partial^n \lambda}{\partial t^n}(x_0, 0) = 0, \quad n = 0, \ldots, \ell - 1.$$

Do mesmo modo, se L e C_ℓ são linearmente independentes então

$$\frac{\partial^\ell \lambda}{\partial t^\ell}(x_0, 0) \neq 0.$$

Portanto, como $(x_0, 0) \in U$ é qualquer segue (i) e (ii). ∎

Lema 2.2.2. *Se L é um operador quase ℓ-Mizohata em Σ, então existe uma vizinhança*

da origem U tal que L tema a forma

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + i(\ell+1)t^{\ell}\lambda(x,t)\frac{\partial}{\partial x}, \tag{2.4}$$

com λ suave, real e $\lambda(0,0) \neq 0$.

Demonstração. Pelo lema 2.2.1 podemos supor que L está definido em uma vizinhança da origem U e tem a forma

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + i\lambda(x,t)\frac{\partial}{\partial x},$$

com $\dfrac{\partial^n \lambda}{\partial t^n}(x,0) = 0$, $0 \leq n \leq \ell - 1$ e $\dfrac{\partial^{\ell}\lambda}{\partial t^{\ell}}(x,0) \neq 0$, para todo $(x,0) \in U$, em particular, na origem $(0,0)$.

Consideramos aqui a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \varphi \ &: \ U \to \varphi(U) \\ &(x,t) \mapsto (y,s), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{cases} s = s(x,t) = \frac{\partial^{\ell-1}\lambda}{\partial t^{\ell-1}}(x,t) \\ y = y(x,t) = s^{\ell+1} + x. \end{cases}$$

Note que

$$\det J\varphi = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\ell+1)\left(\frac{\partial^{\ell-1}\lambda}{\partial t^{\ell-1}}\right)^{\ell}\frac{\partial^{\ell}\lambda}{\partial x \partial t^{\ell-1}} + 1 & (\ell+1)\left(\frac{\partial^{\ell-1}\lambda}{\partial t^{\ell-1}}\right)^{\ell}\frac{\partial^{\ell}\lambda}{\partial t^{\ell}} \\ \frac{\partial^{\ell}\lambda}{\partial x \partial t^{\ell-1}} & \frac{\partial^{\ell}\lambda}{\partial t^{\ell}} \end{vmatrix}$$

então $\det J\varphi(0,0) = \frac{\partial^{\ell}\lambda}{\partial t^{\ell}}(0,0) \neq 0$, pois $\frac{\partial^{\ell-1}\lambda}{\partial t^{\ell-1}}(0,0) = 0$. Portanto, diminuindo U, se necessário, temos que φ é uma mudança de variáveis em U.

Agora note que,

$$Ls(0,0) = \frac{\partial^\ell \lambda}{\partial t^\ell}(0,0) + i\lambda(0,0)\frac{\partial^\ell \lambda}{\partial x \partial t^{\ell-1}}(0,0) = \frac{\partial^\ell \lambda}{\partial t^\ell}(0,0) \neq 0.$$

Assim, pelo Exemplo 1.2.3, diminuindo U novamente, se necessário, nas novas coordenadas o operador L tem a forma

$$\widetilde{L} = \frac{\partial}{\partial s} + \frac{Ly(x,t)}{Ls(x,t)}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Mas,

$$Ly(x,t) = (\ell+1)s^\ell \frac{\partial s}{\partial t} + i\lambda(x,t)\left((\ell+1)s^\ell \frac{\partial s}{\partial x} + 1\right) = (\ell+1)s^\ell Ls(x,t) + i\lambda(x,t).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\widetilde{L} &= \frac{\partial}{\partial s} + \frac{(\ell+1)s^\ell Ls(x,t) + i\lambda(x,t)}{Ls(x,t)}\frac{\partial}{\partial y} \\
&= \frac{\partial}{\partial s} + \left((\ell+1)s^\ell + i\frac{\lambda(x,t)}{Ls(x,t)}\right)\frac{\partial}{\partial y} \\
&= \frac{\partial}{\partial s} + \left((\ell+1)s^\ell + i\frac{\widetilde{\lambda}(y,s)}{\widetilde{Ls}(y,s)}\right)\frac{\partial}{\partial y},
\end{aligned}$$

aqui, $\widetilde{\lambda}(y,s) = \lambda(x,t)$ e $\widetilde{Ls}(y,s) = Ls(x,t)$.

Agora note que, como λ se anula de ordem $\ell - 1$, em todos os pontos da forma $(x,0) \in U$, então $\widetilde{\lambda}$ se anula de ondem $\ell - 1$ na imagem pela φ destes pontos. Assim, pela fórmula de Taylor de $\widetilde{\lambda}$ em torno de $s = 0$ teremos que

$$\widetilde{\lambda}(y,s) = \frac{\partial^\ell \widetilde{\lambda}}{\partial s^\ell}(y,0)s^\ell + O(s^{\ell+1}).$$

Com isso,

$$\begin{aligned}\widetilde{L} &= \frac{\partial}{\partial s} + \left[(\ell+1)s^{\ell} + i\left(\frac{\partial^{\ell}\widetilde{\lambda}}{\partial s^{\ell}}(y,0)s^{\ell} + O(s^{\ell+1})\right)\frac{1}{\widetilde{Ls}(y,s)}\right]\frac{\partial}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial s} + i(\ell+1)s^{\ell}\left[-i + \left(\frac{\partial^{\ell}\widetilde{\lambda}}{\partial s^{\ell}}(y,0) + O(s)\right)\frac{1}{(\ell+1)\widetilde{Ls}(y,s)}\right]\frac{\partial}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial s} + i(\ell+1)s^{\ell}b(y,s)\frac{\partial}{\partial y},\end{aligned}$$

com

$$b(y,s) = -i + \left(\frac{\partial^{\ell}\widetilde{\lambda}}{\partial s^{\ell}}(y,0) + O(s)\right)\frac{1}{(\ell+1)\widetilde{Ls}(y,s)}.$$

Note que b é suave e $b(0,0) \neq 0$, mas não necessariamente real. Assim, escrevemos $b(y,s) = b_1(y,s) + ib_2(y,s)$, com isso

$$\widetilde{L} = \frac{\partial}{\partial s} + i(\ell+1)s^{\ell}(b_1(y,s) + ib_2(y,s))\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial s} + i(\ell+1)s^{\ell}b_1(y,s)\frac{\partial}{\partial y} - (\ell+1)s^{\ell}b_2(y.s)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Como no Exemplo 1.2.4, queremos uma mudança de variáveis da forma $\tilde{y}(y,s)$ e $\tilde{s} = s$ tal que

$$\frac{\partial}{\partial \widetilde{s}} = \frac{\partial}{\partial s} - (\ell+1)s^{\ell}b_2(y,s)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Para isso, tomamos $\tilde{y}(y,s)$ solução do PVI

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \widetilde{y}}{\partial s} - (\ell+1)s^{\ell}b_2(y,s)\dfrac{\partial \widetilde{y}}{\partial y} = 0 \\ \widetilde{y}|_{s=0} = y, \end{cases}$$

o qual possui única solução. Com isso, $(y,s) \to (\widetilde{y},\widetilde{s})$ é uma mudança de variáveis em uma

vizinhança da origem, assim pelo Exemplo 1.2.3 temos que $\widetilde{L}$ tem a forma

$$\begin{aligned}\widetilde{L} &= L\widetilde{y}(y,s)\frac{\partial}{\partial\widetilde{y}} + L\widetilde{s}(y,s)\frac{\partial}{\partial\widetilde{s}} \\ &= \left(\frac{\partial\widetilde{y}}{\partial s} + i(\ell+1)s^{\ell}b(y,s)\frac{\partial\widetilde{y}}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial\widetilde{y}} + \frac{\partial}{\partial\widetilde{s}} \\ &= i(\ell+1)s^{\ell}b_1(y,s)\frac{\partial}{\partial\widetilde{y}} + \frac{\partial}{\partial\widetilde{s}}.\end{aligned}$$

Assim, tomando $\lambda(y,s) = b_1(y,s)$ e renomeando as variáveis, obtemos a forma desejada para o operador L, note que $b_1(0,0) \neq 0$ pois $\frac{\partial^{\ell}\widetilde{\lambda}}{\partial s^{\ell}}(0,0) \neq 0$.

■

Antes de enunciar o próximo lema, vamos precisar da seguinte

Definição 2.2.3. *Uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é flat em $t = 0$ se ela e todas suas derivadas são nulas em $t = 0$.*

Lema 2.2.4. *Seja L um operador quase ℓ-Mizohata em Σ. Então existe uma vizinhança da origem U, tal que L tem a forma*

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + i(\ell+1)t^{\ell}(1+\rho(x,t))\frac{\partial}{\partial x}, \tag{2.5}$$

onde ρ é suave, real e flat em $\{t = 0\}$.

Demonstração. Pelos Lemas 2.2.1 e 2.2.2 podemos assumir que L está definido em uma vizinhança da origem de $\mathbb{R}^2$ e tem a forma

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + i(\ell+1)t^{\ell}\lambda(x,t)\frac{\partial}{\partial x}$$

com λ real, suave e $\lambda(0,0) > 0$.

Primeiramente vamos resolver formalmente o seguinte P.V.I.

$$\begin{cases} Lv = 0 \\ v|_{t=0} = x. \end{cases}$$

Para isso consideramos a expansão formal em série de Taylor de λ e de v com relação a t em $t = 0$, isto é,

$$\lambda(x,t) \approx \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j(x) t^j \quad \text{e} \quad v(x,t) \approx \sum_{j=0}^{\infty} v_j(x) t^j,$$

aqui

$$\lambda_j(x) = \frac{\partial^j \lambda}{\partial t^j}(x,0) \quad \text{e} \quad v_j(x) = \frac{\partial^j v}{\partial t^j}(x,0).$$

Como queremos determinar v_j de modo que $v|_{t=0} = x$ então devemos tomar $v_0(x) = x$. Agora resolvendo formalmente a equação $Lv = 0$ temos

$$\frac{\partial v}{\partial t} + i(\ell+1) t^{\ell} \lambda(x,t) \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

então

$$\sum_{j=0}^{\infty} v_j(x) j t^{j-1} + i(\ell+1) t^{\ell} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j(x) t^j \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\partial v_j}{\partial x}(x) t^j \right) = 0.$$

Comparando o grau dos polinômios

$$\begin{cases} v_1(x) = 0 \\ \vdots \\ v_l(x) = 0 \\ (\ell+1) v_{\ell+1}(x) &= -i(\ell+1) \lambda_0(x) \frac{\partial v_0}{\partial x}(x). \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} v_j(x) = 0, \text{ se } 1 \leq j \leq l \\ v_{\ell+1}(x) = -i\lambda(x,0). \end{cases}$$

Note que recorrentemente podemos obter os demais v_j, pela fórmula

$$v_{\ell+j}(x) = \frac{-i(\ell+1)}{\ell+j} \sum_{k=0}^{j-1} \lambda_k(x) \frac{\partial v_{j-(k+1)}}{\partial x}(x), \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Com isso definimos

$$u(x,t) = x - i\lambda(x,0)t^{\ell+1} + \sum_{j=\ell+2}^{\infty} v_j(x) t^j \chi\left(\frac{t}{\varepsilon_j}\right),$$

onde os ε_j's convergindo para zero são determinados de modo que a série seja convergente em C^∞ e $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ é tal que

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad |t| \leq 1 \\ 0, & \text{se} \quad |t| \geq 2 \end{cases}$$

(Ver [11], pg 16). Como encontramos formalmente v para que $Lv = 0$ então pela contrução da u temos que Lu é flat em $\{t = 0\}$.

Note que

$$\begin{aligned} u(x,t) &= x + \sum_{j=\ell+2}^{\infty} (\operatorname{Re} v_j)(x) t^j \chi\left(\tfrac{t}{\varepsilon_j}\right) + i\left(-\lambda(x,0)t^{l+1} + \sum_{j=\ell+2}^{\infty} (\operatorname{Im} v_j)(x) t^j \chi\left(\tfrac{t}{\varepsilon_j}\right)\right) \\ &= x + O(t^{\ell+2}) + i\left(-\lambda(x,0)t^{\ell+1} + O(t^{\ell+2})\right) \\ &= \operatorname{Re} u(x,t) + i \operatorname{Im} u(x,t). \end{aligned}$$

Façamos agora a mudança de variáveis $(x,t) \xrightarrow{\varphi} (y,s)$, onde

$$\begin{cases} y = \operatorname{Re} u \\ s = t\left(\dfrac{-\operatorname{Im} u}{t^{\ell+1}}\right)^{\frac{1}{\ell+1}} \end{cases}.$$

Estamos usando aqui a função raiz definida por $z^{\frac{1}{\ell+1}} = e^{\frac{1}{\ell+1}\log z}$, onde $\log z = \log|z| + i\arg z$, $0 < \arg z < 2\pi$.

Afirmação 2.2.5. $(\ell+1)s^{\ell}Ls = -L(\operatorname{Im} u)$.

De fato,

$$\begin{aligned} Ls &= \frac{\partial s}{\partial t} + i(\ell+1)t^{\ell}\lambda(x,t)\frac{\partial s}{\partial x} \\ &= \left(\frac{-\operatorname{Im} u}{t^{\ell+1}}\right)^{\frac{1}{\ell+1}} + t\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{-\operatorname{Im} u}{t^{\ell+1}}\right)^{\frac{1}{\ell+1}}\right] + i(\ell+1)t^{\ell+1}\lambda(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{-\operatorname{Im} u}{t^{\ell+1}}\right)^{\frac{1}{\ell+1}}\right] \\ &= \left(\frac{-\operatorname{Im} u}{t^{\ell+1}}\right)^{\frac{1}{\ell+1}} - \frac{t}{\ell+1}\left(\frac{-\operatorname{Im} u}{t^{\ell+1}}\right)^{\frac{-\ell}{\ell+1}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\operatorname{Im} u}{t^{\ell+1}}\right) \\ &\quad -i(\ell+1)t^{\ell}\lambda(x,t)\frac{t}{\ell+1}\left(\frac{-\operatorname{Im} u}{t^{\ell+1}}\right)^{\frac{-\ell}{\ell+1}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\operatorname{Im} u}{t^{\ell+1}}\right) \\ &= \left(\frac{-\operatorname{Im} u}{t^{\ell+1}}\right)^{\frac{1}{\ell+1}} - \frac{t}{\ell+1}\left(\frac{-\operatorname{Im} u}{t^{\ell+1}}\right)^{\frac{-\ell}{\ell+1}}\frac{1}{t^{\ell+1}}\left(\frac{\partial \operatorname{Im} u}{\partial t} + i(\ell+1)t^{\ell}\lambda(x,t)\frac{\partial \operatorname{Im} u}{\partial x}\right) \\ &\quad + \frac{t}{\ell+1}\left(\frac{-\operatorname{Im} u}{t^{\ell+1}}\right)^{\frac{-\ell}{\ell+1}}\operatorname{Im} u\left(\frac{\ell+1}{t^{\ell+2}}\right) \end{aligned}$$

Então,

$$Ls = \left(\frac{-\operatorname{Im} u}{t^{\ell+1}}\right)^{\frac{1}{\ell+1}} - \frac{1}{(\ell+1)t^{\ell}}\left(\frac{-\operatorname{Im} u}{t^{\ell+1}}\right)^{\frac{-\ell}{\ell+1}}\left(L(\operatorname{Im} u) - \frac{(\ell+1)\operatorname{Im} u}{t}\right).$$

Assim, como $s^\ell = t^\ell \left(\frac{-\operatorname{Im} u}{t^{\ell+1}}\right)^{\frac{\ell}{\ell+1}}$ temos

$$\begin{aligned} s^\ell Ls &= t^\ell \left(\frac{-\operatorname{Im} u}{t^{\ell+1}}\right) - \frac{1}{\ell+1}\left(L(\operatorname{Im} u) - \frac{(\ell+1)\operatorname{Im} u}{t}\right) \\ &= \frac{-\operatorname{Im} u}{t} - \frac{L(\operatorname{Im} u)}{\ell+1} + \frac{\operatorname{Im} u}{t} \\ &= -\frac{L(\operatorname{Im} u)}{\ell+1}. \end{aligned}$$

Logo, $(\ell+1)s^\ell Ls = -L(\operatorname{Im} u)$.

Assim, utilizando novamente o Exemplo 1.2.3, temos que o operador L tem a forma

$$\begin{aligned} \widetilde{L} &= \frac{\partial}{\partial s} + \frac{Ly}{Ls}\frac{\partial}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial s} + \frac{L(\operatorname{Re} u)}{Ls}\frac{\partial}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial s} + \frac{s^\ell L(\operatorname{Re} u)}{s^\ell Ls}\frac{\partial}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial s} - \frac{(\ell+1)s^\ell L(\operatorname{Re} u)}{L(\operatorname{Im} u)}\frac{\partial}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial s} - \frac{(\ell+1)s^\ell (Lu - iL(\operatorname{Im} u))}{L(\operatorname{Im} u)}\frac{\partial}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial s} + i(\ell+1)s^\ell \left(1 + \frac{iLu}{L(\operatorname{Im} u)}\right)\frac{\partial}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial s} + i(\ell+1)s^\ell (1+\rho(y,s))\frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Aqui usamos que $Lu = L(\operatorname{Re} u) + iL(\operatorname{Im} u)$ e consideramos $\rho = \frac{iLu}{L(\operatorname{Im} u)}$.

Como Lu é suave e flat em $\{t=0\}$ temos que ρ também é. Mas não necessariamente real. Porém utilizando novamente cálculos análogos ao do Exemplo 1.2.4, podemos supor que ρ é real.

■

2.3 Forma Normal - Parte 2

A partir desta seção, vamos nos restringir apenas ao caso, ℓ **ímpar**. Lembre-se que para os demais casos de ℓ, pela condição $(\mathcal{P})$ de resolubilidade, o operador L é globalmente resolúvel.

Na próxima proposição, vamos construir uma função suave em $\overline{U^-}$, onde U é uma vizinhança da origem, verificando algumas propriedades. De certa forma essa função representa uma integral primeira do operador L, só que em U^-.

Proposição 2.3.1. *Seja L um operador tendo a forma (2.5). Então existe uma vizinhança da origem U e $Z \in C^\infty(\overline{U^-})$, satifazendo:*

1. $LZ = 0$ *em* U^-;

2. $\dfrac{\partial Z}{\partial x} \neq 0$ *em* $\overline{U^-}$;

3. $\operatorname{Im} Z \leq 0$ *em* $\overline{U^-}$;

4. $Z|_{t=0}$ *é real.*

Demonstração. Começamos considerando a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{cases} y = x \\ s = -t^{\ell+1}. \end{cases}$$

Note que, como $\ell + 1$ é par, $(x,t) \overset{\varphi}{\to} (y,s)$ é uma mundança de variáveis de U^- em $\varphi(U^-) \subset \{(y,s) \in \mathbb{R}^2; s < 0\}$. Além disso,

$$Ls(x,t) = \frac{\partial s}{\partial t}(x,t) + i(\ell+1)t^\ell(1+\rho(x,t))\frac{\partial s}{\partial x}(x,t) = -(\ell+1)t^\ell$$

e

$$Ly(x,t) = \frac{\partial y}{\partial t}(x,t) + i(\ell+1)t^{\ell}(1+\rho(x,t))\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) = i(\ell+1)t^{\ell}(1+\rho(x,t)).$$

Assim, nas novas variáveis o operador L tem a forma

$$\begin{aligned} Ls\frac{\partial}{\partial s} + Ly\frac{\partial}{\partial y} &= -(\ell+1)t^{\ell}\frac{\partial}{\partial s} + i(\ell+1)t^{\ell}(1+\rho(x,t))\frac{\partial}{\partial y} \\ &= -(\ell+1)t^{\ell}\left(\frac{\partial}{\partial s} - i(1+\rho(x,t))\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ &= -(\ell+1)(-s)^{\frac{1}{\ell+1}}\left(\frac{\partial}{\partial s} - i(1+\widetilde{\rho}(y,s))\frac{\partial}{\partial y}\right). \end{aligned}$$

Aqui, $\widetilde{\rho}(y,s) = \rho(x,t)$, ou seja, $\widetilde{\rho} = \rho \circ \varphi^{-1}$. Então,

$$L = -(\ell+1)(-s)^{\frac{1}{\ell+1}}E,$$

onde

$$E = \frac{\partial}{\partial s} - i(1+\widetilde{\rho}(y,s))\frac{\partial}{\partial y},$$

definido em $\varphi(U^{-})$.

Consideramos $\mathscr{L} = [E]$ a estrutura formalmente integrável gerada pelo campo E. Temos que $\mathscr{L}$ é uma estrutura elíptica para $s < 0$ pequeno. De fato,

$$\sigma_E(y,s,\xi,\eta) = \eta - i(1+\widetilde{\rho}(y,s))\xi = 0$$

se, e somente se,

$$\begin{cases} n = 0 \\ -1 = \widetilde{\rho}(y,s) \text{ ou } \xi = 0. \end{cases}$$

Mas, como ρ é flat em $\{t=0\}$ segue que

$$\widetilde{\rho}(y,0) = \rho \circ \varphi^{-1}(y,0) = \rho(y,0) = 0.$$

Logo, para s suficientemente pequeno, temos que $|\widetilde{\rho}(y,s)|$ é pequeno. Então, $\widetilde{\rho}(y,s) \neq -1$. Assim, $(\xi,\eta) = (0,0)$. Portanto, $\mathscr{L}$ é uma estrutura elíptica.

Afirmação 2.3.2. *$\widetilde{\rho}$ é suave até $\{s=0\}$ e flat aí.*

De fato, provaremos essa afirmação utilizando um corolário de [11] (página 6). Temos que

$$\widetilde{\rho}(y,s) = \rho \circ \varphi^{-1}(y,s) = \rho(y,(-s)^{\frac{1}{\ell+1}}).$$

Como ρ é suave, precisaremos apenas analisar as derivadas em relação a s de $\widetilde{\rho}$ em $s=0$. Temos que $\widetilde{\rho}(y,s) = 0$ e $\widetilde{\rho}$ é diferenciável fora do conjunto fechado $F = \{s=0\}$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0^-} \frac{\partial \widetilde{\rho}}{\partial s}(y,s) &= \lim_{s\to 0^-} \frac{\partial(\rho\circ\varphi^{-1})}{\partial s}(y,s) \\
&= \lim_{s\to 0^-} \frac{\partial \rho}{\partial s}(\varphi^{-1}(y,s))\frac{1}{\ell+1}(-s)^{\frac{-\ell}{\ell+1}} \\
&= \frac{1}{\ell+1}\lim_{t\to 0^-} \frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t)t^{-\ell} \\
&= \frac{1}{\ell+1}\lim_{t\to 0^-} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}(x,t)t^{-\ell+1} \\
&\vdots \\
&= \frac{1}{\ell+1}\lim_{t\to 0^-} \frac{\partial^\ell \rho}{\partial t^\ell}(x,t)t^{-1} \\
&= \frac{1}{\ell+1}\lim_{t\to 0^-} \frac{\frac{\partial^\ell \rho}{\partial t^\ell}(x,t) - \frac{\partial^\ell \rho}{\partial t^\ell}(x,0)}{t} \\
&= \frac{1}{\ell+1}\frac{\partial^{\ell+1}\rho}{\partial t^{\ell+1}}(x,0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Pois ρ é flat em $\{t=0\}$.

Logo, pelo corolário citado anteriormente, temos $\frac{\partial \widetilde{\rho}}{\partial s}(y,0)$ existe e é igual a zero. Assim, $\frac{\partial \widetilde{\rho}}{\partial s}$ é contínua até $\{s=0\}$. Analogamente mostra-se que $\frac{\partial^k \widetilde{\rho}}{\partial s^k}$ é contínua até $\{s=0\}$, qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$. Ou seja, $\widetilde{\rho}$ é suave até $\{s=0\}$ e além disso, flat em $\{s=0\}$. O que prova a afirmação.

Agora definimos b por

$$b(y,s) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad s \geq 0 \\ \widetilde{\rho}(y,s), & \text{se} \quad s < 0 \end{cases}$$

e

$$\widetilde{E} = \frac{\partial}{\partial s} - i(1+b(y,s))\frac{\partial}{\partial y}.$$

Pelas observações anteriores, temos que $\widetilde{E}$ é uma estrutura elíptica em uma vizinhança da origem e tem coeficientes suaves. Assim, pelo Teorema 1.4.13, como toda estrutura elíptica é localmemte integrável, existe uma função suave $\widetilde{w}$ definida em uma vizinhança da origem $\widetilde{U}$ tal que

$$\widetilde{E}\widetilde{w} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \widetilde{w}}{\partial x} \neq 0 \text{ em } \widetilde{U}.$$

Consideramos uma vizinhança da origem V de modo que, $\varphi(V) \subset \widetilde{U}$ e $\varphi(V^-) \subset \widetilde{U} \cap \varphi(U^-)$ e definimos em V

$$w(x,t) = \widetilde{w}(x, -t^{\ell+1}).$$

Para $(x,t) \in V^-$ temos

$$w(x,t) = w \circ \varphi(x,t).$$

Assim, dado $(x,t) \in V^-$ temos que

$$Lw(x,t) = Lw(\varphi^{-1}(y,s)) = L(\widetilde{w} \circ \varphi)(\varphi^{-1}(y,s)) = L\widetilde{w}(y,s) =$$

$$= -(\ell+1)(-s)^{\frac{1}{\ell+1}} E\widetilde{w}(y,s) = -(\ell+1)(-s)^{\frac{1}{\ell+1}} \widetilde{E}\widetilde{w}(y,s) = 0.$$

Logo $Lw = 0$ em V^-. Além disso, definindo

$$w(x,0) = \lim_{t\to 0^-} \widetilde{w}(x,-t^{\ell+1}) = \widetilde{w}(x,0)$$

temos que w é contínua em $\overline{V^-}$. E usando novamente o corolário citado anteriormente, temos que $w \in C^\infty(\overline{V^-})$. Ainda, dado $(x,t) \in V^-$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(x,t) = \frac{\partial \widetilde{w}}{\partial y}(x,-t^{\ell+1}) \neq 0.$$

Então, $\frac{\partial w}{\partial x} \neq 0$ em $\overline{V^-}$.

Agora, escreva $w = a + bi$ onde a e b são funções reais. Como $\frac{\partial w}{\partial x} \neq 0$, podemos assumir que $\frac{\partial a}{\partial x} > 0$. Assumiremos também que $w(0,0) = 0$. Assim, definimos

$$b_0(x) = b(x,0) \text{ e } a_0(x) = a(x,0).$$

Como $\frac{\partial a}{\partial x} > 0$ então pelo Teorema da Função Inversa existe a_0^{-1} inversa local de a_0. Para t próximo de zero existe também inversa local de $a_t(x) = a(x,t)$. Agora defina,

$$F(x) = b_0(a_t^{-1}(x))|_{t=0}.$$

De $Lw = 0$ em V^- temos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial t}(x,t) = (\ell+1)t^\ell(1+\rho(x,t))\dfrac{\partial b}{\partial x}(x,t), \\ \dfrac{\partial b}{\partial t}(x,t) = -(\ell+1)t^\ell(1+\rho(x,t))\dfrac{\partial a}{\partial x}(x,t). \end{cases}$$

Assim da segunda igualdade, como $\rho(x,t)$ é pequeno em uma vizinhança de $t = 0$, pois

$\rho(x,0) = 0$ e $\frac{\partial a}{\partial x} > 0$ segue que $\frac{\partial b}{\partial t} > 0$ em V^-. Ou seja, b é crescente na variável t. Logo,

$$F(a(x,t)) = F(a_t(x)) = b_0(a_t^{-1}(a_t(x)))|_{t=0} = b_0(x) = b(x,0) \geq b(x,t).$$

Portanto temos que

$$w : \overline{V^-} \longmapsto \{y + is \in \mathbb{C}; s \leq F(y)\} = \mathscr{O}.$$

Agora, como $\mathscr{O}$ é simplesmente conexo, para V suficientemente pequeno, pelo Teorema da Aplicação de Riemann, existe uma função H satisfazendo:

1. H é holomorfa no $int\mathscr{O}$;

2. H é suave até $\{s = F(y)\}$;

3. $H(int\mathscr{O}) = \{u + iv \in \mathbb{C}; |u^2 + v^2| < 1, v < 0\}$;

4. H é conforme no $int\mathscr{O}$, isto é, $H^{'}(z) \neq 0$, se $z \in int\mathscr{O}$;

5. H aplica a curva $\{s = F(y)\}$ no eixo real.

A partir disso defina

$$Z(x,t) = H(w(x,t)).$$

Afirmação 2.3.3. *Z tem as propriedades desejadas.*

De fato,

1. $Z \in C^\infty(\overline{V^-})$, pois é a composta de funções suaves em $\overline{V^-}$.

2. Usando que $Lw = 0$ em V^- e H é holomorfa em $int\mathscr{O}$ vemos que $LZ = 0$ em V^-.

3. Como $\frac{\partial w}{\partial x} \neq 0$ em $\overline{V^-}$ e $H^{'}(z) \neq 0$, para $z \in int\mathscr{O}$ segue que $\frac{\partial Z}{\partial x} \neq$ em $\overline{V^-}$

4. Agora se $(x,t) \in V^-$ temos que

$$\mathrm{Im}\,(Z(x,t)) = \mathrm{Im}\,(H(w(x,t))) = v < 0$$

e se $t = 0$

$$\mathrm{Im}\,(Z(x,0)) = \mathrm{Im}\,(H(W(x,0))) = \mathrm{Im}\,(H(y + iF(y))) = 0,$$

pois h aplica a reta $\{s = F(y)\}$ no eixo real. Dessa mesma propriedade de H segue que

5. $Z|_{t=0}$ é real.

■

Observação 2.3.4. *Note que analogamente ao feito na proposição anterior, podemos construir uma função suave em $\overline{U^+}$, verificando as mesmas propriedades dadas na proposição só que em U^+, a qual será utilizada no próximo capítulo.*

Agora estamos prontos para demonstrarmos a proposição que caracteriza a forma normal da classe dos operadores quase ℓ-Mizohata.

Proposição 2.3.5. *Seja L um operador quase ℓ-Mizohata em Σ. Então existe uma vizinhança da origem U, tal que L tem a forma*

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + i(\ell+1)t^\ell(1+\rho(x,t))\frac{\partial}{\partial x} \tag{2.6}$$

onde ρ é suave, real e $\rho \equiv 0$ em U^-.

Demonstração. Pelo Lema 2.2.4 temos que existe uma vizinhança U da origem tal que L tem a forma

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + i(\ell+1)t^\ell(1+\rho(x,t))\frac{\partial}{\partial x},$$

onde ρ é suave, real e flat em $\{t=0\}$. Consideramos a função $Z : \overline{U^-} \to \mathbb{C}$ dada pela Proposição 2.3.1. Escreva $Z = a + bi$, onde a e b são funções reais e suponha que $\frac{\partial a}{\partial x} \neq 0$ e $Z(0,0) = 0$.

Consideramos agora a fórmula de Taylor de ordem $\ell + 1$ de b em $t = 0$, isto é,

$$b(x,t) = b(x,0) + \frac{\partial b}{\partial t}(x,0)t + \ldots + \frac{\partial^\ell b}{\partial t^\ell}(x,0)t^\ell + \frac{\partial^{\ell+1} b}{\partial t^{\ell+1}}(x,0)t^{l+1} + O(t^{\ell+2}). \tag{2.7}$$

Como $Z|_{t=0}$ é real então $b(x,0) = 0$. Além disso, de $LZ = 0$ em U^-, temos

$$\frac{\partial b}{\partial t}(x,t) = -(\ell+1)t^\ell(1+\rho(x,t))\frac{\partial a}{\partial x}(x,t) \text{ em } U^-.$$

Assim,

$$\frac{\partial b}{\partial t}(x,0) = \lim_{t\to 0^-} \frac{\partial b}{\partial t}(x,t) = 0.$$

Analogamente, temos que

$$\frac{\partial^j b}{\partial t^j}(x,0) = 0, \text{ se } j \leq l$$

Já para $j = l + 1$ temos

$$\frac{\partial^{\ell+1} b}{\partial t^{\ell+1}}(x,0) = -(\ell+1)!(1+\rho(x,0))\frac{\partial a}{\partial x}(x,0) = -(\ell+1)!\frac{\partial a}{\partial x}(x,0) \neq 0.$$

Assim, de (2.7) segue que

$$b(x,t) = \frac{\partial^{\ell+1} b}{\partial t^{\ell+1}}(x,0)t^{\ell+1} + O(t^{\ell+2}) = -t^{\ell+1}\left(-\frac{\partial^{\ell+1} b}{\partial t^{\ell+1}}(x,0) - O(t)\right) = -t^{\ell+1}v(x,t).$$

Portanto,

$$b(x,t) = -t^{\ell+1}v(x,t) \text{ em } \overline{U^-}.$$

Com isso, observe que $v(x,t) > 0$ em $\overline{U^-}$. De fato, como $\operatorname{Im} Z \leq 0$ em $\overline{U^-}$, então $b(x,t) \leq 0$

em $\overline{U^-}$, assim $v(x,t) \geq 0$ em U^-, pois $\ell+1$ é par. Além disso,

$$v(x,0) = -\frac{\partial^{\ell+1} b}{\partial t^{\ell+1}}(x,0) \neq 0.$$

Logo, como v é suave, existe uma vizinhança de $t=0$ tal que $v(x,t) \neq 0$. Então, $v(x,t) > 0$ nesta vizinhança.

Agora, definimos

$$s = \begin{cases} t(v(x,-t))^{\frac{1}{\ell+1}}, & \text{se} \quad t > 0 \\ t(v(x,t))^{\frac{1}{\ell+1}}, & \text{se} \quad t \leq 0 \end{cases}$$

e

$$y = \begin{cases} a(x,-t), & \text{se} \quad t > 0 \\ a(x,t), & \text{se} \quad t \leq 0. \end{cases}$$

Consideramos a aplicação $(x,t) \xrightarrow{\varphi} (y,s)$. Note que

$$\det J\varphi(0,0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial a}{\partial t}(0,0) \\ 0 & (v(0,0))^{\frac{1}{\ell+1}} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Afirmação 2.3.6. *φ é uma aplicação suave.*

De fato, para ver isso é suficiente mostrar que as derivadas de ordem ímpar de y e de s são nulas em $t=0$, pois

$$\frac{\partial^j y}{\partial t^j}(x,0) = \begin{cases} -\dfrac{\partial^j a}{\partial t^j}(x,0), & \text{se } j \text{ é ímpar,} \\ \dfrac{\partial^j a}{\partial t^j}(x,0), & \text{se } j \text{ é par.} \end{cases}$$

Como $v(x,t) > 0$ em uma vizinhança de $t=0$, segue análogo para a coordenada s.

Observe que, como y é uma função par na variável t então todas derivadas em relação

a t de ordem ímpar de y se anulam em $t = 0$, isto é

$$\frac{\partial^j y}{\partial t^j}(x,0) = \frac{\partial^j a}{\partial t^j}(x,0) = 0, \text{ se } j \text{ é ímpar.}$$

Daí, segue que a coordenada y é suave em uma vizinhança da origem. Para a coordenada s segue também pela paridade desta função.

Note que

$$L(t(v(x,t))^{\frac{1}{\ell+1}})|_{(0,0)} = (v(0,0))^{\frac{1}{\ell+1}} \neq 0.$$

Então em uma vizinhança da origem $L(t(v(x,t))^{\frac{1}{\ell+1}}) \neq 0$.

Agora aplicando esta mudança de variáveis no operador L temos que L tem a forma

$$\widetilde{L} = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial s} + \dfrac{L(a(x,-t))}{L(t(v(x,-t)^{\frac{1}{\ell+1}})}\dfrac{\partial}{\partial y}, & t > 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial s} + \dfrac{L(a(x,t))}{L(t(v(x,t)^{\frac{1}{\ell+1}})}\dfrac{\partial}{\partial y}, & t \leq 0. \end{cases}$$

Tomamos

$$\lambda(x,t) = \frac{Ly(x,t)}{Ls(x,t)}.$$

Assim,

$$\widetilde{L} = \frac{\partial}{\partial s} + \lambda(x,t)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Vamos agora analisar $\lambda(x,t)$ para $t < 0$ e $t > 0$.

Caso 1: $t < 0$

$$\begin{aligned} Ls(x,t) &= (v(x,t))^{\frac{1}{\ell+1}} + t\frac{\partial}{\partial t}\left((v(x,t))^{\frac{1}{\ell+1}}\right) + i(\ell+1)t^{\ell+1}(1+\rho(x,t))\frac{\partial}{\partial x}\left((v(x,t))^{\frac{1}{\ell+1}}\right) \\ &= (v(x,t))^{\frac{1}{\ell+1}} + \frac{t}{\ell+1}(v(x,t))^{\frac{-\ell}{\ell+1}}Lv(x,t) \\ &= \frac{(\ell+1)v(x,t) + tLv(x,t)}{(\ell+1)(v(x,t))^{\frac{\ell}{\ell+1}}}. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\frac{Ly(x,t)}{Ls(x,t)} &= \frac{La(x,t)(\ell+1)(v(x,t))^{\frac{\ell}{\ell+1}}}{(\ell+1)v(x,t)+tLv(x,t)}\\ &= \frac{La(x,t)(\ell+1)t^{\ell}(v(x,t))^{\frac{\ell}{\ell+1}}}{(\ell+1)t^{\ell}v(x,t)+t^{\ell+1}Lv(x,t)}\\ &= \frac{La(x,t)(\ell+1)s^{\ell}}{L(t^{\ell+1}v)(x,t)}\\ &= \frac{iL(t^{\ell+1}v)(x,t)(\ell+1)s^{\ell}}{L(t^{\ell+1}v)(x,t)}\\ &= i(\ell+1)s^{\ell}.\end{aligned}$$

Na penúltima igualdade usamos que $La = -iLb = iL(t^{\ell+1}v)$.

Logo, se $t < 0$, L tem a seguinte forma

$$\widetilde{L} = \frac{\partial}{\partial s} + i(\ell+1)s^{\ell}\frac{\partial}{\partial y},$$

ou seja, L tem a forma de um operador ℓ-Mizohata.

Caso 2: $t > 0$

Neste caso, definimos a seguinte função suave em U

$$\hat{Z}(x,t) = \begin{cases} Z(x,-t), & t > 0\\ Z(x,t), & t \leq 0.\end{cases}$$

Note que $\hat{Z}$ é suave pois $\frac{\partial^{2j+1}Z}{\partial t^{2j+1}}(x,0) = 0$, para $j = 0,1,2,\ldots$. Assim, de $LZ = 0$ em U^-, segue que $L\hat{Z} = 0$ em $\overline{U^-}$.

Temos que $\hat{Z}$ nas novas coordenadas se escreve como

$$\widetilde{Z}(y,s) = y - is^{\ell+1}.$$

Além disso,

$$\widetilde{L}\widetilde{Z}(y,s) = -i(\ell+1)s^{\ell} + \lambda(x,t).$$

Então

$$\lambda(x,t) = i(\ell+1)s^{\ell} + \widetilde{L}\widetilde{Z}(y,s)$$

e

$$\widetilde{L} = \frac{\partial}{\partial s} + \left(i(\ell+1)s^{\ell} + \widetilde{L}\widetilde{Z}(y,s)\right)\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial s} + i(\ell+1)s^{\ell}\left(1 + \frac{\widetilde{L}\widetilde{Z}(y,s)}{i(\ell+1)s^{\ell}}\right)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Logo devemos tomar,

$$\widetilde{\rho}(y,s) = \frac{\widetilde{L}\widetilde{Z}(y,s)}{i(\ell+1)s^{\ell}}, \text{ para } s > 0.$$

Assim, vamos considerar

$$\widetilde{\rho}(y,s) = \begin{cases} \dfrac{\widetilde{L}\widetilde{Z}(y,s)}{i(\ell+1)s^{\ell}}, & \text{se} \quad s > 0 \\ 0, & \text{se} \quad s \leq 0. \end{cases}$$

Afirmação 2.3.7. *$\widetilde{\rho}$ é suave.*

De fato, temos que

$$\lim_{s\to 0^+} \widetilde{\rho}(y,s) = -1 + \lim_{s\to 0^+} \frac{\lambda(y,s)}{i(\ell+1)s^{\ell}}.$$

Logo, vamos mostrar que

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{\lambda(y,s)}{i(\ell+1)s^{\ell}} = 1.$$

Mas,

$$\lambda(y,s) = \frac{L(a(x,-t))}{L(t(v(x,-t)^{\frac{1}{\ell+1}})} = \frac{L(a(x,-t))}{L(-b(x,-t)^{\frac{1}{\ell+1}})} = -(\ell+1)s^{\ell}\frac{L(a(x,-t))}{L(b(x,-t))}.$$

Então,

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{\lambda(y,s)}{i(\ell+1)s^\ell} = -\frac{1}{i}\frac{L(a(x,0))}{L(b(x,0))} = 1$$

A última igualdade segue do fato que $L\hat{Z} = 0$ em $\overline{U^-}$.

O que prova que $\widetilde{\rho}$ é contínua. Para provar que é suave, usamos o fato de $L\hat{Z}$ ser suave.

Note que $\widetilde{\rho}$ não é necessariamente real, para obtermos $\widetilde{\rho}$ real, utilizamos novamente a técnica do Exemplo 1.2.4. ■

Capítulo

3

Caracterização do conjunto imagem

Seja L um operador quase ℓ-Mizohata, ℓ ímpar, definido em uma vizinhança da origem U tendo a forma (2.6).

Nosso objetivo neste capítulo é caracterizar todas funções suaves f definidas perto da origem para as quais existe uma distribuição u definida perto da origem satisfazendo

$$Lu = f. \tag{3.1}$$

Pela Observação 2.3.4 podemos obter uma função suave em $\overline{U^+}$, a qual continuaremos denotando por Z, satisfazendo:

1. $LZ = 0$ em U^+;

2. $\frac{\partial Z}{\partial x} \neq 0$ em $\overline{U^+}$;

3. $\operatorname{Im} Z \leq 0$ em $\overline{U^+}$;

4. $Z|_{t=0}$ é real.

Em adição, iremos assumir que

5. $\frac{\partial Z}{\partial x}(0,0) = 1$.

Ao longo deste capítulo usaremos a seguinte fórmula de inversão apresentada por M. Baouendi, C. Chang e F. Treves em [1].

Teorema 3.0.1 (Fórmula de Inversão de Fourier Generalizada)**.** *Seja $g \in C_c^0(V)$, onde V é um aberto e $\mathbb{R}^2$ e suponha que $Z : V \to \mathbb{C}$ é um difeomorfismo (de classe C^∞) de V em $Z(V)$ e que satisfaz*

$$|\mathrm{Im}\,(Z(x,t) - Z(y,t))| \leq \frac{1}{2}\,|\mathrm{Re}\,(Z(x,t) - Z(y,t))| \tag{3.2}$$

para $(x,t),(y,t) \in V$. Então temos

$$g(x,t) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i[Z(x,t)-Z(y,t)]\xi - \varepsilon\xi^2} g(y,t)\,\mathrm{dZ}(y,t)\,\mathrm{d}\xi, \tag{3.3}$$

onde $\mathrm{dZ}(y,t)$ é a forma $Z_y(y,t)\,\mathrm{dy}$ e a convergência é válida em $C^\infty(V)$.

Para demonstração e mais detalhes deste resultado ver [1] página 344.

Observação 3.0.2. *Note que a função Z obtida como na Proporsição 2.3.1 é um difeomorfismo local, pois $\det JZ \neq 0$ em U^+.*

3.1 Estabelecimento da condição crucial

Suponha f suave, definida em uma vizinhança da origem e seja $\chi \in C_c^\infty(U)$ tal que $\chi \equiv 1$ perto da origem, com suporte de χ contido em uma vizinhança onde f está definida. Introduzimos,

$$u^{22}(x,t) = -\frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_t^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty e^{i[Z(x,t)-Z(y,s)]\xi - \varepsilon\xi^2}\,\mathrm{d}\xi(\chi f)(y,s)\,\mathrm{dZ}(y,s)\,\mathrm{ds}\,. \tag{3.4}$$

Temos a seguinte afirmação sobre u^{22}:

Afirmação 3.1.1. *Se U é escolhido suficientemente pequeno então $u^{22} \in C^\infty(\overline{U^+})$.*

Demonstração. A demonstração desta afirmação é bastante trabalhosa e levará algumas etapas para ser demonstrada.

Etapa 1: Escrevendo $Z = a+bi$, com a e b funções reais, para U suficientemente pequeno, valem as seguintes estimativas para a parte real e imaginária de Z:

$$b(x,t) - b(x,s) \geq C_1(s^{\ell+1} - t^{\ell+1}), \quad (x,t),(x,s) \in \overline{U^+}. \tag{3.5}$$

$$|a(x,t) - a(x,s)| \leq C_1 \left|t^{\ell+1} - s^{\ell+1}\right|, \quad (x,t),(x,s) \in \overline{U^+}. \tag{3.6}$$

$$|b(x,t) - b(y,t)| \leq \frac{1}{8}|x-y|, \quad (x,t),(y,t) \in \overline{U^+}. \tag{3.7}$$

$$a(x,t) - a(y,t) = x - y + A(x,y,t), \quad (x,t),(y,t) \in \overline{U^+}, \tag{3.8}$$

onde A é tal que$|A(x,y,t)| \leq \frac{1}{4}|x-y|$.

Demonstração Etapa 1. Como $LZ = 0$ em U^+ temos que

$$\frac{\partial a}{\partial t} = (\ell+1)t^{\ell}(1+\rho)\frac{\partial b}{\partial x}, \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -(\ell+1)t^{\ell}(1+\rho)\frac{\partial a}{\partial x}. \tag{3.10}$$

Além disso, de $\frac{\partial Z}{\partial x}(0,0) = 1$ segue que $\frac{\partial a}{\partial x}(0,0) = 1$ e $\frac{\partial b}{\partial x}(0,0) = 0$. Assim, se U é suficientemente pequeno, $\frac{\partial a}{\partial x}(x,t)$ fica próxima de 1, assim como $\frac{\partial b}{\partial x}(x,t)$ fica próxima de 0 e como $\rho(0,0) = 0$ então $(1+\rho(0,0))$ fica próximo de 1. Logo, existe uma constante $C_1 > 1$ tal que $(1+\rho(x,t)) \leq \sqrt{C_1}$, $\frac{\partial a}{\partial x}(x,t) \leq \sqrt{C_1}$ e $\left|\frac{\partial b}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{1}{8}$ para (x,t) em $\overline{U^+}$.

Daí, integrando (3.10) com respeito a t obtemos

$$b(x,t) - b(x,s) = \int_s^t -(\ell+1)y^\ell(1+\rho(x,y))\frac{\partial a}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{dy}\,.$$

Então,

$$\begin{aligned} b(x,t) - b(x,s) &= -(\ell+1)\int_s^t y^\ell(1+\rho(x,y))\frac{\partial a}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{dy} \\ &\geq -(\ell+1)\int_s^t y^\ell\sqrt{C_1}\sqrt{C_1}\,\mathrm{dy} \\ &= -C_1(t^{\ell+1} - s^{\ell+1}) \\ &= C_1(s^{\ell+1} - t^{\ell+1}). \end{aligned}$$

Portanto, segue (3.5).

Agora integrando (3.9) em relação a t temos

$$|a(x,t) - a(x,s)| = \left|\int_s^t (\ell+1)y^{\ell+1}(1+\rho(x,y))\frac{\partial b}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{dy}\right|.$$

Agora usando que $\left|\frac{\partial b}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{1}{8} \leq \sqrt{C_1}$ temos

$$\begin{aligned} |a(x,t) - a(x,s)| &\leq \int_s^t \left|(\ell+1)y^\ell(1+\rho(x,y))\frac{\partial b}{\partial x}(x,y)\right|\mathrm{dy} \\ &\leq (\ell+1)C_1\int_s^t y^\ell\,\mathrm{dy} \\ &= C_1(t^{\ell+1} - s^{\ell+1}) \\ &= C_1\left|t^{\ell+1} - s^{\ell+1}\right|. \end{aligned}$$

Portanto, segue (3.6).

Note que (3.7) é uma consequência do Teorema do Valor Médio.

Finalmente, para t fixado, consideramos a fórmula de Taylor de a, na variável x em

torno do ponto (y,t), isto é,

$$a(x,t) = a(y,t) + \frac{\partial a}{\partial x}(y,t)(x-y) + \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}(y,t)(x-y)^2.$$

Como $\frac{\partial a}{\partial x}(y,t)$ fica próximo de 1 para (y,t) suficientemente pequeno, dado $\varepsilon > 0$ temos

$$\left|\frac{\partial a}{\partial x}(y,t) - 1\right| < \varepsilon.$$

Assim,

$$a(x,t) - a(y,t) = x - y + \left(\frac{\partial a}{\partial x}(y,t) - 1\right)(x-y) + \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}(y,t)(x-y)^2 = x - y + A(x,y,t),$$

onde $A(x,y,t)$ é tal que

$$|A(x,y,t)| \leq \left|\left(\frac{\partial a}{\partial x}(y,t) - 1\right)\right| |(x-y)| + \left|\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}(y,t)(x-y)\right| |x-y|\,.$$

Logo, para U suficientemente pequeno, tomando ε apropriado, temos que vale (3.8).

Etapa 2: Como precisaremos majorar o termo exponencial da integral em (3.4), será necessário realizar uma mudança de caminho de integração. Dado $R > 0$, consideramos

$$f(\xi) = e^{i[Z(x,t) - Z(y,s)]\xi - \varepsilon\xi^2}$$

e

$$I_R = \int_0^R f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Tomamos a seguinte complexificação de ξ

$$\zeta = \zeta(R) = R\left(1 + \frac{i}{2}\frac{x-y}{|x-y|}\right). \tag{3.11}$$

A figura 3.1 mostra os caminhos de integração para o caso que $\frac{x-y}{|x-y|} = 1$.

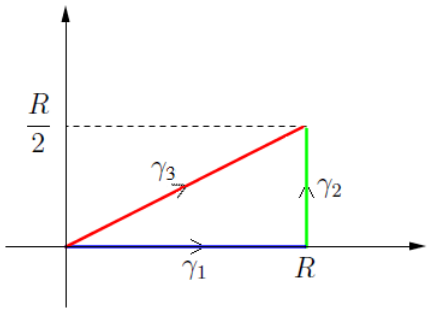


Figura 3.1: Complexificação do domínio de integração

Logo, queremos passar a integral do caminho γ_1 para o caminho γ_3. Aplicando o Teorema de Cauchy a função f, a qual é holomorfa em $\mathbb{C}$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Delta} f(z)\,\mathrm{dz} = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{dz} + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{dz} - \int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{dz} \\ &= \int_0^R f(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^1 f\left(R + \frac{i}{2}R\frac{x-y}{|x-y|}\lambda\right)\frac{R}{2}\,\mathrm{d}\lambda - \sqrt{\frac{5}{4}}\int_0^R f\left(\xi + \frac{i}{2}\xi\frac{x-y}{|x-y|}\right)\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{dz} = \int_0^1 f\left(R + \frac{i}{2}R\frac{x-y}{|x-y|}\lambda\right)\frac{R}{2}\,\mathrm{d}\lambda \to 0 \text{ quando } R \to +\infty.$$

Assim, podemos escrever

$$\int_0^{\infty} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = C\int_0^{\infty} f\left(\zeta(\xi)\right)\mathrm{d}\xi\,.$$

Para provar a afirmação acima, consideramos

$$z = \left(Z(x,t) - Z(y,s)\right)\zeta(R) + i\varepsilon(\zeta(R))^2,$$

então

$$iz = i\left(Z(x,t) - Z(y,s)\right)\zeta(R) - \varepsilon(\zeta(R))^2.$$

Vamos mostrar que $\mathrm{Im}\,(z) \geq 0$ assim como $\mathrm{Im}\,(z) = -\mathrm{Re}\,(iz)$ temos que $\mathrm{Re}\,(iz) \leq 0$.

Dados $(x,t),(y,s) \in U^+$, supondo que $0 \leq t \leq s$ e usando (3.5)-(3.8) temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\,(z) &= \mathrm{Im}\left[\left(Z(x,t) - Z(y,s)\right)\zeta + i\varepsilon\zeta^2\right] \\
&= \mathrm{Im}\left[\left(a(x,t) + ib(x,t) - a(y,s) - ib(y,s)\right)\zeta + i\varepsilon\zeta^2\right] \\
&= \mathrm{Im}\left[\left(a(x,t) + ib(x,t) - a(y,s) - ib(y,s)\right)\left(R + i\tfrac{R}{2}\tfrac{x-y}{|x-y|}\right)\right] \\
&\quad +\varepsilon\left(R + i\tfrac{R}{2}\tfrac{x-y}{|x-y|}\right)^2 \\
&= \left(a(x,t) - a(y,s)\right)\tfrac{R}{2}\tfrac{x-y}{|x-y|} + \left(b(x,t) - b(y,s)\right)R + \varepsilon\left(R^2 - \tfrac{R^2}{4}\right) \\
&= \left(a(x,t) + a(x,s) - a(x,s) - a(y,s)\right)\tfrac{R}{2}\tfrac{x-y}{|x-y|} \\
&\quad + \left(b(x,t) + b(x,s) - b(x,s) - b(y,s)\right)R + \tfrac{3}{4}\varepsilon R^2 \\
&= \left(a(x,t) - a(x,s)\right)\tfrac{R}{2}\tfrac{x-y}{|x-y|} + \left(a(x,s) - a(y,s)\right)\tfrac{R}{2}\tfrac{x-y}{|x-y|} \\
&\quad + \left(b(x,t) - b(x,s)\right)R + \left(b(x,s) - b(y,s)\right)R + \tfrac{3}{4}\varepsilon R^2 \\
&\geq -C_1|t^{\ell+1} - s^{\ell+1}|\tfrac{R}{2}\tfrac{x-y}{|x-y|} + (x - y + A(x,y,t))\tfrac{R}{2}\tfrac{x-y}{|x-y|} \\
&\quad + C_1(s^{\ell+1} - t^{\ell+1})R - \tfrac{1}{8}|x-y|R + \varepsilon\tfrac{3}{4}R^2 \\
&\geq C_1(s^{\ell+1} - t^{\ell+1})\tfrac{R}{2} + |x-y|\tfrac{R}{4} + \varepsilon\tfrac{3}{4}R^2 \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\mathrm{Re}\,(iz) \leq -C_1(s^{\ell+1} - t^{\ell+1})\frac{R}{2} - |x-y|\frac{R}{4} - \varepsilon\frac{3}{4}R^2 \leq 0 \tag{3.12}$$

Além disso, considerando um paramêtro $\lambda \in [0,1]$, analogamente mostra-se que

$$\mathrm{Im}\left[(Z(x,t)-Z(y,s))R\left(1+\frac{i}{2}\frac{x-y}{|x-y|}\lambda\right)+i\varepsilon R^2\left(1+\frac{i}{2}\frac{x-y}{|x-y|}\lambda\right)^2\right]\geq 0.$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z &\leq \frac{R}{2}\int_0^1 \left|f\left(R+\frac{i}{2}R\frac{x-y}{|x-y|}\lambda\right)\right|\mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{R}{2}\int_0^1 \left|e^{i(Z(x,t)-Z(y,s))R\left(1+\frac{i}{2}\frac{x-y}{|x-y|}\lambda\right)-\varepsilon R^2\left(1+\frac{i}{2}\frac{x-y}{|x-y|}\lambda\right)^2}\right|\mathrm{d}\lambda \\
&= \frac{R}{2}\int_0^1 e^{\mathrm{Re}\left\{i(Z(x,t)-Z(y,s))R\left(1+\frac{i}{2}\frac{x-y}{|x-y|}\lambda\right)-\varepsilon R^2\left(1+\frac{i}{2}\frac{x-y}{|x-y|}\lambda\right)^2\right\}}\mathrm{d}\lambda \\
&\leq \frac{R}{2}\sup_{\lambda\in[0,1]}\left\{e^{\mathrm{Re}\left\{i(Z(x,t)-Z(y,s))R\left(1+\frac{i}{2}\frac{x-y}{|x-y|}\lambda\right)-\varepsilon R^2\left(1+\frac{i}{2}\frac{x-y}{|x-y|}\lambda\right)^2\right\}}\right\} \\
&\to 0
\end{aligned}$$

quando $R\to\infty$.

Portanto, podemos mudar o caminho de integração. Mas antes disso, precisaremos introduzir um novo operador, que será bastante útil.

Etapa 3: Consideramos o operador

$$L_0 = \frac{1}{Z_x}\frac{\partial}{\partial x} \tag{3.13}$$

e seu transposto formal L_0', a saber $L_0'(v)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{Z_x}v\right)$.

Temos que os operadores L_0 e L comutam, isto é, $[L_0,L]=0$. Além disso, por indução mostra-se que para qualquer inteiro $N\geq 0$ temos

(i) $(1-L_0)^N(e^{-iZ\xi})=(1+i\xi)^N(e^{-iZ\xi})$;

(ii) $(1-L_0')^N(Z_x v)=Z_x(1+L_0)^N v$, para qualquer v suave.

De fato, primeiramente vamos mostrar (i). Temos

$$(1-L_0)(e^{-iZ\xi}) = e^{-iZ\xi} - \frac{1}{Z_x}\partial_x(e^{-iZ\xi}) = e^{-iZ\xi} - \frac{1}{Z_x}e^{-iZ\xi}(-i\xi Z_x) = (1+i\xi)e^{-iZ\xi}.$$

Agora assumindo que vale (i) para N vamos mostrar que vale para $N+1$

$$\begin{aligned}
(1-L_0)^{N+1}(e^{-iZ\xi}) &= (1-L_0)(1-L_0)^N(e^{-iZ\xi}) \\
&= (1-L_0)((1+i\xi)^N e^{-iZ\xi}) \\
&= (1+i\xi)^N e^{-iZ\xi} - L_0((1+i\xi)^N e^{-iZ\xi}) \\
&= (1+i\xi)^N e^{-iZ\xi} - \tfrac{1}{Z_x}\partial_x((1+i\xi)^N e^{-iZ\xi}) \\
&= (1+i\xi)^N e^{-iZ\xi} - \tfrac{1}{Z_x}(1+i\xi)^N(-iZ_x\xi)e^{-iZ\xi} \\
&= (1+i\xi)^N e^{-iZ\xi} + i\xi(1+i\xi)^N e^{-iZ\xi} \\
&= (1+i\xi)^{N+1}e^{-iZ\xi}.
\end{aligned}$$

Assim (i) está provado. Vamos provar agora (ii). Temos

$$(1-L_0')(Z_x v) = Z_x v - \left(-\partial_x\left(\frac{1}{Z_x}Z_x v\right)\right) = Z_x v + \partial_x v = Z_x\left(v + \frac{1}{Z_x}v\right) = Z_x(1+L_0)v.$$

Agora assumindo que vale (ii) para N vamos mostrar que vale para $N+1$

$$\begin{aligned}
(1-L_0')^{N+1}(Z_x v) &= (1-L_0')(1-L_0')^N(Z_x v) \\
&= (1-L_0')(Z_x(1+L_0)^N v) \\
&= Z_x(1+L_0)^N v - L_0'(Z_x(1+L_0)^N v) \\
&= Z_x(1+L_0)^N v + \partial_x((1+L_0)^N v) \\
&= Z_x((1+L_0)^N v + L_0((1+L_0)^N v)) \\
&= Z_x((1+L_0)(1+L_0)^N v) \\
&= Z_x(1+L_0)^{N+1}v.
\end{aligned}$$

Assim (ii) está provado.

Afirmação 3.1.2. *Podemos escrever u^{22} da seguinte maneira:*

$$-\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_t^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_0^\infty e^{i[Z(x,t)-Z(y,s)]\xi-\varepsilon\xi^2}(1+i\xi)^{-N}\,\mathrm{d}\xi(1+L_0)^N(\chi f)(y,s)\,\mathrm{dZ}(y,s)\,\mathrm{ds}\,. \tag{3.14}$$

Demonstração. Considerando $L_0 = \frac{1}{Z_y}\frac{\partial}{\partial y}$, utilizando (i), (ii) e o Teorema de Fubini, temos

$$u^{22} = -\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_t^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_0^\infty e^{i[Z-Z(y,s)]\xi-\varepsilon\xi^2}\,\mathrm{d}\xi(\chi f)(y,s)\,\mathrm{dZ}\,\mathrm{ds}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_t^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_0^\infty e^{iZ\xi-\varepsilon\xi^2}(1+i\xi)^{-N}(1-L_0)^N\left(e^{-iZ(y,s)\xi}\right)(\chi f)(y,s)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{dZ}\,\mathrm{ds}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_t^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_0^\infty (1-L_0)^N\left[e^{i(Z-Z(y,s))\xi-\varepsilon\xi^2}(1+i\xi)^{-N}\right](\chi f)(y,s)Z_y(y,s)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{dy}\,\mathrm{ds}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_t^\infty\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty (1-L_0)^N\left[e^{i(Z-Z(y,s))\xi-\varepsilon\xi^2}(1+i\xi)^{-N}\right](\chi f)(y,s)Z_y(y,s)\,\mathrm{dy}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{ds}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_t^\infty\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{i(Z-Z(y,s))\xi-\varepsilon\xi^2}(1+i\xi)^{-N}(1-L_0')^N\left[(\chi f)(y,s)Z_y(y,s)\right]\mathrm{dy}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{ds}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_t^\infty\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{i(Z-Z(y,s))\xi-\varepsilon\xi^2}(1+i\xi)^{-N}Z_y(y,s)(1+L_0)^N(\chi f)(y,s)\,\mathrm{dy}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{ds}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_t^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_0^\infty e^{i(Z-Z(y,s))\xi-\varepsilon\xi^2}(1+i\xi)^{-N}\,\mathrm{d}\xi(1+L_0)^N(\chi f)(y,s)\,\mathrm{dZ}\,\mathrm{ds}\,.$$

■

Observação 3.1.3. *A necessidade de introduzir tal operador vem do fato que quando derivamos a exponencial na integral, ficamos com potências de $i\xi$ e tais potências terão crescimeto controlado, quando utilizamos o operador L_0. Além disso, já para mostrar a continuidade, há a necessidade dessa introdução, para podermos aplicar o Teorema da Convergência Dominada. Isto ficará claro a seguir.*

Etapa 4: Pela etapa 3, temos que u^{22} é dada por (3.14). Utilizando a etapa 2,

sabemos que podemos mudar o caminho de integração em ξ para ζ, onde ζ é dado por (3.11). Assim, consideramos

$$h_\varepsilon(\zeta) = e^{i[Z(x,t)-Z(y,s)]\zeta-\varepsilon\zeta^2}(1+i\zeta)^{-N}$$

e

$$u_\varepsilon^{22}(x,t) = -\frac{1}{2\pi}\int_t^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_{\gamma_3} h_\varepsilon(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta(1+L_0)^N(\chi f)(y,s)\,\mathrm{dZ}(y,s)\,\mathrm{ds}\,.$$

Note que

$$h_\varepsilon(\zeta) \to e^{i[Z(x,t)-Z(y,s)]\zeta}(1+i\zeta)^{-N} \doteq h(\zeta) \quad \text{quando } \varepsilon \to 0^+.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} |h_\varepsilon(\zeta)| &= \left|e^{i[Z(x,t)-Z(y,s)]\zeta-\varepsilon\zeta^2}(1+i\zeta)^{-N}\right| \\ &= e^{\mathrm{Re}\left\{i[Z(x,t)-Z(y,s)]\zeta-\varepsilon\zeta^2\right\}}(1+i\zeta)^{-N} \\ &\leq C(1+i\zeta)^{-N} \in L^1. \end{aligned}$$

A desigualdade segue de (3.12).

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada temos

$$\begin{aligned} u^{22}(x,t) &= \lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon^{22}(x,t) \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_t^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_{\gamma_3} h(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta(1+L_0)^N(\chi f)(y,s)\,\mathrm{dZ}(y,s)\,\mathrm{ds}\,. \end{aligned}$$

Assim, como f é suave em uma vizinhança da origem e Z é contínua em $\overline{U^+}$ segue que $u^{22} \in C(\overline{U^+})$.

Como podemos escolher N tal grande quanto quisermos, derivando sob o sinal de integração, usando o fato de Z ser suave em $\overline{U^+}$ e aplicando o Teorema da Convergência Dominada concluimos que $u^{22} \in C^\infty(\overline{U^+})$. ∎

Usando argumentos similares definimos também

$$u^{21}(x,t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{0} e^{i[Z(x,t)-Z(y,s)]\xi - \varepsilon\xi^2} \, \mathrm{d}\xi (\chi f)(y,s) \, \mathrm{dZ}(y,s) \, \mathrm{ds} \tag{3.15}$$

para $(x,t) \in \overline{U^+}$,

$$u^{11}(x,t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{0} e^{i[x-y+i(s^{\ell+1}-t^{\ell+1})]\xi - \varepsilon\xi^2} \, \mathrm{d}\xi (\chi f)(y,s) \, \mathrm{dy} \, \mathrm{ds} \tag{3.16}$$

para $(x,t) \in \overline{U^-}$,

$$u^{12}(x,t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} e^{i[x-y+i(s^{\ell+1}-t^{\ell+1})]\xi - \varepsilon\xi^2} \, \mathrm{d}\xi (\chi f)(y,s) \, \mathrm{dy} \, \mathrm{ds} \tag{3.17}$$

para $(x,t) \in \overline{U^-}$.

Analogamente mostra-se que $u^{21} \in C^\infty(\overline{U^+})$ e $u^{11}, u^{12} \in C^\infty(\overline{U^-})$.

Agora seja H a função de Heaviside, isto é

$$H(t) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad t \geq 0 \\ 0, & \text{se} \quad t < 0. \end{cases}$$

Defina u da seguinte maneira

$$u(x,t) = H(t)(u^{21}(x,t) + u^{22}(x,t)) + H(-t)(u^{11}(x,t) + u^{12}(x,t)). \tag{3.18}$$

Afirmação 3.1.4. *Z verifica (3.2).*

Demonstração. De fato, utilizando (3.7) e (3.8), temos que

$$|\mathrm{Im}\,(Z(x,t) - Z(y,t))| = |b(x,t) - b(y,t)| \leq \frac{1}{8}|x-y|$$

e

$$|\mathrm{Re}\,(Z(x,t)-Z(y,y))| \geq |x-y| - |A(x,y,t)| \geq \frac{1}{4}|x-y| \geq 2|\mathrm{Im}\,(Z(x,t)-Z(y,t)|.$$

■

Assim, a Fórmula de Inversão de Fourier Generalizada (3.3) é válida e aplicando-a à $\chi f \in C_c^\infty(U)$ temos

Afirmação 3.1.5.

$$(Lu)(x,t) = (\chi f)(x,t) - (Kf)(x) \otimes \delta(t), \tag{3.19}$$

para $(x,t) \in U$, *onde definimos* $K = K^+ + K^-$ *com*

$$(K^+ f)(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty e^{i[Z(x,0)-Z(y,s)]\xi - \varepsilon\xi^2}\, \mathrm{d}\xi (\chi f)(y,s)\, \mathrm{dZ}(y,s)\, \mathrm{ds}$$

e

$$(K^- f)(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty e^{i[x-y+is^{\ell+1}]\xi - \varepsilon\xi^2}\, \mathrm{d}\xi (\chi f)(y,s)\, \mathrm{dy}\, \mathrm{ds}\,.$$

Demonstração. Para obtermos a expressão (3.19), primeiramente note que pela definição da u temos

$$Lu = L(H)(u^{21}+u^{22}) + HL(u^{21}+u^{22}) + L(\check{H})(u^{11}+u^{12}) + \check{H}L(u^{11}+u^{12}), \tag{3.20}$$

onde $\check{H}(t) = H(-t)$. Dada $\phi \in C_c^\infty(U)$ queremos obter $\langle Lu, \phi\rangle$. Para isso, vamos separar em duas etapas:

Etapa 1: Dada $\phi \in C_c^\infty(U)$

$$\langle L(H), \phi\rangle = \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t} + i(\ell+1)t^\ell(1+\rho)\frac{\partial}{\partial x}\right) H, \phi \right\rangle = \left\langle \frac{\partial H}{\partial t}, \phi \right\rangle = \langle \delta, \phi\rangle\,.$$

Então, $L(H) = \delta$ em U. Analogamente, $L(\check{H}) = -\delta$ em U. Assim,

$$\left\langle (u^{21}+u^{22})L(H) + (u^{11}+u^{12})L(\check{H}), \phi \right\rangle = \left\langle \delta, (u^{21}+u^{22})\phi \right\rangle - \left\langle \delta, (u^{11}+u^{12})\phi \right\rangle$$

$$= \left\langle (u^{21}(x,0) + u^{22}(x,0) - u^{11}(x,0) - u^{12}(x,0))\delta(t), \phi \right\rangle = -\left\langle (Kf)\otimes\delta, \phi \right\rangle .$$

A última igualdade segue do seguinte fato

$$u^{21}(x,0) + u^{22}(x,0) - u^{11}(x,0) - u^{12}(x,0) = -(K^+f)(x) - (K^-f)(x) = -(Kf)(x).$$

Portanto,

$$\left\langle (u^{21}+u^{22})L(H) + (u^{11}+u^{12})L(\check{H}), \phi \right\rangle = -\left\langle (Kf)\otimes\delta, \phi \right\rangle . \tag{3.21}$$

Etapa 2: Agora vamos calcular $Lu^{22}, Lu^{21}, Lu^{11}, Lu^{12}$. Para u^{22} temos

$$\begin{aligned}
Lu^{22} &= -\frac{1}{2\pi} L\left(\int_t^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty e^{i[Z(x,t)-Z(y,s)]\xi} \,\mathrm{d}\xi (\chi f)(y,s)\,\mathrm{dZ}(y,s)\,\mathrm{ds} \right) \\
&= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty e^{iZ(x,t)\xi} \int_t^\infty e^{-iZ(y,s)\xi} (\chi f)(y,s) Z_y(y,s)\,\mathrm{ds}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{dy} \right) \\
&\quad -\frac{1}{2\pi}\int_t^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty i(\ell+1)t^\ell(1+\rho)\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{i[Z(x,t)-Z(y,s)]\xi}\right)(\chi f)(y,s)Z_y(y,s)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{dy}\,\mathrm{ds} \\
&= -\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{iZ(x,t)\xi}\right) \int_t^\infty e^{-iZ(y,s)\xi}(\chi f)(y,s)Z_y(y,s)\,\mathrm{ds}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{dy} \right) \\
&\quad +\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty e^{i[Z(x,t)-Z(y,t)]\xi}(\chi f)(y,t)Z_y(y,t)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{dy} \\
&\quad -\frac{1}{2\pi}\int_t^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty i(\ell+1)t^\ell(1+\rho)(i\xi)Z_x\left(e^{i[Z-Z(y,s)]\xi}\right)(\chi f)(y,s)Z_y(y,s)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{dy}\,\mathrm{ds} \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_t^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty (i\xi)LZ(x,t)e^{i[Z(x,t)-Z(y,s)]\xi}(\chi f)(y,s)Z_y(y,s)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{dy}\,\mathrm{ds} \\
&\quad +\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty e^{i[Z(x,t)-Z(y,t)]\xi}(\chi f)(y,t)Z_y(y,t)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{dy}
\end{aligned}$$

Usando que $LZ = 0$ em $\overline{U^+}$ temos que

$$Lu^{22}(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{i[Z(x,t)-Z(y,t)]\xi}(\chi f)(y,t)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{dZ}(y,t),$$

em $\overline{U^+}$.

Analogamente para u^{21} temos

$$Lu^{21}(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{0} e^{i[Z(x,t)-Z(y,t)]\xi}(\chi f)(y,t)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{dZ}(y,t),$$

em $\overline{U^+}$.

Já para u^{11} e u^{12} temos

$$Lu^{11}(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{0} e^{i[x-y]\xi}(\chi f)(y,t)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{dy}$$

e

$$Lu^{12}(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{i[x-y]\xi}(\chi f)(y,t)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{dy}\,.$$

em $\overline{U^-}$.

Portanto,

$$L(u^{22}+u^{21})(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i[Z(x,t)-Z(y,t)]\xi}(\chi f)(y,t)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{dZ}(y,t) = (\chi f)(x,t), \quad (3.22)$$

em $\overline{U^+}$ e

$$L(u^{22}+u^{21})(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i[x-y]\xi}(\chi f)(y,t)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{dy} = (\chi f)(x,t), \quad (3.23)$$

em $\overline{U^-}$.

Observação 3.1.6. (a) *Os cálculos foram feitos aqui já pensando na mudança de con-*

torno e na utilização do Teorema da Convergência Dominada para poder passar o limite para dentro do integrando.

(b) *Quando usamos u^{11} e u^{22} pensamos com a fórmula de inversão de Fourier aplicado a $w(x,t) = x - it^{\ell+1}$ ao invés de Z. Lembre-se que w tem as mesmas propriedades de Z, só que em U^-.*

Logo, dada $\phi \in C_c^\infty(U)$ por (3.20)-(3.23) temos

$$\begin{aligned} \langle Lu, \phi\rangle &= -\langle (Kf)\otimes\delta, \phi\rangle + \langle H(t)(\chi f)(x,t) + H(-t)(\chi f)(x,t), \phi\rangle \\ &= \langle -(Kf)\otimes\delta + (\chi f), \phi\rangle\,. \end{aligned}$$

O que prova(3.19).

Note que u dada em (3.18) ainda não satisfaz (3.1), pois temos a mais o termo $(Kf)\otimes\delta$. Assim, antes de defirnirmos uma nova distribuição para contornar esse problema vamos enunciar a seguinte condição crucial, que denotaremos por (C).

(C): *Existem duas funções holomorfas, A e B, de crescimento lento no semiplano inferior tal que*

$$(Kf)(x) = \lim_{t\to 0^+} A(Z(x,t)) + \lim_{t\to 0^-} B(x - it^{\ell+1}), \tag{3.24}$$

onde os limites são tomados no sentido das distribuições.

3.2 Teorema Principal

Nosso objetivo agora é mostrar que a condição (C) enunciada na seção anterior é necessária e suficiente para uma dada função suave f pertencer a imagem do operador L. Precisamente, temos o seguinte

Teorema 3.2.1 (Caracterização do conjunto imagem)**.** *Seja L um operador quase ℓ-Mizohata em $\Sigma = \{t = 0\}$, ℓ ímpar, tendo a forma (2.6) em uma vizinhança da origem U.*

Suponha que $f \in C^\infty(U)$. Então existe uma distribuição u tal que $Lu = f$ perto da origem se, se somente se, f satisfaz a condição (C).

Demonstraremos esse teorema em duas etapas, primeiramente mostrando que a condição (C) é suficiente e após mostrando que a condição (C) é necessária. Na segunda etapa precisaremos dividir em dois casos, primeiro o caso particular em que u é de classe C^1 e depois o caso geral em que u é uma distribuição.

3.2.1 A condição é suficiente

Se assumirmos que f satisfaça (C), podemos definir a distribuição

$$v(x,t) = H(t)A(Z(x,t)) - H(-t)B(x - it^{\ell+1}) \tag{3.25}$$

e concluir que

$$(Lv)(x,t) = (Kf)(x) \otimes \delta(t).$$

De fato, novamente vamos considerar $w(x,t) = x - it^{\ell+1}$, assim

$$Lv = L(H)(A \circ Z) + HL(A \circ Z) - L(\check{H})(B \circ w) - \check{H}L(B \circ w).$$

Assim, dada $\phi \in C_c^\infty(U)$, segue que

$$\langle Lv, \phi \rangle = \langle L(H)(A \circ Z), \phi \rangle + \langle HL(A \circ Z), \phi \rangle - \left\langle L(\check{H})(B \circ w), \phi \right\rangle - \left\langle \check{H}L(B \circ w), \phi \right\rangle$$

o segundo e o quarto termos do lado direito da equação acima são zero, pois Z e w são soluções homogêneas de L em U^+ e U^-, respectivamente, e A e B são funções holomorfas.

Logo,

$$\begin{aligned}\langle Lv,\phi\rangle &= \langle\delta(t)(A\circ Z)(x,t),\phi\rangle + \langle\delta(t)(B\circ w)(x,t),\phi\rangle \\ &= \left\langle \delta(t)\left[\lim_{t\to 0^+}(A\circ Z)(x,t) + \lim_{t\to 0^-}(B\circ w)(x,t)\right],\phi\right\rangle \\ &= \langle Kf\otimes\delta,\phi\rangle\,.\end{aligned}$$

Os limites acima existem e são distribuições pelo Teorema 1.1.2, pois A e B são de crescimento lento.

Portanto, segue que

$$L(u+v) = Lu + Lv = (\chi f) - (Kf)\otimes\delta + (Kf)\otimes\delta = (\chi f) = f,$$

em uma vizinhança da origem onde $\chi \equiv 1$.

Portanto a condição (C) é suficiente para resolver o problema.

3.2.2 A condição é necessária

Suponhamos agora que $Lu = f$ para alguma f suave. Para provarmos que a condição (C) é necessária, vamos separar em dois casos:

Caso 1: u é uma função de classe C^1

Considere

$$(K_\varepsilon^+ f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_0^\infty e^{i[Z(x,0)-Z(y,s)]\xi-\varepsilon\xi^2}\,\mathrm{d}\xi(\chi f)(y,s)\,\mathrm{dZ}(y,s)\,\mathrm{ds}, \tag{3.26}$$

onde $\chi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\chi\equiv 1$ perto da origem e o suporte de χ está contido em uma vizinhança da origem onde ambas u e f são definidas.

Afirmação 3.2.2. *Usando que $Lu = f$ e $LZ = 0$ em U^+ temos que*

$$K_\varepsilon^+ f = I_\varepsilon^+ f + J_\varepsilon^+ f, \tag{3.27}$$

onde definimos

$$(I_\varepsilon^+ f)(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty e^{i[Z(x,0)-Z(y,s)]\xi-\varepsilon\xi^2}\,\mathrm{d}\xi(L\chi)(y,s)u(y,s)\,\mathrm{dZ}(y,s)\,\mathrm{ds} \quad (3.28)$$

e

$$(J_\varepsilon^+ f)(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty e^{i[Z(x,0)-Z(y,0)]\xi-\varepsilon\xi^2}\,\mathrm{d}\xi\,\chi(y,0)u(y,0)\,\mathrm{dZ}(y,0). \quad (3.29)$$

Demonstração. Usando que $Lu = f$ podemos escrever $K_\varepsilon^+ f$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned}(K_\varepsilon^+ f)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty e^{i[Z(x,0)-Z(y,s)]\xi-\varepsilon\xi^2} L(\chi u)(y,s)Z_y(y,s)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{dy}\,\mathrm{ds}\\ &\quad -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty e^{i[Z(x,0)-Z(y,s)]\xi-\varepsilon\xi^2} u(L\chi)(y,s)Z_y(y,s)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{dy}\,\mathrm{ds}\\ &= A + (I_\varepsilon^+ f)(x)\end{aligned}$$

onde

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty e^{i[Z(x,0)-Z(y,s)]\xi-\varepsilon\xi^2} L(\chi u)(y,s)Z_y(y,s)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{dy}\,\mathrm{ds}\,.$$

Vamos mostrar que $A = (J_\varepsilon^+ f)$. De fato, aplicando o operador L em χu e usando o Teorema de Fubini temos que

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{i[Z(x,0)-Z(y,s)]\xi-\varepsilon\xi^2} Z_y(y,s)\frac{\partial(\chi u)}{\partial s}\,\mathrm{ds}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{dy}\\ &\quad +\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{i[Z(x,0)-Z(y,s)]\xi-\varepsilon\xi^2} i(\ell+1)s^\ell(1+\rho(y,s))Z_y(y,s)\frac{\partial(\chi u)}{\partial y}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{ds}\end{aligned}$$

Integrando por partes a primeira integral em relação à s e a segunda em relação à y obtemos

que

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{i[Z(x,0)-Z(y,0)]\xi-\varepsilon\xi^2}\chi u(y,0)Z_y(y,0)\,\mathrm{dy}\,\mathrm{d}\xi \\ &\quad -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_0^\infty e^{i[Z(x,0)-Z]\xi-\varepsilon\xi^2}(\chi u)\left[(-i\xi)(LZ)Z_y+(LZ_y)+i(\ell+1)s^\ell\rho_y Z_y\right]\mathrm{ds}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{d}\xi \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{i[Z(x,0)-Z(y,0)]\xi-\varepsilon\xi^2}\chi u(y,0)Z_y(y,0)\,\mathrm{dy}\,\mathrm{d}\xi \\ &= (J_\varepsilon^+ f)(x). \end{aligned}$$

A penúltima igualdade segue do fato que $LZ=0$ em U^+ e

$$LZ=0\Rightarrow\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial s}+i(\ell+1)s^\ell(1+\rho)\frac{\partial Z}{\partial y}\right)=0\Rightarrow L(Z_y)+i(\ell+1)s^\ell\rho_y Z_y=0.$$

■

Vamos analisar I_ε^+ e J_ε^+. Primeiramente analisaremos I_ε^+. A ideia é mostrar que I_ε^+ se estende como uma função holomorfa, tal que o limite quando ε tende a 0^+ existe e é uma função holomorfa. Para isso, precisaremos novamente fazer uma deformação do caminho de integral, consideraremos a mesma deformação feita anteriormente, ou seja, consideraremos ζ dado por (3.11). Assim temos,

$$(I_\varepsilon^+ f)(x)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_0^\infty e^{i[Z(x,0)-Z(y,s)]\zeta(\xi)-\varepsilon(\zeta(\xi))^2}\,\mathrm{d}\xi(L\chi)(y,s)u(y,s)\,\mathrm{dZ}(y,s)\,\mathrm{ds}\,.$$

Por (3.12) temos que

$$\mathrm{Re}\left\{i[Z(x,0)-Z(y,s)]\zeta(\xi)-\varepsilon(\zeta(\xi))^2\right\}\leq -C_1 s^{\ell+1}\frac{R}{2}-|x-y|\frac{R}{4}-\varepsilon\frac{3}{4}R^2,$$

onde $C_1>1$ é uma constante. Como $\chi\equiv 1$ em uma vizinhança da origem, então $L\chi\equiv 0$ nesta vizinhança. Logo precisamos estimar o termo exponencial apenas fora desta vizi-

nhança. Supondo que esta vizinhança seja um retângulo, a integral com respeito a s e a y será calculada fora deste retângulo. Se (y,s) não pertence a este retângulo, existem constantes C_2 e C_3 tais que $|s| > C_2$ ou $|y| > C_3$. Consequentemente, para x suficientemente pequeno, temos

$$\frac{C_1}{2}s^{\ell+1} \geq C_4 \text{ ou } \frac{|x-y|}{4} \geq C_5,$$

com, $(C_j)_{j=2}^5$ constantes positivas, não dependendo de s, y e x. Assim, para x suficientemente pequeno, existe uma constante $C > 0$ não dependendo de s, y e x tal que

$$\text{Re}\left\{i[Z(x,0) - Z(y,s)]\zeta(\xi) - \varepsilon(\zeta(\xi))^2\right\} \leq -CR - \frac{3}{4}\varepsilon R^2.$$

pois acontece uma das duas desigualdades

$$\text{Re}\left\{i[Z(x,0) - Z(y,s)]\zeta(\xi) - \varepsilon(\zeta(\xi))^2\right\} \leq -C_1 s^{\ell+1}\frac{R}{2} - \varepsilon\frac{3}{4}R^2$$

ou

$$\text{Re}\left\{i[Z(x,0) - Z(y,s)]\zeta(\xi) - \varepsilon(\zeta(\xi))^2\right\} \leq -|x-y|\frac{R}{4} - \varepsilon\frac{3}{4}R^2.$$

Em ambos os casos segue a desigualdade para C.

Com isso,

$$|e^{i[Z(x,0)-Z(y,s)]\zeta(\xi)-\varepsilon(\zeta(\xi))^2}| = e^{\text{Re}\left\{i[Z(x,0)-Z(y,s)]\zeta(\xi)-\varepsilon(\zeta(\xi))^2\right\}} \leq e^{-C\xi-\frac{3}{4}\varepsilon\xi^2}. \tag{3.30}$$

Para x suficientemente pequeno, vamos olhar $Z(x,0)$ como uma variável complexa. E consideramos

$$G_\varepsilon(Z(x,0),y,s,\xi) = e^{i[Z(x,0)-Z(y,s)]\zeta(\xi)-\varepsilon(\zeta(\xi))^2}(L\chi)(y,s)u(y,s)Z_y(y,s).$$

Assim, de (3.30) temos

$$|G_\varepsilon(Z(x,0),y,s,\xi)| \leq e^{-C\xi-\frac{3}{4}\varepsilon\xi^2}|(L\chi)(y,s)u(y,s)Z_y(y,s)| \leq \tilde{C}e^{-C\xi-\frac{3}{4}\varepsilon\xi^2} \in L^1. \quad (3.31)$$

Como G_ε é contínua e $Z(x,0) \to G_\varepsilon(Z(x,0),y,s,\xi)$ é holomorfa em uma vizinhança da origem do plano complexo, pois a exponencial é holomorfa. Assim, de (3.31) e utilizando a Proposição 1.1.5 temos que, $I_\varepsilon^+ f$ é uma função holomorfa da variável $Z(x,0)$, para x suficientemente pequeno.

Pelo Teorema da Convergência Dominada temos que existe $\lim_{\varepsilon\to 0^+} I_\varepsilon^+ f(x)$. Além disso,

$$|(I_\varepsilon^+ f)(x)| \leq \frac{\tilde{C}}{2\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_0^\infty e^{-C\xi-\frac{3}{4}\varepsilon\xi^2}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{dy}\,\mathrm{ds} = \tilde{\tilde{C}},$$

ou seja, $\{I_\varepsilon^+ f\}_{\varepsilon>0}$ é localmente limitada. Então, pelo Teorema de Montel 1.1.6, segue que $\lim_{\varepsilon\to 0^+} I_\varepsilon^+ f(x)$ é uma função holomorfa da variável $Z(x,0)$. Logo, existe uma função A^+ holomorfa perto da origem em $\mathbb{C}$ tal que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}(I_\varepsilon^+ f)(x) = A^+(Z(x,0)). \quad (3.32)$$

Além disso, utilizando a Proposição 1.1.4 mostra-se que A^+ é analítica real da variável $Z(x,0)$.

Agora vamos analisar $J_\varepsilon^+ f$. Para isso começamos aplicando a Fórmula de Inversão de Fourier Generalizada para $\chi u \in C_c^1(\mathbb{R}^2)$, então

$$\chi u(y,0) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i[Z(x,0)-Z(y,0)]\xi-\varepsilon\xi^2}\,\mathrm{d}\xi\,\chi u(y,0)\,\mathrm{dZ}(y,0).$$

Assim, para x pequeno vemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0^+} J_\varepsilon^+ f(x) &= -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i[Z(x,0)-Z(y,0)]\xi-\varepsilon\xi^2}\,\mathrm{d}\xi\,\chi u(y,0)\,\mathrm{dZ}(y,0)\\
&+ \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{0} e^{i[Z(x,0)-Z(y,0)]\xi-\varepsilon\xi^2}\,\mathrm{d}\xi\,\chi u(y,0)\,\mathrm{dZ}(y,0)\\
&= -\chi u(y,0)+\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{0} e^{i[Z(x,0)-Z(y,0)]\xi-\varepsilon\xi^2}\,\mathrm{d}\xi\,\chi u(y,0)\,\mathrm{dZ}(y,0)\\
&= -u(y,0)+\lim_{\varepsilon\to 0^+} F_\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

onde

$$F_\varepsilon(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{0} e^{i[Z(x,0)-Z(y,0)]\xi-\varepsilon\xi^2}\,\mathrm{d}\xi\,\chi u(y,0)\,\mathrm{dZ}(y,0).$$

Considere a seguinte vizinhança da origem do plano complexo

$$V=\{z\in\mathbb{C}; z\in Z(U)\}$$

e escreva

$$f_\varepsilon(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{0} e^{i[z-Z(y,0)]\xi-\varepsilon\xi^2}\,\mathrm{d}\xi\,\chi u(y,0)\,\mathrm{dZ}(y,0).$$

Afirmação 3.2.3. *Valem as seguintes afirmações sobre* f_ε*:*

1. f_ε *é holomorfa em* V^-*;*

2. $\exists \lim_{\varepsilon\to 0^+} f_\varepsilon$*, em* V^-*;*

3. $\lim_{\varepsilon\to 0^+} f_\varepsilon$ *é uma função holomorfa em* V^-*;*

4. *existem* $K>0$ *e um inteiro* $N\geq 0$ *tal que* $|\lim_{\varepsilon\to 0^+} f_\varepsilon(z)|\leq \dfrac{K}{|\mathrm{Im}\, z|^N}$ *em* V^-*.*

De fato, note que dado $z\in V^-$ temos

$$\mathrm{Re}\left\{i[z-Z(y,0)]\xi-\varepsilon\xi^2\right\}=-(\mathrm{Im}\, z)\xi-\varepsilon\xi^2\leq 0,$$

pois $\operatorname{Im} z \leq 0$ em V^-. Observe que neste caso, não precisamos aplicar a deformação do caminho de integração. Assim, como anteriormente, pela Proposição 1.1.5 concluimos que f_ε é holomorfa em V^- e pelo Teorema da Convergência Dominada segue que existe $\lim_{\varepsilon\to 0^+} f_\varepsilon(z)$, para $z \in V^-$. O que prova (1) e (2).

Além disso, $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ é uma família de funções holomorfas em V^- e localmente limitadas. Assim, novamente pelo Teorema de Montel 1.1.6 segue (3).

Digamos que $\lim_{\varepsilon\to 0^+} f_\varepsilon(z) = B^+(z)$ e por fim observe que

$$\begin{aligned}
|B^+(z)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{0} e^{i[z-Z(y,0)]\xi}\,\mathrm{d}\xi\,\chi u(y,0)\,\mathrm{dZ}(y,0)\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{0} e^{\mathrm{Re}\{i[z-Z(y,0)]\xi\}}|\chi u(y,0)Z_y(y,0)|\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{dy} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{0} e^{-(\operatorname{Im} z)\xi}|\chi u(y,0)Z_y(y,0)|\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{dy} \\
&\leq K\int_{-\infty}^{0} e^{-(\operatorname{Im} z)\xi}\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{K}{|\operatorname{Im} z|},
\end{aligned}$$

onde K é uma constante. O que prova (4).

Assim, B^+ é uma função holomorfa de crescimento lento no semiplano inferior. Daí, podemos tomar o limite de fronteira (ver [11], pg. 66) e obtemos

$$\lim_{t\to 0^+} B^+(Z(x,t)) = B^+(Z(x,0)) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} f_\varepsilon(Z(x,0)) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} F_\varepsilon(x).$$

Então,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} J_\varepsilon^+ f(x) = -u(x,0) + \lim_{t\to 0^+} B^+(Z(x,t)). \tag{3.33}$$

Então de (3.27), (3.32) e (3.33) e utilizando o Teorema 1.1.3 vemos que existe uma

função A holomorfa de crescimento lento no semiplano inferior tal que

$$K^+ f(x) = -u(x,0) + \lim_{t\to 0^+} A(Z(x,t)). \tag{3.34}$$

Usando argumentos similares também mostra-se que existe uma função B holomorfa de crescimento lento no semiplano inferior tal que

$$K^- f(x) = u(x,0) + \lim_{t\to 0^-} B(x - it^{\ell+1}). \tag{3.35}$$

Observação 3.2.4. *O sinal positivo da u em (3.35), vem do fato que quando integramos por partes em relação a s o termo que fica sem a integral em s é positivo.*

Combinando (3.34) e (3.35) vemos que

$$Kf(x) = \lim_{t\to 0^+} A(Z(x,t)) + \lim_{t\to 0^-} B(x - it^{\ell+1}).$$

Ou seja, (C) é necessária pra resolver (3.1), assumindo $u \in C^1$.

Caso 2: u é uma distribuição

Tomamos a vizinhança da origem U e I_1 e I_2 intervalos abertos em $\mathbb{R}$ contendo a origem, tal que $\bar{I}_1 \times \bar{I}_2 \subset U$. Consideramos novamente o operador L_0 dado por (3.13).

Vamos utilizar aqui o seguinte teorema, o qual é um caso particular de um teorema devido a Baouendi e Treves (Ver [2], pg 250).

Teorema 3.2.5. *Suponha que L tem a forma (2.6) em U e sejam $u \in \mathscr{D}'(U)$ e $f \in C^\infty(U)$ satisfazendo $Lu = f$ em U. Então existe um inteiro $N \geq 0$ e uma função contínua v em $I_1 \times I_2$ tal que*

$$u = L_0^N v.$$

Demonstração. (Esboço) Pelo Exemplo 1.3.7 temos que o operador L é parcialmente

hipoelíptico em t, ou seja, u é suave na variável t e assume valores nas distribuições em x, $u \in C^\infty(I_2, \mathscr{D}'(I_1))$. Assim, pelo Teorema da Estrutura Local das Distribuições, existe uma função contínua v_1 em $\bar{I}_1 \times \bar{I}_2$ e um inteiro $N \geq 0$ tal que

$$u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^N v_1 \text{ em } I_1 \times I_2. \tag{3.36}$$

Isso implica na seguinte

Afirmação 3.2.6. *Existe $v_2 \in C^0(\bar{I}_1 \times \bar{I}_2)$ tal que*

$$u = L_0^N v_2 \text{ em } I_1 \times I_2. \tag{3.37}$$

A prova segue por indução e aplicação da fórmula de Leibniz transposta. ■

Observação 3.2.7. *Podemos obter $v \in C^1$ no teorema anterior, para isso tomamos uma primitiva em x de v_0 (onde $v_0 \in C^0$ é a função dada pelo teorema). Assim, $v \in C^1$, já que v já é suave em t, pois L é parcialmente hipoelíptico em t.*

Além disso, como L e L_0 comutam temos

$$L(L_0^N v) = L_0^N (Lv).$$

Assim, substituindo $L_0^N v$ por u em (3.26) obtemos

$$(K_\varepsilon^+ f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty e^{i[Z(x,0)-Z(y,s)]\xi - \varepsilon\xi^2} \, \mathrm{d}\xi(\chi)(y,s) L_0^N (Lv)(y,s) \, \mathrm{dZ}(y,s) \, \mathrm{ds}\,.$$

Daí integrando por partes em relação a y podemos proceder de maneira análoga.

Portanto, concluimos a demonstração do Teorema Principal. ■

Observação 3.2.8. *A condição (C) independe da função corte χ.*

Capítulo

4

Determinação de soluções para uma classe de operadores localmente resolúveis

Em [4] C. Campana, P. Dattori e A. Meziani caracterizaram e apresentaram propriedades de soluções para uma classe de operadores localmente resolúveis e que deixam de ser elípticos precisamente em uma variedade 1-dimensional.

Neste capítulo, definiremos uma classe de operadores localmente resolúveis e que deixam de ser elípticos apenas na origem. Como em [4] caracterizaremos uma solução para essa classe de operadores, mostrando algumas propriedades dessa solução.

A última seção será destinada a apresentar um exemplo de um operador que satisfaz as hipóteses dadas na primeira seção, bem como, um método para determinar sua integral primeira.

Consideramos um campo de vetores complexo, suave, da forma

$$L = A(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + B(x,t)\frac{\partial}{\partial t} \tag{4.1}$$

definido em um subconjunto aberto $\Omega \in \mathbb{R}^2$. O conjunto onde L deixa de ser elíptico é dado por

$$\Sigma = \left\{p \in \Omega; \operatorname{Im}(A\overline{B})(p) = 0\right\},$$

o qual é igual ao conjunto dos $p \in \Omega$ onde $L(p)$ e $\overline{L}(p)$ são linearmente dependentes. A partir de agora, vamos nos referir a Σ como o conjunto característico de L.

4.1 Hipóteses sobre o operador

Definição 4.1.1. *O campo de vetores L é dito hipocomplexo em Ω se L satisfaz a condição $(\mathcal{P})$ e suas integrais primeiras são homeomorfismos.*

Dado $p \in \Omega$ sejam U uma vizinhança de p e $Z : U \to \mathbb{C}$ uma integral primeira de L, pelo Teorema 1.4.14 sabemos que podemos escrever Z da forma

$$Z(x,t) = x + i\phi(x,t), \tag{4.2}$$

com ϕ real, suave e satisfazendo $\phi(0,0) = 0$ e $d\phi(0,0) = 0$.

Vamos assumir que L satisfaça as seguintes condições:

(i) L é hipocomplexo em Ω;

(ii) o conjunto característico de L é apenas a origem;

(iii) L satisfaz a condição

$$|\phi(x,t)|^\sigma \leq C|\phi_t(x,t)|,$$

para alguma constante $C > 0$ e $\sigma \in (0,1)$. Isto é, L satisfaz uma condição do tipo de Lojasiewicz.

A condição de Lojasiewicz foi formulada em [15].

4.2 Lema técnico

Nesse capítulo precisaremos de um lema técnico, o qual foi demonstrado em [4] (ver página 4). Vamos nessa seção enunciá-lo e apresentar uma ideia de sua demonstração.

Lema 4.2.1. *Sejam $R > 0$, $0 < \sigma < 1$, $\gamma \in \mathbb{R}$ e $1 < \sigma < 2-\tau$. Então existe uma constante $M(q,\sigma) > 0$ tal que*

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{|\gamma + r\sin\theta|^\sigma r^{q-1}} \leq M(q,\sigma) R^{2-\sigma-q}.$$

Demonstração. Para provar o lema é suficiente considerar $\gamma \geq 0$. Se $\gamma = 0$, então

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{|\sin\theta|^\sigma r^{\sigma+q-1}} = \frac{R^{2-\sigma-q}}{2-\sigma-q} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{|\sin\theta|^\sigma} = C(\sigma)\frac{R^{2-\sigma-q}}{2-\sigma-q},$$

onde

$$C(\sigma) = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{|\sin\theta|^\sigma} < \infty,$$

pelo Teorema dos Resíduos.

Agora suponha que $\gamma > 0$. Seja $r = \rho\gamma$, temos

$$I = \gamma^{2-\sigma-q} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{R}{\gamma}} \frac{\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta}{|1+\rho\sin\theta|^\sigma \rho^{q-1}} \doteq \gamma^{2-\sigma-q} J. \tag{4.3}$$

Para estimar J consideramos dois casos: $0 < \gamma < R$ e $\gamma \geq R$. Assuma que $0 < \gamma < R$. Podemos escrever

$$J = \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{R}{\gamma}} \frac{\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta}{|1+\rho\sin\theta|^\sigma \rho^{q-1}} + \int_\pi^{2\pi} \int_0^{\frac{R}{\gamma}} \frac{\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta}{|1+\rho\sin\theta|^\sigma \rho^{q-1}} \doteq J_1 + J_2.$$

Para $\theta \in [0,\pi]$ temos $\sin\theta \geq 0$ e consequentemente $\rho\sin\theta + 1 \geq \rho\sin\theta$, $\rho \in [0, \frac{R}{\gamma}]$. Assim,

$$J_1 \leq \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{R}{\gamma}} \frac{\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta}{|\rho\sin\theta|^\sigma \rho^{q-1}} \leq \left(\frac{R}{\gamma}\right)^{2\sigma-q} \frac{C(\sigma)}{2-\sigma-q}.$$

Agora, para estimar J_2, seja $\pi < \theta_0 < \frac{3\pi}{2}$ tal que $-\sin\theta_0 = \frac{\gamma}{2R}$. Podemos escrever,

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_{\pi}^{\theta_0}\int_0^{\frac{R}{\gamma}} \frac{\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta}{|1+\rho\sin\theta|^{\sigma}\rho^{q-1}} + \int_{\theta_0}^{\frac{3\pi}{2}}\int_0^{\frac{R}{\gamma}} \frac{\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta}{|1+\rho\sin\theta|^{\sigma}\rho^{q-1}} \\ &\quad + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{3\pi-\theta_0}\int_0^{\frac{R}{\gamma}} \frac{\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta}{|1+\rho\sin\theta|^{\sigma}\rho^{q-1}} + \int_{3\pi-\theta_0}^{2\pi}\int_0^{\frac{R}{\gamma}} \frac{\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta}{|1+\rho\sin\theta|^{\sigma}\rho^{q-1}} \\ &\doteq J_{2,1} + J_{2,2} + J_{2,3} + J_{2,4}. \end{aligned}$$

Seja, $\varphi = -\theta + 3\pi$. Temos

$$J_{2,3} = \int_{\theta_0}^{\frac{3\pi}{2}}\int_0^{\frac{R}{\gamma}} \frac{\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi}{|1+\rho\sin(3\pi-\varphi)|^{\sigma}\rho^{q-1}} = \int_{\theta_0}^{\frac{3\pi}{2}}\int_0^{\frac{R}{\gamma}} \frac{\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi}{|1+\rho\sin\varphi|^{\sigma}\rho^{q-1}} = J_{2,2}$$

e

$$J_{2,4} = \int_{\pi}^{\theta_0}\int_0^{\frac{R}{\gamma}} \frac{\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi}{|1+\rho\sin\varphi|^{\sigma}\rho^{q-1}} = J_{2,1}.$$

Vamos assim, estimar $J_{2,1}$. Note que

$$0 \le -\sin\theta \le \frac{\gamma}{2R} < \frac{1}{2}, \text{ para } \theta \in [\pi, \theta_0].$$

Consequentemente, para $\theta \in [\pi, \theta_0]$ e $0 < \rho < \frac{R}{\gamma}$, temos

$$\rho|\sin\theta| < \frac{R}{\gamma}\frac{\gamma}{2R} = \frac{1}{2} < 1 + \rho\sin\theta.$$

Assim,

$$J_{2,1} \le \int_{\pi}^{\theta_0}\int_0^{\frac{R}{\gamma}} \frac{\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta}{\rho^{\sigma+q-1}|\sin\theta|^{\sigma}} \le \left(\frac{R}{\gamma}\right)^{2-\sigma-q} \frac{C(\sigma)}{4(2-\sigma-q}.$$

Agora, para $J_{2,2}$, seja $\varphi = \theta$ e $t = \rho \sin\theta + 1$ temos

$$\begin{aligned} J_{2,2} &= \int_{\theta_0}^{\frac{3\pi}{2}} \int_1^{\frac{R}{\gamma}\sin\varphi+1} \frac{1}{\sin\varphi} \frac{1}{|t|^\sigma \left(\frac{t-1}{\sin\varphi}\right)^{q-1}} \,\mathrm{dt}\,\mathrm{d}\varphi \\ &\leq \int_{\theta_0}^{\frac{3\pi}{2}} |\sin\varphi|^{q-2} \left(\int_{-\frac{R}{\gamma}}^1 \frac{1}{|t|^\sigma |t-1|^{q-1}} \,\mathrm{dt} \right) \mathrm{d}\varphi \\ &\leq \int_{\theta_0}^{\frac{3\pi}{2}} |\sin\varphi|^{q-2} \,\mathrm{d}\varphi \, \frac{1}{2-\sigma-q} \left(\frac{R}{\gamma}\right)^{2-\sigma-q} \\ &\leq C(q,\sigma) \left(\tfrac{R}{\gamma}\right)^{2-\sigma-q}, \end{aligned}$$

usamos aqui que

$$\int_{-\frac{R}{\gamma}}^1 \frac{\mathrm{dt}}{|t|^\sigma |t-1|^{q-1}} \leq \frac{1}{2-\sigma-q} \left(\frac{R}{\gamma}\right)^{2-\sigma-q}.$$

Assim, pelos cálculos anteriores, podemos encontrar uma constante $M_1(q,\sigma) > 0$ tal que

$$J \leq M_1(q,\sigma) \left(\frac{R}{\gamma}\right)^{2-q-\sigma}. \tag{4.4}$$

Suponha agora que $\gamma \geq R$. Neste caso, existe uma constante $M_2(q,\sigma)$ tal que

$$J = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{R}{\gamma}} \frac{\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta}{|\rho\sin\theta + 1|^\sigma \rho^{q-1}} \leq \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{R}{\gamma}} \frac{\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta}{|1-\rho|^\sigma \rho^{q-1}} \leq M_2(q,\sigma) \left(\frac{R}{\gamma}\right)^{2-\sigma-q}. \tag{4.5}$$

Portanto, de (4.3), (4.4) e (4.5) existe uma constante $M(q,\sigma) > 0$ tal que

$$I \leq M(q,\sigma) R^{2-\sigma-q}.$$

■

4.3 Operador integral

Sejam L como em (4.1), $p \in \Omega$, U vizinhança de p e Z como em (4.2). Suponha que L satisfaça as condições (i), (ii) e (iii). Sabemos que L é um múltiplo do hamiltoniano de Z, de fato, podemos assumir que em U, L tem a forma

$$L = Z_x \frac{\partial}{\partial t} - Z_t \frac{\partial}{\partial x}.$$

Nestas coordenadas o conjunto característico de L se escreve como

$$\begin{aligned} \Sigma &= \left\{(x,t) \in U; \operatorname{Im}\left(-Z_t(x,t)\overline{Z_x(x,t)}\right) = 0\right\} \\ &= \left\{(x,t) \in U; \operatorname{Im}\left(-i\phi_t(x,t)(1+\phi_x(x,t))\right) = 0\right\} \\ &= \left\{(x,t) \in U; \phi_t(x,t) = 0\right\}. \end{aligned}$$

Logo a propriedade (ii) implica que $\dfrac{\partial \phi}{\partial t}(x,t) \neq 0$ se $(x,t) \neq 0$.

Dada $f \in L^1(U)$ defina o operador integral

$$T_Z f(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_U \frac{f(\xi,\eta)}{Z(\xi,\eta) - Z(x,t)} \, \mathrm{d}\xi \, \mathrm{d}\eta \,. \tag{4.6}$$

Temos os seguintes resultados a respeito do operador T_Z:

Teorema 4.3.1. *Seja $f \in L^p(U)$, com $p > 1 + \dfrac{1}{1-\sigma}$. Então, existe uma constante $M(p,U) > 0$ tal que o operador T_Z satisfaz*

$$|T_Z f(x,t)| \leq M(p,U) \left\| f \right\|_p, \quad \forall (x,t) \in U.$$

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} |T_Z f(x,t)| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_U \frac{|f(\xi,\eta)|}{|Z(\xi,\eta)-Z(x,y)|}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta \\ &\leq \frac{\|f\|_p}{2\pi}\left(\int_U \frac{1}{|Z(\xi,\eta)-Z(x,y)|^q}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \frac{\|f\|_p}{2\pi} J^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

onde,

$$J = \int_U \frac{1}{|Z(\xi,\eta)-Z(x,y)|^q}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,.$$

Queremos estimar J. Para isso, seja $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B_\varepsilon} \subset U$, onde $B_\varepsilon = B(0,\varepsilon)$ e defina $U_\varepsilon = U \backslash B_\varepsilon$. Consideramos a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \varphi \;:\; & U_\varepsilon \longrightarrow Z(U_\epsilon) \\ & (\xi,\eta) \longmapsto (s,t) = (ReZ(\xi,\eta), \operatorname{Im} Z(\xi,\eta)) = (\xi,\phi(\xi,\eta)). \end{aligned}$$

Temos pela propriedade (ii) que,

$$|\det(J\varphi)(\xi,\eta)| = \left|\frac{\partial\phi}{\partial\eta}(\xi,\eta)\right| \neq 0 \text{ em } U_\varepsilon.$$

E como pela propriedade (i), Z é um homeomorfismo, segue que φ é uma mudança de variáveis. Além disso, pela propriedade (iii) segue que

$$|\det(J\varphi)(\xi,\eta)| = \left|\frac{\partial\phi}{\partial\eta}(\xi,\eta)\right| \geq \frac{1}{C}|\phi(\xi,\eta)|^\sigma = \frac{1}{C}|t|^\sigma.$$

Com isso, aplicando essa mudança de variáveis em $J_\varepsilon = \displaystyle\int_{U_\varepsilon} \frac{1}{|Z(\xi,\eta)-Z(x,y)|^q}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta$,

obtemos

$$\begin{aligned} J_\varepsilon &\leq C\int_{Z(U_\varepsilon)} \frac{1}{|s+it-Z|^q|t|^\sigma}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\ &\leq C\int_{D(Z,R)} \frac{1}{|s+it-Z|^q|t|^\sigma}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

onde $R>0$ é tal que $Z(U_\varepsilon)\subset D(Z,R)$ e $Z(x,t)=Z$.

Agora, por coordenadas polares consideramos $s=r\cos\theta+ReZ$ e $t=r\sin\theta+\operatorname{Im}Z$, assim

$$J_\varepsilon \leq C\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{|re^{i\theta}|^q|r\sin+\operatorname{Im}Z|^\sigma} = C\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{r^{q-1}|r\sin+ImZ|^\sigma} \leq M(q)R^{2-\sigma-q}.$$

A última desigualdade segue do Lema 4.2.1, observe que podemos aplicar o lema, pois $p>1+\frac{1}{1-\sigma}=\frac{2-\sigma}{1-\sigma}$ implica que

$$\frac{1-\sigma}{2-\sigma}+\frac{1}{q}>1 \Rightarrow \frac{1}{q}>1-\frac{1-\sigma}{2-\sigma} \Rightarrow \frac{1}{q}>\frac{1}{2-\sigma} \Rightarrow q<2-\sigma \Rightarrow 2-\sigma-q>0.$$

Para obtermos a estimativa para J, fazemos ε tender a zero e aplicamos o Teorema da Convergência Dominada. ∎

A partir de agora os próximos resultados seguem análogos aos demonstrados em [4].

Proposição 4.3.2. *Se $f\in L^1(U)$ então $T_Z\in L^q(U)$ para qualquer $1<q<2-\sigma$.*

Demonstração. Seja $f\in L^1(U)$ e seja $g\in L^p(U)$, com $p>1+\frac{1}{1-\sigma}$. Escreva

$$g_1(x,t)=\int_U \frac{|g(\xi,\eta)|}{|Z(\xi,\eta)-Z(x,t)|}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,.$$

Temos

$$g_1(x,t)\leq \|g\|_p\left(\int_U \frac{1}{|Z(\xi,\eta)-Z(x,t)|^q}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Analogamente ao feito no Teorema 4.3.1, segue que g_1 é limitada, assim $f\cdot g_1\in L^1(U)$.

Agora observe que,

$$\begin{aligned}\int_U |f(x,t)||g(x,t)|\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dt} &= \int_U |f(x,t)| \left(\int_U \frac{|g(\xi,\eta)|}{|Z(\xi,\eta)-Z(x,t)|}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta \right) \mathrm{dx}\,\mathrm{dt} \\ &= \int_U |g(\xi,\eta)| \left(\int_U \frac{|f(x,y)|}{|Z(x,t)-Z(\xi,\eta)|}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} \right) \mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta \\ &= \int_U |g(\xi,\eta)| f_1(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta,\end{aligned}$$

onde

$$f_1(\xi,\eta) = \int_U \frac{|f(x,y)|}{|Z(x,t)-Z(\xi,\eta)|}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\,.$$

Assim, como $f \cdot g_1 \in L^1(U)$ segue que $g \cdot L^1(U)$. Como $g \in L^p(U)$ é arbitrária segue da desigualdade de Holder inversa que $f_1 \in L^q(U)$, onde $q = \frac{1}{p-1}$. Assim, como $|Tf| \leq f_1$, temos que $Tf \in L^q(U)$, para todo $1 < q < 2 - \sigma$. ■

O próximo lema é consequência do Teorema de Green.

Lema 4.3.3. *Seja $w \in C(\overline{U}) \cap C^1(U)$. Então*

$$\int_U Lw\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dt} = -\int_{\partial U} w\,\mathrm{dZ}(x,t).$$

Aqui a forma $\mathrm{dZ}(x,t) = Z_x\,\mathrm{dx} + Z_t\,\mathrm{dt}$.

Demonstração. Temos

$$w\,\mathrm{dZ}(x,t) = w(Z_x\,\mathrm{dx} + Z_t\,\mathrm{dt}) = wZ_x\,\mathrm{dx} + wZ_t\,\mathrm{dt}\,.$$

Pelo Teorema de Green segue que

$$\begin{aligned}
\int_{\partial U} w\,\mathrm{dZ}(x,t) &= \int_{\partial U} (wZ_x)\,\mathrm{dx} + (wZ_t)\,\mathrm{dt} \\
&= \int_U \left(\frac{\partial (wZ_t)}{\partial x} - \frac{\partial (wZ_x)}{\partial t} \right) \mathrm{dx}\,\mathrm{dt} \\
&= \int_U \left(\frac{\partial w}{\partial x} Z_t + wZ_{tx} - \frac{\partial w}{\partial t} Z_x - wZ_{xt} \right) \mathrm{dx}\,\mathrm{dt} \\
&= \int_U \left(Z_t \frac{\partial w}{\partial x} - Z_x \frac{\partial w}{\partial t} \right) \mathrm{dx}\,\mathrm{dt} \\
&= -\int_U Lw\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dt}\,.
\end{aligned}$$

■

Proposição 4.3.4. *Seja $w \in C(\overline{U}) \cap C^1(U)$. Então, para todo $(x,t) \in U$, temos*

$$w(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{w(\alpha,\beta)}{Z(\alpha,\beta) - Z(x,t)}\,\mathrm{dZ}(\alpha,\beta) - \int_U \frac{Lw(\alpha,\beta)}{Z(\alpha,\beta) - Z(x,t)}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta\,.$$

Demonstração. Seja $(x_0,t_0) \in U$ fixo. Escrevemos $z_0 = Z(x_0,t_0)$ e seja $\varepsilon > 0$ tal que

$$\overline{B_\varepsilon} \subset Z(U) \text{ onde } B_\varepsilon = B(z_0,\varepsilon).$$

Defina $K_\varepsilon = Z^{-1}(B_\varepsilon)$ e $U_\varepsilon = U - K_\varepsilon$. Seja,

$$f(x,t) = \frac{w(x,t)}{Z(x,t) - z_0}.$$

Temos que $f \in C(\overline{U_\varepsilon}) \cap C^1(U_\varepsilon)$, pois $w \in C(\overline{U}) \cap C^1(U)$. Além disso,

$$\begin{aligned}\int_{U_\varepsilon} Lf(x,t)\,\mathrm{dx\,dt} &= \int_{U_\varepsilon}\left(Z_x(x,t)\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) - Z_t(x,t)\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right)\mathrm{dx\,dt}\\ &= \int_{U_\varepsilon}\left(Z_x(x,t)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{w(x,t)}{Z(x,t)-z_0}\right) - Z_t(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{w(x,t)}{Z(x,t)-z_0}\right)\right)\mathrm{dx\,dt}\\ &= \int_{U\varepsilon}\frac{Lw(x,t)}{Z(x,t)-z_0}\,\mathrm{dx\,dt}\end{aligned}$$

Assim, aplicando o Lema 4.3.3 à f obtemos

$$\begin{aligned}\int_{U\varepsilon}\frac{Lw(x,t)}{Z(x,t)-z_0}\,\mathrm{dx\,dt} &= -\int_{\partial U_\varepsilon}\frac{w(x,t)}{Z(x,t)-z_0}\,\mathrm{dZ}(x,t)\\ &= -\int_{\partial U}\frac{w(x,t)}{Z(x,t)-z_0}\,\mathrm{dZ}(x,t) + \int_{\partial K_\varepsilon}\frac{w(x,t)}{Z(x,t)-z_0}\,\mathrm{dZ}(x,t)\end{aligned}$$

Daí,

$$I_1 = -I_2 + I_3, \tag{4.7}$$

onde

$$I_1 = \int_{U\varepsilon}\frac{Lw(x,t)}{Z(x,t)-z_0}\,\mathrm{dx\,dt},\ \ I_2 = \int_{\partial U}\frac{w(x,t)}{Z(x,t)-z_0}\,\mathrm{dZ}(x,t),\ \ I_3 = \int_{\partial K_\varepsilon}\frac{w(x,t)}{Z(x,t)-z_0}\,\mathrm{dZ}(x,t).$$

Vamos agora analisar separadamente cada integral. Considerando $\zeta = Z(x,t)$ temos

$$I_3 = \int_{K_\varepsilon} f(x,t)\,\mathrm{dZ}(x,t) = \int_{Z(\partial K_\varepsilon)}(f\circ Z^{-1})(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \int_{\partial(B_\varepsilon)}\frac{\widetilde{w}(\zeta)}{\zeta - z_0}\,\mathrm{d}\zeta,$$

onde $\widetilde{w} = w\circ Z^{-1}$.

Agora por coordenadas polares, considerando $\zeta = \varepsilon e^{i\theta} + z_0$, $\theta\in[0,2\pi]$, temos

$$\int_{\partial(B_\varepsilon)}\frac{\widetilde{w}(\zeta)}{\zeta - z_0}\,\mathrm{d}\zeta = \int_0^{2\pi}\frac{\widetilde{w}(z_0+\varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta}} i\varepsilon e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta \to 2\pi i\widetilde{w}(z_0) = 2\pi i w\circ Z^{-1}(z_0) = 2\pi i w(x_0,t_0),$$

quando $\varepsilon \to 0$, esta convergência segue do Teorema da Convergência Dominada. Logo,

$$I_3 \to 2\pi i w(x_0, t_0), \text{ quando } \varepsilon \to 0. \tag{4.8}$$

Agora, vamos analisar I_1. Da prova do Teorema 4.3.1, temos

$$(x,t) \longmapsto \frac{1}{Z(x,t) - z_0} \in L^q(U) \subset L^1(U).$$

Assim,

$$I_1 = \int_{U_\varepsilon} \frac{Lw(x,t)}{Z(x,t) - z_0} \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dt} \to \int_U \frac{Lw(x,t)}{Z(x,t) - z_0} \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dt}, \tag{4.9}$$

quando $\varepsilon \to 0$ (novamente pelo Teorema da Convergência Dominada).

Portanto, fazendo $\varepsilon \to 0$ em (4.7) e aplicando (4.8) e (4.9) segue o resultado. ∎

Teorema 4.3.5. *Se $f \in L^1(U)$ então $T_Z f$ satisfaz $L(T_Z f) = f$ em U.*

Demonstração. Seja $f \in L^1(U)$. Pela Proposição 4.3.2, $T_Z f \in L^q(U)$, para $1 < q < 2-\sigma$. Assim, pela Proposição 4.3.4 temos, para $\phi \in C_c^\infty(U)$ (no sentido das distribuições), que

$$\begin{aligned}
\langle L(T_Z f), \phi \rangle &= \left\langle \left(Z_x \frac{\partial}{\partial t} - Z_t \frac{\partial}{\partial x} \right) (T_Z f), \phi \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(T_Z f), Z_x \phi \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial x}(T_Z f), Z_t \phi \right\rangle \\
&= -\left\langle T_Z f, \frac{\partial}{\partial t}(Z_x \phi) \right\rangle + \left\langle T_Z f, \frac{\partial}{\partial x}(Z_t \phi) \right\rangle \\
&= -\langle T_Z f, Z_x \phi_y + Z_{xt}\phi - Z_t \phi_x - Z_{tx}\phi \rangle \\
&= -\langle T_Z f, L\phi \rangle \\
&= -\int_U T_Z f(x,t) L\phi(x,t) \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dt} \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \int_U \left(\int_U \frac{f(\xi,\eta)}{Z(\xi,\eta) - Z(x,t)} \,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta \right) L\phi(x,t) \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dt}
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\langle L(T_Z f), \phi\rangle &= \int_U f(\xi,\eta)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_U \frac{L\phi(x,t)}{Z(x,t)-Z(\xi,\eta)}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dt}\right)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta \\ &= \int_U f(\xi,\eta)\left(\phi(\xi,\eta)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U}\frac{\phi(x,t)}{Z(x,t)-Z(\xi,\eta)}\,\mathrm{dZ}(x,t)\right)\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta \\ &= \int_U f(\xi,\eta)\phi(\xi,\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta = \langle f,\phi\rangle\,.\end{aligned}$$

Portanto, $L(T_Z f) = f$ em U. ∎

4.4 Operadores satisfazendo as hipóteses (i), (ii) e (iii) da Seção 1

4.4.1 Exemplo 1

Consideramos o seguinte campo de vetores complexo, suave, definido em uma vizinhança da origem Ω de $\mathbb{R}^2$

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + i(x^2+t^2)\frac{\partial}{\partial x}. \tag{4.10}$$

O operador L satisfaz as seguinte proriedades:

(i) L satisfaz a condição $(\mathcal{P})$;

(ii) o conjunto característico de L é $\Sigma = \{(0,0)\}$.

Para verificar se L satisfaz a condição (iii) dada na Seção 1, precisamos encontrar uma integral primeira para este operador.

Supondo que essa integral primeira é da forma

$$Z(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x)t^j, \tag{4.11}$$

com Z definida em uma vizinhança U da origem. Queremos determinar os coeficientes $a_j's$. Resolvendo formalmente $LZ = 0$ obtemos que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x)t^j\right) + i(x^2+t^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x)t^j\right) = 0.$$

Assim,

$$\sum_{j=1}^{\infty} j a_j(x)t^{j-1} = -i(x^2+t^2)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\partial a_j}{\partial x}(x)t^j.$$

Daí, considerando os operadores

$$\begin{cases} L_2 = x^2\dfrac{\partial}{\partial x}, \\ L_0 = \dfrac{\partial}{\partial x}, \end{cases}$$

assumindo que $a_0(x) = x$ e comparando o grau do polinômio em t, temos que

$$\begin{cases} a_0 = x \\ a_1 = -iL_2(a_0) \\ 2a_2 = -iL_2(a_1) \\ 3a_3 = -iL_2(a_2) - iL_0(a_0) \\ \vdots \\ ja_j = -iL_2(a_{j-1}) - iL_0(a_{j-3}), \quad j \geq 3 \\ \vdots \end{cases} \tag{4.12}$$

Considerando agora $b_j = j!a_j$ temos

$$\begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_1 = -iL_2(b_0) \\ b_2 = -iL_2(b_1) \\ b_3 = -iL_2(b_2) - i2L_0(b_0) \\ \vdots \\ b_j = -iL_2(b_{j-1}) - i(j-1)(j-2)L_0(b_{j-3}), \quad j \geq 3 \\ \vdots \end{cases} \tag{4.13}$$

Afirmação 4.4.1. *Por indução sobre j mostra-se que*

$$L_0 L_2^j(b_0) = (j+1)jL_2^{j-1}(b_0),$$

onde $b_0 = x$.

Utilizando a Afirmação 4.4.1 verifica-se para $j = 1, \ldots, 8$ que

$$\begin{cases} b_1 = (-i)L_2 b_0 \\ b_2 = (-i)^2(L_2)^2 b_0 \\ b_3 = (-i)^3(L_2)^3 b_0 - 2i \\ b_4 = (-i)^4(L_2)^4 b_0 + (-i)^2 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 b_0 \\ b_5 = (-i)^5(L_2)^5 b_0 + (-i)^3(3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2)L_2 b_0 \\ b_6 = (-i)^6(L_2)^6 b_0 + (-i)^4(3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3)(L_2)^2 b_0 \\ b_7 = (-i)^7(L_2)^7 b_0 + (-i)^5(3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 + \ldots + 6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4)(L_2)^3 b_0 + i(6 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1) \\ b_8 = (-i)^8(L_2)^8 b_0 + (-i)^6(3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 + \ldots 7 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5)(L_2)^4 b_0 + \\ +(7 \cdot 6)(3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2)(2.1)b_0. \end{cases} \tag{4.14}$$

Definimos as seguintes constantes, para $k \geq 1$ e $j \geq 0$

$$C_j^k = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad j \leq 4k-2 \\ (j-1)(j-2)C_{j-3}^{k-1}, & \text{se} \quad j = 4k-1 \\ (j-1)(j-2)C_{j-3}^{k-1}(j-4k+2)(j-4k+1), & \text{se} \quad j = 4k \\ (j-1)(j-2)C_{j-3}^{k-1}(j-4k+2)(j-4k+1) + C_{j-1}^k, & \text{se} \quad j > 4k \end{cases} \tag{4.15}$$

e para $k = 0$ e $j \geq 0$ definimos

$$C_j^0 = 1.$$

Afirmação 4.4.2. *Mostra-se por indução módulo 4 sobre j que*

$$b_j = (-i)^j \sum_{k=0}^{\left[\frac{j+1}{4}\right]} (-1)^k C_j^k (L_2)^{j-4k}(b_0), \tag{4.16}$$

onde os C_j^k são dados por (4.15). Estamos considerando aqui, por convenção, $(L_2)^{-1}(b_0) = 1$. Consequentemente,

$$a_j = \frac{(-i)^j}{j!} \sum_{k=0}^{\left[\frac{j+1}{4}\right]} (-1)^k C_j^k (L_2)^{j-4k}(a_0). \tag{4.17}$$

Demonstração.

Primeiro passo: Calcularemos $b_1, b_2, \ldots, b_8$.

j=1. Por (4.14) sabemos que $b_1 = -iL_2b_0$, por outro lado de (4.16) temos

$$b_1 = (-i) \sum_{k=0}^{\left[\frac{1+1}{4}\right]} (-1)^k C_1^k (L_2)^{1-4k}(b_0) = -i(-1)^0 C_1^0 (L_2)^1(b_0) = -iL_2b_0.$$

j=2. Por (4.14) sabemos que $b_2 = -(L_2)^2b_0$, já por (4.16) temos

$$b_2 = (-i)^2 \sum_{k=0}^{\left[\frac{2+1}{4}\right]} (-1)^k C_2^k (L_2)^{2-4k}(b_0) = -i(L_2)^2b_0.$$

j=3. Por (4.14) temos $b_3 = i(L_2)^3 b_0 - 2i$

$$\begin{aligned} b_3 = (-i)^3 \sum_{k=0}^{\left[\frac{3+1}{4}\right]} (-1)^k C_3^k (L_2)^{3-4k}(b_0) &= (-i)^3((-1)^0 C_3^0 (L_2)^3 b_0 + (-1) C_3^1 (L_2)^{-1} b_0 \\ &= i(L_2)^3 b_0 - 2i. \end{aligned}$$

j=4. Por (4.14) temos $b_4 = (L_2)^4 b_0 - 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 b_0$, já por (4.16) temos

$$b_4 = (-i)^4 \sum_{k=0}^{\left[\frac{4+1}{4}\right]} (-1)^k C_4^k (L_2)^{4-4k}(b_0) = (L_2)^4 - 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 b_0,$$

pois para C_4^1 temos $4k = 4 = j$ ($k = 1$ e $j = 4$) então por 4.15 segue que $C_4^1 = 3{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}1$.

j=5.

$$b_5 = (-i)^5 \sum_{k=0}^{\left[\frac{5+1}{4}\right]} (-1)^k C_5^k (L_2)^{5-4k}(b_0) = -i(L_2)^5 b_0 + i(4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1) L_2 b_0,$$

pois para C_5^1 temos $4k = 4 < j = 5$, assim por (4.15) segue que $C_5^1 = 4{\cdot}3{\cdot}3{\cdot}2{+}3{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}1$. O qual coincide com (4.14).

j=6.

$$b_6 = (-i)^6 \sum_{k=0}^{\left[\frac{6+1}{4}\right]} (-1)^k C_6^k (L_2)^{6-4k}(b_0) = -(L_2)^6 b_0 + (C_6^1)(L_2)^2 b_0,$$

para C_6^1 temos $4k = 4 < j = 6$, , assim por (4.15) segue que $C_6^1 = 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1$. O que coincide com (4.14).

j=7.

$$b_7 = (-i)^7 \sum_{k=0}^{\left[\frac{7+1}{4}\right]} (-1)^k C_7^k (L_2)^{7-4k}(b_0) = i(L_2)^7 b_0 - i(C_7^1)(L_2)^3 b_0 + iC_7^2,$$

para C_7^1 temos $4k = 4 < j = 7$, assim por (4.15) segue que $C_7^1 = 6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot$

$4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1$ e C_7^2 temos $4k - 1 = 7 = j$ então por (4.15) segue que $C_7^2 = 6 \cdot 5(3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1)$. O que coincide com (4.14).

j=8.

$$b_8 = (-i)^8 \sum_{k=0}^{\left[\frac{8+1}{4}\right]} (-1)^k C_8^k (L_2)^{8-4k}(b_0) = (L_2)^8 b_0 - (C_8^1)(L_2)^4 b_0 + C_8^2,$$

para C_8^1 temos $4k = 4 < j = 8$, assim por (4.15) segue que $C_8^1 = 7 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5 + 6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1$ e C_8^2 temos $4k = 8 = j$ então por (4.15) segue que $C_8^2 = 7 \cdot 6(4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1)(2 \cdot 1)$. O que coincide com (4.14).

Segundo passo: Suponhamos que vale a afirmação para j e vamos mostrar para $j + 1$. Temos 4 casos, onde $l \geq 1$ é um inteiro:

Caso 1: $j + 1 = 4l + 4$. Note que de (4.13) temos

$$b_{4l+4} = -iL_2(b_{4l+3}) - i(4l + 3)(4l + 2)L_0(b_{4l+1})$$

e ainda,

$$\left[\frac{j+1+1}{4}\right] = \left[\frac{4l+5}{4}\right] = l + 1,$$

$$\left[\frac{j+1}{4}\right] = \left[\frac{4l+4}{4}\right] = l + 1,$$

$$\left[\frac{j-2+1}{4}\right] = \left[\frac{4l+2}{4}\right] = l.$$

Com isso, utilizando a hipótese de indução para calcular b_{4l+3} e b_{4l+1}, e a Afirmação 4.4.1,

obtemos

$$\begin{aligned}
b_{4l+4} &= -iL_2\left[(-i)^{4l+3}\sum_{k=0}^{l+1}(-1)^k C_{4l+3}^k (L_2)^{4l+3-4k}(b_0)\right] \\
&\quad -i(4l+3)(4l+2)L_0\left[(-i)^{4l+1}\sum_{k=0}^{l}(-1)^k C_{4l+1}^k (L_2)^{4l+1-4k}(b_0)\right] \\
&= (-i)^{4l+4}\sum_{k=0}^{l+1}(-1)^k C_{4l+3}^k (L_2)^{4l+4-4k}(b_0) \\
&\quad +(-i)^{4l+2}(4l+3)(4l+2)\sum_{k=0}^{l}(-1)^k C_{4l+1}^k (4l+2-4k)(4l+1-4k)(L_2)^{4l-4k}(b_0) \\
&= (-i)^{4l+4}\sum_{k=0}^{l+1}(-1)^k C_{4l+3}^k (L_2)^{4l+4-4k}(b_0) \\
&\quad +(-i)^{4l+2}(4l+3)(4l+2)\sum_{k=1}^{l+1}(-1)^{k-1} C_{4l+1}^{k-1} (4l+6-4k)(4l+5-4k)(L_2)^{4l-4k+4}(b_0) \\
&= (-i)^{4l+4}\sum_{k=0}^{l+1}(-1)^k C_{4l+3}^k (L_2)^{4l+4-4k}(b_0) \\
&\quad +(-i)^{4l+4}\sum_{k=1}^{l+1}(-1)^{k-1}(C_{4l+4}^k - C_{4l+3}^k)(L_2)^{4l-4k+4}(b_0)
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
b_{4l+4} &= (-i)^{4l+4}\sum_{k=1}^{l+1}(-1)^k C_{4l+4}^k (L_2)^{4l+4-4k}(b_0) + (-i)^{4l+4} C_{4l+3}^0 (L_2)^{4l+4} b_0 \\
&= (-i)^{4l+4}\sum_{k=0}^{l+1}(-1)^k C_{4l+4}^k (L_2)^{4l+4-4k}(b_0) \\
&= (-i)^{4l+4}\sum_{k=0}^{\left[\frac{4l+4+1}{4}\right]}(-1)^k C_{4l+4}^k (L_2)^{4l+4-4k}(b_0) \\
&= (-i)^{j+1}\sum_{k=0}^{\left[\frac{j+1}{4}\right]}(-1)^k C_{j+1}^k (L_2)^{j+1-4k}(b_0).
\end{aligned}$$

Os demais casos ($j+1 = 4l+3$, $j+1 = 4l+2$, $j+1 = 4l+1$) seguem análogos, utilizando as mesmas ideias nas demonstrações. ■

Agora utilizando que

$$(L_2)^k(a_0) = k!x^{k+1}, k \in \mathbb{N}, \quad a_0 = x,$$

podemos escrever os $a_j's$ da seguinte maneira

$$a_j = \frac{(-i)^j}{j!} \sum_{k=0}^{\left[\frac{j+1}{4}\right]} (-1)^k C_j^k (j-4k)! x^{j-4k+1} \tag{4.18}$$

e com isso,

$$Z(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{(-i)^j}{j!} \sum_{k=0}^{\left[\frac{j+1}{4}\right]} (-1)^k C_j^k (j-4k)! x^{j-4k+1} \right] t^j. \tag{4.19}$$

Assim, temos a seguinte

Proposição 4.4.3. *Se L é dado por (4.10) então Z dada por (4.19), com os coeficientes $a_j's$ dados por (4.18), é uma integral primeira de L.*

Demonstração. É suficiente mostrar que a série formal dada por (4.19) converge. Tal convergência segue do fato do campo ser real analítico e a variedade $\{t = 0\}$ não-caracteristica, logo a demonstração do teorema de Cauchy-Kowalevski, nos permite concluir que a série de potências lá obtida converge absolutamente. Consequentemente, como a_j's são polinômios segue a convergência para a Z. ■

Observação 4.4.4. *O fato da Z obtida nesta subseção satisfazer a propriedade (iii) será justificado na próxima subseção.*

Na busca para uma forma normal, do ponto de vista operacional seria interessante termos uma expressão fechada para Z, na próxima subseção apresentaremos um exemplo

nestas condições.

4.4.2 Exemplo 2

Em (4.19) obtemos uma integral primeira do operador dado em (4.10) que tem a seguinte expressão

$$Z(x,t) = x - ix^2t - x^3t^2 + ix^4t^3 - \frac{1}{3}it^3 + \dots.$$

Consideramos a função suave,

$$\tilde{Z}(x,t) = x - i(x^2t + \frac{1}{3}t^3) = x - i\phi(x,t), \tag{4.20}$$

onde $\phi(x,t) = x^2t + \frac{1}{3}t^3$, a qual foi obtida de Z, retirando todos os termos de ordem maior ou igual a 4. Temos que, em uma vizinhança U da origem $\tilde{Z}$ é uma integral primeira do operador hamiltoniano

$$\tilde{L} = \tilde{Z}_x\frac{\partial}{\partial t} - \tilde{Z}_t\frac{\partial}{\partial x}. \tag{4.21}$$

Observação 4.4.5. *$\tilde{Z}$ é um homeomorfismo de U em $\tilde{Z}(U)$.*

Demonstração. De fato, sejam (x_1,t_1) e (x_2,t_2) em U tais que $\tilde{Z}(x_1,t_1) = \tilde{Z}(x_2,t_2)$ assim

$$x_1 - i(x_1^2t_1 + \frac{1}{3}t_1^3) = x_2 - i(x_2^2t_2 + \frac{1}{3}t_2^3)$$

então

$$x_1 = x_2 \text{ e } x_1^2t_1 + \frac{1}{3}t_1^3 = x_2^2t_2 + \frac{1}{3}t_2^3,$$

assim

$$t_1(x_1^2 + \frac{1}{3}t_1^2) = t_2(x_1^2 + \frac{1}{3}t_2^2).$$

Como $x_1^2 \geq 0$ temos que a equação do terceiro grau acima possui única solução, ou seja,

$t_1 = t_2$. ∎

Podemos verificar que $\tilde{L}$ é múltiplo do operador

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\tilde{Z}_t}{\tilde{Z}_x}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial t} + \frac{i\phi_t}{1 - i\phi_x}\frac{\partial}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} + \frac{i(x^2+t^2)}{1-2ixt}\frac{\partial}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} + \frac{i(x^2+t^2)(1+2ixt)}{1+4x^2t^2}\frac{\partial}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} + i(x^2+t^2)\lambda(x,t)\frac{\partial}{\partial x},\end{aligned}$$

onde $\lambda(x,t) = \frac{1+2ixt}{1+4x^2t^2}$ e $\lambda(0,0) \neq 0$.

Isso mostra que o operador $\tilde{L}$ dado em (4.21) verifica propriedades análogas as do operador L dado em (4.10). Isto é, satisfaz a condição $(\mathcal{P})$, pois $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$ e o conjunto característico é apenas a origem. De fato,

$$\begin{aligned}\Sigma = \left\{(x,t) \in U; \operatorname{Im}\left(-Z_t\bar{Z}_x\right) = 0\right\} &= \left\{(x,t) \in U; \operatorname{Im}\left(i\phi_t(1+i\phi_x)\right)(x,t) = 0\right\} \\ &= \left\{(x,t) \in U; \phi_t(x,t) = 0\right\} \\ &= \left\{(x,t) \in U; x^2+t^2 = 0\right\}.\end{aligned}$$

Além disso, sua integral primeira $\widetilde{Z}$ é explicita o suficiente para verificarmos a condição (iii). Ou seja, podemos mostrar a seguinte observação sobre a parte imaginária de $\widetilde{Z}$:

Observação 4.4.6. *A função ϕ é tal que $|\phi(x,t)|^{\frac{2}{3}} \leq |\phi_t(x,t)|$.*

Demonstração. De fato, mostraremos essa afirmação por coordenadas polares. Considere $x = r\cos\theta$ e $t = r\sin\theta$, assim,

$$\phi_t(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^2$$

e

$$\phi(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^2\cos^2\theta r\sin\theta + \frac{1}{3}r^3\sin^3\theta = r^3\sin\left(1 - \frac{2}{3}\sin^2\theta\right).$$

Então,

$$|\phi(r,\theta)|^{\frac{2}{3}} = \left|r^3\sin(1 - \frac{2}{3}\sin^2\theta\right|^{\frac{2}{3}} = r^2\left|\sin(1 - \frac{2}{3}\sin^2\theta)\right| \leq r^2 = |\phi_t(r,\theta)|.$$

■

Observação 4.4.7. *Consequentemente a integral primeira Z obtida na subseção passada verifica também condição (iii), pois estamos analisando em uma vizinhança suficientemente pequena da origem.*

Portanto, temos que o operador $\tilde{L}$ dado em (4.21) verifica as seguintes três afirmações:

(i) $\tilde{L}$ é hipocomplexo;

(ii) o conjunto característico de $\tilde{L}$ é apenas a origem;

(iii) $\tilde{L}$ satisfaz a condição

$$|\phi(x,t)|^\sigma \leq C|\phi_t(x,t)|,$$

com $\sigma = \frac{2}{3}$ e $C = 1$.

Assim, como o operador $\tilde{L}$ satisfaz as hipóteses (i), (ii) e (iii) dadas na seção 1, temos pela Seção 3 que dada $f \in L^1(U)$, a função

$$T_z f(x,y) = \frac{1}{2\pi i}\int_U \frac{f(\xi,\eta)}{Z(\xi,\eta) - Z(x,t)}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta,$$

onde $Z(x,t) = x - i(x^2t + \frac{1}{3}t^3)$ é tal que $T_Z f \in L^q(U)$, com $1 < q < 2 - \sigma = \frac{4}{3}$ e satisfaz

$$\tilde{L}(T_z f) = f \text{ em } U.$$

Referências Bibliográficas

[1] M.S. Baouendi, C.H. Chang and F. Treves, Microlocal Hypo-Analytic and Extension of CR Functions, J. Differential Geom. 18, 1983, 331-391.

[2] M. S. Baouendi and F. Treves, A local constancy principle for the solutions of certain overdetermined systems of first-order linear partial differential equations, Advances in Mathematics Supplementary Studies, Vol 7A in honor of L. Schwartz, Academic Press, New York, 1981, 245-262.

[3] S. Berhanu, P. D. Cordaro and J. Hounie, An introduction to involutive structures, New mathematical monographs, University Press, 2008.

[4] C. Campana, P. Dattori and A. Meziani, Properties of solutions of a class of hypocomplex vector fields, *arXiv*:1511.02098v1 [math.AP] 6 Nov 2015.

[5] P. D. Cordaro, Resolubilidade das Equações Diferenciais Parciais Lineares, Matemática Universitária, 14, 1992, 51-67.

[6] P. D. Cordaro, Sistemas de Campos Vetoriais Complexos, Instituto de matemática pura e aplicada, 1986.

[7] L. Garding and B. Malgrange, Opérateurs différentiels partiellement hypoelliptiques et partiellement elliptiques, Math Scand, 9, 1961, 5-21.

[8] V.Grushin, A differential Equation without a solution, Mathematical Notes, 10:2, 1971, 499-501.

[9] N. Hanges, Almost Mizohata Operators, Transactions of the American Mathematical Society, 2, 1986, 663-675.

[10] L. Hörmander, Differential equations without solutions, Math. Ann., 140, 1960, 169-173.

[11] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators - Vol I, Springer-Verlag, 1989.

[12] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators - Vol II, Springer-Verlag, 1983.

[13] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators - Vol III, Springer-Verlag, 1994.

[14] H. Lewy, An example of a smoth linear partial differential equation without solution, Ann. of Math., 66 (1957), 155-158.

[15] S. Lojasiewicz, Sur le problème de la division, Studia Mathematica, T. XVIII, 1959, 86-135.

[16] S. Mizohata, Une remarque sur les opérateurs différentiels hypoelliptiques et partiellement hypoelliptiques, J. Math. Kyoto Univ., 1-3 (1962), 411-423.

[17] H. Ninomiya, A necessary and sufficient condition of local integrability, J. Math Kyoto Univ.,39-4, 1999, 685-696.

[18] L. Nirenberg and F. Treves, On local solvability of linear partial differential equations, I. Necessary conditions, II. Sufficient conditions, Comm. Pure Appl. Math, 23, 1970, 1-38, 23, 1970, 459-510; 24, 1971. 279-288.

[19] L. Nirenberg and F. Treves, Solvability of a order linear partial differential equation, Comm. Pure Appl. Math, 16, 1963, 123-138.

[20] F. Treves, Remarks about certain first order linear PDE in two variables, Comm. Partial Differential Equations, 5, 1980, 381-425.

[21] J. Sjöstrand, Note on a paper of F. Treves concerning Mizohata type operators, Duke Math. Journal, 47, 1980, 601-608.

[22] M. Yamamoto, On partially hypoelliptic operators, Osaka Math. J., 15, 1963, 233-247.