UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Um Teorema de Existência de Ondas Viajantes Periódicas para as Equações BBM-Burgers e KdVB e um Teorema de Unicidade para a Equação de Kawahara

Marcos Alves de Farias

São Carlos - SP
Maio de 2015

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária/UFSCar

F224te

Marcos, Alves de Farias.
Um teorema de existência de ondas viajantes periódicas para as Equações BBM-Burgers e KdVB e um teorema de unicidade para a Equação de Kawahara / Marcos Alves de Farias. -- São Carlos : UFSCar, 2015.
81 f.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2015.

1. Matemática. 2. Funções. 3. Equações. I. Título.

CDD: 510 (20ª)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Um Teorema de Existência de Ondas Viajantes Periódicas para as Equações BBM-Burgers e KdVB e um Teorema de Unicidade para a Equação de Kawahara

Marcos Alves de Farias
Orientador: Prof. Dr. José Ruidival dos Santos Filho
Coorientador: Prof. Dr. Cezar Issao Kondo

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos, como parte dos requisitos para a obtenção do título de doutor em Matemática.

São Carlos - SP
Maio de 2015

A todos os professores que tive.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente as pessoas mais importantes da minha vida, meus pais, Carlos e Dionisia.

Ao meu orientador Prof. Dr. José Ruidival dos Santos Filho, por ter me dado a oportunidade de trabalharmos juntos e por toda atenção, paciência e competência com que me orientou desde o mestrado.

Ao meu Co-orientador Prof. Dr. Cezar Issao Kondo, por ter acreditado em mim, também agradeço por toda atenção, paciência e competência com que me orientou neste doutorado.

A toda minha família pelo apoio e carinho com que sempre me receberam.

Ao programa de Pós-Graduação em matemática e a todos os professores do Departamento de Matemática da UFSCar.

Aos meus amigos do Dm.

Aos meus amigos da academia, com quem treino jiu jitsu desde 2005, Phelipe, Everton, Everson, Julião, Marcelo, Romeu e ao grande sensei Romeuzão.

A Loretta, pelo companheirismo desses últimos dois anos.

A todos os professores que tive em minha vida.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho estudamos dois problemas distintos. No primeiro problema usamos o método da função de Green e uma versão do teorema do ponto fixo de Schauder para obter alguns resultados de existência de onda viajante periódica para modelos não homogêneos de versões generalizadas da equações BBM-Burgers e KdVB. Provamos que, se a velocidade de propagação da onda viajante é escolhida de forma apropriada, então estas equações admitirão onda viajante periódica.

No segundo problema utilizamos um método desenvolvido por Escauriaza, Kenig, Ponce e Vega, para estudar as equações Schrödinger e KdV, e obtemos um resultado de decaimento para uma versão generalizada da equação de Kawahara. Provamos que, sob certas condições, se uma solução desta versão generalizada da equação de Kawahara possui um certo decaimento exponencial, então essa solução é nula.

Abstract

In this work we study two distinct problems. In the first problem we use the Green's function method and a version of the Schauder's fixed point theorem to get some existence results on periodic traveling wave solution for non-homogeneous models of generalized versions of the BBM-Burgers and KdVB equations. We prove that, if the speed of the wave propagation is suitable chosen, then those two equations will admit periodic traveling wave solution.

In the second problem we used a method developed by Escauriaza, Kenig, Ponce and Vega, to study the Schrödinger and KdV equations, and we obtain a result of decay to a generalized version of the Kawahara equation. We prove that, under certain conditions, if a solution of the Kawahara equation studied has a suitable exponential decay, then this solution is zero.

Sumário

Introdução **1**

1 Preliminares **6**

1.1 Alguns Resultados de Análise Matemática 6

1.2 Método da Função de Green 7

1.3 Espaços de Sobolev 15

2 Onda Viajante **17**

2.1 Formulação Integral para o Problema BBM 17

2.2 Formulação Integral para o Problema KdVB 28

2.3 Existência de Ondas Viajantes Periódicas 33

3 Equação de Kawahara **41**

3.1 Linearização do Problema 43

3.2 O Comutador $[\mathcal{S}, \mathcal{A}]$ 45

3.3 Estimativas e Propriedades das Soluções 63

3.4 Demonstração do Teorema 3.0.5 68

3.5 Apêndice 72

Referências Bibliográficas **78**

Lista de Símbolos

$C_{2T} = \{u : [0, 2T] \to \mathbb{R}; u \text{ é contínua e } u(0) = u(2T)\}$;

$C^k(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u \text{ é continuamente } k \text{ vezes diferenciável}\}$;

$C^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; u \text{ é infinitamente diferenciável}\}$;

$C_b^k(\Omega) = \left\{u \in C^k(\Omega); \partial^\alpha u \text{ é limitada}, \forall |\alpha| \leq k\right\}$;

$C_b^\infty(\Omega) = \left\{u \in C^\infty(\Omega); \partial^\alpha u \text{ é limitada}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^d\right\}$;

$C_0^k(\Omega) = \left\{u \in C^k(\Omega); \partial^\alpha u \text{ se anula no infinito}, \forall |\alpha| \leq k\right\}$;

$C_0^\infty(\Omega) = \left\{u \in C^\infty(\Omega); \partial^\alpha u \text{ se anula no infinito}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^d\right\}$;

$C_c^k(\Omega) = \left\{u \in C^k(\Omega); \text{supp}(u) \text{ é compacto}\right\}$;

$C_c^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega); \text{supp}(u) \text{ é compacto}\}$;

$L^2(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R}; u \text{ é mensurável e } \|u\|_{L^2(\Omega)} = \left[\int_\Omega u(x)^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} < \infty\right\}$;

$L^2_{loc}(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R}; u \text{ é mensurável e } \int_K u(x)^2 dx < \infty, \forall K \subset \Omega \text{ compacto}\right\}$;

$\mathcal{D}'(\Omega)$ representa o espaço das distribuições definidas em Ω;

$H^s(\Omega)$ representa o espaço de Sobolev, em $L^2(\Omega)$, de índice s;

$\widehat{u}$ representa a transformada de Fourier de u com relação a variável espacial x;

$[P_1, P_2] = P_1P_2 - P_2P_1$;

δ_{x_0} representa a distribuição delta de Dirac concentrada no ponto x_0;

T_f representa a distribuição definida por uma função f localmente integrável.

Introdução

As equações que modelam o movimento de ondas em meios dispersivos, lineares e não lineares, têm suas origens na descoberta de uma onda solitária por John Scott Russel, em [33]. Por volta de 1834 ele observou ondas criadas na superfície da água em um canal, que propagavam de forma constante e sem mudar de forma. Após esta descoberta, Russell construiu um tanque de ondas e fez experimentos para fabricar ondas solitárias em série, obtendo importantes observações das propriedades destas ondas. Em seus experimentos, Russell foi capaz de deduzir empiricamente que o volume de água na onda é igual ao volume de água deslocado e, além disso, que a velocidade c da onda solitária satisfaz a relação

$$c^2 = g(h + a),$$

onde a representa a amplitude da onda, h a profundidade da água não perturbada e g a aceleração da gravidade.

Os experimentos de Russell foram confirmados de forma independente por J. Boussinesq em 1871, veja [8], e por Lord Rayleigh em 1876, veja [32]. Eles consideraram em seus estudos que a onda solitária possui uma escala de comprimento muito maior do que a profundidade da água. Eles deduziram, a partir das equações de movimento para um líquido viscoso incompressível, a fórmula de Russell para c. Eles também mostraram que o contorno da onda de Russell $v(t, x)$ é dado por

$$v(t, x) = a\text{sech}^2[\beta(x - ct)], \tag{1}$$

onde $\beta^2 = \frac{3a}{4h^2(h+a)}$. Embora Boussinesq e Lord Rayleigh tenham encontrado a solução sech^2, eles não escreveram qualquer equação que admitisse (1) como solução. Entretanto,

Boussinesq em 1872, veja [9], foi mais além e descobriu que se uma onda de água de grande comprimento se propaga, sem ser perturbada, ao longo de um canal de fundo plano e profundidade h tem uma amplitude pequena em comparação com h, então a elevação η da superfície da onda considerada como uma função em x, cuja coodenada representa a sua posição no canal, e em t, representando o tempo, satisfará, aproximadamente, a equação não linear

$$\eta_{tt} - gh\eta_{xx} - gh\left(\frac{3}{2h}\eta^2 + \frac{h^2}{3}\eta_{xx}\right)_{xx} = 0,$$

onde g representa a aceleração da gravidade. Esta equação é conhecida como a equação de Boussinesq. Usando esta equação, ele obteve uma representação explícita da onda solitária em ambas as direções, positiva e negativa, cuja formulação é dada por

$$\eta(t,x) = a\text{sech}^2[\sqrt{\frac{3a}{h^3}}(x \pm ct)].$$

Em 1895 D. J. Korteweg e G. de Vries, em [29], fizeram a formulação matemática definitiva do problema da onda solitária observada por Russel. Eles utilizaram a equação de Navier-Stokes, de dinâmica dos fluidos, e consideraram uma expansão perturbativa para a propagação de uma onda do tipo fabricada por Russel e obtiveram com isso a equação para a propagação de ondas que hoje conhecemos por KdV. A forma original da equação do artigo é

$$\eta_t = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\left(\frac{1}{2}\eta^2 + \frac{2}{3}\alpha\eta + \frac{1}{3}\sigma\eta_{xx}\right)_x,$$

onde η é a elevação da superficie do líquido sobre o seu nível de equilíbrio l, α é uma constante relacionada ao movimento uniforme do líquido, g representa a aceleração da gravidade e $\sigma = \frac{1}{3}l^3 - \frac{Tl}{\rho g}$ a constante relacionada às forças capilares de tensão T na superficie do líquido de densidade ρ.

A equação KdV é uma das mais importantes equações da teoria de sistemas integráveis. Além disso, ela é uma equação com grandes características de universalidade, ou seja, aparece em muitos contexto distintos. Estas várias aplicações da KdV se devem ao fato dela ser uma das equações mais elementares que inclui efeitos não-lineares e dispersivos.

O sistema de equações

$$\begin{cases} u_t + [(1+\alpha u)w]_x - \frac{\beta}{6} w_{xxx} = 0, \\ u_x + w_t + \alpha w w_x - \frac{\beta}{2} w_{xxt} = 0, \end{cases} \tag{2}$$

descreve a propagação unilateral das ondas dispersivas na superfície de um líquido e foi originado por Boussinesq. Sua dedução pode ser encontrada em [4] e [6]. Fisicamente, as variáveis redimensionadas u e w estão relacionadas a amplitude e comprimento de onda, respectivamente. A fim de obter um modelo matemático mais relevante em termos de α e β e ao mesmo tempo mantendo a propagação em um único sentido, considerou-se algumas mudanças de variáveis em (2) e obteve-se duas equações que modelam a propagação unidimensional de ondas longas com baixa amplitude, a saber

$$\begin{cases} u_t + u_x + \frac{3}{2}\alpha u u_x + \frac{\beta}{6} u_{xxx} = 0, \\ u_t + u_x + \frac{3}{2}\alpha u u_x - \frac{\beta}{6} u_{xxt} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

A primeira das equações é a famosa equação de Korteweg-de Vries, a KdV, e a segunda é a BBM, em homenagem aos matemáticos Benjamim, Bona e Mahony, veja [5]. Estas equações, e suas variações, ao longo dos anos tem se mostrado de grande utilidade na modelagem de diversos fenômenos físicos. Contudo, há situações, como as descritas em [7], [16], [22] e [23], em que um termo de dissipação ϵu_{xx} deve ser introduzido nestas equações, para que se obtenha uma modelagem mais precisa dos fenômenos. A introdução deste termo nas equações KdV e BBM geram as equações, que estudaremos mais adiante neste trabalho, KdVB

$$u_t + u_x + \frac{3}{2}\alpha u u_x - \epsilon u_{xx} + \frac{\beta}{6} u_{xxx} = 0,$$

e BBM-Burgers

$$u_t + u_x + \frac{3}{2}\alpha u u_x - \epsilon u_{xx} - \frac{\beta}{6} u_{xxt} = 0.$$

Em 1972, Takuji Kawahara, em [25], generalizou a equação KdV, e obteve a denominada equação de Kawahara ou equação KdV de quinta ordem. Equações diferenciais dispersivas de quinta ordem descrevem a propagação de ondas de pequenas amplitudes em uma dimensão. Muitos dos problemas relacionados a fluidos e física de plasmas são, em geral,

formulações físicas que são representadas por equações do tipo Kawahara. A equação de Kawahara é dada por

$$u_t + \frac{3}{2}uu_x + \alpha u_x + \beta u_{xxx} - \gamma u_{xxxxx} = 0.$$

Tal equação difere da KdV, por possuir um termo a mais, a derivada de quinta ordem. Uma, dentre muitas, das formulações da equação de Kawahara foi desenvolvida através do modelo que estuda ondas de gravidade capilar em um canal de comprimento longo e de fundo plano, veja em [20] e [34].

Neste trabalho abordamos dois problemas de origens distintas. No primeiro problema, tratado no Capítulo 2, obtemos alguns resultados de existência de onda viajante periódica para versões generalizadas e não homogêneas das equações BBM-Burgers e KdVB. Este resultado é interessante, uma vez que em geral, para uma equação arbitrária, não há garantias de existência de onda viajante, mais ainda, quando se tem uma teoria que garanta a existência, geralmente não é fácil exibir uma fórmula explícita para ela. Liu Bao-Ping e C.V. Pao, em [30], utilizando o método da função de Green construíram uma equação integral capaz de produzir ondas viajantes periódicas para a equação

$$u_t + (f_0(u))_x + \delta u_{xxx} = h_0(x - \beta t), \tag{4}$$

sob as condições: δ, $\beta > 0$ constantes, $f_0 \in C^1(\mathbb{R})$ e $h_0 \in C(\mathbb{R})$ uma função não identicamente nula, $2T$-periódica para algum $T > 0$ com a propriedade

$$\int_0^{2T} h_0(x)dx = 0.$$

Utilizando a formulação integral que eles obtiveram, foi possível provar que escolhendo de forma apropriada a velocidade de propagação da onda, é possível garantir a existência de onda viajante periódica para a equação (4) e ainda controlar a amplitude desta onda. O que pretendemos fazer aqui é utilizar as funções de Green para estender este resultado para as equações BBM-Burgers e KdVB. Outros trabalhos envolvendo as funções de Green para a obtenção de ondas viajantes periódicas podem ser encontrados em [11], [12] e [31]. O segundo problema que abordamos nesta tese, se encontra no Capítulo 3. Neste capítulo, utilizamos uma técnica proposta por Escauriaza, Kenig, Ponce e Vega, veja [14] e [26],

para provar um resultado de decaimento de solução para uma versão generalizada da equação de Kawahara.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e alguns resultados elementares que utilizaremos ao longo deste trabalho. Vamos ser bem sucintos uma vez que tal capítulo é, basicamente, um apanhado de informações que tem por objetivo fornecer uma consulta rápida, sobre fatos e definições que serão utilizados nos capítulos seguintes. Na Seção 1.1, apresentamos alguns resultados conhecidos de análise matemática que serão necessários para o desenvolvimento do Capítulo 2. Na Seção 1.2, introduziremos o conceito de função de Green na medida que utilizaremos no Capítulo 2. Para um estudo mais aprofundado destas funções, indicamos [13] e [37]. Visando o Capítulo 3, os espaços de Sobolev modelados em L^2 e algumas propriedades serão abordadas na Seção 1.3. Observamos que nem todas as definições e resultados que são utilizados nos capítulos subsequentes estão aqui apresentados, por exemplo, as definições de distribuição e de transformada de Fourier, além de alguns fatos básicos de cálculo, são usados sem qualquer menção. Além disso, também observamos que, a menos que se diga o contrário, todas as funções e espaços utilizados neste trabalho são reais.

1.1 Alguns Resultados de Análise Matemática

Apresentaremos aqui alguns resultados conhecidos de análise matemática, que serão utilizados no capítulo seguinte. O primeiro resultado que iremos citar será sobre a teoria

das distribuições e pode ser encontrado em [19].

Teorema 1.1.1 *Seja $X \subset \mathbb{R}$ um subconjunto aberto. Para $f \in C(X)$, se $u \in \mathcal{D}'(X)$ satisfaz*

$$\frac{d^k u}{dx^k} + a_{k-1}\frac{d^{k-1}u}{dx^{k-1}} + \ldots + a_0 u = f, \quad em \quad \mathcal{D}'(X),$$

onde os coeficientes $a_j \in C^\infty(X)$, então $u \in C^k(X)$ e a equação é satisfeita no sentido clássico.

O próximo resultado a ser enunciado, uma versão do famoso Teorema de Arzelá-Ascoli, pode ser encontrado em [15].

Teorema 1.1.2 *Seja X um espaço compacto de Haursdorff. Se $\mathcal{F} \subset C(X)$ é equicontínua e pontualmente limitada, então $\mathcal{F}$ é totalmente limitada na métrica uniforme e o fecho de $\mathcal{F}$ em $C(X)$ é compacto.*

Concluímos esta seção enunciando uma versão do teorema do ponto fixo de Schauder, veja em [35].

Teorema 1.1.3 *Seja $\mathcal{M}$ um subconjunto não vazio e convexo de um espaço normado $\mathcal{N}$. Se T é uma aplicação contínua de $\mathcal{M}$ num subconjunto compacto $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$, então T admite ponto fixo em $\mathcal{K}$.*

1.2 Método da Função de Green

Num estudo a respeito do fenômeno da condução elétrica, George Green, em [17], examinou soluções da equação diferencial parcial

$$\nabla^2 u = -f, \tag{1.1}$$

no interior de um certo volume V com fronteira S. Na notação moderna, pode-se dizer que Green abordou este problema examinando a equação

$$\nabla^2 g(r, r_0) = -4\pi\delta_{r_0}, \tag{1.2}$$

onde δ_{r_0} denota a distribuição delta de Dirac concentrada em r_0. Para o caso em que f se anula em V, como solução para (1.1), Green obteve

$$u(r) = \frac{1}{4\pi} \oint_S u \nabla g \cdot \vec{n} dS,$$

desde que a função g, solução de (1.2), fosse encontrada. Com o sucesso do método criado por Green na resolução da equação de Laplace, a função g descrita no problema (1.2) ficou conhecida como função de Green e outras equações, como a do calor e a da onda, passaram a ser estudadas utilizando-se essas funções, veja [2], [18], [28] e [36].

A aplicação das funções de Green a problemas de valor de fronteira envolvendo equações diferenciais ordinárias teve início com o trabalho de Burkhardt, em [10], que utilizou resultados da teoria de Picard para obter uma função de Green para o problema

$$\begin{cases} u''(x) = f(x), & a \leq x \leq b, \\ u(a) = 0 = u(b). \end{cases}$$

Nesta tese, utilizaremos as funções de Green apenas para resolver problemas de valor de fronteira envolvendo equações diferenciais ordinárias a coeficientes constantes. Para obtermos as funções de Green, para os problemas que abordaremos, utilizaremos apenas resultados básicos da teoria das distribuições.

Fixada uma função $f \in C([a,b])$, considere a seguinte equação diferencial ordinária a coeficientes constantes

$$a_0 u + a_1 \frac{du}{dx} + a_2 \frac{d^2u}{dx^2} + \ldots + a_k \frac{d^k u}{dx^k} = f, \qquad a \leq x \leq b. \tag{1.3}$$

Diremos que uma função $g \in C([a,b] \times [a,b])$ é uma função de Green para (1.3), se

$$u(x) = \int_a^b g(x,\xi) f(\xi) d\xi, \tag{1.4}$$

for uma solução de (1.3). A seguir, gostariamos de determinar quais condições uma função $g \in C([a,b] \times [a,b])$ teria que satisfazer para que (1.4) seja solução de (1.3). Para isto, tomemos o operador diferencial

$$L = \sum_{j=0}^{k} a_j \frac{d^j}{dx^j},$$

e uma função teste arbitrária $\varphi \in C_c^\infty((a,b))$. Considerando a função (1.4), podemos trabalhar o lado esquerdo de (1.3), no sentido das distribuições, e obter

$$\begin{aligned} T_{Lu}(\varphi) &= T_u(L^*\varphi) \\ &= \int_a^b u(x)L^*\varphi(x)dx \\ &= \int_a^b \int_a^b g(x,\xi)f(\xi)d\xi L^*\varphi(x)dx \\ &= \int_a^b \int_a^b g(x,\xi)L^*\varphi(x)dx f(\xi)d\xi \\ &= \int_a^b T_{g(\cdot,\xi)}(L^*\varphi)f(\xi)d\xi \\ &= \int_a^b T_{Lg(\cdot,\xi)}(\varphi)f(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

Por outro lado, trabalhando agora com o lado direito de (1.3), obtemos

$$T_f(\varphi) = \int_a^b f(\xi)\varphi(\xi)d\xi = \int_a^b \delta_\xi(\varphi)f(\xi)d\xi.$$

Portanto, para que (1.4) seja solução de (1.3) é suficiente que a função $g(x,\xi)$, para todo $\xi \in (a,b)$, satisfaça a equação

$$Lg(\cdot,\xi) = \delta_\xi, \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'((a,b)).$$

A seguir, discutiremos alguns exemplos sobre a implementação do método da função de Green para a resolução de problemas de valor de fronteira.

Exemplo 1.2.1 *Para $f \in C([0,1])$, considere o problema de valor de fronteira*

$$\begin{cases} u''(x) = -f(x), & 0 \le x \le 1, \\ u(0) = 0 = u(1). \end{cases} \tag{1.5}$$

Pelo método da função de Green, para obtermos uma solução do tipo (1.4)*, precisaremos de uma função $g \in C([0,1]\times[0,1])$ tal que, para todo $\xi \in (0,1)$, definindo $g_\xi(x) = g(x,\xi)$, tenha-se*

$$\begin{cases} g_\xi'' = -\delta_\xi, & em \quad \mathcal{D}'((0,1)), \\ g_\xi(0) = 0 = g_\xi(1). \end{cases} \tag{1.6}$$

Contudo, para obtermos tal função $g \in C([0,1]\times[0,1])$*, satisfazendo* (1.6)*, é suficiente que, para todo* $\xi \in (0,1)$*,* $g_\xi(x) = g(x,\xi)$ *satisfaça*

$$g_\xi''(x) = 0, \quad x \in (0,1)\backslash\{\xi\}, \tag{1.7}$$

$$g_\xi(0) = 0 = g_\xi(1), \tag{1.8}$$

$$\lim_{\rho\to 0^+} g_\xi'(\xi+\rho) - g_\xi'(\xi-\rho) = -1. \tag{1.9}$$

De fato, fixada uma função teste arbitrária $\varphi \in C_c^\infty((0,1))$*, sejam* $a, b \in \mathbb{R}$ *tais que* $0 < a < b < 1$ *e* $\text{supp}(\varphi) \subset [a,b]$*. Se* $\xi \notin [a,b]$*, então* $\varphi(\xi) = 0$*, e por* (1.7)*, obtemos*

$$T_{g_\xi''}(\varphi) = 0 = -\delta_\xi(\varphi).$$

Agora, supondo $\xi \in [a,b]$*, segue que*

$$T_{g_\xi''}(\varphi) = T_{g_\xi}(\varphi'') = \int_a^b g_\xi(x)\varphi''(x)dx.$$

Usando a continuidade de g_ξ *em* $[0,1]$ *e integrando por partes, obtemos*

$$\begin{aligned}
\int_a^b g_\xi(x)\varphi''(x)dx &= \int_a^\xi g_\xi(x)\varphi''(x)dx + \int_\xi^b g_\xi(x)\varphi''(x)dx \\
&= \lim_{\rho\to 0^+}\left[\int_a^{\xi-\rho} g_\xi(x)\varphi''(x)dx + \int_{\xi+\rho}^b g_\xi(x)\varphi''(x)dx\right] \\
&= \lim_{\rho\to 0^+}\left[g_\xi(\xi-\rho)\varphi'(\xi-\rho) - g_\xi(\xi+\rho)\varphi'(\xi+\rho)\right] \\
&+ \lim_{\rho\to 0^+}\left[g_\xi'(\xi+\rho)\varphi(\xi+\rho) - g_\xi'(\xi-\rho)\varphi(\xi-\rho)\right] \\
&+ \lim_{\rho\to 0^+}\left[\int_a^{\xi-\rho} g_\xi''(\eta)\varphi(\eta)d\eta + \int_{\xi+\rho}^b g_\xi''(\eta)\varphi(\eta)d\eta\right].
\end{aligned}$$

Por continuidade temos

$$\lim_{\rho\to 0^+}\left[g_\xi(\xi-\rho)\varphi'(\xi-\rho) - g_\xi(\xi+\rho)\varphi'(\xi+\rho)\right] = 0.$$

A limitação de g_ξ' *e a condição* (1.9) *implicam que*

$$\lim_{\rho\to 0^+}\left[g_\xi'(\xi+\rho)\varphi(\xi+\rho) - g_\xi'(\xi-\rho)\varphi(\xi-\rho)\right] = -\varphi(\xi).$$

Concluindo, por (1.7)*, temos*

$$T_{g''_\xi}(\varphi) = -\varphi(\xi) + \lim_{\rho\to 0^+}\left[\int_a^{\xi-\rho} g''_\xi(\eta)\varphi(\eta)d\eta + \int_{\xi+\rho}^{b} g''_\xi(\eta)\varphi(\eta)d\eta\right] = -\delta_\xi(\varphi),$$

e, portanto, (1.7)*,* (1.8) *e* (1.9) *implicam em* (1.6)*.*

Construiremos, então, uma função $g \in C([0,1]\times[0,1])$ *tal que, para todo* $\xi \in (0,1)$*,* $g_\xi(x) = g(x,\xi)$ *satisfaça* (1.7)*,* (1.8) *e* (1.9)*. Para* $x \neq \xi$*, temos como solução geral de* (1.7) *a função*

$$g_\xi(x) = \begin{cases} c_1 + c_2 x, & 0 \leq x < \xi, \\ c_3 + c_4 x, & \xi < x \leq 1, \end{cases} \tag{1.10}$$

com as constantes c_1*,* c_2*,* c_3 *e* c_4 *possivelmente dependendo de* ξ*.*

Pela condição de fronteira (1.8)*, obtemos* $c_1 = 0$ *e* $c_3 = -c_4$*, e portanto*

$$g_\xi(x) = \begin{cases} c_2 x, & 0 \leq x < \xi, \\ -c_4 + c_4 x, & \xi < x \leq 1. \end{cases} \tag{1.11}$$

A hipótese sobre a continuidade de $g(x,\xi)$ *implica que*

$$\lim_{x\to\xi^-} g_\xi(x) = \lim_{x\to\xi^+} g_\xi(x),$$

então, utilizando esta propriedade em (1.11)*, obtemos*

$$c_2\xi = -c_4 + c_4\xi. \tag{1.12}$$

Aplicando também (1.9) *em* (1.11)*, concluímos que* $c_2 = c_4 + 1$*. Então, por* (1.12)*, temos* $c_2 = 1-\xi$ *e* $c_4 = -\xi$*. Portanto,*

$$g(x,\xi) = \begin{cases} x(1-\xi), & 0 \leq x \leq \xi, \\ \xi(1-x), & \xi \leq x \leq 1. \end{cases} \tag{1.13}$$

Ilustrando um caso particular do Exemplo 1.2.1, se tomassemos $f(x) = e^x$, então pela função de Green (1.13), teriamos como solução do problema de fronteira (1.5), a função

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^1 g(x,\xi)f(\xi)d\xi \\ &= (1-x)\int_0^x \xi e^\xi d\xi + x\int_x^1 (1-\xi)e^\xi d\xi \\ &= -e^x + (e-1)x + 1. \end{aligned}$$

É importante salientar que a função de Green para um problema de valor de fronteira depende, em geral, não somente da equação diferencial, mas também da condição de fronteira utilizada. Para ilustrar este fato, vamos retornar ao problema (1.5), mas agora com uma condição de fronteira de Neumann.

Exemplo 1.2.2 *Para $f \in C([0,1])$, considere o problema de valor de fronteira*

$$\begin{cases} u''(x) = -f(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u'(0) = 0 = u'(1). \end{cases} \tag{1.14}$$

Integrando de 0 *a* 1 *a equação do problema* (1.14)*, obtemos*

$$\int_0^1 f(x)dx = -u'(1) + u'(0) = 0.$$

Assim, o problema (1.14) *só admite solução, se* $\int_0^1 f(x)dx = 0$*. Portanto, suponhamos que* f *tenha esta propriedade. Como antes, queremos obter uma função* $g \in C([0,1] \times [0,1])$ *tal que*

$$u(x) = \int_0^1 g(x,\xi)f(\xi)d\xi, \tag{1.15}$$

seja solução para o problema de valor de fronteira (1.14)*. Observe que, pelo argumento que demos anteriormente, poderiamos tomar qualquer função* $g \in C([0,1] \times [0,1])$ *tal que* $g_\xi(x) = g(x,\xi)$ *satisfaça*

$$\begin{cases} g''_\xi = -\delta_\xi, & em \quad \mathcal{D}'((0,1)), \\ g'_\xi(0) = 0 = g'_\xi(1). \end{cases} \tag{1.16}$$

Porém, não existe uma distribuição com tal propriedade, uma vez que o salto da função Heaviside é de 1 *e não de* 0*, como seria determinado pela condição de fronteira em* (1.16)*. Portanto, devemos contornar esta dificuldade. De modo análogo ao que fizemos no início desta seção, queremos descobrir quais propriedades uma função* $g \in C([0,1] \times [0,1])$ *deve satisfazer para que* (1.15) *seja solução do problema* (1.14)*. De fato, tomando uma função teste arbitrária* $\varphi \in C_c^\infty((0,1))$ *e definindo* $g_\xi(x) = g(x,\xi)$*, podemos considerar a função*

(1.15) *e trabalhar no sentido das distribuições para obter*

$$\begin{aligned} T_{u''}(\varphi) = T_u(\varphi'') &= \int_0^1 u(x)\varphi''(x)dx \\ &= \int_0^1 \int_0^1 g_\xi(x)f(\xi)d\xi\varphi''(x)dx \\ &= \int_0^1 \int_0^1 g_\xi(x)\varphi''(x)dxf(\xi)d\xi \\ &= \int_0^1 T_{g_\xi}(\varphi'')f(\xi)d\xi \\ &= \int_0^1 T_{g''_\xi}(\varphi)f(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

Por outro lado, lembrando que $\int_0^1 f(\xi)d\xi = 0$*, obtemos*

$$\begin{aligned} T_{-f}(\varphi) &= -\int_0^1 f(\xi)\varphi(\xi)d\xi + \int_0^1 \int_0^1 f(\xi)d\xi\varphi(x)dx \\ &= \int_0^1 \left(-\varphi(\xi) + \int_0^1 \varphi(x)dx\right) f(\xi)d\xi \\ &= \int_0^1 (-\delta_\xi + T_1)(\varphi)f(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

Portanto, para que (1.15) *satisfaça o problema de valor de fronteira* (1.14)*, é suficiente que a função* $g \in C([0,1]\times[0,1])$*, para todo* $\xi \in (0,1)$*, satisfaça*

$$\begin{cases} g''_\xi = -\delta_\xi + 1, & em \quad \mathcal{D}'((0,1)), \\ g'_\xi(0) = 0 = g'_\xi(1), \end{cases} \tag{1.17}$$

onde escrevemos $g_\xi(x) = g(x,\xi)$*.*

Com os mesmos argumentos que utilizamos para reduzir o problema (1.6) *ao problema composto por* (1.7)*,* (1.8) *e* (1.9)*, podemos reduzir* (1.17) *ao problema*

$$g''_\xi(x) = 1, \quad x \in (0,1)\backslash\{\xi\}, \tag{1.18}$$

$$g'_\xi(0) = 0 = g'_\xi(1), \tag{1.19}$$

$$\lim_{\rho\to 0^+} g'_\xi(\xi+\rho) - g'_\xi(\xi-\rho) = -1. \tag{1.20}$$

Portanto, obteremos a função de Green de (1.14) *resolvendo o problema composto por* (1.18), (1.19) *e* (1.20). *Para* $x \neq \xi$, *a solução geral de* (1.18) *é*

$$g_\xi(x) = \begin{cases} c_1 + c_2 x + \dfrac{x^2}{2}, & 0 \leq x < \xi, \\ \\ c_3 + c_4 x + \dfrac{x^2}{2}, & \xi < x \leq 1, \end{cases} \tag{1.21}$$

com as constantes c_1, c_2, c_3 *e* c_4 *possivelmente dependendo de* ξ.

Pela condição de fronteira (1.19), *obtemos* $c_2 = 0$ *e* $c_4 = -1$. *Portanto,*

$$g_\xi(x) = \begin{cases} c_1 + \dfrac{x^2}{2}, & 0 \leq x < \xi, \\ \\ c_3 - x + \dfrac{x^2}{2}, & \xi < x \leq 1. \end{cases} \tag{1.22}$$

Como queremos $g(x, \xi)$ *contínua, devemos ter*

$$\lim_{x \to \xi^-} g_\xi(x) = \lim_{x \to \xi^+} g_\xi(x),$$

obtendo, assim, $c_1 = c_3 - \xi$ *e portanto*

$$g_\xi(x) = \begin{cases} c_3 - \xi + \dfrac{x^2}{2}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \\ c_3 - x + \dfrac{x^2}{2}, & \xi \leq x \leq 1. \end{cases} \tag{1.23}$$

Como a condição (1.20) *é satisfeita para qualquer constante* $c_3 \in \mathbb{R}$, *concluímos que a função* (1.23), *para qualquer escolha de constante* $c_3 \in \mathbb{R}$, *será uma função de Green para o problema de valor de fronteira* (1.14).

Observe que os exemplos discutidos nesta seção foram todos de equações lineares. Vimos que o método da função de Green pode ser utilizado em problemas não homogêneos de valor de fronteira para a obtenção de soluções, dadas por meio de uma representação integral. No Capítulo 2, o método da função de Green será utilizado em problemas não lineares e como consequência não obteremos, diretamente, soluções para esses problemas, mas sim equações integrais que serão equivalentes aos problemas de valor de fronteira abordados.

1.3 Espaços de Sobolev

Nesta seção apresentaremos algumas propriedades dos espaços de Sobolev que serão utilizadas no Capítulo 3. Os resultados que enunciaremos aqui podem ser encontrados nas referências [1], [3] e [15]. Começaremos esta seção definindo os espaços de Sobolev modelados em L^2.

Definição 1.3.1 *Para $s \in \mathbb{R}$, o espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ consiste das distribuições temperadas u tais que $\widehat{u} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^d)$ e*

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \left[\int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s \, |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi\right]^{\frac{1}{2}} < \infty. \tag{1.24}$$

A partir da definição de espaço de Sobolev, as próximas duas proposições descrevem as suas propriedades mais evidentes.

Proposição 1.3.1 *Para todo $s \in \mathbb{R}$, o espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$ munido do produto interno*

$$(u,v)_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} (1+|\xi|^2)^s \widehat{u}(\xi)\overline{\widehat{v}(\xi)} d\xi,$$

é um espaço de Hilbert.

Proposição 1.3.2 *Se $s \geq t$, então a inclusão $H^s(\mathbb{R}^d) \subset H^t(\mathbb{R}^d)$ é contínua.*

Para os casos de índice inteiro, os espaços de Sobolev possuem uma segunda caracterização, como descrevemos nas próximas proposições.

Proposição 1.3.3 *Se k é um inteiro não negativo, então*

$$H^k(\mathbb{R}^d) = \left\{u \in L^2(\mathbb{R}^d) : \partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^d), \forall |\alpha| \leq k\right\}.$$

Além disso, a norma (1.24) *é equivalente a*

$$\|u\|_{H^k(\mathbb{R}^d)} = \left[\sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Proposição 1.3.4 *Se k é um inteiro positivo, então*

$$H^{-k}(\mathbb{R}^d) = \left\{ u = \sum_{|\alpha|\leq k} \partial^\alpha g_\alpha : g_\alpha \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad \forall |\alpha| \leq k \right\}.$$

Além disso, a norma (1.24) *é equivalente a*

$$\|u\|_{H^{-k}(\mathbb{R}^d)} = \inf \left\{ \left[\sum_{|\alpha|\leq k} \|g_\alpha\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \right]^{\frac{1}{2}} : u = \sum_{|\alpha|\leq k} \partial^\alpha g_\alpha, \quad g_\alpha \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad \forall |\alpha| \leq k \right\}.$$

A seguir, apresentamos um resultado de aproximação para os espaços de Sobolev.

Proposição 1.3.5 *Para todo $s \in \mathbb{R}$, o espaço $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ é denso em $H^s(\mathbb{R}^d)$.*

Por fim, concluímos esta seção com um resultado de imersão.

Proposição 1.3.6 *Seja $s > k + \frac{d}{2}$.*

(i) Se $g \in H^s(\mathbb{R}^d)$, então $\widehat{\partial^\alpha g} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\forall |\alpha| \leq k$, e, além disto,

$$\left\| \widehat{\partial^\alpha g} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq C \|g\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}, \qquad \forall |\alpha| \leq k,$$

para alguma constante $C > 0$, dependente apenas de k e s.

(ii) $H^s(\mathbb{R}^d) \subset C_0^k(\mathbb{R}^d)$ e, além disto, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C \|g\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}, \qquad \forall g \in H^s(\mathbb{R}^d).$$

Capítulo 2

Onda Viajante

O objetivo deste capítulo será provar alguns resultados de existência de onda viajante periódica para versões generalizadas e não homogêneas das equações BBM-Burgers e KdVB. Para isto, nas Seções 2.1 e 2.2, utilizaremos o método da função de Green para obter formulações integrais para os problemas de onda viajante periódica dessas equações. Na Seção 2.3, obtemos os nossos resultados de existência de onda viajante periódica usando as formulações integrais, obtidas nas seções anteriores, e uma versão do teorema do ponto fixo de Schauder.

2.1 Formulação Integral para o Problema BBM

Nesta seção, consideramos versões generalizadas e não homogêneas da equação BBM-Burgers

$$u_t + (f_0(u))_x - \epsilon u_{xx} - \delta u_{xxt} = h_0(x - \beta t), \qquad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0, \tag{2.1}$$

$$u_t + (f_0(u))_x - \epsilon u_{xx} + \delta u_{xxt} = h_0(x - \beta t), \qquad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0, \tag{2.2}$$

onde ϵ, δ, $\beta > 0$ são constantes, $f_0 \in C^1(\mathbb{R})$ e $h_0 \in C(\mathbb{R})$ é uma função não identicamente nula, $2T$-periódica para algum $T > 0$ com a propriedade

$$\int_0^{2T} h_0(x)dx = 0. \tag{2.3}$$

Uma onda viajante periódica para as equações (2.1) e (2.2) é uma solução da forma

$$u(x,t) = u(x-\beta t) = \upsilon(\eta), \qquad \eta = x - \beta t, \tag{2.4}$$

onde $\upsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função periódica.

O objetivo desta seção será construir equações integrais que sejam capazes de produzir ondas viajantes periódicas para as equações (2.1) e (2.2).

Em termos da função υ, em (2.4), a equação (2.1) é reduzida a equação diferencial ordinária de terceira ordem

$$\upsilon''' - \alpha\upsilon'' - \lambda^2\upsilon' = -(f_1(\upsilon))' + h_1, \tag{2.5}$$

onde $h_1 = (\delta\beta)^{-1}h_0$, $f_1 = (\delta\beta)^{-1}f_0$, $\lambda^2 = \delta^{-1}$ e $\alpha = \epsilon/(\delta\beta)$.

Para a equação (2.2), em termos de (2.4), ocorre a redução

$$\upsilon''' + \alpha\upsilon'' + \lambda^2\upsilon' = (f_1(\upsilon))' - h_1. \tag{2.6}$$

Trabalhando no intervalo $[0, 2T]$ e adicionando aos problemas a condição de fronteira

$$\upsilon^{(k)}(0) = \upsilon^{(k)}(2T), \qquad k = 0, 1, 2, \tag{2.7}$$

é fácil ver que qualquer solução do problema de valor de fronteira composto por (2.5) e (2.7) pode ser estendida para uma onda viajante $2T$-periódica para (2.1). Do mesmo modo, qualquer solução do problema de valor de fronteira composto por (2.6) e (2.7) pode ser estendida para uma onda viajante $2T$-periódica para (2.2).

Por fim, para viabilizar a utilização do método da função de Green, adicionamos aos problemas de valor de fronteira a condição

$$\int_0^{2T} \upsilon(\eta)d\eta = 0. \tag{2.8}$$

Integrando ambos os lados de (2.5), por (2.7) e (2.8), obtemos o problema

$$\upsilon'' - \alpha\upsilon' - \lambda^2\upsilon = -f_1(\upsilon) + H_1 + \frac{1}{2T}\int_0^{2T} \left[f_1(\upsilon(\eta)) - H_1(\eta)\right] d\eta, \tag{2.9}$$

$$\upsilon^{(k)}(0) = \upsilon^{(k)}(2T), \qquad k = 0, 1, \tag{2.10}$$

onde $H_1 = (\delta\beta)^{-1}H_0$ com H_0 sendo qualquer primitiva de h_0.

Reciprocamente, usando (2.10), podemos derivar (2.9) para obter (2.5) e (2.7) ou integrar (2.9) de 0 a $2T$ para obter (2.8). Portanto, vemos que no intervalo $[0, 2T]$, uma função é solução do problema composto por (2.5), (2.7) e (2.8) se, e somente se, é uma solução para o problema (2.9) e (2.10). Do mesmo modo, integrando ambos os lados de (2.6), por (2.7) e (2.8), vemos que o problema composto por (2.6), (2.7) e (2.8) é equivalente, no intervalo $[0, 2T]$, ao problema constituído por (2.10) e pela equação

$$\upsilon'' + \alpha\upsilon' + \lambda^2\upsilon = f_1(\upsilon) - H_1 - \frac{1}{2T}\int_0^{2T} [f_1(\upsilon(\eta)) - H_1(\eta)]d\eta. \tag{2.11}$$

A seguir, usaremos o método da função de Green para obter formulações integrais para os problemas de valor de fronteira (2.9)-(2.10) e (2.11)-(2.10). A partir destas formulações integrais provaremos, na Seção 2.3, alguns resultados de existência de onda viajante periódica para as equações (2.1) e (2.2).

Nesta seção frequentemente trabalharemos no espaço $\mathcal{D}'((0, 2T))$, o Teorema 1.1.1 nos faz observar que se uma função contínua υ satisfaz (2.9) ou (2.11) em $\mathcal{D}'((0, 2T))$, então teremos $\upsilon \in C^2((0, 2T))$ e as equações (2.9) ou (2.11) sendo satisfeitas no sentido clássico.

No próximo teorema obteremos as funções de Green que possibilitarão as formulações integrais dos problemas de valor de fronteira (2.9)-(2.10) e (2.11)-(2.10).

Teorema 2.1.1 *Existem funções contínuas g e q em $[0, 2T] \times [0, 2T]$ tais que, para todo $\xi \in (0, 2T)$, $g_\xi(\eta) = g(\eta, \xi)$ e $q_\xi(\eta) = q(\eta, \xi)$ satisfazem*

$$g_\xi'' - \alpha g_\xi' - \lambda^2 g_\xi = -\delta_\xi + \frac{1}{2T}, \quad em \quad \mathcal{D}'((0, 2T)), \tag{2.12}$$

$$g_\xi^{(k)}(0) = g_\xi^{(k)}(2T), \qquad k = 0, 1, \tag{2.13}$$

$$q_\xi'' + \alpha q_\xi' + \lambda^2 q_\xi = \delta_\xi - \frac{1}{2T}, \quad em \quad \mathcal{D}'((0, 2T)), \tag{2.14}$$

$$q_\xi^{(k)}(0) = q_\xi^{(k)}(2T), \qquad k = 0, 1. \tag{2.15}$$

Mais adiante, no Teorema 2.1.2, provaremos que as funções g e q do Teorema 2.1.1 são as funções de Green respectivamente dos problemas de valor de fronteira (2.9)-(2.10) e (2.11)-(2.10). Para demonstrar o Teorema 2.1.1, construíremos explicitamente as funções g e q. Todavia, para possibilitar essas construções, necessitaremos do próximo lema.

Lema 2.1.1 *Seja* $\xi \in (0, 2T)$.

(i) Se $g_\xi \in C([0, 2T])$ *satisfaz*

$$\lim_{\rho \to 0^+} g'_\xi(\xi + \rho) - g'_\xi(\xi - \rho) = -1, \tag{2.16}$$

$$g''_\xi(\eta) - \alpha g'_\xi(\eta) - \lambda^2 g_\xi(\eta) = \frac{1}{2T}, \qquad \forall \eta \in (0, 2T) \backslash \{\xi\}, \tag{2.17}$$

então g_ξ *satisfará* (2.12). *Além disso, se* g_ξ *também satisfaz* (2.13), *então*

$$\int_0^{2T} g_\xi(\eta) d\eta = 0. \tag{2.18}$$

(ii) Se $q_\xi \in C([0, 2T])$ *satisfaz*

$$\lim_{\rho \to 0^+} q'_\xi(\xi + \rho) - q'_\xi(\xi - \rho) = 1, \tag{2.19}$$

$$q''_\xi(\eta) + \alpha q'_\xi(\eta) + \lambda^2 q_\xi(\eta) = -\frac{1}{2T}, \qquad \forall \eta \in (0, 2T) \backslash \{\xi\}, \tag{2.20}$$

então q_ξ *satisfará* (2.14). *Além disso, se* q_ξ *também satisfaz* (2.15), *então*

$$\int_0^{2T} q_\xi(\eta) d\eta = 0. \tag{2.21}$$

Demontração do Lema 2.1.1: Detalharemos a demonstração do caso (i), o caso (ii) segue de modo análogo. Dada uma função teste $\varphi \in C_c^\infty((0, 2T))$, sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $0 < a < b < 2T$ e $\text{supp}(\varphi) \subset [a, b]$. Se $\xi \notin [a, b]$, então $\varphi(\xi) = 0$ e por (2.17) temos

$$(g''_\xi - \alpha g'_\xi - \lambda^2 g_\xi)(\varphi) = T_{\frac{1}{2T}}(\varphi) = -\delta_\xi(\varphi) + T_{\frac{1}{2T}}(\varphi).$$

Agora, supondo $\xi \in [a, b]$, segue que

$$\begin{aligned}(g''_\xi - \alpha g'_\xi - \lambda^2 g_\xi)(\varphi) &= T_{g_\xi}(\varphi'' + \alpha\varphi' - \lambda^2\varphi) \\ &= \int_a^b g_\xi(\eta) \left[\varphi''(\eta) + \alpha\varphi'(\eta) - \lambda^2\varphi(\eta)\right] d\eta. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Usando a continuidade de g_ξ em $[0, 2T]$ e integrando por partes obtemos

$$\begin{aligned}\int_a^b g_\xi(\eta)\varphi''(\eta)d\eta &= \int_a^\xi g_\xi(\eta)\varphi''(\eta)d\eta + \int_\xi^b g_\xi(\eta)\varphi''(\eta)d\eta \\ &= \lim_{\rho\to 0^+}\left[\int_a^{\xi-\rho} g_\xi(\eta)\varphi''(\eta)d\eta + \int_{\xi+\rho}^b g_\xi(\eta)\varphi''(\eta)d\eta\right] \\ &= \lim_{\rho\to 0^+}\left[g_\xi(\xi-\rho)\varphi'(\xi-\rho) - g_\xi(\xi+\rho)\varphi'(\xi+\rho)\right] \\ &+ \lim_{\rho\to 0^+}\left[g'_\xi(\xi+\rho)\varphi(\xi+\rho) - g'_\xi(\xi-\rho)\varphi(\xi-\rho)\right] \\ &+ \lim_{\rho\to 0^+}\left[\int_a^{\xi-\rho} g''_\xi(\eta)\varphi(\eta)d\eta + \int_{\xi+\rho}^b g''_\xi(\eta)\varphi(\eta)d\eta\right].\end{aligned}$$

Por continuidade temos

$$\lim_{\rho\to 0^+}\left[g_\xi(\xi-\rho)\varphi'(\xi-\rho) - g_\xi(\xi+\rho)\varphi'(\xi+\rho)\right] = 0.$$

A limitação de g'_ξ e (2.16) implicam que

$$\lim_{\rho\to 0^+}\left[g'_\xi(\xi+\rho)\varphi(\xi+\rho) - g'_\xi(\xi-\rho)\varphi(\xi-\rho)\right] = -\varphi(\xi).$$

Portanto,

$$\int_a^b g_\xi(\eta)\varphi''(\eta)d\eta = -\varphi(\xi) + \lim_{\rho\to 0^+}\left[\int_a^{\xi-\rho} g''_\xi(\eta)\varphi(\eta)d\eta + \int_{\xi+\rho}^b g''_\xi(\eta)\varphi(\eta)d\eta\right]. \tag{2.23}$$

De modo similar obtemos

$$\int_a^b g_\xi(\eta)\varphi'(\eta)d\eta = -\lim_{\rho\to 0^+}\left[\int_a^{\xi-\rho} g'_\xi(\eta)\varphi(\eta)d\eta + \int_{\xi+\rho}^b g'_\xi(\eta)\varphi(\eta)d\eta\right]. \tag{2.24}$$

Portanto, (2.17), (2.22), (2.23) e (2.24) mostram que

$$\begin{aligned}(g''_\xi - \alpha g'_\xi - \lambda^2 g_\xi)(\varphi) &= -\varphi(\xi) + \lim_{\rho\to 0^+}\int_a^{\xi-\rho}\left[g''_\xi(\eta) - \alpha g'_\xi(\eta) - \lambda^2 g_\xi(\eta)\right]\varphi(\eta)d\eta \\ &\quad + \lim_{\rho\to 0^+}\int_{\xi+\rho}^b\left[g''_\xi(\eta) - \alpha g'_\xi(\eta) - \lambda^2 g_\xi(\eta)\right]\varphi(\eta)d\eta \\ &= -\varphi(\xi) + \lim_{\rho\to 0^+}\int_a^{\xi-\rho}\frac{1}{2T}\varphi(\eta)d\eta + \lim_{\rho\to 0^+}\int_{\xi+\rho}^b\frac{1}{2T}\varphi(\eta)d\eta \\ &= (-\delta_\xi + T_{\frac{1}{2T}})(\varphi),\end{aligned}$$

assim, concluímos que a equação (2.12) é satisfeita.

Agora, supondo que g_ξ também satisfaça (2.13), podemos estender g_ξ periodicamente em $\mathbb{R}$ para uma função $\widetilde{g}_\xi \in C(\mathbb{R})$ tal que $\widetilde{g}_\xi \in C^2(\mathbb{R}\setminus\{\xi+2nT : n\in\mathbb{Z}\})$. Prosseguindo, por (2.16) e (2.17), obtemos

$$\lim_{\rho\to 0^+} \widetilde{g}_\xi'(\xi+2nT+\rho) - \widetilde{g}_\xi'(\xi+2nT-\rho) = -1, \qquad \forall n\in\mathbb{Z}, \tag{2.25}$$

e

$$\widetilde{g}_\xi''(\eta) - \alpha\widetilde{g}_\xi'(\eta) - \lambda^2\widetilde{g}_\xi(\eta) = \frac{1}{2T}, \qquad \forall \eta\in\mathbb{R}\setminus\{\xi+2nT : n\in\mathbb{Z}\}. \tag{2.26}$$

Similarmente a obtenção de (2.12), por (2.25) e (2.26), temos

$$\widetilde{g}_\xi'' - \alpha\widetilde{g}_\xi' - \lambda^2\widetilde{g}_\xi = -\sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta_{\xi+2nT} + \frac{1}{2T}, \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{2.27}$$

Para cada $k\in\mathbb{N}$, seja $\varphi_k \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ uma função corte tal que

$$\operatorname{supp}(\varphi_k) \subset \left[-\frac{1}{k}, 2T+\frac{1}{k}\right], \qquad 0\le\varphi_k\le 1 \qquad \text{e} \qquad \varphi_k(\eta)=1,\ \forall\eta\in[0,2T].$$

Por (2.27), para k suficientemente grande, segue que

$$\left(\widetilde{g}_\xi'' - \alpha\widetilde{g}_\xi' - \lambda^2\widetilde{g}_\xi\right)(\varphi_k) = -\varphi_k(\xi) + \frac{1}{2T}\int_{-\frac{1}{k}}^{2T+\frac{1}{k}} \varphi_k(\eta)d\eta,$$

e portanto

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\widetilde{g}_\xi'' - \alpha\widetilde{g}_\xi' - \lambda^2\widetilde{g}_\xi\right)(\varphi_k) = 0. \tag{2.28}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\left(\widetilde{g}_\xi'' - \alpha\widetilde{g}_\xi' - \lambda^2\widetilde{g}_\xi\right)(\varphi_k) &= T_{\widetilde{g}_\xi}(\varphi_k'' + \alpha\varphi_k' - \lambda^2\varphi_k)\\ &= \int_{-\frac{1}{k}}^{2T+\frac{1}{k}} \widetilde{g}_\xi(\eta)[\varphi_k''(\eta) + \alpha\varphi_k'(\eta) - \lambda^2\varphi_k(\eta)]d\eta,\end{aligned}$$

então, integrando por partes, obtemos

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\widetilde{g}_\xi'' - \alpha\widetilde{g}_\xi' - \lambda^2\widetilde{g}_\xi\right)(\varphi_k) = \int_0^{2T} g_\xi(\eta)d\eta. \tag{2.29}$$

Assim, por (2.28) e (2.29), segue (2.18). □

Demonstração do Teorema 2.1.1: Pelo Lema 2.1.1 é suficiente construirmos funções contínuas g e q em $[0,2T]\times[0,2T]$ tais que $g_\xi(\eta)=g(\eta,\xi)$ satisfaça (2.13), (2.16) e (2.17); e $q_\xi(\eta)=q(\eta,\xi)$ satisfaça (2.15), (2.19) e (2.20).

Para $\eta \neq \xi$, a solução geral de (2.17) é

$$g_\xi(\eta) = \begin{cases} c_1 e^{z_1\eta} + c_2 e^{z_2\eta} - \dfrac{1}{2T\lambda^2}, & 0 \leq \eta < \xi, \\ \\ c_3 e^{z_1\eta} + c_4 e^{z_2\eta} - \dfrac{1}{2T\lambda^2}, & \xi < \eta \leq 2T, \end{cases} \tag{2.30}$$

onde

$$z_1 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\lambda^2}}{2} \qquad \text{e} \qquad z_2 = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4\lambda^2}}{2} \tag{2.31}$$

e c_1, c_2, c_3 e c_4 constantes possivelmente dependentes do parâmetro ξ.

Por (2.13) e (2.30) temos

$$c_1 = c_3 e^{2Tz_1} \qquad \text{e} \qquad c_2 = c_4 e^{2Tz_2}. \tag{2.32}$$

Uma função contínua g_ξ em $[0, 2T]$ implica que

$$\lim_{\eta \to \xi^-} g_\xi(\eta) = \lim_{\eta \to \xi^+} g_\xi(\eta),$$

portanto, por (2.30) e (2.32),

$$c_3 = \frac{c_4 \left[e^{z_2(\xi+2T)} - e^{z_2\xi} \right]}{e^{z_1\xi} - e^{z_1(\xi+2T)}}. \tag{2.33}$$

Por fim, usando (2.16), encontramos

$$c_4 = \frac{1}{(z_1 - z_2)\left[e^{z_2\xi} - e^{z_2(\xi+2T)} \right]},$$

e, deste modo, obtemos

$$g_\xi(\eta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\gamma}\left[\dfrac{e^{z_1\eta - z_1\xi + 2Tz_1}}{(e^{2Tz_1} - 1)} - \dfrac{e^{z_2\eta - z_2\xi + 2Tz_2}}{(e^{2Tz_2} - 1)} \right] - \dfrac{1}{2T\lambda^2}, & 0 \leq \eta \leq \xi, \\ \\ \dfrac{1}{\gamma}\left[\dfrac{e^{z_1\eta - z_1\xi}}{(e^{2Tz_1} - 1)} - \dfrac{e^{z_2\eta - z_2\xi}}{(e^{2Tz_2} - 1)} \right] - \dfrac{1}{2T\lambda^2}, & \xi \leq \eta \leq 2T, \end{cases}$$

onde

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 + 4\lambda^2}. \tag{2.34}$$

Portanto, tomando

$$G(\eta, z) = \frac{e^{z\eta}}{\gamma\left(e^{2Tz} - 1\right)}, \tag{2.35}$$

podemos escrever

$$g(\eta,\xi)=\begin{cases} G(\eta-\xi+2T,z_1)-G(\eta-\xi+2T,z_2)-\dfrac{1}{2T\lambda^2}, & 0\leq\eta\leq\xi,\\ \\ G(\eta-\xi,z_1)-G(\eta-\xi,z_2)-\dfrac{1}{2T\lambda^2}, & \xi\leq\eta\leq 2T. \end{cases} \tag{2.36}$$

Para a construção da função q procedemos da mesma forma. Contudo, nesta construção, há três casos a considerar.

Caso 1: $\alpha^2-4\lambda^2>0$, isto é, $\beta<\frac{\epsilon}{2\delta^{1/2}}$.

$$q(\eta,\xi)=\begin{cases} \dfrac{1}{\mu}\left[\dfrac{e^{w_1\eta-w_1\xi+2Tw_1}}{(1-e^{2Tw_1})}-\dfrac{e^{w_2\eta-w_2\xi+2Tw_2}}{(1-e^{2Tw_2})}\right]-\dfrac{1}{2T\lambda^2}, & 0\leq\eta\leq\xi,\\ \\ \dfrac{1}{\mu}\left[\dfrac{e^{w_1\eta-w_1\xi}}{(1-e^{2Tw_1})}-\dfrac{e^{w_2\eta-w_2\xi}}{(1-e^{2Tw_2})}\right]-\dfrac{1}{2T\lambda^2}, & \xi\leq\eta\leq 2T, \end{cases} \tag{2.37}$$

onde

$$\mu=\sqrt{\alpha^2-4\lambda^2}\quad,\quad w_1=\frac{-\alpha+\mu}{2}\quad\text{e}\quad w_2=\frac{-\alpha-\mu}{2}. \tag{2.38}$$

Portanto, tomando

$$H(\eta,w)=\frac{e^{w\eta}}{\mu\,(1-e^{2Tw})}, \tag{2.39}$$

podemos escrever

$$q(\eta,\xi)=\begin{cases} H(\eta-\xi+2T,w_1)-H(\eta-\xi+2T,w_2)-\dfrac{1}{2T\lambda^2}, & 0\leq\eta\leq\xi,\\ \\ H(\eta-\xi,w_1)-H(\eta-\xi,w_2)-\dfrac{1}{2T\lambda^2}, & \xi\leq\eta\leq 2T. \end{cases} \tag{2.40}$$

Caso 2: $\alpha^2-4\lambda^2=0$, isto é, $\beta=\frac{\epsilon}{2\delta^{1/2}}$.

$$q(\eta,\xi)=\begin{cases} \frac{\alpha^2[(\xi+2T)e^{-\alpha T}-\xi]e^{\frac{-\alpha(\eta-\xi+2T)}{2}}}{4\lambda^2(1-e^{-\alpha T})^2}+\frac{\alpha^2(\eta+2T)e^{\frac{-\alpha(\eta-\xi+2T)}{2}}}{4\lambda^2(1-e^{-\alpha T})}-\frac{1}{2T\lambda^2}, & 0\leq\eta\leq\xi,\\ \\ \frac{\alpha^2[(\xi+2T)e^{-\alpha T}-\xi]e^{\frac{-\alpha(\eta-\xi)}{2}}}{4\lambda^2(1-e^{-\alpha T})^2}+\frac{\alpha^2\eta e^{\frac{-\alpha(\eta-\xi)}{2}}}{4\lambda^2(1-e^{-\alpha T})}-\frac{1}{2T\lambda^2}, & \xi\leq\eta\leq 2T. \end{cases} \tag{2.41}$$

Caso 3: $\alpha^2 - 4\lambda^2 < 0$, isto é, $\beta > \frac{\epsilon}{2\delta^{1/2}}$.

$$q(\eta,\xi) = \begin{cases} \frac{2e^{\frac{-\alpha(\eta-\xi+2T)}{2}}[\sin\frac{\omega(\eta-\xi+2T)}{2} - e^{-\alpha T}\sin\frac{\omega(\eta-\xi)}{2}]}{\omega(e^{-2\alpha T} - 2e^{-\alpha T}\cos\omega T + 1)} - \frac{1}{2T\lambda^2}, & 0 \le \eta \le \xi, \\ \\ \frac{2e^{\frac{-\alpha(\eta-\xi)}{2}}[\sin\frac{\omega(\eta-\xi)}{2} - e^{-\alpha T}\sin\frac{\omega(\eta-\xi-2T)}{2}]}{\omega(e^{-2\alpha T} - 2e^{-\alpha T}\cos\omega T + 1)} - \frac{1}{2T\lambda^2}, & \xi \le \eta \le 2T, \end{cases} \tag{2.42}$$

onde $\omega = \sqrt{4\lambda^2 - \alpha^2}$. □

As funções encontradas $G(\eta, z)$ e $H(\eta, w)$ gozam de importantes propriedades, descritas no próximo lema, que serão fundamentais na demonstração de alguns dos nossos principais resultados no final deste capítulo.

Lema 2.1.2 *As funções $G(\eta, z)$ e $H(\eta, w)$, definidas em* (2.35) *e* (2.39)*, possuem as seguintes propriedades:*

(i) Considerando as constantes z_1 e z_2, dadas em (2.31)*, tem-se*

$$G(\eta, z_1) - G(\eta, z_2) \ge 0, \quad \forall \eta \in [0, 2T],$$

(ii) Considerando a constante γ, dada em (2.34)*, tem-se*

$$\int_0^\eta G(\eta - \xi, z)d\xi + \int_\eta^{2T} G(\eta - \xi + 2T, z)d\xi = \frac{1}{\gamma z}, \quad \forall \eta \in [0, 2T], \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

(iii) Considerando as constantes w_1 e w_2, dadas em (2.38)*, tem-se*

$$H(\eta, w_1) - H(\eta, w_2) \ge 0, \quad \forall \eta \in [0, 2T].$$

(iv) Considerando a constante μ, dada em (2.38)*, tem-se*

$$\int_0^\eta H(\eta - \xi, w)d\xi + \int_\eta^{2T} H(\eta - \xi + 2T, w)d\xi = -\frac{1}{\mu w}, \quad \forall \eta \in [0, 2T], \quad \forall w \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: Observando que $z_1 > 0$, $z_2 < 0$ e $w_2 < w_1 < 0$ obtemos (i) e (iii). A verificação de (ii) e (iv) segue por cálculo direto. □

Lema 2.1.3 *Seja $\upsilon \in C([0, 2T])$ tal que $\upsilon \in C^2((0, 2T))$ e $\upsilon(0) = \upsilon(2T)$. Se υ satisfaz* (2.8) *e* (2.9)*, ou* (2.8) *e* (2.11)*, então υ' e υ'' são limitadas em $(0, 2T)$ e, portanto, υ possui derivadas primeira e segunda na fronteira do intervalo $[0, 2T]$. Além disso, $\upsilon'(0) = \upsilon'(2T)$.*

Demonstração: Suponha que υ satisfaça (2.8) e (2.9), o outro caso segue de modo análogo. Para $0 < a < b < 2T$, integrando (2.9) de a a b, obtemos

$$\upsilon'(b) - \upsilon'(a) = \alpha\left(\upsilon(b) - \upsilon(a)\right) + \lambda^2 \int_a^b \upsilon(\eta)d\eta - \int_a^b [f_1(\upsilon(\eta)) - H_1(\eta)]d\eta + \frac{(b-a)}{2T}\int_0^{2T} [f_1(\upsilon(\xi)) - H_1(\xi)]d\xi. \tag{2.43}$$

Olhando para o lado direito da igualdade em (2.43), concluímos que υ' é limitada em $(0, 2T)$; e pela equação (2.9) obtemos a limitação de υ''. Assim, υ tem derivadas primeira e segunda na fronteira de $[0, 2T]$. Além disso, fazendo $a \to 0^+$ e $b \to 2T^-$ em (2.43), por (2.8), obtemos $\upsilon'(0) = \upsilon'(2T)$. □

Apresentaremos agora o resultado responsável pelas representações integrais dos problemas de valor de fronteira (2.9)-(2.10) e (2.11)-(2.10).

Teorema 2.1.2 *Seja υ uma função contínua em $[0, 2T]$.*
(i) υ é uma solução do problema de valor de fronteira (2.9)-(2.10) *em $[0, 2T]$ se, e somente se, é uma solução da equação integral*

$$\upsilon(\eta) = \int_0^{2T} g(\eta, \xi)[f_1(\upsilon(\xi)) - H_1(\xi)]d\xi, \qquad 0 \leq \eta \leq 2T, \tag{2.44}$$

onde $g(\eta, \xi)$ é a função construída no Teorema 2.1.1.
(ii) υ é uma solução do problema de valor de fronteira (2.11)-(2.10) *em $[0, 2T]$ se, e somente se, é uma solução da equação integral*

$$\upsilon(\eta) = \int_0^{2T} q(\eta, \xi)[f_1(\upsilon(\xi)) - H_1(\xi)]d\xi, \qquad 0 \leq \eta \leq 2T, \tag{2.45}$$

onde $q(\eta, \xi)$ é a função construída no Teorema 2.1.1.

Demonstração: Seja υ uma solução do problema (2.9)-(2.10). Tomando as funções $F_1(\xi) = f_1(\upsilon(\xi)) - H_1(\xi)$ e $\kappa(\eta) = \int_0^{2T} g(\eta, \xi)F_1(\xi)d\xi$, para toda função teste $\varphi \in C_c^\infty((0, 2T))$,

podemos trabalhar em $\mathcal{D}'((0,2T))$ e usar (2.12) para obter

$$\begin{aligned}
T_{\kappa''-\alpha\kappa'-\lambda^2\kappa}(\varphi) &= T_\kappa(\varphi''+\alpha\varphi'-\lambda^2\varphi)\\
&= T_{\int_0^{2T} g_\xi(\cdot)F_1(\xi)d\xi}(\varphi''+\alpha\varphi'-\lambda^2\varphi)\\
&= \int_0^{2T}\int_0^{2T} g_\xi(\eta)F_1(\xi)d\xi\left[\varphi''(\eta)+\alpha\varphi'(\eta)-\lambda^2\varphi(\eta)\right]d\eta\\
&= \int_0^{2T}\int_0^{2T} g_\xi(\eta)\left[\varphi''(\eta)+\alpha\varphi'(\eta)-\lambda^2\varphi(\eta)\right]d\eta F_1(\xi)d\xi\\
&= \int_0^{2T} T_{g_\xi}(\varphi''+\alpha\varphi'-\lambda^2\varphi)F_1(\xi)d\xi\\
&= \int_0^{2T} (g_\xi''-\alpha g_\xi'-\lambda^2 g_\xi)(\varphi)F_1(\xi)d\xi\\
&= \int_0^{2T} \left(-\delta_\xi + T_{\frac{1}{2T}}\right)(\varphi)F_1(\xi)d\xi\\
&= \int_0^{2T} -\varphi(\xi)F_1(\xi)d\xi + \int_0^{2T}\frac{1}{2T}\int_0^{2T} F_1(\xi)d\xi\varphi(\eta)d\eta\\
&= T_{-F_1}(\varphi) + T_{\frac{1}{2T}\int_0^{2T}F_1(\xi)d\xi}(\varphi)\\
&= T_{-f_1(\upsilon)+H_1+\frac{1}{2T}\int_0^{2T}[f_1(\upsilon(\xi))-H_1(\xi)]d\xi}(\varphi).
\end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$\kappa''-\alpha\kappa'-\lambda^2\kappa = -f_1(\upsilon)+H_1+\frac{1}{2T}\int_0^{2T}[f_1(\upsilon(\xi))-H_1(\xi)]d\xi, \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'((0,2T)).$$

Portanto, tomando $\vartheta(\eta)=\kappa(\eta)-\upsilon(\eta)$, obtemos

$$\vartheta''(\eta)-\alpha\vartheta'(\eta)-\lambda^2\vartheta(\eta)=0, \qquad \eta\in(0,2T), \tag{2.46}$$

$$\vartheta(0)=\vartheta(2T), \tag{2.47}$$

$$\int_0^{2T}\vartheta(\eta)d\eta = 0. \tag{2.48}$$

Como a função nula é a única solução de (2.46), (2.47) e (2.48), segue que

$$\upsilon(\eta)=\int_0^{2T} g(\eta,\xi)[f_1(\upsilon(\xi))-H_1(\xi)]d\xi, \qquad \forall\eta\in[0,2T].$$

Reciprocamente, se υ satisfaz (2.44), por (2.12), obtemos

$$\upsilon''-\alpha\upsilon'-\lambda^2\upsilon = -f_1(\upsilon)+H_1+\frac{1}{2T}\int_0^{2T}[f_1(\upsilon(\xi))-H_1(\xi)]d\xi, \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'((0,2T)).$$

Assim, pelo Teorema 1.1.1, teremos $\upsilon \in C^2((0,2T))$ e a equação (2.9) satisfeita no sentido clássico. A partir de (2.18), (2.44) e Teorema de Fubini, obtemos (2.8). Portanto (2.13), (2.44) e Lema 2.1.3 implicam em (2.10).

A demonstração de (ii) segue como a de (i). □

No início desta seção, vimos que quaisquer soluções dos problemas de valor de fronteira (2.9)-(2.10) e (2.11)-(2.10) podem ser estendidas periodicamente para ondas viajantes periódicas das equações (2.1) e (2.2) respectivamente. No próximo corolário, um resultado imediato do Teorema 2.1.2, iremos atrelar a condição de existência dessas ondas viajantes periódicas às equações integrais (2.44) e (2.45).

Corolário 2.1.1

(i) Qualquer solução contínua υ de (2.44) *pode ser estendida para uma função $2T$-periódica $u \in C^3(\mathbb{R})$ tal que $u(x-\beta t)$ é uma onda viajante periódica de* (2.1).

(ii) Qualquer solução contínua υ de (2.45) *pode ser estendida para uma função $2T$-periódica $u \in C^3(\mathbb{R})$ tal que $u(x-\beta t)$ é uma onda viajante periódica de* (2.2).

2.2 Formulação Integral para o Problema KdVB

Nesta seção consideramos versões generalizadas e não homogêneas da equação KdVB

$$u_t + (f_0(u))_x - \epsilon u_{xx} - \delta u_{xxx} = h_0(x-\beta t), \qquad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0, \tag{2.49}$$

$$u_t + (f_0(u))_x - \epsilon u_{xx} + \delta u_{xxx} = h_0(x-\beta t), \qquad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0, \tag{2.50}$$

onde ϵ, δ, $\beta > 0$ são constantes, $f_0 \in C^1(\mathbb{R})$ e $h_0 \in C(\mathbb{R})$ é uma função não identicamente nula, $2T$-periódica para algum $T > 0$ com a propriedade

$$\int_0^{2T} h_0(x)dx = 0. \tag{2.51}$$

Utilizaremos aqui o mesmo método da seção anterior para construir equações integrais que sejam equivalentes aos problemas de onda viajante periódica das equações (2.49) e (2.50).

Em termos da função υ, em (2.4), a equação (2.49) é reduzida a equação diferencial ordinária de terceira ordem

$$\upsilon''' + \theta\upsilon'' + \rho^2\upsilon' = (f_2(\upsilon))' - h_2, \tag{2.52}$$

onde $h_2 = \delta^{-1}h_0$, $f_2 = \delta^{-1}f_0$, $\rho^2 = \beta/\delta$ e $\theta = \epsilon/\delta$.

Para a equação (2.50), em termos de (2.4), ocorre a redução

$$\upsilon''' - \theta\upsilon'' - \rho^2\upsilon' = -(f_2(\upsilon))' + h_2. \tag{2.53}$$

Como na seção anterior, adicionamos a condição de fronteira (2.7) para que seja possível estender, periodicamente em $\mathbb{R}$, quaisquer soluções no intervalo $[0, 2T]$ das equação (2.52) e (2.53) para ondas viajantes periódicas das equação (2.49) e (2.50) respectivamente. Também com o intuito de utilizar o método da função de Green, impomos a condição (2.8) aos problemas de fronteira (2.52)-(2.7) e (2.53)-(2.7).

Integrando ambos os lados de (2.52), por (2.7) e (2.8), obtemos

$$\upsilon'' + \theta\upsilon' + \rho^2\upsilon = f_2(\upsilon) - H_2 - \frac{1}{2T}\int_0^{2T}[f_2(\upsilon(\eta)) - H_2(\eta)]d\eta, \tag{2.54}$$

onde $H_2 = \delta^{-1}H_0$ com H_0 sendo qualquer primitiva de h_0.

Reciprocamente, derivando (2.54), verificamos que no intervalo $[0, 2T]$, uma função é solução do problema (2.52)-(2.7)-(2.8) se, e somente se, é solução para o problema (2.54)-(2.10). Do mesmo modo, podemos integrar (2.53) e utilizar (2.7) e (2.8) para obter

$$\upsilon'' - \theta\upsilon' - \rho^2\upsilon = -f_2(\upsilon) + H_2 + \frac{1}{2T}\int_0^{2T}[f_2(\upsilon(\eta)) - H_2(\eta)]d\eta, \tag{2.55}$$

e desta forma verificar que, no intervalo $[0, 2T]$, o problema (2.53)-(2.7)-(2.8) é equivalente ao problema (2.55)-(2.10).

Assim como fizemos na seção anterior, aqui também utilizaremos o método da função de Green para obter formulações integrais para os problemas (2.54)-(2.10) e (2.55)-(2.10). No próximo teorema, estabeleceremos as condições que as funções de Green deverão satisfazer.

Teorema 2.2.1 *Existem funções contínuas* $\widetilde{q}$ *e* $\widetilde{g}$ *em* $[0,2T]\times[0,2T]$ *tais que, para todo* $\xi\in(0,2T)$, $\widetilde{q_\xi}(\eta)=\widetilde{q}(\eta,\xi)$ *e* $\widetilde{g_\xi}(\eta)=\widetilde{g}(\eta,\xi)$ *satisfazem*

$$\widetilde{q_\xi}'' + \theta\widetilde{q_\xi}' + \rho^2\widetilde{q_\xi} = \delta_\xi - \frac{1}{2T}, \quad em \quad \mathcal{D}'((0,2T)), \tag{2.56}$$

$$\widetilde{q_\xi}^{(k)}(0) = \widetilde{q_\xi}^{(k)}(2T), \qquad k=0,1, \tag{2.57}$$

$$\widetilde{g_\xi}'' - \theta\widetilde{g_\xi}' - \rho^2\widetilde{g_\xi} = -\delta_\xi + \frac{1}{2T}, \quad em \quad \mathcal{D}'((0,2T)), \tag{2.58}$$

$$\widetilde{g_\xi}^{(k)}(0) = \widetilde{g_\xi}^{(k)}(2T), \qquad k=0,1. \tag{2.59}$$

Demonstração: Utilizando o Lema 2.1.1 e os mesmos argumentos da demonstração do Teorema 2.1.1, construímos as funções $\widetilde{q}$ e $\widetilde{g}$. No caso da função $\widetilde{q}$, há 3 soluções possíveis dependendo da posição relativa de θ e ρ.

Caso 1: $\theta^2-4\rho^2>0$, isto é, $\beta<\frac{\epsilon^2}{4\delta}$.

$$\widetilde{q}(\eta,\xi)=\begin{cases}\widetilde{H}(\eta-\xi+2T,\widetilde{w}_1)-\widetilde{H}(\eta-\xi+2T,\widetilde{w}_2)-\dfrac{1}{2T\rho^2}, & 0\le\eta\le\xi,\\[2ex] \widetilde{H}(\eta-\xi,\widetilde{w}_1)-\widetilde{H}(\eta-\xi,\widetilde{w}_2)-\dfrac{1}{2T\rho^2}, & \xi\le\eta\le 2T.\end{cases} \tag{2.60}$$

onde $\widetilde{H}$ é dada por

$$\widetilde{H}(\eta,w)=\frac{e^{w\eta}}{\widetilde{\mu}\,(1-e^{2Tw})}, \tag{2.61}$$

e

$$\widetilde{\mu}=\sqrt{\theta^2-4\rho^2}, \qquad \widetilde{w}_1=\frac{-\theta+\widetilde{\mu}}{2} \qquad \text{e} \qquad \widetilde{w}_2=\frac{-\theta-\widetilde{\mu}}{2}. \tag{2.62}$$

Caso 2: $\theta^2-4\rho^2=0$, isto é, $\beta=\frac{\epsilon^2}{4\delta}$.

$$\widetilde{q}(\eta,\xi)=\begin{cases}\frac{\theta^2[(\xi+2T)e^{-\theta T}-\xi]e^{\frac{-\theta(\eta-\xi+2T)}{2}}}{4\rho^2(1-e^{-\theta T})^2}+\frac{\theta^2(\eta+2T)e^{\frac{-\theta(\eta-\xi+2T)}{2}}}{4\rho^2(1-e^{-\theta T})}-\frac{1}{2T\rho^2}, & 0\le\eta\le\xi,\\[2ex] \frac{\theta^2[(\xi+2T)e^{-\theta T}-\xi]e^{\frac{-\theta(\eta-\xi)}{2}}}{4\rho^2(1-e^{-\theta T})^2}+\frac{\theta^2\eta e^{\frac{-\theta(\eta-\xi)}{2}}}{4\rho^2(1-e^{-\theta T})}-\frac{1}{2T\rho^2}, & \xi\le\eta\le 2T.\end{cases} \tag{2.63}$$

Caso 3: $\theta^2-4\rho^2<0$, isto é, $\beta>\frac{\epsilon^2}{4\delta}$.

$$\widetilde{q}(\eta,\xi)=\begin{cases}\frac{2e^{\frac{-\theta(\eta-\xi+2T)}{2}}[\sin\frac{\widetilde{\omega}(\eta-\xi+2T)}{2}-e^{-\theta T}\sin\frac{\widetilde{\omega}(\eta-\xi)}{2}]}{\widetilde{\omega}(e^{-2\theta T}-2e^{-\theta T}\cos\widetilde{\omega}T+1)}-\frac{1}{2T\rho^2}, & 0\leq\eta\leq\xi,\\ \\ \frac{2e^{\frac{-\theta(\eta-\xi)}{2}}[\sin\frac{\widetilde{\omega}(\eta-\xi)}{2}-e^{-\theta T}\sin\frac{\widetilde{\omega}(\eta-\xi-2T)}{2}]}{\widetilde{\omega}(e^{-2\theta T}-2e^{-\theta T}\cos\widetilde{\omega}T+1)}-\frac{1}{2T\rho^2}, & \xi\leq\eta\leq 2T,\end{cases} \tag{2.64}$$

onde

$$\widetilde{\omega}=\sqrt{4\rho^2-\theta^2}. \tag{2.65}$$

Para a função $\widetilde{g}$, obtemos

$$\widetilde{g}(\eta,\xi)=\begin{cases}\widetilde{G}(\eta-\xi+2T,\widetilde{z}_1)-\widetilde{G}(\eta-\xi+2T,\widetilde{z}_2)-\dfrac{1}{2T\rho^2}, & 0\leq\eta\leq\xi,\\ \\ \widetilde{G}(\eta-\xi,\widetilde{z}_1)-\widetilde{G}(\eta-\xi,\widetilde{z}_2)-\dfrac{1}{2T\rho^2}, & \xi\leq\eta\leq 2T.\end{cases} \tag{2.66}$$

onde $\widetilde{G}$ é dada por

$$\widetilde{G}(\eta,z)=\frac{e^{z\eta}}{\widetilde{\gamma}\,(e^{2Tz}-1)}, \tag{2.67}$$

e

$$\widetilde{\gamma}=\sqrt{\theta^2+4\rho^2},\qquad \widetilde{z}_1=\frac{\theta+\widetilde{\gamma}}{2},\qquad \widetilde{z}_2=\frac{\theta-\widetilde{\gamma}}{2}.\ \square \tag{2.68}$$

As funções encontradas no Teorema 2.2.1 gozam de propriedades semelhantes das do Teorema 2.1.1.

Lema 2.2.1 *As funções $\widetilde{G}(\eta,z)$ e $\widetilde{H}(\eta,w)$, definidas em (2.67) e (2.61), possuem as seguintes propriedades:*

(i) Considerando as constantes $\widetilde{z}_1$ e $\widetilde{z}_2$, dadas em (2.68), tem-se

$$\widetilde{G}(\eta,\widetilde{z}_1)-\widetilde{G}(\eta,\widetilde{z}_2)\geq 0.$$

(ii) Considerando a constante $\widetilde{\gamma}$, dada em (2.68), tem-se

$$\int_0^{\eta}\widetilde{G}(\eta-\xi,z)d\xi+\int_{\eta}^{2T}\widetilde{G}(\eta-\xi+2T,z)d\xi=\frac{1}{\widetilde{\gamma}z},\quad \forall\eta\in[0,2T],\ \ \forall z\in\mathbb{R}.$$

(iii) Considerando as constantes $\widetilde{w}_1$ e $\widetilde{w}_2$, dadas em (2.62), tem-se

$$\widetilde{H}(\eta,\widetilde{w}_1)-\widetilde{H}(\eta,\widetilde{w}_2)\geq 0,\quad \forall\eta\in[0,2T].$$

(iv) Considerando a constante $\widetilde{\mu}$*, dada em* (2.62)*, tem-se*

$$\int_0^{\eta} \widetilde{H}(\eta-\xi,w)d\xi + \int_{\eta}^{2T} \widetilde{H}(\eta-\xi+2T,w)d\xi = -\frac{1}{\widetilde{\mu}w}, \quad \forall \eta \in [0,2T], \quad \forall w \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: Análoga a do Lema 2.1.2. □

Lema 2.2.2 *Seja* $\upsilon \in C([0,2T])$ *tal que* $\upsilon \in C^2((0,2T))$ *e* $\upsilon(0) = \upsilon(2T)$*. Se* υ *satisfaz* (2.8) *e* (2.54)*, ou* (2.8) *e* (2.55)*, então* υ' *e* υ'' *são limitadas em* $(0,2T)$ *e, portanto,* υ *possui derivadas primeira e segunda na fronteira do intervalo* $[0,2T]$*. Além disso,* $\upsilon'(0) = \upsilon'(2T)$*.*

Demonstração: Análoga a do Lema 2.1.3. □

Para concluir esta seção, com uma demonstração análoga a do Teorema 2.1.2, enunciamos o teorema de representação integral para os problemas de valor de fronteira (2.54)-(2.10) e (2.55)-(2.10); e o seu corolário, dando assim uma caracterização integral para os problemas de existência de onda viajante periódica das equações (2.49) e (2.50).

Teorema 2.2.2 *Seja* υ *uma função contínua em* $[0,2T]$*.*

(i) υ *é uma solução do problema de valor de fronteira* (2.54)-(2.10) *em* $[0,2T]$ *se, e somente se, é uma solução da equação integral*

$$\upsilon(\eta) = \int_0^{2T} \widetilde{q}(\eta,\xi)[f_2(\upsilon(\xi)) - H_2(\xi)]d\xi, \qquad 0 \leq \eta \leq 2T, \tag{2.69}$$

onde $\widetilde{q}(\eta,\xi)$ *é a função construída no Teorema* 2.2.1*.*

(ii) υ *é uma solução do problema de valor de fronteira* (2.55)-(2.10) *se, e somente se, é uma solução da equação integral*

$$\upsilon(\eta) = \int_0^{2T} \widetilde{g}(\eta,\xi)[f_2(\upsilon(\xi)) - H_2(\xi)]d\xi, \qquad 0 \leq \eta \leq 2T, \tag{2.70}$$

onde $\widetilde{g}(\eta,\xi)$ *é a função construída no Teorema* 2.2.1*.*

Corolário 2.2.1

(i) Qualquer solução contínua υ *de* (2.69) *pode ser estendida para uma função* $2T$*-periódica* $u \in C^3(\mathbb{R})$ *tal que* $u(x-\beta t)$ *é uma onda viajante periódica de* (2.49)*.*

(ii) Qualquer solução contínua υ *de* (2.70) *pode ser estendida para uma função* $2T$*-periódica* $u \in C^3(\mathbb{R})$ *tal que* $u(x-\beta t)$ *é uma onda viajante periódica de* (2.50)*.*

2.3 Existência de Ondas Viajantes Periódicas

Nesta seção utilizaremos as representação integrais, obtidas nas Seções 2.1 e 2.2, para obter resultados de existência de ondas viajantes periódicas para as equações (2.1), (2.2), (2.49) e (2.50).

Seja C_{2T} o espaço das funções contínuas, $\upsilon(\eta)$, em $[0, 2T]$, tal que $\upsilon(0) = \upsilon(2T)$, equipado com a norma do máximo $\|\cdot\|$. Tomamos $B_r(0)$, como notação, para ser a bola fechada de C_{2T} com centro em zero e raio $r > 0$.

Para $\upsilon \in C_{2T}$, definimos os operadores

$$A\upsilon(\eta) = \int_0^{2T} g(\eta, \xi)[f_1(\upsilon(\xi)) - H_1(\xi)]d\xi, \qquad \forall \eta \in [0, 2T], \tag{2.71}$$

e

$$U\upsilon(\eta) = \int_0^{2T} q(\eta, \xi)[f_1(\upsilon(\xi)) - H_1(\xi)]d\xi, \qquad \forall \eta \in [0, 2T], \tag{2.72}$$

onde $g(\eta, \xi)$ e $q(\eta, \xi)$ são as funções do Teorema 2.1.1.

Lema 2.3.1 *Os operadores A e U possuem as seguintes propriedades:*

(i) $A, U : C_{2T} \to C_{2T}$.

(ii) Os fechos $\overline{A(B_r(0))}$ e $\overline{U(B_r(0))}$ são compactos em C_{2T}, para todo $r > 0$.

(iii) As restrições $A|_{B_r(0)}$ e $U|_{B_r(0)}$ são contínuas, para todo $r > 0$.

Demonstração: Demonstraremos os resultados deste lema para o operador A, os resultados para o operador U seguem de modo análogo.

Para demonstrar (i) é suficiente usar (2.13) e a continuidade uniforme de g no compacto $[0, 2T] \times [0, 2T]$. Para obter (ii), usamos a desigualdade

$$|A\upsilon(\eta)| \leq 2T \sup_{x,\xi \in [0,2T]} |g(x, \xi)| \sup_{(z,\xi) \in [-r,r] \times [0,2T]} |f_1(z) - H_1(\xi)|,$$

para concluir que $A(B_r(0))$ é uniformemente limitada. A continuidade uniforme de g e a desigualdade

$$|A\upsilon(\eta) - A\upsilon(z)| \leq \int_0^{2T} |g(\eta, \xi) - g(z, \xi)| \, d\xi \sup_{(z,\xi) \in [-r,r] \times [0,2T]} |f_1(z) - H_1(\xi)|,$$

leva-nos a concluir que $A(B_r(0))$ é equicontínua, então pelo Teorema 1.1.2 obtemos a compacidade de $\overline{A(B_r(0))}$ em C_{2T}. Para obter (iii), é suficiente usar a desigualdade

$$\|Av - Au\| \leq 2T \sup_{\eta,\xi\in[0,2T]} |g(\eta,\xi)| \sup_{z\in[-r,r]} |f_1'(z)| \, \|v-u\|, \qquad \forall v,u \in B_r(0). \quad \square$$

Agora, estabeleceremos os teoremas de existência de onda viajante periódica. Antes porém, fixado $r>0$, definiremos a constante

$$M_r = \sup_{(w,\xi)\in[-r,r]\times[0,2T]} |f_0(w) - H_0(\xi)|. \tag{2.73}$$

Teorema 2.3.1 *Se $r>0$ e $\beta \geq \frac{2M_r}{r}$, onde M_r é dado por* (2.73)*, então a equação* (2.1) *admite onda viajante periódica na forma $u(x-\beta t)$ tal que $|u(x-\beta t)| \leq r$.*

Demonstração: Por (i) do Lema 2.1.2 e (2.36), obtemos

$$|g(\eta,\xi)| \leq \begin{cases} G(\eta-\xi+2T,z_1) - G(\eta-\xi+2T,z_2) + \frac{1}{2T\lambda^2}, & 0\leq\eta\leq\xi, \\ \\ G(\eta-\xi,z_1) - G(\eta-\xi,z_2) + \frac{1}{2T\lambda^2}, & \xi\leq\eta\leq 2T, \end{cases}$$

assim, por (ii) do Lema 2.1.2,

$$\begin{aligned} \int_0^{2T} |g(\eta,\xi)|d\xi &= \int_0^{\eta} |g(\eta,\xi)|d\xi + \int_{\eta}^{2T} |g(\eta,\xi)|\, d\xi \\ &\leq \int_0^{\eta} G(\eta-\xi,z_1) - G(\eta-\xi,z_2)d\xi \\ &+ \int_{\eta}^{2T} G(\eta-\xi+2T,z_1) - G(\eta-\xi+2T,z_2)d\xi + \frac{1}{\lambda^2} \\ &= \int_0^{\eta} G(\eta-\xi,z_1)d\xi + \int_{\eta}^{2T} G(\eta-\xi+2T,z_1)d\xi \\ &- \left(\int_0^{\eta} G(\eta-\xi,z_2)d\xi + \int_{\eta}^{2T} G(\eta-\xi+2T,z_2)d\xi\right) + \frac{1}{\lambda^2} \\ &= \frac{1}{\gamma z_1} - \frac{1}{\gamma z_2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} = 2\delta, \quad \forall \eta\in[0,2T]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sup_{\eta\in[0,2T]} \int_0^{2T} |g(\eta,\xi)|\, d\xi \leq 2\delta.$$

Então, para $\upsilon \in B_r(0)$, desde que $f_1 = \frac{1}{\delta\beta} f_0$ e $H_1 = \frac{1}{\delta\beta} H_0$, temos

$$\|A\upsilon\| \leq \sup_{\eta\in[0,2T]} \int_0^{2T} |g(\eta,\xi)|\, d\xi\, \|f_1(\upsilon) - H_1\| \leq \frac{2M_r}{\beta} \leq r.$$

Assim, concluímos que $\overline{A(B_r(0))} \subset B_r(0)$ e pelo Lema 2.3.1 e Teorema 1.1.3, A tem um ponto fixo $\upsilon \in B_r(0)$. Então, recorrendo ao Corolário 2.1.1, obtemos a demonstração do Teorema 2.3.1. □

Teorema 2.3.2 *Sejam $r > 0$ e M_r dado por (2.73). Para qualquer um dos três casos:*

(i) $\dfrac{2M_r}{r} \leq \beta < \dfrac{\epsilon}{2\delta^{1/2}}$,

(ii) $\left[\dfrac{12T^2}{\delta(1-e^{\frac{-2T}{\delta^{1/2}}})^2} + \dfrac{8T^2}{\delta(1-e^{\frac{-2T}{\delta^{1/2}}})} + 1\right] \dfrac{M_r}{r} \leq \beta = \dfrac{\epsilon}{2\delta^{1/2}}$,

(iii) $\left[\frac{8T}{(4\beta^2\delta-\epsilon^2)^{\frac{1}{2}}(1-e^{\frac{-\epsilon T}{\delta\beta}})^2} + \frac{1}{\beta}\right] \frac{M_r}{r} \leq 1$ *e* $\beta > \frac{\epsilon}{2\delta^{1/2}}$.

A equação (2.2) admite onda viajante periódica $u(x-\beta t)$ tal que $|u(x-\beta t)| \leq r$.

Demonstração: A função de Green $q(\eta,\xi)$, utilizada no operador definido em (2.72), é dada em três casos distintos, dependendo da posição relativa de ϵ, δ e β, de acordo com os casos 1, 2 e 3 estabelecidos na demonstração do Teorema 2.1.1. Portanto, considerando (i), a função de Green deste caso será a função (2.40). Então, por (iii) do Lema 2.1.2, obtemos

$$|q(\eta,\xi)| \leq \begin{cases} H(\eta-\xi+2T,w_1) - H(\eta-\xi+2T,w_2) + \frac{1}{2T\lambda^2}, & 0 \leq \eta \leq \xi, \\ \\ H(\eta-\xi,w_1) - H(\eta-\xi,w_2) + \frac{1}{2T\lambda^2}, & \xi \leq \eta \leq 2T, \end{cases}$$

assim, por (iv) do Lema 2.1.2,

$$\begin{aligned} \int_0^{2T} |q(\eta,\xi)|d\xi &= \int_0^{\eta} |q(\eta,\xi)|d\xi + \int_{\eta}^{2T} |q(\eta,\xi)|d\xi \\ &\leq \int_0^{\eta} H(\eta-\xi,w_1)d\xi + \int_{\eta}^{2T} H(\eta-\xi+2T,w_1)d\xi \\ &\quad - \left(\int_0^{\eta} H(\eta-\xi,w_2)d\xi + \int_{\eta}^{2T} H(\eta-\xi+2T,w_2)d\xi\right) + \frac{1}{\lambda^2} \\ &= -\frac{1}{\mu w_1} + \frac{1}{\mu w_2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} = 2\delta, \quad \forall\eta \in [0,2T]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sup_{\eta\in[0,2T]}\int_0^{2T}|q(\eta,\xi)|\,d\xi\leq 2\delta.$$

Então, para $\upsilon\in B_r(0)$, obtemos

$$\|U\upsilon\|\leq\sup_{\eta\in[0,2T]}\int_0^{2T}|q(\eta,\xi)|\,d\xi\,\|f_1(\upsilon)-H_1\|\leq\frac{2M_r}{\beta}\leq r.$$

Assim, concluímos que $\overline{U(B_r(0))}\subset B_r(0)$ e pelo Lema 2.3.1 e Teorema 1.1.3, U tem um ponto fixo $\upsilon\in B_r(0)$. Então, recorrendo ao Corolário 2.1.1, segue que a equação (2.2) admite onda viajante periódica $u(x-\beta t)$ tal que $|u(x-\beta t)|\leq r$.

Agora, assumindo (ii), a função de Green será a (2.41). Daí, observando que $\alpha=\frac{\epsilon}{\delta\beta}$ e $\lambda^2=\delta^{-1}$, obtemos

$$|q(\eta,\xi)|\leq\delta\left[\frac{6T}{\delta(1-e^{\frac{-2T}{\delta^{1/2}}})^2}+\frac{4T}{\delta(1-e^{\frac{-2T}{\delta^{1/2}}})}+\frac{1}{2T}\right],\qquad\forall\eta,\xi\in[0,2T].$$

Portanto, para $\upsilon\in B_r(0)$,

$$\|U\upsilon\|\leq\sup_{\eta\in[0,2T]}\int_0^{2T}|q(\eta,\xi)|\,d\xi\,\|f_1(\upsilon)-H_1\|\leq r.$$

Como antes, concluímos que $\overline{U(B_r(0))}\subset B_r(0)$, então recorremos ao Lema 2.3.1, Teorema 1.1.3 e Corolário 2.1.1 para concluir como no caso anterior.

Para (iii), a função de Green será a (2.42). Assim, observando que

$$e^{-2\alpha T}-2e^{-\alpha T}\cos\omega T+1\geq(1-e^{-\alpha T})^2=(1-e^{\frac{-\epsilon T}{\delta\beta}})^2,$$

obtemos

$$|q(\eta,\xi)|\leq\frac{4}{\omega(1-e^{\frac{-\epsilon T}{\delta\beta}})^2}+\frac{1}{2T\lambda^2}.$$

Então, para $\upsilon\in B_r(0)$,

$$\|U\upsilon\|\leq\left[\frac{8T}{(4\beta^2\delta-\epsilon^2)^{\frac{1}{2}}(1-e^{\frac{-\epsilon T}{\delta\beta}})^2}+\frac{1}{\beta}\right]M_r\leq r.$$

Concluindo como nos outros dois casos, o resultado segue. □

De modo análogo ao que fizemos para obter os teoremas de existência de onda viajante para as equações BBM-Burgers, podemos usar as funções $\widetilde{g}(\eta,\xi)$ e $\widetilde{q}(\eta,\xi)$, do Teorema 2.2.1, para definir os operadores

$$\widetilde{A}\upsilon(\eta)=\int_0^{2T}\widetilde{g}(\eta,\xi)[f_2(\upsilon(\xi))-H_2(\xi)]d\xi,\qquad \forall\eta\in[0,2T], \tag{2.74}$$

e

$$\widetilde{U}\upsilon(\eta)=\int_0^{2T}\widetilde{q}(\eta,\xi)[f_2(\upsilon(\xi))-H_2(\xi)]d\xi,\qquad \forall\eta\in[0,2T], \tag{2.75}$$

e demonstrar os seguintes teoremas de existência de onda viajante periódica para as equações KdVB.

Teorema 2.3.3 *Sejam $r>0$ e M_r dado por* (2.73)*. Para qualquer um dos três casos:*

(i) $\dfrac{2M_r}{r}\leq\beta<\dfrac{\epsilon^2}{4\delta}$,

(ii) $\left[\dfrac{3T^2\epsilon^2}{\delta^2(1-e^{\frac{-\epsilon T}{\delta}})^2}+\dfrac{2T^2\epsilon^2}{\delta^2(1-e^{\frac{-\epsilon T}{\delta}})}+1\right]\dfrac{M_r}{r}\leq\beta=\dfrac{\epsilon^2}{4\delta}$,

(iii) $\left[\frac{8T}{(4\beta\delta-\epsilon^2)^{\frac{1}{2}}(1-e^{\frac{-\epsilon T}{\delta}})^2}+\frac{1}{\beta}\right]\frac{M_r}{r}\leq 1$ *e* $\beta>\frac{\epsilon^2}{4\delta}$.

A equação (2.49) *admite onda viajante periódica $u(x-\beta t)$ tal que $|u(x-\beta t)|\leq r$.*

Demonstração: A função de Green $\widetilde{q}(\eta,\xi)$, utilizada no operador (2.75), é dada em três casos distintos de acordo com os casos 1, 2 e 3 estabelecidos na demonstração do Teorema 2.2.1. Portanto, considerando (i), a função de Green deste caso será a função (2.60). Então, por (iii) do Lema 2.2.1, obtemos

$$|\widetilde{q}(\eta,\xi)|\leq\begin{cases}\widetilde{H}(\eta-\xi+2T,\widetilde{w}_1)-\widetilde{H}(\eta-\xi+2T,\widetilde{w}_2)+\frac{1}{2T\rho^2}, & 0\leq\eta\leq\xi,\\ \\ \widetilde{H}(\eta-\xi,\widetilde{w}_1)-\widetilde{H}(\eta-\xi,\widetilde{w}_2)+\frac{1}{2T\rho^2}, & \xi\leq\eta\leq 2T,\end{cases}$$

assim, por (iv) do Lema 2.2.1, obtemos

$$\sup_{\eta\in[0,2T]}\int_0^{2T}|\widetilde{q}(\eta,\xi)|\,d\xi\leq\frac{2\delta}{\beta}.$$

Então, para $\upsilon\in B_r(0)$, observanto que $f_2=\frac{1}{\delta}f_0$ e $H_2=\frac{1}{\delta}H_0$, segue que

$$\left\|\widetilde{U}\upsilon\right\|\leq\sup_{\eta\in[0,2T]}\int_0^{2T}|\widetilde{q}(\eta,\xi)|\,d\xi\,\|f_2(\upsilon)-H_2\|\leq\frac{2M_r}{\beta}\leq r.$$

Portanto, concluímos que $\overline{\widetilde{U}(B_r(0))} \subset B_r(0)$ e pelo Lema 2.3.1 e Teorema 1.1.3, $\widetilde{U}$ tem um ponto fixo $\upsilon \in B_r(0)$. Então, pelo Corolário 2.2.1, segue que a equação (2.49) admite onda viajante periódica $u(x-\beta t)$ tal que $|u(x-\beta t)| \leq r$.

Agora, se supormos (ii), a função de Green será a (2.63). Daí, observando que $\theta = \frac{\epsilon}{\delta}$ e $\rho^2 = \frac{\beta}{\delta}$, obtemos

$$|\widetilde{q}(\eta,\xi)| \leq \frac{\delta}{\beta}\left[\frac{3T\epsilon^2}{2\delta^2(1-e^{\frac{-\epsilon T}{\delta}})^2} + \frac{T\epsilon^2}{\delta^2(1-e^{\frac{-\epsilon T}{\delta}})} + \frac{1}{2T}\right],\ \forall \eta,\xi \in [0,2T].$$

Portanto, para $\upsilon \in B_r(0)$,

$$\left\|\widetilde{U}\upsilon\right\| \leq \sup_{\eta\in[0,2T]} \int_0^{2T} |\widetilde{q}(\eta,\xi)|\, d\xi\, \|f_2(\upsilon) - H_2\| \leq r.$$

Como antes, concluímos que $\overline{\widetilde{U}(B_r(0))} \subset B_r(0)$, então, pelo Lema 2.3.1, Teorema 1.1.3 e Corolário 2.2.1, o resultado segue como no caso anterior.

Para (iii), a função de Green será a (2.64). Assim, observando que

$$e^{-2\theta T} - 2e^{-\theta T}\cos\widetilde{\omega}T + 1 \geq (1-e^{-\theta T})^2 = (1-e^{\frac{-\epsilon T}{\delta}})^2,$$

obtemos

$$|\widetilde{q}(\eta,\xi)| \leq \frac{4}{\widetilde{\omega}(1-e^{\frac{-\epsilon T}{\delta}})^2} + \frac{1}{2T\rho^2}.$$

Então, para $\upsilon \in B_r(0)$,

$$\left\|\widetilde{U}\upsilon\right\| \leq \left[\frac{8T}{\sqrt{4\beta\delta-\epsilon^2}(1-e^{\frac{-\epsilon T}{\delta}})^2} + \frac{1}{\beta}\right] M_r \leq r.$$

Concluindo como nos outros dois casos, obtemos o resultado desejado. □

Teorema 2.3.4 *Se $r>0$ e $\beta \geq \frac{2M_r}{r}$, onde M_r é dado por* (2.73)*, então a equação* (2.50) *admite onda viajante periódica $u(x-\beta t)$ tal que $|u(x-\beta t)| \leq r$.*

Demonstração: Na demonstração do Teorema 2.3.1, tomando a função de Green $\widetilde{g}$, dada por (2.66), no lugar da g e o operador $\widetilde{A}$, definido em (2.74), no lugar de A, o resultado segue. □

Como consequência imediata dos Teoremas 2.3.1, 2.3.3 e 2.3.4 segue o último resultado desta seção.

Corolário 2.3.1 *Para qualquer $r > 0$, se β for tomado suficientemente grande, as equações* (2.1), (2.49) *e* (2.50) *admitirão onda vianjante periódica com amplitude limitada por r.*

Observação 2.3.1 *O método da função de Green que empregamos neste capítulo para estudar as equações* (2.1), (2.2), (2.49) *e* (2.50) *também poderia ser utilizado para estudar as equações*

$$u_t + (f_0(u))_x + \epsilon u_{xx} - \delta u_{xxt} = h_0(x - \beta t), \qquad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0, \tag{2.76}$$

$$u_t + (f_0(u))_x + \epsilon u_{xx} + \delta u_{xxt} = h_0(x - \beta t), \qquad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0, \tag{2.77}$$

$$u_t + (f_0(u))_x + \epsilon u_{xx} - \delta u_{xxx} = h_0(x - \beta t), \qquad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0, \tag{2.78}$$

$$u_t + (f_0(u))_x + \epsilon u_{xx} + \delta u_{xxx} = h_0(x - \beta t), \qquad x \in \mathbb{R},\ t \geq 0. \tag{2.79}$$

As funções de Green para o problema da onda viajante periódica destas equações, exceto pela mudança de sinal em alguns parâmetros, são semelhantes as funções de Green que encontramos para os problemas das equações (2.1), (2.2), (2.49) *e* (2.50). *Sendo mais preciso, as funções de Green de* (2.76) *e* (2.79) *são, respectivamente, as funções* (2.36) *e* (2.66), *trocando-se α por $-\alpha$ e θ por $-\theta$. Por estas semelhanças, para as equações* (2.76) *e* (2.79), *pode-se obter exatamente os mesmos resultados dos Teoremas* 2.3.1 *e* 2.3.4. *Quanto as funções de Green de* (2.77) *e* (2.78), *este fenômeno também acontece, isto é, estas funções são, respectivamente, as funções de Green dos problemas das equações* (2.2) *e* (2.49), *trocando-se α por $-\alpha$ e θ por $-\theta$. Devido a estas semelhanças, os seguintes resultados podem ser obtidos:*

1. *Sejam $r > 0$ e M_r dado por* (2.73). *Para qualquer um dos três casos:*

(i) $\dfrac{2M_r}{r} \leq \beta < \dfrac{\epsilon}{2\delta^{1/2}}$,

(ii) $\left[\dfrac{12T^2 e^{\frac{4T}{\delta^{1/2}}}}{\delta(e^{\frac{2T}{\delta^{1/2}}} - 1)^2} + \dfrac{8T^2 e^{\frac{2T}{\delta^{1/2}}}}{\delta(e^{\frac{2T}{\delta^{1/2}}} - 1)} + 1\right] \dfrac{M_r}{r} \leq \beta = \dfrac{\epsilon}{2\delta^{1/2}}$,

(iii) $\left[\dfrac{8Te^{\frac{2\epsilon T}{\delta\beta}}}{(4\beta^2\delta - \epsilon^2)^{\frac{1}{2}}(e^{\frac{\epsilon T}{\delta\beta}} - 1)^2} + \dfrac{1}{\beta}\right] \dfrac{M_r}{r} \leq 1$ *e* $\beta > \dfrac{\epsilon}{2\delta^{1/2}}$.

A equação (2.77) *admite onda viajante periódica $u(x - \beta t)$ tal que $|u(x - \beta t)| \leq r$.*

2. *Sejam* $r > 0$ *e* M_r *dado por* (2.73). *Para qualquer um dos três casos:*

(i) $\dfrac{2M_r}{r} \leq \beta < \dfrac{\epsilon^2}{4\delta}$,

(ii) $\left[\dfrac{3T^2\epsilon^2 e^{\frac{2\epsilon T}{\delta}}}{\delta^2(e^{\frac{\epsilon T}{\delta}}-1)^2} + \dfrac{2T^2\epsilon^2 e^{\frac{\epsilon T}{\delta}}}{\delta^2(e^{\frac{\epsilon T}{\delta}}-1)} + 1\right]\dfrac{M_r}{r} \leq \beta = \dfrac{\epsilon^2}{4\delta}$,

(iii) $\left[\frac{8Te^{\frac{2\epsilon T}{\delta}}}{(4\beta\delta-\epsilon^2)^{\frac{1}{2}}(e^{\frac{\epsilon T}{\delta}}-1)^2} + \frac{1}{\beta}\right]\frac{M_r}{r} \leq 1$ *e* $\beta > \frac{\epsilon^2}{4\delta}$.

A equação (2.78) *admite onda viajante periódica* $u(x-\beta t)$ *tal que* $|u(x-\beta t)| \leq r$.

3. *Para qualquer* $r > 0$, *se* β *for tomado suficientemente grande, as equações* (2.76), (2.78) *e* (2.79) *admitirão onda vianjante periódica com amplitude limitada por* r.

Todavia, para que não houvesse uma exaustiva repetição de argumentos, optamos por não mencionar, exceto nesta observação, os casos das equações (2.76), (2.77), (2.78) *e* (2.79).

Capítulo 3

Equação de Kawahara

Considere a seguinte versão generalizada da equação de Kawahara

$$\partial_t u + \beta \partial_x^3 u - \gamma \partial_x^5 u = a(u)\partial_x u, \tag{3.1}$$

onde $\beta, \gamma \geq 0$ tais que $(\beta, \gamma) \neq (0,0)$ e $a(s)$ é uma função regular real satisfazendo

$$|a(s)| \leq M_1(|s| + |s|^\rho), \text{ para algum } \rho \geq 1 \text{ e } M_1 > 0. \tag{3.2}$$

Nosso objetivo neste capítulo será buscar por condições de decaimento de solução que sejam satisfeitas unicamente pela solução nula. Verificaremos que sob certas condições, se uma solução da equação (3.1) tem um decaimento exponencial linear, então essa solução é identicamente nula. Para ser mais preciso, o resultado que provaremos é o seguinte:

Teorema 3.0.5 *Existem constantes universais $C_0 \geq 1$ e $C_1 > 0$ tais que, se uma solução real $u \in C^1(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}))$ de (3.1) satisfaz*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{2\lambda|x-bt|}(\partial_x^k u(t,x))^2 dx < \infty, \qquad k = 0, 1, \ldots, 5, \tag{3.3}$$

onde

$$\lambda \geq \max\left\{ C_0(1+\beta+\gamma+\beta\gamma), \frac{2^{\rho+4} C_1^{\frac{\rho}{6}+1} M_1^2}{\min\{1, \beta+\gamma^2\}} \right\} \qquad e \qquad b \geq \lambda^5,$$

e, além disso,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|u(t,\cdot)\|^2_{H^1(\mathbb{R})} \leq M_2, \tag{3.4}$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{|x-bt|}u^2(t,x)dx \leq M_3, \tag{3.5}$$

para constantes $M_2 > 0$ *e* $M_3 > 0$ *tais que* $M_2^{\frac{1}{2}}M_3^{\frac{1}{2}} + M_3 \leq 1$*, então*

$$u \equiv 0.$$

No caso $\gamma = 0$ e $\beta = 1$, em (3.1), quando se tem uma equação do tipo KdV, Kenig, Ponce e Vega, em [26], provaram que o resultado do Teorema 3.0.5 vale para qualquer $b \in \mathbb{R}$. Contudo, se $\gamma > 0$, há a necessidade da condição $b \geq \lambda^5$, no Teorema 3.0.5. No Apêndice deste capítulo, veja que, se, nas hipóteses do Teorema 3.0.5, considerarmos

$$\lambda < \max\left\{C_0(1+\beta+\gamma+\beta\gamma), \frac{2^{\rho+4}C_1^{\frac{\rho}{6}+1}M_1^2}{\min\{1,\beta+\gamma^2\}}\right\} \qquad \text{ou} \qquad b < \lambda^5,$$

então, pode existir uma solução não nula de (3.1) que satisfaça (3.3), (3.4) e (3.5). Além disso, para o caso $\gamma = 0$ e $\beta = 1$, em (3.1), a teoria sobre persistência de soluções desenvolvida por Kato, em [24], assegura que é suficiente, para a validade do Teorema 3.0.5, que, além das hipóteses (3.4) e (3.5), se tenha (3.3) apenas para $k = 0$, veja [26].

Para demonstrar o Teorema 3.0.5 nos basearemos no método, estabelecido por Escauriaza, Kenig, Ponce e Vega, em [14] e [26], utilizado para obter resultados de decaimento para as equações KdV e Schrödinger. Seguindo este método, na Seção 3.1, construiremos duas famílias de operadores, $\{\mathcal{S}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ com propriedades simétricas e $\{\mathcal{A}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ com propriedades antissimétricas, que serão capazes de reescrever a equação (3.1), como veremos, de uma maneira bem conveniente. Uma vez obtidos estes operadores, o maior desafio deste método se encontrará na Seção 3.2 quando formos trabalhar com o comutador $[\mathcal{S}, \mathcal{A}]$. A dificuldade que encontraremos será devido ao tamanho deste comutador, o que dificulta o uso desta técnica para equações de ordem mais alta como as equações KdV de sétima e nona ordem, veja estas equações em [38]. Na Seção 3.3, obteremos alguns resultados de limitação para o termo não linear da equação (3.1) e estabeleceremos uma lei de conservação da norma L^2 para as soluções da equação (3.1), que satisfizerem as hipóteses do Teorema 3.0.5. Por fim, na Seção 3.4, demonstraremos o Teorema 3.0.5. Esta demonstração basicamente consistirá em utilizarmos as propriedades dos operadores $\mathcal{S}(t)$ e $\mathcal{A}(t)$ para verificar que, se uma solução $u(t,x)$ da equação (3.1) cumpre as hipóteses

do Teorema 3.0.5, então

$$\int_1^\infty \|u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\, dt < \infty,$$

e portanto $u \equiv 0$, pela lei de conservação da norma L^2 que estabeleceremos.

3.1 Linearização do Problema

Nesta seção buscaremos por uma nova caracterização para a equação (3.1). Obteremos aqui duas famílias de operadores que utilizaremos para reescrever a equação (3.1), de uma forma como veremos na Seção 3.4, bem conveniente.

Considere, a serem escolhidas posteriomente, uma constante $\lambda > 0$ e uma função $\theta \in C^{10}(\mathbb{R}^2)$, não necessariamente limitada, mas com derivadas limitadas. Para $u \in C^1(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}))$ solução de (3.1), tome

$$f(t,x) = e^{\lambda\theta(t,x)}u(t,x). \tag{3.6}$$

Observando que

$$\begin{aligned} e^{\lambda\theta}(\partial_t + \beta\partial_x^3 - \gamma\partial_x^5)(e^{-\lambda\theta}f) &= e^{\lambda\theta}(\partial_t + \beta\partial_x^3 - \gamma\partial_x^5)(u) \\ &= e^{\lambda\theta}a(u)\partial_x u = a(u)(\partial_x f - \lambda\partial_x\theta f), \end{aligned}$$

e

$$e^{\lambda\theta}(\partial_t + \beta\partial_x^3 - \gamma\partial_x^5)(e^{-\lambda\theta}f) = -\lambda\partial_t\theta f + \partial_t f + \beta e^{\lambda\theta}\partial_x^3(e^{-\lambda\theta}f) - \gamma e^{\lambda\theta}\partial_x^5(e^{-\lambda\theta}f),$$

obtemos

$$\partial_t f = -\left[-\lambda\partial_t\theta f + \beta e^{\lambda\theta}\partial_x^3(e^{-\lambda\theta}f) - \gamma e^{\lambda\theta}\partial_x^5(e^{-\lambda\theta}f)\right] + a(u)(\partial_x f - \lambda\partial_x\theta f). \tag{3.7}$$

Mais adiante, veremos que a condição (3.3) do Teorema 3.0.5 localiza as soluções da equação (3.1), com respeito a variável espacial, no espaço de Sobolev $H^5(\mathbb{R})$. Este fato será de grande importância para o nosso trabalho, uma vez que o espaço $H^5(\mathbb{R})$ possui mais regularidade que $H^1(\mathbb{R})$. A seguir, definiremos operadores em $H^5(\mathbb{R})$ que serão utilizados para obter uma melhor caracterização para (3.7).

Para $j \in \{1,2\}$, considere as aplicações

$$T_j : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{L}\left(H^5(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R})\right), \qquad T_j(t)g = e^{\lambda\theta(t,x)}\partial_x^{2j+1}(e^{-\lambda\theta(t,x)}g), \tag{3.8}$$

e

$$T_j^* : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{L}\left(H^5(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R})\right), \qquad T_j^*(t)g = -e^{-\lambda\theta(t,x)}\partial_x^{2j+1}(e^{\lambda\theta(t,x)}g). \tag{3.9}$$

Lema 3.1.1 *Para $j \in \{1,2\}$ e $t \in \mathbb{R}$, tem-se*

$$\int_{\mathbb{R}} (T_j(t)g)(x)h(x)dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)(T_j^*(t)h)(x)dx, \qquad \forall g, h \in H^5(\mathbb{R}).$$

Demonstração: Pela Proposição 1.3.6, observamos que $H^5(\mathbb{R}) \subset C_0^4(\mathbb{R})$. Portanto, integrando por partes, obtemos a demonstração do Lema 3.1.1. □

Agora, usaremos (3.8) e (3.9) para definir os seguintes operadores

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1 &= \frac{\beta(T_1 + T_1^*)}{2} \\ &= -3\beta\lambda\partial_x\theta\partial_x^2 - 3\beta\lambda\partial_x^2\theta\partial_x - \beta\lambda^3(\partial_x\theta)^3 - \beta\lambda\partial_x^3\theta,\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &= \frac{\beta(T_1 - T_1^*)}{2} \\ &= \beta\partial_x^3 + 3\beta\lambda^2(\partial_x\theta)^2\partial_x + 3\beta\lambda^2\partial_x\theta\partial_x^2\theta,\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_2 &= -\lambda\partial_t\theta - \frac{\gamma(T_2 + T_2^*)}{2} \\ &= -\lambda\partial_t\theta + 5\gamma\lambda\partial_x\theta\partial_x^4 + 10\gamma\lambda\partial_x^2\theta\partial_x^3 + 10\gamma\lambda^3(\partial_x\theta)^3\partial_x^2 \\ &\quad +10\gamma\lambda\partial_x^3\theta\partial_x^2 + 30\gamma\lambda^3(\partial_x\theta)^2\partial_x^2\theta\partial_x + 5\gamma\lambda\partial_x^4\theta\partial_x \\ &\quad +\gamma\lambda^5(\partial_x\theta)^5 + 10\gamma\lambda^3(\partial_x\theta)^2\partial_x^3\theta + 15\gamma\lambda^3\partial_x\theta(\partial_x^2\theta)^2 + \gamma\lambda\partial_x^5\theta,\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{A}_2} &= -\frac{\gamma(T_2 - T_2^*)}{2} \\ &= -\gamma\partial_x^5 - 10\gamma\lambda^2(\partial_x\theta)^2\partial_x^3 - 30\gamma\lambda^2\partial_x\theta\partial_x^2\theta\partial_x^2 - 5\gamma\lambda^4(\partial_x\theta)^4\partial_x \\ &\quad -20\gamma\lambda^2\partial_x\theta\partial_x^3\theta\partial_x - 15\gamma\lambda^2(\partial_x^2\theta)^2\partial_x - 10\gamma\lambda^4(\partial_x\theta)^3\partial_x^2\theta \\ &\quad -10\gamma\lambda^2\partial_x^2\theta\partial_x^3\theta - 5\gamma\lambda^2\partial_x\theta\partial_x^4\theta.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Daí, tomando

$$\mathcal{A}_2 = \partial_t + \widetilde{\mathcal{A}}_2, \qquad \mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2, \qquad \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2, \qquad \widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_1 + \widetilde{\mathcal{A}_2}, \tag{3.14}$$

podemos usar o Lema 3.1.1 para obter

$$\int_{\mathbb{R}} (\mathcal{S}(t)g)(x)h(x)dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)(\mathcal{S}(t)h)(x)dx, \qquad \forall g, h \in H^5(\mathbb{R}), \tag{3.15}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}} (\widetilde{\mathcal{A}}(t)g)(x)h(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} g(x)(\widetilde{\mathcal{A}}(t)h)(x)dx, \qquad \forall g, h \in H^5(\mathbb{R}). \tag{3.16}$$

Além disso, por (3.7), segue que

$$\partial_t f = -(\mathcal{S} + \widetilde{\mathcal{A}})f + a(u)(\partial_x f - \lambda \partial_x \theta f). \tag{3.17}$$

Portanto, observamos que, se u satisfaz (3.1), então $f = e^{\lambda\theta}u$ satisfará (3.17).

3.2 O Comutador $[\mathcal{S}, \mathcal{A}]$

Nesta seção estudaremos o comutador $[\mathcal{S}, \mathcal{A}]$. Primeiro, calcularemos este comutador e, então, obteremos uma formulação que nos possibilitará no final desta seção verificar que o comutador $[\mathcal{S}, \mathcal{A}]$ é positivo definido.

Por (3.10), (3.11), (3.12), (3.13) e (3.14) obtemos

$$\begin{aligned} [\mathcal{S}, \mathcal{A}] &= \mathcal{S}\mathcal{A} - \mathcal{A}\mathcal{S} \\ &= [\mathcal{S}_1, \mathcal{A}_1] + [\mathcal{S}_1, \mathcal{A}_2] + [\mathcal{S}_2, \mathcal{A}_1] + [\mathcal{S}_2, \mathcal{A}_2], \end{aligned} \tag{3.18}$$

onde

$$\begin{aligned} [\mathcal{S}_1, \mathcal{A}_1] = {} & \partial_x^2(9\beta^2\lambda\partial_x^2\theta\partial_x^2) + \partial_x\left((6\beta^2\lambda\partial_x^4\theta - 18\beta^2\lambda^3(\partial_x\theta)^2\partial_x^2\theta)\partial_x\right) \\ & -3\beta^2\lambda^3(\partial_x^2\theta)^3 - 18\beta^2\lambda^3\partial_x\theta\partial_x^2\theta\partial_x^3\theta - 3\beta^2\lambda^3(\partial_x\theta)^2\partial_x^4\theta + \beta^2\lambda\partial_x^6\theta \\ & +9\beta^2\lambda^5(\partial_x\theta)^4\partial_x^2\theta, \end{aligned} \tag{3.19}$$

$$[\mathcal{S}_1, \mathcal{A}_2] = [\mathcal{S}_2, \mathcal{A}_1]$$

$$
\begin{aligned}
&= \partial_x^3\left(-15\beta\gamma\lambda\partial_x^2\theta\partial_x^3\right) + \partial_x^2\left((15\beta\gamma\lambda^3(\partial_x\theta)^2\partial_x^2\theta - 20\beta\gamma\lambda\partial_x^4\theta)\partial_x^2\right)\\
&+\partial_x((60\beta\gamma\lambda^3\partial_x\theta\partial_x^2\theta\partial_x^3\theta + 15\beta\gamma\lambda^3(\partial_x\theta)^2\partial_x^4\theta + 15\beta\gamma\lambda^5(\partial_x\theta)^4\partial_x^2\theta + 3\beta\lambda\partial_{xt}^2\theta\\
&-8\beta\gamma\lambda\partial_x^6\theta - 45\beta\gamma\lambda^3(\partial_x^2\theta)^3)\partial_x) + 25\beta\gamma\lambda^3\partial_x\theta\partial_x^3\theta\partial_x^4\theta - \beta\gamma\lambda\partial_x^8\theta - 60\beta\gamma\lambda^3\partial_x^2\theta(\partial_x^3\theta)^2\\
&-30\beta\gamma\lambda^3(\partial_x^2\theta)^2\partial_x^4\theta - 5\beta\gamma\lambda^5(\partial_x\theta)^4\partial_x^4\theta - 15\beta\gamma\lambda^3\partial_x\theta\partial_x^2\theta\partial_x^5\theta + 2\beta\gamma\lambda^3(\partial_x\theta)^2\partial_x^6\theta\\
&-15\beta\gamma\lambda^5(\partial_x\theta)^2(\partial_x^2\theta)^3 - 30\beta\gamma\lambda^5(\partial_x\theta)^3\partial_x^2\theta\partial_x^3\theta - 15\beta\gamma\lambda^7(\partial_x\theta)^6\partial_x^2\theta + \beta\lambda\partial_{x^3t}^4\theta\\
&+3\beta\lambda^3(\partial_x\theta)^2\partial_{xt}^2\theta,
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

$$
\begin{aligned}
&[\mathcal{S}_2, \mathcal{A}_2] = \partial_x^4\left(25\gamma^2\lambda\partial_x^2\theta\partial_x^4\right) + \partial_x^3\left((50\gamma^2\lambda\partial_x^4\theta - 100\gamma^2\lambda^3(\partial_x\theta)^2\partial_x^2\theta)\partial_x^3\right)\\
&+\partial_x^2((35\gamma^2\lambda\partial_x^6\theta - 10\gamma\lambda\partial_{xt}^2\theta + 150\gamma^2\lambda^5(\partial_x\theta)^4\partial_x^2\theta + 450\gamma^2\lambda^3(\partial_x^2\theta)^3 - 100\gamma^2\lambda^3(\partial_x\theta)^2\partial_x^4\theta\\
&-300\gamma^2\lambda^3\partial_x\theta\partial_x^2\theta\partial_x^3\theta)\partial_x^2) + \partial_x((10\gamma^2\lambda\partial_x^8\theta - 100\gamma^2\lambda^7(\partial_x\theta)^6\partial_x^2\theta - 10\gamma\lambda\partial_{x^3t}^4\theta\\
&-60\gamma\lambda^3(\partial_x\theta)^2\partial_{xt}^2\theta + 400\gamma^2\lambda^5(\partial_x\theta)^3\partial_x^2\theta\partial_x^3\theta - 300\gamma^2\lambda^5(\partial_x\theta)^2(\partial_x^2\theta)^3 + 50\gamma^2\lambda^5(\partial_x\theta)^4\partial_x^4\theta\\
&-140\gamma^2\lambda^3(\partial_x\theta)^2\partial_x^6\theta + 750\gamma^2\lambda^3(\partial_x^2\theta)^2\partial_x^4\theta + 1400\gamma^2\lambda^3\partial_x^2\theta(\partial_x^3\theta)^2 + 700\gamma^2\lambda^3(\partial_x^2\theta)^2\partial_x^4\theta\\
&-200\gamma^2\lambda^3\partial_x\theta\partial_x^3\theta\partial_x^4\theta + 100\gamma^2\lambda^3(\partial_x\theta)^2\partial_x^6\theta - 200\gamma^2\lambda^3\partial_x\theta\partial_x^2\theta\partial_x^5\theta - 500\gamma^2\lambda^3(\partial_x^2\theta)^2\partial_x^4\theta)\partial_x)\\
&+25\gamma^2\lambda^9(\partial_x\theta)^8\partial_x^2\theta - 150\gamma^2\lambda^7(\partial_x\theta)^4(\partial_x^2\theta)^3 - 100\gamma^2\lambda^7(\partial_x\theta)^5\partial_x^2\theta\partial_x^3\theta + \gamma^2\lambda\partial_x^{10}\theta\\
&+\lambda\partial_t^2\theta - 2\gamma\lambda\partial_{x^5t}^6\theta - 255\gamma^2\lambda^5(\partial_x^2\theta)^5 - 10\gamma\lambda^5(\partial_x\theta)^4\partial_{xt}^2\theta + 1300\gamma^2\lambda^3(\partial_x^3\theta)^2\partial_x^4\theta\\
&+725\gamma^2\lambda^3\partial_x^2\theta(\partial_x^4\theta)^2 + 1000\gamma^2\lambda^3\partial_x^2\theta\partial_x^3\theta\partial_x^5\theta - 50\gamma^2\lambda^3\partial_x\theta\partial_x^4\theta\partial_x^5\theta - 60\gamma\lambda^3\partial_x\theta\partial_x^2\theta\partial_{x^2t}^3\theta\\
&-30\gamma\lambda^3\partial_{xt}^2\theta(\partial_x^2\theta)^2 - 20\gamma\lambda^3(\partial_x\theta)^2\partial_{x^3t}^4\theta - 40\gamma\lambda^3\partial_x\theta\partial_{xt}^2\theta\partial_x^3\theta - 800\gamma^2\lambda^5(\partial_x\theta)^2\partial_x^2\theta(\partial_x^3\theta)^2\\
&-2100\gamma^2\lambda^5\partial_x\theta(\partial_x^2\theta)^3\partial_x^3\theta - 60\gamma^2\lambda^3\partial_x\theta\partial_x^3\theta\partial_x^6\theta + 10\gamma^2\lambda^5(\partial_x\theta)^4\partial_x^6\theta + 130\gamma^2\lambda^3(\partial_x^2\theta)^2\partial_x^6\theta\\
&-40\gamma^2\lambda^3\partial_x\theta\partial_x^2\theta\partial_x^7\theta + 100\gamma^2\lambda^5(\partial_x\theta)^3\partial_x^3\theta\partial_x^4\theta + 100\gamma^2\lambda^5(\partial_x\theta)^3\partial_x^2\theta\partial_x^5\theta - 5\gamma^2\lambda^3(\partial_x\theta)^2\partial_x^8\theta\\
&-300\gamma^2\lambda^5(\partial_x\theta)^2(\partial_x^2\theta)^2\partial_x^4\theta.
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

Destacamos aqui a forma como escrevemos os comutadores em (3.19), (3.20) e (3.21). Com esta forma fatorada de escrita, podemos agrupar as derivadas da função $\theta(t,x)$ e tomar funções $P_j \in C_b^{2j}(\mathbb{R}^2)$, dependentes de $\theta(t,x)$, de modo a obter

$$
[\mathcal{S}(t), \mathcal{A}(t)] = \sum_{j=0}^{4} \partial_x^j\left(P_j(t,x)\partial_x^j\right). \tag{3.22}
$$

Esta caracterização será de grande importância para verificarmos a positividade do comutador, na Proposição 3.2.1. A seguir, descreveremos o comportamento do comutador $[\mathcal{S}, \mathcal{A}]$ no espaço de Sobolev $H^5(\mathbb{R})$.

Lema 3.2.1 *Fixado $t \in \mathbb{R}$, o comutador*

$$[\mathcal{S}(t), \mathcal{A}(t)] : H^5(\mathbb{R}) \to H^{-5}(\mathbb{R}),$$

é uma aplicação linear contínua.

Demonstração: Fixado $t \in \mathbb{R}$, por (3.22), podemos tomar funções $a_j \in C_b^j(\mathbb{R}^2)$ e reescrever o comutador $[\mathcal{S}(t), \mathcal{A}(t)]$ da seguinte forma

$$[\mathcal{S}(t), \mathcal{A}(t)] = \sum_{j=0}^{8} a_j(t,x)\partial_x^j.$$

Portanto, para $g \in H^5(\mathbb{R})$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
a_6\partial_x^6 g &= \partial_x(a_6\partial_x^5 g) - \partial_x a_6 \partial_x^5 g,\\
a_7\partial_x^7 g &= \partial_x^2(a_7\partial_x^5 g) - \partial_x(2\partial_x a_7\partial_x^5 g) + \partial_x^2 a_7\partial_x^5 g,\\
a_8\partial_x^8 g &= \partial_x^3(a_8\partial_x^5 g) - \partial_x^2(3\partial_x a_8\partial_x^5 g) + \partial_x(3\partial_x^2 a_8\partial_x^5 g) - \partial_x^3 a_8\partial_x^5 g,
\end{aligned}$$

e, desta forma, obter funções $g_j \in L^2(\mathbb{R})$ e uma constante $C > 0$ tais que

$$[\mathcal{S}(t), \mathcal{A}(t)]g = \sum_{j=0}^{3} \partial_x^j g_j,$$

e

$$\|g_j\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C \|g\|_{H^5(\mathbb{R})}, \qquad \forall j = 0,1,2,3.$$

Assim, pelas Proposições 1.3.4 e 1.3.2, teremos $[\mathcal{S}(t), \mathcal{A}(t)]g \in H^{-5}(\mathbb{R})$ e, além disso,

$$\|[\mathcal{S}(t), \mathcal{A}(t)]g\|_{H^{-5}(\mathbb{R})} \leq \widetilde{C} \|g\|_{H^5(\mathbb{R})},$$

para alguma constante $\widetilde{C} > 0$. □

A seguir, gostariamos de definir uma operação que tenha o comportamento de uma forma bilinear contínua quando restrita aos espaços $H^{-5}(\mathbb{R}) \times H^5(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$.

Para isto, considere a seguinte aplicação

$$\mathcal{B} : \begin{cases} C_c^\infty(\mathbb{R}) \times C_c^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \\ (\phi, \psi) \longmapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\psi(x)dx. \end{cases}$$

Observando que

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}(\phi,\psi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\psi(x)dx \right| \\ &= (2\pi)^{-1} \left| \int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi}(\xi)\overline{\widehat{\psi}(\xi)}d\xi \right| \\ &= (2\pi)^{-1} \left| \int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi}(\xi)\widehat{\psi}(-\xi)d\xi \right| \\ &= (2\pi)^{-1} \left| \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^{\frac{-5}{2}} \widehat{\phi}(\xi)(1+|\xi|^2)^{\frac{5}{2}} \widehat{\psi}(-\xi)d\xi \right| \\ &\leq (2\pi)^{-1} \left\|\phi\right\|_{H^{-5}(\mathbb{R})} \left\|\psi\right\|_{H^5(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

obtemos a continuidade de $\mathcal{B}$. Portanto, sendo $C_c^\infty(\mathbb{R})$ denso nos espaços de Sobolev, veja na Proposição 1.3.5, segue que podemos estender $\mathcal{B}$ de modo único para uma forma bilinear contínua no espaço $H^{-5}(\mathbb{R}) \times H^5(\mathbb{R})$. Para representar esta extensão usaremos a notação $\langle g, h\rangle_1$, $\forall (g,h) \in H^{-5}(\mathbb{R}) \times H^5(\mathbb{R})$. Por outro lado, se (g,h) pertence a intersecção dos espaços $H^{-5}(\mathbb{R}) \times H^5(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$, isto é, $g \in L^2(\mathbb{R})$ e $h \in H^5(\mathbb{R})$, então pela densidade do espaço $C_c^\infty(\mathbb{R})$, podemos obter sequências $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $C_c^\infty(\mathbb{R})$ tais que

$$\phi_n \to g, \quad \text{em } L^2(\mathbb{R}) \quad e \quad \psi_n \to h, \quad \text{em } H^5(\mathbb{R}). \tag{3.23}$$

Pela Proposição 1.3.2 temos $\phi_n \to g$ em $H^{-5}(\mathbb{R})$ e, portanto, pela continuidade da extensão $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$, obtemos

$$\langle g, h\rangle_1 = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n(x)\psi_n(x)dx.$$

Desde que podemos usar (3.23) e provar

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n(x)\psi_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)h(x)dx,$$

segue que

$$\langle g, h\rangle_1 = \int_{\mathbb{R}} g(x)h(x)dx.$$

Assim, podemos definir a operação

$$\langle g, h\rangle = \begin{cases} \langle g, h\rangle_1\,, & \text{se } (g,h) \in H^{-5}(\mathbb{R}) \times H^5(\mathbb{R}), \\ \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(x)h(x)dx, & \text{se } (g,h) \in L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}), \end{cases} \tag{3.24}$$

com as propriedades que citamos no início deste parágrafo.

Lema 3.2.2 *Considerando as funções* $P_j(t,x)$*, definidas em* (3.22)*, tem-se*

$$\langle [\mathcal{S}(t), \mathcal{A}(t)]g, g\rangle = \sum_{j=0}^{4} (-1)^j \int_{\mathbb{R}} P_j(t,x)(\partial_x^j g(x))^2 dx, \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall g \in H^5(\mathbb{R}).$$

Demonstração: Fixados $t \in \mathbb{R}$ e $g \in H^5(\mathbb{R})$, seja $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $C_c^\infty(\mathbb{R})$ convergindo para g em $H^5(\mathbb{R})$. Pelas continuidades do comutador $[\mathcal{S}(t), \mathcal{A}(t)]$, estabelecida no Lema 3.2.1, e da operação (3.24) obtemos

$$\langle [\mathcal{S}(t), \mathcal{A}(t)]g, g\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle [\mathcal{S}(t), \mathcal{A}(t)]\phi_n, \phi_n\rangle\,. \tag{3.25}$$

Por outro lado, usando (3.22) e integrando por partes, temos

$$\begin{aligned} \langle [\mathcal{S}(t), \mathcal{A}(t)]\phi_n, \phi_n\rangle &= \int_{\mathbb{R}} [\mathcal{S}(t), \mathcal{A}(t)](\phi_n)(x)\phi_n(x)dx \\ &= \sum_{j=0}^{4} \int_{\mathbb{R}} \partial_x^j \left(P_j(t,x)\partial_x^j \phi_n(x)\right)\phi_n(x)dx \\ &= \sum_{j=0}^{4} (-1)^j \int_{\mathbb{R}} P_j(t,x)(\partial_x^j \phi_n(x))^2 dx. \end{aligned}$$

Portanto, observando que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} P_j(t,x)(\partial_x^j \phi_n(x))^2 dx = \int_{\mathbb{R}} P_j(t,x)(\partial_x^j g(x))^2 dx, \quad \forall j \in \{0,1,2,3,4\}\,,$$

a demonstração segue por (3.25). □

Lema 3.2.3 *Se* $g, h \in L^2(\mathbb{R})$ *e* $\alpha > 0$*, então*

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)h(x)|\, dx \le \frac{1}{2}\left(\alpha \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx + \frac{1}{\alpha}\int_{\mathbb{R}} |h(x)|^2 dx\right).$$

Demonstração: Para $a, b \geq 0$, temos

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2).$$

Portanto,

$$ab = (\alpha^{\frac{1}{2}}a)(\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}}b) \leq \frac{1}{2}(\alpha a^2 + \frac{1}{\alpha}b^2). \tag{3.26}$$

A demonstração segue integrando (3.26) para $a = |g(x)|$ e $b = |h(x)|$. □

Na próxima proposição, que será o último resultado desta seção, utilizaremos os dois lemas estabelecidos acima para provar que o comutador $[\mathcal{S}, \mathcal{A}]$ é positivo definido com relação a operação (3.24). Antes, porém, definiremos a função $\theta(t, x)$ que utilizamos em nossas definições.

Lema 3.2.4 *Existe uma função $\varphi_0 \in C^{10}(\mathbb{R})$ par e não negativa com as seguintes propriedades:*

(i) $\inf\limits_{|r|\geq 1} |\varphi_0'(r)| > 0.$

(ii) $|\varphi_0'(r)| \leq 3, \qquad \forall r \geq 0.$

(iii) $\varphi_0''(r) = 1, \qquad \forall |r| \leq \frac{3}{2}.$

(iv) $0 < \varphi_0''(r) \leq 1, \qquad \forall r \geq 0.$

(v) φ_0'' *é decrescente para* $r > \frac{3}{2}$.

(vi) Existe uma constante $C_1 > 0$ *tal que*

$$e^{\varphi_0(r)} \leq C_1 e^{3r}, \qquad \forall r \geq 0, \tag{3.27}$$

$$e^{\frac{-\varphi_0(r)}{6}} \leq C_1 \varphi_0''(r), \qquad \forall r \geq 0, \tag{3.28}$$

$$\left|\frac{d^k \varphi_0(r)}{dr^k}\right| \leq C_1 \varphi_0''(r), \qquad \forall r \geq 0, \qquad k = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. \tag{3.29}$$

Demonstração: Fixado $0 < \epsilon < \frac{1}{8}$, considere a seguinte função

$$\phi_0(r) = \begin{cases} 1, & r \in [0, \frac{3}{2} + 2\epsilon], \\ ar + b, & r \in [\frac{3}{2} + 2\epsilon, 2 - 2\epsilon], \\ \frac{\ln 2}{4r(\ln r)^2}, & r \in [2 - 2\epsilon, \infty), \end{cases} \tag{3.30}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que

$$\begin{cases} a(\frac{3}{2}+2\epsilon)+b=1, \\ a(2-2\epsilon)+b=\frac{\ln 2}{4(2-2\epsilon)[\ln(2-2\epsilon)]^2}, \end{cases} \tag{3.31}$$

isto é, $\phi_0 \in C([0,\infty))$.

Seja $\phi(r)=\int_0^r\int_0^s \phi_0(t)dtds$. Calculando, obtemos

$$\phi(r)=\begin{cases} \frac{r^2}{2}, & r\in[0,\frac{3}{2}+2\epsilon], \\ \frac{ar^3}{6}+\frac{br^2}{2}+c_1r+c_2, & r\in[\frac{3}{2}+2\epsilon, 2-2\epsilon], \\ -\int_{2-2\epsilon}^r \frac{\ln 2}{4\ln s}ds+c_3r+c_4, & r\in[2-2\epsilon,\infty), \end{cases} \tag{3.32}$$

onde as constantes c_1, c_2, c_3 e c_4 são dadas por

$$c_1=-\frac{a}{2}(\frac{3}{2}+2\epsilon)^2-b(\frac{3}{2}+2\epsilon)+\frac{3}{2}+2\epsilon,$$

$$c_2=-\frac{a}{6}(\frac{3}{2}+2\epsilon)^3-\frac{b}{2}(\frac{3}{2}+2\epsilon)^2+\frac{1}{2}(\frac{3}{2}+2\epsilon)^2-c_1(\frac{3}{2}+2\epsilon),$$

$$c_3=\frac{a}{2}(2-2\epsilon)^2+b(2-2\epsilon)-\frac{a}{2}(\frac{3}{2}+2\epsilon)^2-b(\frac{3}{2}+2\epsilon)+\frac{3}{2}+2\epsilon+\frac{\ln 2}{4\ln(2-2\epsilon)},$$

$$c_4=\frac{a}{6}(2-2\epsilon)^3+\frac{b}{2}(2-2\epsilon)^2+c_1(2-2\epsilon)+c_2-c_3(2-2\epsilon).$$

Tomando $\epsilon=0$, temos

$$c_3=2+\frac{1}{32\ln 2} \qquad \text{e} \qquad |\phi'(r)|\le 2+\frac{1}{32\ln 2}, \quad \forall r\ge 0.$$

Portanto, por continuidade, podemos tomar $\epsilon>0$ suficientemente pequeno e obter

$$2<c_3<3 \qquad \text{e} \qquad |\phi'(r)|<3, \quad \forall r\ge 0. \tag{3.33}$$

Então, definindo $\phi(r)=\phi(-r)$, para todo $r<0$, teremos $\phi\in C^2(\mathbb{R})$, par e não negativa. Por outro lado, tomando $\psi_\epsilon \in C_c^{10}(\mathbb{R})$ tal que

$$\psi_\epsilon\ge 0, \quad \psi_\epsilon(x)=\psi_\epsilon(-x), \quad \text{supp}(\psi_\epsilon)\subset[-\epsilon,\epsilon] \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}}\psi_\epsilon(x)dx=1$$

teremos $\varphi_0=\phi*\psi_\epsilon\in C^{10}(\mathbb{R})$ também par e não negativa. Provaremos a seguir que esta φ_0 é a função procurada. De fato, por (3.30), observamos que $\phi''>0$ e, portanto, ϕ' é uma função crescente, assim, para $r\ge 1$ e $y\in[-\epsilon,\epsilon]$, teremos $r-y\ge 1-\epsilon$ e, portanto,

$$\varphi_0'(r)=\phi'*\psi_\epsilon(r)=\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\phi'(r-y)\psi_\epsilon(y)dy\ge\phi'(1-\epsilon)=1-\epsilon, \qquad \forall r\ge 1.$$

Por outro lado, para $r \leq -1$ e $y \in [-\epsilon, \epsilon]$, segue que $r - y \leq -1 + \epsilon$, assim,

$$\varphi_0'(r) = \phi' * \psi_\epsilon(r) = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \phi'(r-y)\psi_\epsilon(y)dy \leq \phi'(-1+\epsilon) = -1+\epsilon, \qquad \forall r \leq -1,$$

donde concluímos a validade de (i). Por (3.33) obtemos (ii) e observando que $\phi''(r) = 1$, para todo $|r| \leq \frac{3}{2} + 2\epsilon$, segue (iii). Para obtermos (iv) é suficiente observarmos que $0 < \phi''(r) \leq 1$, para todo $r \in \mathbb{R}$. O item (v) segue do fato da função ϕ_0 ser decrescente para $r \geq 0$. Para concluir a demonstração, resta-nos obter (vi). Primeiro, provaremos que existe uma constante $\widetilde{C_1} > 0$ tal que

$$e^{\varphi_0(r)} \leq \widetilde{C_1} e^{3r}, \qquad \forall r \geq 0.$$

Como este resultado é imediato no intervalo compacto $[0, 2]$, consideremos $r \geq 2$. Então, para $y \in [-\epsilon, \epsilon]$, segue que $r - y > 2 - 2\epsilon$. Assim, por (3.32) e (3.33), obtemos

$$\begin{aligned}
\varphi_0(r) = \phi * \psi_\epsilon(r) &= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \phi(r-y)\psi_\epsilon(y)dy \\
&= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \left[-\int_{2-2\epsilon}^{r-y} \frac{\ln 2}{4 \ln s} ds + c_3(r-y) + c_4 \right] \psi_\epsilon(y)dy \\
&\leq \int_{-\epsilon}^{\epsilon} (3r + c_4)\psi_\epsilon(y)dy \\
&= 3r + c_4,
\end{aligned}$$

e portanto, $e^{\varphi_0(r)} \leq e^{c_4} e^{3r}$, para todo $r \geq 2$.

Provaremos, agora, que existe uma constante $\widetilde{C_2} > 0$ tal que

$$\widetilde{C_2} \varphi_0''(r) e^{\frac{\varphi_0(r)}{6}} \geq 1, \qquad \forall r \geq 0.$$

Para obter este fato, é suficiente que

$$\lim_{r \to \infty} \varphi_0''(r) e^{\frac{\varphi_0(r)}{6}} = \infty, \tag{3.34}$$

então, verifiquemos este limite. Dados $r \geq 2$ e $y \in [-\epsilon, \epsilon]$, temos $r - y > 2 - 2\epsilon$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\varphi_0''(r) = \phi'' * \psi_\epsilon(r) &= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \phi''(r-y)\psi_\epsilon(y)dy \\
&= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{\ln 2}{4(r-y)[\ln(r-y)]^2} \psi_\epsilon(y)dy \\
&\geq \frac{\ln 2}{4(r+\epsilon)[\ln(r+\epsilon)]^2}.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Além disso, lembrando que $c_3 > 2$, por (3.33), obtemos

$$\begin{aligned}\varphi_0(r) &= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \phi(r-y)\psi_\epsilon(y)dy \\ &\geq \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \left[-\int_{2-2\epsilon}^{r-y} \frac{\ln 2}{4\ln s} ds + 2(r-y) + c_4 \right] \psi_\epsilon(y)dy. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Por outro lado, observando que

$$2r - \int_{2-2\epsilon}^{r} \frac{\ln 2}{4\ln s} ds \geq r, \qquad \forall r \geq 2 - 2\epsilon,$$

utilizamos (3.36) para obter

$$\varphi_0(r) \geq r + c_4, \qquad \forall r \geq 2. \tag{3.37}$$

Assim, por (3.35) e (3.37), segue que

$$\varphi_0''(r) e^{\frac{\varphi_0(r)}{6}} \geq \frac{e^{(r+c_4)/6} \ln 2}{4(r+\epsilon)[\ln(r+\epsilon)]^2}, \qquad \forall r \geq 2,$$

e, portanto,

$$\lim_{r\to\infty} \varphi_0''(r) e^{\frac{\varphi_0(r)}{6}} = \infty.$$

Para concluirmos a demonstração do lema, agora, provaremos que existe uma constante $\widetilde{C_3} > 0$ tal que

$$\left| \frac{d^k \varphi_0(r)}{dr^k} \right| \leq \widetilde{C_3} \varphi_0''(r), \qquad \forall r \geq 0, \qquad k = 3,4,5,6,7,8,9,10. \tag{3.38}$$

De fato, se $r \in [0, \frac{3}{2} + \epsilon)$ e $y \in [-\epsilon, \epsilon]$, então $-\epsilon \leq r - y < \frac{3}{2} + 2\epsilon$ e, portanto,

$$\varphi_0'''(r) = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \phi'''(r-y)\psi(y)dy = 0.$$

Assim, concluímos que

$$\varphi_0^{(k)}(r) = 0, \quad \forall r \in [0, \frac{3}{2} + \epsilon), \qquad \forall k \geq 3.$$

Sendo $\varphi_0''(r) > 0$, para todo $r \geq 0$, obtemos (3.38) para o intervalo $[0, \frac{3}{2} + \epsilon)$. O caso $r \in [\frac{3}{2} + \epsilon, 2 + \epsilon]$ é imediato, uma vez que as derivadas $\varphi_0^{(k)}$ são limitadas neste intervalo e

$\varphi_0'' > 0$. Portanto, suponhamos $r \in (2+\epsilon, \infty)$. Neste caso, teremos $r - y > 2$, para todo $y \in [-\epsilon, \epsilon]$, e assim

$$\begin{aligned}\varphi_0^{(k)}(r) &= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \phi^{(k)}(r-y)\psi_\epsilon(y)dy \\ &= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \phi_0^{(k-2)}(r-y)\psi_\epsilon(y)dy, \qquad \forall k \in \{3,4,\ldots,10\}.\end{aligned}$$

Por outro lado, derivando, observamos que existe uma constante $\widetilde{C_3} > 0$ tal que

$$|\phi_0^{(k-2)}(r)| \leq \widetilde{C_3}\phi_0(r), \qquad \forall r > 2, \quad k = 3,\ldots,10,$$

e portanto,

$$\begin{aligned}|\varphi_0^{(k)}(r)| &\leq \widetilde{C_3}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \phi_0(r-y)\psi(y)dy \\ &= \widetilde{C_3}\varphi_0''(r), \qquad \forall r > 2, \quad k = 3,\ldots,10.\end{aligned}$$

Tomando $C_1 = \max\left\{\widetilde{C_1},\ \widetilde{C_2},\ \widetilde{C_3}\right\}$, concluímos a demonstração do Lema 3.2.4. □

Agora, de posse da função φ_0, construída no Lema 3.2.4, estamos em condições de definir a função $\theta(t,x)$ utilizada em nossas definições. Para $b > 0$ a ser escolhido na Proposição 3.2.1, tome $\varphi = \frac{\varphi_0}{3}$ e defina

$$\theta(t,x) = \varphi(x - bt). \tag{3.39}$$

Proposição 3.2.1 *Existe uma constante universal* $C_0 \geq 1$ *tal que, para todo* $t \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq C_0(1+\beta+\gamma+\beta\gamma)$ *e* $b \geq \lambda^5$, *tem-se*

$$\langle [\mathcal{S}(t), \mathcal{A}(t)]g, g\rangle \geq \min\left\{1, \beta+\gamma^2\right\} \int_{\mathbb{R}} \varphi_0''(x-bt)\left[\lambda^3 g^2 + \lambda^2(\partial_x g)^2\right]dx, \quad \forall g \in H^5(\mathbb{R}),$$

onde a função φ_0 *é dada pelo Lema* 3.2.4 *e* θ *por* (3.39).

Demonstração: Para facilitar a notação desta demonstração, diremos, para quaisquer $a_1(t)$, $a_2(t) \geq 0$, que $a_1(t) \lesssim a_2(t)$, se existir uma constante $C > 0$, independente de t, tal que $a_1(t) \leq Ca_2(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Estabelecida esta notação, começamos a demonstração fixando $t \in \mathbb{R}$ e definindo $r = x - bt$, onde $b \geq \lambda^5$. Por (3.18), (3.19), (3.20) e (3.21) temos

$$\langle [\mathcal{S}(t), \mathcal{A}(t)]g, g\rangle = \langle ([\mathcal{S}_1(t), \mathcal{A}_1(t)] + 2[\mathcal{S}_1(t), \mathcal{A}_2(t)] + [\mathcal{S}_2(t), \mathcal{A}_2(t)])g, g\rangle,$$

onde, pelo Lema 3.2.2,

$$\begin{aligned}
&\langle[\mathcal{S}_1(t), \mathcal{A}_1(t)]g, g\rangle = \\
&\underbrace{9\beta^2\lambda \int_{\mathbb{R}} \varphi''(r)(\partial_x^2 g)^2 dx}_{(1)} - \underbrace{6\beta^2\lambda \int_{\mathbb{R}} \varphi^{(IV)}(r)(\partial_x g)^2 dx}_{(2)} \\
&\underbrace{+18\beta^2\lambda^3 \int_{\mathbb{R}} \varphi'(r)^2\varphi''(r)(\partial_x g)^2 dx}_{(3)} - \underbrace{3\beta^2\lambda^3 \int_{\mathbb{R}} \varphi''(r)^3 g^2 dx}_{(4)} \\
&\underbrace{-18\beta^2\lambda^3 \int_{\mathbb{R}} \varphi'(r)\varphi''(r)\varphi'''(r) g^2 dx}_{(5)} - \underbrace{3\beta^2\lambda^3 \int_{\mathbb{R}} \varphi'(r)^2\varphi^{(IV)}(r) g^2 dx}_{(6)} \\
&\underbrace{+\beta^2\lambda \int_{\mathbb{R}} \varphi^{(VI)}(r) g^2 dx}_{(7)} + \underbrace{9\beta^2\lambda^5 \int_{\mathbb{R}} \varphi'(r)^4\varphi''(r) g^2 dx}_{(8)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&2\langle[\mathcal{S}_1(t), \mathcal{A}_2(t)])g, g\rangle = \\
&\underbrace{30\beta\gamma\lambda \int_{\mathbb{R}} \varphi''(r)(\partial_x^3 g)^2 dx}_{(1)} + \underbrace{30\beta\gamma\lambda^3 \int_{\mathbb{R}} \varphi'(r)^2\varphi''(r)(\partial_x^2 g)^2 dx}_{(2)} \\
&\underbrace{-40\beta\gamma\lambda \int_{\mathbb{R}} \varphi^{(IV)}(r)(\partial_x^2 g)^2 dx}_{(3)} - \underbrace{120\beta\gamma\lambda^3 \int_{\mathbb{R}} \varphi'(r)\varphi''(r)\varphi'''(r)(\partial_x g)^2 dx}_{(4)} \\
&\underbrace{-30\beta\gamma\lambda^3 \int_{\mathbb{R}} \varphi'(r)^2\varphi^{(IV)}(r)(\partial_x g)^2 dx}_{(5)} - \underbrace{30\beta\gamma\lambda^5 \int_{\mathbb{R}} \varphi'(r)^4\varphi''(r)(\partial_x g)^2 dx}_{(6)} \\
&\underbrace{+6\beta\lambda b \int_{\mathbb{R}} \varphi''(r)(\partial_x g)^2 dx}_{(7)} + \underbrace{16\beta\gamma\lambda \int_{\mathbb{R}} \varphi^{(VI)}(r)(\partial_x g)^2 dx}_{(8)} \\
&\underbrace{+90\beta\gamma\lambda^3 \int_{\mathbb{R}} \varphi''(r)^3(\partial_x g)^2 dx}_{(9)} + \underbrace{50\beta\gamma\lambda^3 \int_{\mathbb{R}} \varphi'(r)\varphi'''(r)\varphi^{(IV)}(r) g^2 dx}_{(10)} \\
&\underbrace{-2\beta\gamma\lambda \int_{\mathbb{R}} \varphi^{(VIII)}(r) g^2 dx}_{(11)} - \underbrace{120\beta\gamma\lambda^3 \int_{\mathbb{R}} \varphi''(r)\varphi'''(r)^2 g^2 dx}_{(12)} \\
&\underbrace{-60\beta\gamma\lambda^3 \int_{\mathbb{R}} \varphi''(r)^2\varphi^{(IV)}(r) g^2 dx}_{(13)} - \underbrace{10\beta\gamma\lambda^5 \int_{\mathbb{R}} \varphi'(r)^4\varphi^{(IV)}(r) g^2 dx}_{(14)}
\end{aligned}$$

$$\underbrace{-30\beta\gamma\lambda^3\int_{\mathbb{R}}\varphi'(r)\varphi''(r)\varphi^{(V)}(r)g^2dx}_{(15)}+\underbrace{4\beta\gamma\lambda^3\int_{\mathbb{R}}\varphi'(r)^2\varphi^{(VI)}(r)g^2dx}_{(16)}$$

$$\underbrace{-30\beta\gamma\lambda^5\int_{\mathbb{R}}\varphi'(r)^2\varphi''(r)^3g^2dx}_{(17)}-\underbrace{60\beta\gamma\lambda^5\int_{\mathbb{R}}\varphi'(r)^3\varphi''(r)\varphi'''(r)g^2dx}_{(18)}$$

$$\underbrace{-30\beta\gamma\lambda^7\int_{\mathbb{R}}\varphi'(r)^6\varphi''(r)g^2dx}_{(19)}-\underbrace{2\beta\lambda b\int_{\mathbb{R}}\varphi^{(IV)}(r)g^2dx}_{(20)}$$

$$\underbrace{-6\beta\lambda^3b\int_{\mathbb{R}}\varphi'(r)^2\varphi''(r)g^2dx}_{(21)},$$

$$\langle[\mathcal{S}_2(t),\mathcal{A}_2(t)]g,g\rangle =$$

$$\underbrace{25\gamma^2\lambda\int_{\mathbb{R}}\varphi''(r)(\partial_x^4g)^2dx}_{(1)}-\underbrace{50\gamma^2\lambda\int_{\mathbb{R}}\varphi^{(IV)}(r)(\partial_x^3g)^2dx}_{(2)}$$

$$\underbrace{+100\gamma^2\lambda^3\int_{\mathbb{R}}\varphi'(r)^2\varphi''(r)(\partial_x^3g)^2dx}_{(3)}+\underbrace{35\gamma^2\lambda\int_{\mathbb{R}}\varphi^{(VI)}(r)(\partial_x^2g)^2dx}_{(4)}$$

$$\underbrace{+10\gamma\lambda b\int_{\mathbb{R}}\varphi''(r)(\partial_x^2g)^2dx}_{(5)}+\underbrace{150\gamma^2\lambda^5\int_{\mathbb{R}}\varphi'(r)^4\varphi''(r)(\partial_x^2g)^2dx}_{(6)}$$

$$\underbrace{+450\gamma^2\lambda^3\int_{\mathbb{R}}\varphi''(r)^3(\partial_x^2g)^2dx}_{(7)}-\underbrace{100\gamma^2\lambda^3\int_{\mathbb{R}}\varphi'(r)^2\varphi^{(IV)}(r)(\partial_x^2g)^2dx}_{(8)}$$

$$\underbrace{-300\gamma^2\lambda^3\int_{\mathbb{R}}\varphi'(r)\varphi''(r)\varphi'''(r)(\partial_x^2g)^2dx}_{(9)}-\underbrace{10\gamma^2\lambda\int_{\mathbb{R}}\varphi^{(VIII)}(r)(\partial_xg)^2dx}_{(10)}$$

$$\underbrace{+100\gamma^2\lambda^7\int_{\mathbb{R}}\varphi'(r)^6\varphi''(r)(\partial_xg)^2dx}_{(11)}-\underbrace{10\gamma\lambda b\int_{\mathbb{R}}\varphi^{(IV)}(r)(\partial_xg)^2dx}_{(12)}$$

$$\underbrace{-60\gamma\lambda^3b\int_{\mathbb{R}}\varphi'(r)^2\varphi''(r)(\partial_xg)^2dx}_{(13)}-\underbrace{400\gamma^2\lambda^5\int_{\mathbb{R}}\varphi'(r)^3\varphi''(r)\varphi'''(r)(\partial_xg)^2dx}_{(14)}$$

$$\underbrace{+300\gamma^2\lambda^5\int_{\mathbb{R}}\varphi'(r)^2\varphi''(r)^3(\partial_x g)^2dx}_{(15)}\underbrace{-50\gamma^2\lambda^5\int_{\mathbb{R}}\varphi'(r)^4\varphi^{(IV)}(r)(\partial_x g)^2dx}_{(16)}$$

$$\underbrace{+140\gamma^2\lambda^3\int_{\mathbb{R}}\varphi'(r)^2\varphi^{(VI)}(r)(\partial_x g)^2dx}_{(17)}\underbrace{-750\gamma^2\lambda^3\int_{\mathbb{R}}\varphi''(r)^2\varphi^{(IV)}(r)(\partial_x g)^2dx}_{(18)}$$

$$\underbrace{-1400\gamma^2\lambda^3\int_{\mathbb{R}}\varphi''(r)\varphi'''(r)^2(\partial_x g)^2dx}_{(19)}\underbrace{-700\gamma^2\lambda^3\int_{\mathbb{R}}\varphi''(r)^2\varphi^{(IV)}(r)(\partial_x g)^2dx}_{(20)}$$

$$\underbrace{+200\gamma^2\lambda^3\int_{\mathbb{R}}\varphi'(r)\varphi'''(r)\varphi^{(IV)}(r)(\partial_x g)^2dx}_{(21)}\underbrace{-100\gamma^2\lambda^3\int_{\mathbb{R}}\varphi'(r)^2\varphi^{(VI)}(r)(\partial_x g)^2dx}_{(22)}$$

$$\underbrace{+200\gamma^2\lambda^3\int_{\mathbb{R}}\varphi'(r)\varphi''(r)\varphi^{(V)}(r)(\partial_x g)^2dx}_{(23)}\underbrace{+500\gamma^2\lambda^3\int_{\mathbb{R}}\varphi''(r)^2\varphi^{(IV)}(r)(\partial_x g)^2dx}_{(24)}$$

$$\underbrace{+25\gamma^2\lambda^9\int_{\mathbb{R}}\varphi'(r)^8\varphi''(r)g^2dx}_{(25)}\underbrace{-150\gamma^2\lambda^7\int_{\mathbb{R}}\varphi'(r)^4\varphi''(r)^3g^2dx}_{(26)}$$

$$\underbrace{-100\gamma^2\lambda^7\int_{\mathbb{R}}\varphi'(r)^5\varphi''(r)\varphi'''(r)g^2dx}_{(27)}\underbrace{+\gamma^2\lambda\int_{\mathbb{R}}\varphi^{(X)}(r)g^2dx}_{(28)}$$

$$\underbrace{+\lambda b^2\int_{\mathbb{R}}\varphi''(r)g^2dx}_{(29)}\underbrace{+2\gamma\lambda b\int_{\mathbb{R}}\varphi^{(VI)}(r)g^2dx}_{(30)}\underbrace{-255\gamma^2\lambda^5\int_{\mathbb{R}}\varphi''(r)^5g^2dx}_{(31)}$$

$$\underbrace{+10\gamma\lambda^5 b\int_{\mathbb{R}}\varphi'(r)^4\varphi''(r)g^2dx}_{(32)}\underbrace{+1300\gamma^2\lambda^3\int_{\mathbb{R}}\varphi'''(r)^2\varphi^{(IV)}(r)g^2dx}_{(33)}$$

$$\underbrace{+725\gamma^2\lambda^3\int_{\mathbb{R}}\varphi''(r)\varphi^{(IV)}(r)^2g^2dx}_{(34)}\underbrace{+1000\gamma^2\lambda^3\int_{\mathbb{R}}\varphi''(r)\varphi'''(r)\varphi^{(V)}(r)g^2dx}_{(35)}$$

$$\underbrace{-50\gamma^2\lambda^3\int_{\mathbb{R}}\varphi'(r)\varphi^{(IV)}(r)\varphi^{(V)}(r)g^2dx}_{(36)}\underbrace{+60\gamma\lambda^3 b\int_{\mathbb{R}}\varphi'(r)\varphi''(r)\varphi'''(r)g^2dx}_{(37)}$$

$$\underbrace{+30\gamma\lambda^3 b\int_{\mathbb{R}}\varphi''(r)^3g^2dx}_{(38)}\underbrace{+20\gamma\lambda^3 b\int_{\mathbb{R}}\varphi'(r)^2\varphi^{(IV)}(r)g^2dx}_{(39)}$$

$$\underbrace{+40\gamma\lambda^3 b\int_{\mathbb{R}}\varphi'(r)\varphi''(r)\varphi'''(r)g^2dx}_{(40)}\underbrace{-800\gamma^2\lambda^5\int_{\mathbb{R}}\varphi'(r)^2\varphi''(r)\varphi'''(r)^2g^2dx}_{(41)}$$

$$\underbrace{-2100\gamma^2\lambda^5\int_{\mathbb{R}}\varphi'(r)\varphi''(r)^3\varphi'''(r)g^2dx}_{(42)}\underbrace{-60\gamma^2\lambda^3\int_{\mathbb{R}}\varphi'(r)\varphi'''(r)\varphi^{(VI)}(r)g^2dx}_{(43)}$$

$$\underbrace{+10\gamma^2\lambda^5\int_{\mathbb{R}}\varphi'(r)^4\varphi^{(VI)}(r)g^2dx}_{(44)}+\underbrace{130\gamma^2\lambda^3\int_{\mathbb{R}}\varphi''(r)^2\varphi^{(VI)}(r)g^2dx}_{(45)}$$

$$\underbrace{-40\gamma^2\lambda^3\int_{\mathbb{R}}\varphi'(r)\varphi''(r)\varphi^{(VII)}(r)g^2dx}_{(46)}+\underbrace{100\gamma^2\lambda^5\int_{\mathbb{R}}\varphi'(r)^3\varphi'''(r)\varphi^{(IV)}(r)g^2dx}_{(47)}$$

$$\underbrace{+100\gamma^2\lambda^5\int_{\mathbb{R}}\varphi'(r)^3\varphi''(r)\varphi^{(V)}(r)g^2dx}_{(48)}\underbrace{-5\gamma^2\lambda^3\int_{\mathbb{R}}\varphi'(r)^2\varphi^{(VIII)}(r)g^2dx}_{(49)}$$

$$\underbrace{-300\gamma^2\lambda^5\int_{\mathbb{R}}\varphi'(r)^2\varphi''(r)^2\varphi^{(IV)}(r)g^2dx}_{(50)}.$$

Devido a sua maior complexidade, trabalharemos primeiro com $\langle[\mathcal{S}_2(t), \mathcal{A}_2(t)]g, g\rangle$. Para a região $|r| \geq 1$, observando que $\varphi = \frac{\varphi_0}{3}$, utilizamos (i) do Lema 3.2.4 para obter

$$\gamma^2\lambda^2\int_{|r|\geq 1}\varphi_0''(r)(\partial_x g)^2dx \lesssim \gamma^2\lambda^2\int_{|r|\geq 1}\varphi'(r)^6\varphi''(r)(\partial_x g)^2dx,$$

e assim, concluir a existência de uma constante $C_0 > 1$ tal que, para $\lambda \geq C_0$, tenha-se

$$\gamma^2\lambda^2\int_{|r|\geq 1}\varphi_0''(r)(\partial_x g)^2dx \leq \gamma^2\lambda^7\int_{\mathbb{R}}\varphi'(r)^6\varphi''(r)(\partial_x g)^2dx. \tag{3.40}$$

Para a região $|r| \leq 1$, precisamos de uma função corte $\eta \in C_c^2(\mathbb{R})$ tal que

$$0 \leq \eta(s) \leq 1,\ \forall s \in \mathbb{R}, \qquad \eta(s) = 1,\ \forall |s| \leq 1 \quad \text{e} \quad \eta(s) = 0,\ \forall |s| \geq \frac{3}{2}.$$

Observando, por (iii) do Lema 3.2.4, que $\varphi''(r) = \frac{1}{3}$, para todo $|r| \leq \frac{3}{2}$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\eta(r)(\partial_x g)^2dx &= \frac{9}{2}\int_{\mathbb{R}}\varphi'(r)^2\partial_x^2\left(\eta(r)(\partial_x g)^2\right)dx \\ &= \frac{9}{2}\int_{\mathbb{R}}\varphi'(r)^2\left[\eta''(r)(\partial_x g)^2 + 4\eta'(r)\partial_x g\partial_x^2 g + 2\eta(r)(\partial_x^2 g)^2 + 2\eta(r)\partial_x g\partial_x^3 g\right]dx.\end{aligned} \tag{3.41}$$

Pelo Lema 3.2.3, segue que

$$18\left|\int_{\mathbb{R}} \varphi'(r)^2\eta'(r)\partial_x g\partial_x^2 g dx\right| = 18\left|\int_{1\leq|r|\leq\frac{3}{2}} \varphi'(r)^2\eta'(r)\partial_x g\partial_x^2 g dx\right|$$

$$\leq 18\int_{1\leq|r|\leq\frac{3}{2}} \left(\varphi'(r)^2|\eta'(r)|^{\frac{1}{2}}|\partial_x g|\right)\left(|\eta'(r)|^{\frac{1}{2}}|\partial_x^2 g|\right) dx$$

$$\leq 9\int_{1\leq|r|\leq\frac{3}{2}} \varphi'(r)^4|\eta'(r)|(\partial_x g)^2 dx + 9\int_{1\leq|r|\leq\frac{3}{2}} |\eta'(r)|(\partial_x^2 g)^2 dx. \tag{3.42}$$

Então, utilizando a limitação de η' e (iii) do Lema 3.2.4, temos

$$\int_{1\leq|r|\leq\frac{3}{2}} \varphi'(r)^4|\eta'(r)|(\partial_x g)^2 dx \lesssim \int_{\mathbb{R}} \varphi'(r)^2\varphi''(r)^3(\partial_x g)^2 dx,$$

e

$$\int_{1\leq|r|\leq\frac{3}{2}} |\eta'(r)|(\partial_x^2 g)^2 dx \lesssim \int_{\mathbb{R}} \varphi''(r)(\partial_x^2 g)^2 dx.$$

Assim, por (3.42),

$$18\left|\int_{\mathbb{R}} \varphi'(r)^2\eta'(r)\partial_x g\partial_x^2 g dx\right| \lesssim \int_{\mathbb{R}} \varphi'(r)^2\varphi''(r)^3(\partial_x g)^2 dx + \int_{\mathbb{R}} \varphi''(r)(\partial_x^2 g)^2 dx. \tag{3.43}$$

Ainda por (iii) do Lema 3.2.4 e Lema 3.2.3, conseguimos

$$\frac{9}{2}\left|\int_{\mathbb{R}} \varphi'(r)^2\eta''(r)(\partial_x g)^2 dx\right| \lesssim \int_{\mathbb{R}} \varphi'(r)^2\varphi''(r)^3(\partial_x g)^2 dx, \tag{3.44}$$

$$9\left|\int_{\mathbb{R}} \varphi'(r)^2\eta(r)(\partial_x^2 g)^2 dx\right| \lesssim \int_{\mathbb{R}} \varphi''(r)(\partial_x^2 g)^2 dx, \tag{3.45}$$

$$9\left|\int_{\mathbb{R}} \varphi'(r)^2\eta(r)\partial_x g\partial_x^3 g dx\right| \lesssim \int_{\mathbb{R}} \varphi'(r)^2\varphi''(r)^3(\partial_x g)^2 dx + \int_{\mathbb{R}} \varphi'(r)^2\varphi''(r)(\partial_x^3 g)^2 dx. \tag{3.46}$$

Então, por (3.41), (3.43), (3.44), (3.45) e (3.46), concluímos que

$$\gamma^2\lambda^2\int_{|r|\leq 1} \varphi_0''(r)(\partial_x g)^2 dx \leq \gamma^2\lambda^2\int_{\mathbb{R}} \eta(r)(\partial_x g)^2 dx$$

$$\lesssim \gamma^2\lambda^2\int_{\mathbb{R}} \varphi'(r)^2\varphi''(r)^3(\partial_x g)^2 dx + \gamma^2\lambda^2\int_{\mathbb{R}} \varphi''(r)(\partial_x^2 g)^2 dx$$

$$+\gamma^2\lambda^2\int_{\mathbb{R}} \varphi'(r)^2\varphi''(r)(\partial_x^3 g)^2 dx. \tag{3.47}$$

Assim, aumentando a constante C_0, se necessário, e tomando $\lambda \geq C_0(1+\gamma)$, por (3.40) e (3.47), obtemos

$$\gamma^2\lambda^2 \int_{\mathbb{R}} \varphi_0''(r)(\partial_x g)^2 dx \leq \gamma^2\lambda^3 \int_{\mathbb{R}} \varphi'(r)^2\varphi''(r)(\partial_x^3 g)^2 dx + \gamma\lambda b \int_{\mathbb{R}} \varphi''(r)(\partial_x^2 g)^2 dx$$
$$+ \gamma^2\lambda^7 \int_{\mathbb{R}} \varphi'(r)^6\varphi''(r)(\partial_x g)^2 dx + \gamma^2\lambda^5 \int_{\mathbb{R}} \varphi'(r)^2\varphi''(r)^3(\partial_x g)^2 dx. \tag{3.48}$$

Desta forma, pelas estimativas que obtemos, vemos que podemos usar os termos (3), (5), (11) e (15) de $\langle [\mathcal{S}_2(t), \mathcal{A}_2(t)]g, g\rangle$ para obter um limitante superior para $\gamma^2\lambda^2 \int_{\mathbb{R}} \varphi_0''(r)(\partial_x g)^2 dx$.

Agora, buscaremos um limitante superior para $\lambda^3 \int_{\mathbb{R}} \varphi_0''(r) g^2 dx$. Começaremos utilizando a identidade

$$(\partial_x g)^2 = \frac{1}{2}\partial_x^2(g^2) - g\partial_x^2 g, \tag{3.49}$$

para obter

$$|(13)| = 60\gamma\lambda^3 b \int_{\mathbb{R}} \varphi'(r)^2\varphi''(r)(\partial_x g)^2 dx$$
$$= 30\gamma\lambda^3 b \int_{\mathbb{R}} \varphi'(r)^2\varphi''(r)\partial_x^2(g^2) dx - 60\gamma\lambda^3 b \int_{\mathbb{R}} \varphi'(r)^2\varphi''(r) g\partial_x^2 g dx.$$

Segue por (ii) do Lema 3.2.4 que $|\varphi'| \leq 1$, então pelo Lema 3.2.3 temos

$$\left|60\gamma\lambda^3 b \int_{\mathbb{R}} \varphi'(r)^2\varphi''(r) g\partial_x^2 g dx\right| \leq 60\gamma\lambda^3 b \int_{\mathbb{R}} \left(\varphi''(r)^{\frac{1}{2}}|g|\right)\left(\varphi'(r)^2\varphi''(r)^{\frac{1}{2}}\left|\partial_x^2 g\right|\right) dx$$
$$\leq 30\gamma\lambda^3 b \left[\frac{b}{75\gamma\lambda^2}\int_{\mathbb{R}} \varphi''(r) g^2 dx + \frac{75\gamma\lambda^2}{b}\int_{\mathbb{R}} \varphi'(r)^4\varphi''(r)(\partial_x^2 g)^2 dx\right]$$
$$\leq 0,4\lambda b^2 \int_{\mathbb{R}} \varphi''(r) g^2 dx + 2250\gamma^2\lambda^5 \int_{\mathbb{R}} \varphi''(r)(\partial_x^2 g)^2 dx. \tag{3.50}$$

Por outro lado, integrando por partes, concluímos que

$$30\gamma\lambda^3 b \int_{\mathbb{R}} \varphi'(r)^2\varphi''(r)\partial_x^2(g^2) dx = 30\gamma\lambda^3 b \int_{\mathbb{R}} \partial_x^2\left(\varphi'(r)^2\varphi''(r)\right) g^2 dx$$
$$= 30\gamma\lambda^3 b \int_{\mathbb{R}} \left[\varphi'(r)^2\varphi^{(IV)}(r) + 6\varphi'(r)\varphi''(r)\varphi'''(r) + 2\varphi''(r)^3\right] g^2 dx. \tag{3.51}$$

Por (ii) e (iv) do Lema 3.2.4 e (3.29), obtemos as seguintes estimativas

$$\left|30\gamma\lambda^3 b \int_{\mathbb{R}} \varphi'(r)^2\varphi^{(IV)}(r) g^2 dx\right| \lesssim \gamma\lambda^3 b \int_{\mathbb{R}} \varphi''(r) g^2 dx,$$

$$\left|180\gamma\lambda^3 b \int_{\mathbb{R}} \varphi'(r)\varphi''(r)\varphi'''(r) g^2 dx\right| \lesssim \gamma\lambda^3 b \int_{\mathbb{R}} \varphi''(r) g^2 dx,$$

$$\left|60\gamma\lambda^3 b\int_{\mathbb{R}}\varphi''(r)^3 g^2 dx\right| \lesssim \gamma\lambda^3 b\int_{\mathbb{R}}\varphi''(r)g^2dx.$$

Portanto, aumentando C_0 se necessário e tomando $\lambda \geq C_0(1+\gamma)$, por (3.51), obtemos

$$\left|30\gamma\lambda^3 b\int_{\mathbb{R}}\varphi'(r)^2\varphi''(r)\partial_x^2(g^2)dx\right| \leq 0,1\lambda b^2\int_{\mathbb{R}}\varphi''(r)g^2dx, \tag{3.52}$$

além de

$$2250\gamma^2\lambda^5\int_{\mathbb{R}}\varphi''(r)(\partial_x^2 g)^2dx \leq \gamma\lambda b\int_{\mathbb{R}}\varphi''(r)(\partial_x^2 g)^2dx. \tag{3.53}$$

Concluindo por (3.50), (3.52) e (3.53), segue que

$$|(13)| \leq 0,5\lambda b^2\int_{\mathbb{R}}\varphi''(r)g^2dx + \gamma\lambda b\int_{\mathbb{R}}\varphi''(r)(\partial_x^2 g)^2dx. \tag{3.54}$$

Ainda usando a identidade (3.49), obtemos

$$\begin{aligned}(12) &= -10\gamma\lambda b\int_{\mathbb{R}}\varphi^{(IV)}(r)(\partial_x g)^2dx\\ &= -5\gamma\lambda b\int_{\mathbb{R}}\varphi^{(IV)}(r)\partial_x^2(g^2)dx + 10\gamma\lambda b\int_{\mathbb{R}}\varphi^{(IV)}(r)g\partial_x^2 g dx.\end{aligned}$$

Integração por partes e (3.29) produzem

$$\left|5\gamma\lambda b\int_{\mathbb{R}}\varphi^{(IV)}(r)\partial_x^2(g^2)dx\right| \leq 5\gamma\lambda b\int_{\mathbb{R}}|\varphi^{(VI)}(r)|g^2dx \lesssim \gamma\lambda b\int_{\mathbb{R}}\varphi''(r)g^2dx.$$

Por (3.29) e Lema 3.2.3,

$$\begin{aligned}\left|10\gamma\lambda b\int_{\mathbb{R}}\varphi^{(IV)}(r)g\partial_x^2 g dx\right| &\leq 5\gamma\lambda b\left[\lambda\int_{\mathbb{R}}\left|\varphi^{(IV)}(r)\right|g^2dx + \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}}\left|\varphi^{(IV)}(r)\right|(\partial_x^2 g)^2dx\right]\\ &\lesssim \gamma\lambda b\left[\lambda\int_{\mathbb{R}}\varphi''(r)g^2dx + \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}}\varphi''(r)(\partial_x^2 g)^2dx\right].\end{aligned}$$

Portanto, aumentando C_0 se necessário, para $\lambda \geq C_0(1+\gamma)$, obtemos

$$|(12)| \leq 0,1\lambda b^2\int_{\mathbb{R}}\varphi''(r)g^2dx + \gamma\lambda b\int_{\mathbb{R}}\varphi^{''}(r)(\partial_x^2 g)^2dx. \tag{3.55}$$

Quanto aos outros termos de $\langle[\mathcal{S}_2(t), \mathcal{A}_2(t)]g, g\rangle$, podemos aumentar C_0, se necessário, e usar o Lema 3.2.4 para concluir que

$$\frac{d^k\varphi(r)}{dr^k} = 0, \qquad \forall r \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right], \qquad \forall k \geq 3,$$

e assim, obter as seguintes estimativas, para $\lambda \geq C_0(1+\gamma)$,

$$|(2)| \leq \gamma^2\lambda^3 \int_{\mathbb{R}} \varphi'(r)^2\varphi''(r)(\partial_x^3 g)^2 dx,$$

$$|(4)+(8)+(9)| \leq \gamma^2\lambda^5 \int_{\mathbb{R}} \varphi'(r)^4\varphi''(r)(\partial_x^2 g)^2 dx,$$

$$|(10)+(14)+(16)+...+(24)| \leq \gamma^2\lambda^7 \int_{\mathbb{R}} \varphi'(r)^6\varphi''(r)(\partial_x g)^2 dx,$$

$$|(26)+...+(28)+(30)+(31)+(33)+...+(37)+(39)+...+(50)| \leq 0,1\lambda b^2 \int_{\mathbb{R}} \varphi''(r) g^2 dx.$$

Por estas estimativas, além de (3.54) e (3.55), verificamos que os termos (3), (5), (6), (11) e (29) dominam o restante dos termos de $\langle [\mathcal{S}_2(t), \mathcal{A}_2(t)]g, g\rangle$. Além disso, usando também (3.48), para todo $\lambda \geq C_0(1+\gamma)$ e $b \geq \lambda^5$, obtemos

$$\begin{aligned}\langle [\mathcal{S}_2(t), \mathcal{A}_2(t)]g, g\rangle &= (1)+...+(50) \\ &\geq 0,3\lambda b^2 \int_{\mathbb{R}} \varphi''(r) g^2 dx + \gamma^2\lambda^2 \int_{\mathbb{R}} \varphi_0''(r)(\partial_x g)^2 dx. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Agora, trabalharemos com $2\langle([\mathcal{S}_1(t), \mathcal{A}_2(t)]g, g\rangle$. Usando as propriedades da função φ, obtidas no Lema 3.2.4, podemos aumentar C_0, se necessário, e tomar $\lambda \geq C_0(1+\beta+\gamma+\beta\gamma)$ para obter

$$(2) - |(3)| \geq 0,$$

$$(7) - |(4)+(5)+(6)+(8)| \geq 3\beta\lambda b \int_{\mathbb{R}} \varphi''(r)(\partial_x g)^2 dx \geq \beta\lambda^2 \int_{\mathbb{R}} \varphi_0''(r)(\partial_x g)^2 dx,$$

$$0,1\lambda b^2 \int_{\mathbb{R}} \varphi''(r) g^2 dx \geq |(10)+...+(21)|.$$

Portanto, por (3.56), para todo $\lambda \geq C_0(1+\beta+\gamma+\beta\gamma)$ e $b \geq \lambda^5$, obtemos

$$\begin{aligned}&\langle (2[\mathcal{S}_1(t), \mathcal{A}_2(t)] + [\mathcal{S}_2(t), \mathcal{A}_2(t)])g, g\rangle \\ &\qquad \geq 0,2\lambda b^2 \int_{\mathbb{R}} \varphi''(r) g^2 dx + (\beta+\gamma^2)\lambda^2 \int_{\mathbb{R}} \varphi_0''(r)(\partial_x g)^2 dx. \end{aligned} \tag{3.57}$$

Para concluir a demonstração da Proposição 3.2.1, precisamos estimar a parcela correspondente a $[\mathcal{S}_1(t), \mathcal{A}_1(t)]$. De fato, podemos aumentar C_0, se necessário, e obter

$$(3) - |(2)| \geq 0,$$

$$0,1\lambda b^2 \int_{\mathbb{R}} \varphi''(r) g^2 dx \geq \ |(4) + ... + (7)|.$$

Então, por (3.57), para todo $\lambda \geq C_0(1+\beta+\gamma+\beta\gamma)$ e $b \geq \lambda^5$, concluímos que

$$\begin{aligned}\langle([\mathcal{S}(t), \mathcal{A}(t)])g, g\rangle &= \langle([\mathcal{S}_1(t), \mathcal{A}_1(t)] + 2[\mathcal{S}_1(t), \mathcal{A}_2(t)] + [\mathcal{S}_2(t), \mathcal{A}_2(t)])g, g\rangle \\ &\geq \lambda^3 \int_{\mathbb{R}} \varphi_0''(r) g^2 dx + (\beta+\gamma^2)\lambda^2 \int_{\mathbb{R}} \varphi_0''(r)(\partial_x g)^2 dx \\ &\geq \min\left\{1, \beta+\gamma^2\right\} \int_{\mathbb{R}} \varphi_0''(x-bt)\left[\lambda^3 g^2 + \lambda^2(\partial_x g)^2\right] dx. \ \square\end{aligned}$$

Mais adiante, na Seção 3.4, mostraremos que as constantes C_0 e C_1 encontradas respectivamente na Proposição 3.2.1 e em (vi) do Lema 3.2.4 são exatamente as constantes pedidas no Teorema 3.0.5.

3.3 Estimativas e Propriedades das Soluções

Discutiremos nesta seção algumas propriedades, das soluções da equação (3.1), que decorrem diretamente das hipóteses do Teorema 3.0.5. Estabeleceremos aqui algumas estimativas para o termo não linear de (3.1) e concluiremos a seção com uma lei de conservação da norma L^2, para as soluções de (3.1) que tenham satisfeitas as hipóteses do Teorema 3.0.5.

Iniciaremos a seção mostrando que a regularidade, com respeito a variável espacial, das soluções de (3.1) podem ser melhoradas utilizando-se as hipóteses do Teorema 3.0.5.

Proposição 3.3.1 *Seja $u \in C^1(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}))$.*
(i) Se u satisfaz (3.4)*, então $u \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$.*
(ii) Se u satisfaz (3.3)*, então $u(t,\cdot)$, $e^{\lambda\varphi(\cdot-bt)}u(t,\cdot) \in H^5(\mathbb{R})$, $\forall t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Pela Proposição 1.3.6, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}|u(t,x)| &= (2\pi)^{-1}\left|\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\widehat{u}(t,\xi)d\xi\right| \\ &\leq (2\pi)^{-1} \leq \|\widehat{u}(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})} \\ &\leq C\|u(t,\cdot)\|_{H^1(\mathbb{R})}, \qquad \forall t, x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Assim, usando (3.4), a verificação de (i) segue pela desigualdade

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq C \sup_{t\in\mathbb{R}} \|u(t,\cdot)\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq C M_2^{\frac{1}{2}}.$$

Para demonstrar (ii), utilizamos (3.3) e (3.27) para obter

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} e^{2\lambda\varphi(x-bt)}(\partial_x^k u)^2(t,x)dx &\leq C_1^{\frac{2\lambda}{3}} \int_{\mathbb{R}} e^{2\lambda|x-bt|}(\partial_x^k u)^2(t,x)dx \\ &< \infty, \quad k=0,1,\ldots,5. \end{aligned} \tag{3.58}$$

Então, sendo $\lambda > 0$ e φ uma função não negativa, temos $u(t,\cdot) \in H^5(\mathbb{R})$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Por outro lado, observando que

$$\begin{aligned}\partial_x^k \left(e^{\lambda\varphi(x-bt)}u\right) &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \partial_x^j \left(e^{\lambda\varphi(x-bt)}\right) \partial_x^{k-j} u \\ &= e^{\lambda\varphi(x-bt)}\partial_x^k u + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} \text{Polinômio}(\lambda, \varphi', \varphi'', \ldots, \varphi^{(j)}) e^{\lambda\varphi(x-bt)} \partial_x^{k-j} u,\end{aligned}$$

podemos utilizar o fato das derivadas de φ serem limitadas, pelo Lema 3.2.4, para obter uma constante $\widetilde{C} > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\partial_x^k \left(e^{\lambda\varphi(x-bt)}u(t,x)\right)\right|^2 dx \leq \widetilde{C} \sum_{j=0}^{k} \int_{\mathbb{R}} e^{2\lambda\varphi(x-bt)}(\partial_x^j u)^2(t,x)dx, \quad k=0,1,...,5.$$

Portanto, por (3.58), concluímos que $e^{\lambda\varphi(\cdot-bt)}u(t,\cdot) \in H^5(\mathbb{R})$, $\forall t \in \mathbb{R}$. □

Nas próximas proposições, estabeleceremos as estimativas não lineares que precisaremos para demonstrar o Teorema 3.0.5.

Proposição 3.3.2 *Seja $u \in C^1(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}))$ uma solução de* (3.1) *satisfazendo* (3.3), (3.4) *e* (3.5) *com λ e b dados por*

$$\lambda \geq \max\left\{C_0(1+\beta+\gamma+\beta\gamma), \frac{2^{\rho+4}C_1^{\frac{\rho}{6}+1}M_1^2}{\min\{1,\beta+\gamma^2\}}\right\} \qquad e \qquad b \geq \lambda^5,$$

onde C_0 e C_1 são as constantes encontradas respectivamente na Proposição 3.2.1 *e em (vi) do Lema* 3.2.4. *Para $f = e^{\lambda\varphi(x-bt)}u$, tem-se*

$$\|a(u)\left(\partial_x f - \lambda\varphi'(\cdot-bt)f\right)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \frac{\min\{1,\beta+\gamma^2\}}{2} \int_{\mathbb{R}} \varphi_0''(x-bt)\left[\lambda^3 f^2 + \lambda(\partial_x f)^2\right]dx.$$

Demonstração: Pelas Proposições 1.3.6 e 3.3.1, temos $u(t,\cdot), e^{\frac{\varphi(\cdot-bt)}{2}}u(t,\cdot) \in C_0^4(\mathbb{R})$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto, utilizando o teorema fundamental do cálculo e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned} e^{\frac{\varphi(x-bt)}{2}}u^2(t,x) &= \int_{-\infty}^{x} \frac{d}{dy}\left(e^{\frac{\varphi(y-bt)}{2}}u^2(t,y)\right)dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{d}{dy}\left(e^{\frac{\varphi(y-bt)}{2}}u^2(t,y)\right)\right| dy \\ &\leq 2\left\|\partial_x u(t,\cdot)\right\|_{L^2(\mathbb{R})} \left\|e^{\frac{\varphi(\cdot-bt)}{2}}u(t,\cdot)\right\|_{L^2(\mathbb{R})} + \left\|e^{\frac{\varphi(\cdot-bt)}{4}}u(t,\cdot)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned} \tag{3.59}$$

Recorrendo a (3.4), (3.5) e (3.27), observamos que

$$\begin{aligned} \left\|\partial_x u(t,\cdot)\right\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq M_2^{\frac{1}{2}}, \\ \left\|e^{\frac{\varphi(\cdot-bt)}{2}}u(t,\cdot)\right\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq C_1^{\frac{1}{6}} M_3^{\frac{1}{2}}, \\ \left\|e^{\frac{\varphi(\cdot-bt)}{4}}u(t,\cdot)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &\leq C_1^{\frac{1}{6}} M_3. \end{aligned}$$

Portanto, por (3.59), obtemos

$$e^{\frac{\varphi(x-bt)}{2}}u^2(t,x) \leq 2C_1^{\frac{1}{6}}(M_2^{\frac{1}{2}}M_3^{\frac{1}{2}} + M_3) \leq 2C_1^{\frac{1}{6}},$$

que utilizado com (3.2) e (3.28) produz

$$\begin{aligned} |a(u)|^2 &\leq M_1^2(|u| + |u|^\rho)^2 \\ &\leq 2M_1^2|u|^2 + 2M_1^2|u|^{2\rho} \\ &\leq 2M_1^2\left(|u|^2 e^{\frac{\varphi(x-bt)}{2}} + |u|^{2\rho}e^{\frac{\rho\varphi(x-bt)}{2}}\right)e^{\frac{-\varphi(x-bt)}{2}} \\ &\leq 2M_1^2(2C_1^{\frac{1}{6}} + 2^\rho C_1^{\frac{\rho}{6}})C_1\varphi_0''(x-bt). \end{aligned}$$

Então, sem perda de generalidade, supondo que $2C_1^{\frac{1}{6}} \geq 1$, obtemos

$$|a(u)|^2 \leq 2^{\rho+2}M_1^2 C_1^{\frac{\rho}{6}+1}\varphi_0''(x-bt). \tag{3.60}$$

Por outro lado, como $\varphi' = \frac{\varphi_0'}{3}$, podemos utilizar (ii) do Lema 3.2.4 e obter

$$\begin{aligned} \left|\partial_x f - \lambda\varphi'(x-bt)f\right|^2 &\leq 2(\partial_x f)^2 + 2\lambda^2 \sup_{r\in\mathbb{R}} \varphi'(r)^2 f^2 \\ &\leq 2[(\partial_x f)^2 + \lambda^2 f^2]. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Portanto, usando (3.60) e (3.61), temos

$$\|a(u)\left(\partial_x f - \lambda\varphi'(\cdot - bt)f\right)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{2^{\rho+3}C_1^{\frac{\rho}{6}+1}M_1^2}{\lambda}\int_{\mathbb{R}}\varphi_0''(x-bt)\left[\lambda^3 f^2 + \lambda(\partial_x f)^2\right]dx. \tag{3.62}$$

Pela hipótese sobre λ, concluímos que

$$\frac{2^{\rho+3}C_1^{\frac{\rho}{6}+1}M_1^2}{\lambda} \leq \frac{\min\{1, \beta+\gamma^2\}}{2}. \tag{3.63}$$

Assim, por (3.62) e (3.63), obtemos o resultado desejado. □

Proposição 3.3.3 *Seja $u \in C^1(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}))$ uma solução de* (3.1) *satisfazendo* (3.3), (3.4) *e* (3.5) *com λ e b dados por*

$$\lambda \geq \max\left\{C_0(1+\beta+\gamma+\beta\gamma), \frac{2^{\rho+4}C_1^{\frac{\rho}{6}+1}M_1^2}{\min\{1,\beta+\gamma^2\}}\right\} \qquad e \qquad b \geq \lambda^5,$$

onde C_0 e C_1 são as constantes encontradas respectivamente na Proposição 3.2.1 *e em (vi) do Lema* 3.2.4. *Existe uma constante $C_2 > 0$ dependendo de* (3.3), *M_1, M_2 e M_3 tal que, para $f = e^{\lambda\varphi(x-bt)}u$, tem-se*

$$|\langle a(u)\left(\partial_x f - \lambda\varphi'(\cdot - bt)f\right), f\rangle| \leq C_2.$$

Demonstração: Sendo $u = e^{-\lambda\varphi(x-bt)}f$, temos

$$e^{\lambda\varphi(x-bt)}\partial_x u = \partial_x f - \lambda\varphi'(x-bt)f,$$

assim,

$$\int_{\mathbb{R}} a(u)\left(\partial_x f - \lambda\varphi'(x-bt)f\right)f dx = \int_{\mathbb{R}} e^{2\lambda\varphi(x-bt)}a(u)u\partial_x u dx. \tag{3.64}$$

Integrando por partes obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} e^{2\lambda\varphi(x-bt)}a(u)u\partial_x u dx = \left(e^{2\lambda\varphi(x-bt)}u^2\alpha(u)\right)_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} e^{2\lambda\varphi(x-bt)}2\lambda\varphi'(x-bt)u^2\alpha(u)dx, \tag{3.65}$$

onde

$$\alpha(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{s^2}\displaystyle\int_0^s a(s')s'ds', & s \neq 0, \\ 0, & s = 0. \end{cases}$$

Por outro lado, segue por (3.2) e Proposição 3.3.1 que $\alpha(u)$ é limitada e, portanto, recorrendo também a Proposição 1.3.6, para concluir que $e^{\lambda\varphi(\cdot-bt)}u \in C_0^4(\mathbb{R})$, obtemos

$$\left(e^{2\lambda\varphi(x-bt)}u^2\alpha(u)\right)_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

Assim, por (3.3), (3.27), (3.64) e (3.65), temos

$$\left|\int_{\mathbb{R}} a(u)\left(\partial_x f - \lambda\varphi'(x-bt)f\right)f dx\right| = \left|\int_{\mathbb{R}} e^{2\lambda\varphi(x-bt)}2\lambda\varphi'(x-bt)u^2\alpha(u)dx\right| \leq C_2,$$

para alguma constante $C_2 > 0$ satisfazendo as condições desejadas. □

O último ingrediente a ser usado na demonstração do Teorema 3.0.5 será a conservação da norma L^2 para as soluções de (3.1) que satisfizerem as hipóteses do Teorema 3.0.5. Este resultado será estabelecido na próxima proposição.

Proposição 3.3.4 *Seja $u \in C^1\left(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R})\right)$ uma solução da equação* (3.1)*. Se u satisfaz* (3.3)*, então*

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|u(0,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: Multiplicando a equação (3.1) por u, obtemos

$$\partial_t\left(\frac{u^2}{2}\right) + \beta\left[\partial_x\left(u\partial_x^2 u\right) - \frac{\partial_x\left((\partial_x u)^2\right)}{2}\right]$$

$$-\gamma\left[\partial_x\left(u\partial_x^4 u\right) - \partial_x\left(\partial_x u\partial_x^3 u\right) + \frac{\partial_x\left((\partial_x^2 u)^2\right)}{2}\right] = \partial_x\left(G(u)\right), \tag{3.66}$$

onde

$$G(z) = \int_0^z a(w)wdw.$$

Pelas Proposições 1.3.6 e 3.3.1 sabemos que $u(t,\cdot) \in C_0^4(\mathbb{R})$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto, usando (3.2) para obter

$$|G(u)| \leq M_1(|u|^3 + |u|^{\rho+2}),$$

concluímos que

$$\lim_{x\to\pm\infty} G(u(t,x)) = 0.$$

Assim, integrando (3.66) na variável espacial, teremos

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} u^2(t,x)dx = 0, \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \ \square$$

3.4 Demonstração do Teorema 3.0.5

Considere as hipóteses do Teorema 3.0.5 para as constantes C_0 e C_1 encontradas, respectivamente, na Proposição 3.2.1 e em (vi) do Lema 3.2.4. Seja $u \in C^1(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}))$ uma solução de (3.1) satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.0.5. O objetivo desta seção será provar que $u \equiv 0$.

Para $f = e^{\lambda\varphi(x-bt)}u$, por (3.6), (3.17) e (3.39), temos

$$\partial_t f = -(\mathcal{S} + \widetilde{\mathcal{A}})f + F, \tag{3.67}$$

onde $F = a(u)(\partial_x f - \lambda\varphi'(x-bt)f)$.

A seguir estabeleceremos algumas identidades que serão utilizadas ao longo desta demonstração.

$$\frac{d}{dt}\langle f, f\rangle = -2\langle \mathcal{S}f, f\rangle + 2\langle F, f\rangle, \tag{3.68}$$

$$[\mathcal{S}, \mathcal{A}] = [\mathcal{S}, \widetilde{\mathcal{A}}] - [\partial_t, \mathcal{S}], \tag{3.69}$$

$$F = \mathcal{S}f + \mathcal{A}f, \tag{3.70}$$

$$\left\langle [\mathcal{S}, \widetilde{\mathcal{A}}]f, f\right\rangle = 2\left\langle \widetilde{\mathcal{A}}f, \mathcal{S}f\right\rangle, \tag{3.71}$$

$$\frac{d}{dt}\langle \mathcal{S}f, f\rangle = -\langle [\mathcal{S}, \mathcal{A}]f, f\rangle - 2\langle \mathcal{S}f, \mathcal{S}f\rangle + 2\langle F, \mathcal{S}f\rangle. \tag{3.72}$$

Fazendo um esboço das provas destas identidades, por (3.16), temos $\left\langle \widetilde{\mathcal{A}}f, f\right\rangle = 0$, então derivando com respeito a variável temporal e usando (3.67), obtemos (3.68). Para verificar (3.69) e (3.70) é suficiente usar $\mathcal{A} = \partial_t + \widetilde{\mathcal{A}}$. Para obter (3.71), primeiro verificamos, utilizando (3.15) e (3.16), que esta identidade é verdadeira no espaço das funções testes e depois usamos a densidade do espaço das funções testes, nos espaços de Sobolev, para

obter (3.71). Resta-nos então justificar (3.72), para isto, usamos (3.15), (3.67), (3.71) e (3.69) exatamente como segue descrito abaixo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle \mathcal{S}f, f\rangle &= \langle \partial_t \mathcal{S}f, f\rangle + \langle \mathcal{S}f, \partial_t f\rangle \\ &= \langle [\partial_t, \mathcal{S}]f + \mathcal{S}\partial_t f, f\rangle + \langle \mathcal{S}f, \partial_t f\rangle \\ &= \langle [\partial_t, \mathcal{S}]f, f\rangle + 2\langle \partial_t f, \mathcal{S}f\rangle \\ &= \langle [\partial_t, \mathcal{S}]f, f\rangle - 2\langle \mathcal{S}f, \mathcal{S}f\rangle - 2\left\langle \widetilde{\mathcal{A}}f, \mathcal{S}f\right\rangle + 2\langle F, \mathcal{S}f\rangle \\ &= \left\langle ([\partial_t, \mathcal{S}] - [\mathcal{S}, \widetilde{\mathcal{A}}])f, f\right\rangle - 2\langle \mathcal{S}f, \mathcal{S}f\rangle + 2\langle F, \mathcal{S}f\rangle \\ &= -\langle [\mathcal{S}, \mathcal{A}]f, f\rangle - 2\langle \mathcal{S}f, \mathcal{S}f\rangle + 2\langle F, \mathcal{S}f\rangle .\end{aligned}$$

Agora, por (3.68) e (3.72), podemos tomar uma função regular $\eta : [a, b] \to \mathbb{R}$ e integrar por partes para obter

$$\begin{aligned}\int_a^b \eta'(t)\langle \mathcal{S}f, f\rangle\, dt = -\frac{1}{2}\left(\eta'\langle f, f\rangle\right)_a^b + \int_a^b \eta'(t)\langle F, f\rangle\, dt \\ + \frac{1}{2}\int_a^b \eta''(t)\langle f, f\rangle\, dt,\end{aligned} \tag{3.73}$$

e

$$\begin{aligned}\int_a^b \eta'(t)\langle \mathcal{S}f, f\rangle\, dt = \left(\eta\langle \mathcal{S}f, f\rangle\right)_a^b + \int_a^b \eta(t)\langle [\mathcal{S}, \mathcal{A}]f, f\rangle\, dt \\ + 2\int_a^b \eta(t)\langle \mathcal{S}f, \mathcal{S}f\rangle\, dt - 2\int_a^b \eta(t)\langle F, \mathcal{S}f\rangle\, dt.\end{aligned} \tag{3.74}$$

A seguir, desejaremos provar a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}&\langle [\mathcal{S}, \mathcal{A}]f, f\rangle + 2\langle \mathcal{S}f, \mathcal{S}f\rangle - 2\langle F, \mathcal{S}f\rangle \\ &\qquad \geq \langle \mathcal{S}f, \mathcal{S}f\rangle + \frac{\min\{1, \beta + \gamma^2\}}{2}\int_{\mathbb{R}} \varphi_0''(x - bt)\left[\lambda^3 f^2 + \lambda^2(\partial_x f)^2\right] dx.\end{aligned} \tag{3.75}$$

De fato, por (3.72), temos

$$\begin{aligned}\langle [\mathcal{S}, \mathcal{A}]f, f\rangle + 2\langle \mathcal{S}f, \mathcal{S}f\rangle - 2\langle F, \mathcal{S}f\rangle &= -\frac{d}{dt}\langle \mathcal{S}f, f\rangle \\ &= -\langle \partial_t \mathcal{S}f, f\rangle - \langle \mathcal{S}f, \partial_t f\rangle .\end{aligned} \tag{3.76}$$

Por outro lado (3.67), (3.69), (3.70), (3.71) e Proposições 3.2.1 e 3.3.2 produzem

$$\begin{aligned}
&\langle \partial_t \mathcal{S}f, f\rangle + \langle \mathcal{S}f, \partial_t f\rangle = \langle \partial_t \mathcal{S}f, f\rangle + \left\langle \mathcal{S}f, -(\mathcal{S}+\widetilde{\mathcal{A}})f + F\right\rangle \\
&= \langle [\partial_t, \mathcal{S}]f + S\partial_t f, f\rangle - \langle \mathcal{S}f, \mathcal{S}f\rangle - \left\langle \mathcal{S}f, \widetilde{\mathcal{A}}f\right\rangle + \langle \mathcal{S}f, F\rangle \\
&= \langle [\partial_t, \mathcal{S}]f + S\partial_t f, f\rangle - \langle \mathcal{S}f, \mathcal{S}f\rangle - \left\langle \mathcal{S}f, \widetilde{\mathcal{A}}f\right\rangle + \langle F - \mathcal{A}f, F\rangle \\
&= \langle [\partial_t, \mathcal{S}]f, f\rangle - \langle \mathcal{S}f, \mathcal{S}f\rangle - 2\left\langle \mathcal{S}f, \widetilde{\mathcal{A}}f\right\rangle - \langle \mathcal{A}f, \mathcal{A}f\rangle + \langle F, F\rangle \\
&= -\langle [\mathcal{S}, \mathcal{A}]f, f\rangle - \langle \mathcal{S}f, \mathcal{S}f\rangle - \langle \mathcal{A}f, \mathcal{A}f\rangle + \langle F, F\rangle \\
&\leq -\frac{\min\{1, \beta+\gamma^2\}}{2}\int_{\mathbb{R}} \varphi_0''(x-bt)\left[\lambda^3 f^2 + \lambda^2(\partial_x f)^2\right] dx - \langle \mathcal{S}f, \mathcal{S}f\rangle .
\end{aligned}$$

Portanto, por (3.76), obtemos (3.75).

O próximo passo será usar (3.75) para obter uma estimativa uniforme para $\langle \mathcal{S}f, \mathcal{S}f\rangle$. Tome, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$, as funções

$$\eta_n : [n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}, \qquad \eta_n(t) = \sin \pi(t - n + \frac{1}{2}).$$

Note que $\eta_n(n \pm \frac{1}{2}) = 0$, assim, por (3.74) e (3.75) obtemos

$$\int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \eta_n'(t)\, \langle \mathcal{S}f(t,\cdot), f(t,\cdot)\rangle\, dt \geq \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \eta_n(t)\, \|\mathcal{S}f(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\, dt. \tag{3.77}$$

Por outro lado η_n, η_n' e η_n'' podem ser limitados por uma constante que independe de n. Portanto, usando (3.3), (3.27) e a Proposição 3.3.3, concluímos que o lado direito de (3.73) é limitado por uma constante $C_3 > 0$ que independe de n. Então, por (3.77), obtemos

$$\int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \eta_n(t)\, \|\mathcal{S}f(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\, dt \leq C_3, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

Com isto, concluímos que existe uma sequência de tempos $T_n \in [n, n + \frac{1}{4}]$ tal que

$$\frac{\eta_n(T_n)}{4}\, \|\mathcal{S}f(T_n,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq \int_n^{n+\frac{1}{4}} \eta_n(t)\, \|\mathcal{S}f(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\, dt \leq C_3, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

Assim, observando que

$$\eta_n(T_n) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_+,$$

obtemos

$$\|\mathcal{S}f(T_n,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{8C_3}{\sqrt{2}}, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.78}$$

O último passo desta demonstração consistirá em obter uma estimativa global espaço-tempo para f e, portanto, para u e deste modo usar a lei de conservação da norma L^2 para concluir que a solução u se anula identicamente. Começaremos tomando uma função $\eta : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ regular e positiva tal que $\eta(0) = 0$ e $\eta(t) = 1$, se $t \geq 1$. Por esta escolha de η, podemos trabalhar no intervalo $[0, T_n]$ e usar (3.3), (3.27) e Proposição 3.3.3 para concluir que o lado direito de (3.73) é limitado por uma constante C_4, independente de n. Para o lado direito de (3.74), usamos (3.75) para obter

$$\int_0^{T_n} \eta'(t) \langle \mathcal{S}f(t,\cdot), f(t,\cdot)\rangle \, dt \geq \langle \mathcal{S}f(T_n,\cdot), f(T_n,\cdot)\rangle + \frac{\min\{1, \beta+\gamma^2\}}{2} \int_0^{T_n} \eta(t) \int_{\mathbb{R}} \varphi_0''(x-bt) \left[\lambda^3 f^2 + \lambda^2 (\partial_x f)^2\right] dxdt.$$

Assim, concluímos que

$$C_4 - \langle \mathcal{S}f(T_n,\cdot), f(T_n,\cdot)\rangle \geq \frac{\min\{1, \beta+\gamma^2\}}{2} \int_0^{T_n} \eta(t) \int_{\mathbb{R}} \varphi_0''(x-bt) \left[\lambda^3 f^2 + \lambda^2 (\partial_x f)^2\right] dxdt.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, (3.3), (3.27) e (3.78) segue que

$$\sup_{n\geq 1} |\langle \mathcal{S}f(T_n,\cdot), f(T_n,\cdot)\rangle| < \infty,$$

e, portanto, existe uma constante C_5, independente de n, tal que

$$\int_0^{T_n} \eta(t) \int_{\mathbb{R}} \varphi_0''(x-bt) \left[\lambda^3 f^2 + \lambda^2 (\partial_x f)^2\right] dxdt \leq C_5, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

Então, fazendo $T_n \longrightarrow \infty$, obtemos

$$\int_1^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_0''(x-bt) \left[\lambda^3 f^2 + \lambda^2 (\partial_x f)^2\right] dxdt < \infty,$$

e como consequência

$$\int_1^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_0''(x-bt) e^{\frac{2\lambda\varphi_0(x-bt)}{3}} u^2(t,x) dxdt < \infty. \tag{3.79}$$

Sendo $\lambda \geq 1$, segue por (3.28) que

$$\inf_{r\in\mathbb{R}} \varphi_0''(r) e^{\frac{2\lambda\varphi_0(r)}{3}} > 0.$$

Portanto, podemos usar (3.79) para concluir que

$$\int_1^{\infty} \int_{\mathbb{R}} u^2(t,x) dxdt < \infty,$$

e deste modo, utilizar a lei de conservação da norma L^2, estabelecida na Proposição 3.3.4, para obter $u \equiv 0$. $\square$

3.5 Apêndice

Neste apêndice, com o objetivo de comprovarmos a necessidade das condições sobre os parâmetros λ e b do Teorema 3.0.5, construiremos dois exemplos de soluções não nulas para um caso particular da equação (3.1) que cumpra (3.3), (3.4) e (3.5) para

$$\lambda < \max\left\{C_0(1+\beta+\gamma+\beta\gamma), \frac{2^{\rho+4}C_1^{\frac{\rho}{6}+1}M_1^2}{\min\{1,\beta+\gamma^2\}}\right\} \qquad \text{e} \qquad b=\lambda^5,$$

no primeiro exemplo e

$$\lambda = \max\left\{C_0(1+\beta+\gamma+\beta\gamma), \frac{2^{\rho+4}C_1^{\frac{\rho}{6}+1}M_1^2}{\min\{1,\beta+\gamma^2\}}\right\} \qquad \text{e} \qquad b<\lambda^5,$$

no segundo exemplo. Em ambos os exemplos que daremos a seguir iremos considerar, para $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ e $\gamma > 0$, a equação

$$\partial_t u + \beta\partial_x^3 u - \gamma\partial_x^5 u = -\alpha u\partial_x u, \tag{3.80}$$

que, segundo Joffrey e Mohamad, em [21], admite como solução

$$u(t,x) = \frac{105\beta^2}{169\alpha\gamma}\operatorname{sech}^4\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{13\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{36\beta^2 t}{169\gamma}\right)\right]. \tag{3.81}$$

Olhando para a equação (3.1), vemos que (3.80) é um caso particular de (3.1) para $a(s) = -\alpha s$. Neste caso, temos

$$|a(s)| \leq |\alpha|(|s|+|s|), \qquad \forall s \in \mathbb{R},$$

isto é, $a(s)$ satisfaz (3.2) para $\rho = 1$ e $M_1 = |\alpha|$.

Exemplo 3.5.1 *Sejam C_0 e C_1 as constantes do Teorema* 3.0.5 *e tome $\kappa > 0$ tal que*

$$4\left(\frac{\kappa}{13}\right)^{\frac{1}{2}} > 4C_0, \tag{3.82}$$

e

$$C_0 \geq \frac{2^5 C_1^{\frac{1}{6}+1}}{\kappa}. \tag{3.83}$$

Seja $\gamma_0 > 0$, suficientemente pequeno, tal que

$$2^5 C_1^{\frac{1}{6}+1}\gamma_0 \leq C_0, \tag{3.84}$$

$$\kappa\gamma_0 + \gamma_0 + \kappa\gamma_0^2 \leq 1, \tag{3.85}$$

$$\frac{36\kappa^2\gamma_0}{169} \leq C_0^5, \tag{3.86}$$

e

$$M_2^{\frac{1}{2}} M_3^{\frac{1}{2}} + M_3 \leq 1, \tag{3.87}$$

onde

$$M_2 = \frac{11025\kappa^4\gamma_0 2^9}{114244\left(\frac{\kappa}{13}\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{44100\kappa^5\gamma_0 2^9}{1485172\left(\frac{\kappa}{13}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad e \quad M_3 = \frac{11025\kappa^4\gamma_0 2^9}{28561\left[4\left(\frac{\kappa}{13}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right]}. \tag{3.88}$$

Nestas condições tomando, em (3.80), $\beta = \kappa\gamma_0$, $\gamma = \gamma_0$ *e* $\alpha = \gamma_0^{\frac{1}{2}}$, *obtemos a equação*

$$\partial_t u + \kappa\gamma_0\partial_x^3 u - \gamma_0\partial_x^5 u = -\gamma_0^{\frac{1}{2}} u\partial_x u. \tag{3.89}$$

Provaremos a seguir que a solução estabelecida por Joffrey e Mohamad

$$u(t,x) = \frac{105\kappa^2\gamma_0^{\frac{1}{2}}}{169}\operatorname{sech}^4\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\kappa}{13}\right)^{\frac{1}{2}}\left(x - \frac{36\kappa^2\gamma_0 t}{169}\right)\right], \tag{3.90}$$

cumpre (3.3), (3.4) *e* (3.5) *para* $\lambda = \left(\frac{36\kappa^2\gamma_0}{169}\right)^{\frac{1}{5}}$ *e* $b = \frac{36\kappa^2\gamma_0}{169}$, *e que, além disto, tem-se, para estas escolhas de* λ *e* b,

$$\lambda < \max\left\{C_0(1 + \kappa\gamma_0 + \gamma_0 + \kappa\gamma_0^2), \frac{2^5 C_1^{\frac{1}{6}+1}\gamma_0}{\min\{1, \kappa\gamma_0 + \gamma_0^2\}}\right\} \qquad e \qquad b = \lambda^5. \tag{3.91}$$

De fato, por (3.86), *segue que*

$$\lambda = \left(\frac{35\kappa^2\gamma_0}{169}\right)^{\frac{1}{5}} \leq C_0 < \max\left\{C_0(1 + \kappa\gamma_0 + \gamma_0 + \kappa\gamma_0^2), \frac{2^5 C_1^{\frac{1}{6}+1}\gamma_0}{\min\{1, \kappa\gamma_0 + \gamma_0^2\}}\right\},$$

portanto, desde que é imediata a igualdade $b = \lambda^5$, *verificamos a validade de* (3.91). *Agora, iremos verificar que a solução, não trivial,* (3.90) *de* (3.89) *satisfaz as hipóteses* (3.3), (3.4) *e* (3.5) *para* $\lambda = \left(\frac{35\kappa^2\gamma_0}{169}\right)^{\frac{1}{5}}$ *e* $b = \frac{35\kappa^2\gamma_0}{169}$.

Verificação de (3.5)*: Começaremos observando que*

$$\operatorname{sech}(s) = \frac{2}{e^s + e^{-s}} \leq \frac{2}{e^{|s|}}, \qquad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{3.92}$$

Portanto, fixado $t \in \mathbb{R}$, por (3.92)*, obtemos*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} e^{|x-bt|}u^2(t,x)dx &= \frac{11025\kappa^4\gamma_0}{28561}\int_{\mathbb{R}} e^{|x-bt|}\operatorname{sech}^8\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\kappa}{13}\right)^{\frac{1}{2}}(x-bt)\right]dx\\ &= \frac{11025\kappa^4\gamma_0}{28561}\int_{\mathbb{R}} e^{|y|}\operatorname{sech}^8\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\kappa}{13}\right)^{\frac{1}{2}}y\right]dy\\ &\leq \frac{11025\kappa^4\gamma_0 2^8}{28561}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{|y|}}{e^{4\left(\frac{\kappa}{13}\right)^{\frac{1}{2}}|y|}}dy\\ &= \frac{11025\kappa^4\gamma_0 2^9}{28561}\int_0^{\infty}\frac{e^{y}}{e^{4\left(\frac{\kappa}{13}\right)^{\frac{1}{2}}y}}dy.\end{aligned}$$

Por outro lado, como $C_0 \geq 1$, podemos usar (3.82) *para obter $4\left(\frac{\kappa}{13}\right)^{\frac{1}{2}} > 1$ e, portanto, concluir que*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{|x-bt|}u^2(t,x)dx \leq \frac{11025\kappa^4\gamma_0 2^9}{28561\left[4\left(\frac{\kappa}{13}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.93}$$

Assim, por (3.88)*, obtemos*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{|x-bt|}u^2(t,x)dx \leq M_3.$$

Verificação de (3.4)*: Fixado $t \in \mathbb{R}$, usando* (3.92)*, obtemos*

$$\begin{aligned}\|u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} u^2(t,x)dx\\ &= \frac{11025\kappa^4\gamma_0}{28561}\int_{\mathbb{R}}\operatorname{sech}^8\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\kappa}{13}\right)^{\frac{1}{2}}(x-bt)\right]dx\\ &= \frac{11025\kappa^4\gamma_0}{28561}\int_{\mathbb{R}}\operatorname{sech}^8\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\kappa}{13}\right)^{\frac{1}{2}}y\right]dy\\ &\leq \frac{11025\kappa^4\gamma_0 2^8}{28561}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{e^{4\left(\frac{\kappa}{13}\right)^{\frac{1}{2}}|y|}}dy\\ &= \frac{11025\kappa^4\gamma_0 2^9}{28561}\int_0^{\infty}\frac{1}{e^{4\left(\frac{\kappa}{13}\right)^{\frac{1}{2}}y}}dy\\ &= \frac{11025\kappa^4\gamma_0 2^9}{114244\left(\frac{\kappa}{13}\right)^{\frac{1}{2}}}.\end{aligned} \tag{3.94}$$

Agora, observando que

$$\partial_x u(t,x) = -\frac{210\kappa^{\frac{5}{2}}\gamma_0^{\frac{1}{2}}}{169\sqrt{13}}\operatorname{sech}^4\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\kappa}{13}\right)^{\frac{1}{2}}(x-bt)\right]\tanh\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\kappa}{13}\right)^{\frac{1}{2}}(x-bt)\right],$$

segue pelo fato de $|\tanh(s)| \leq 1$, *para todo* $s \in \mathbb{R}$, *que*

$$|\partial_x u(t,x)| \leq \frac{210\kappa^{\frac{5}{2}}\gamma_0^{\frac{1}{2}}}{169\sqrt{13}}\operatorname{sech}^4\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\kappa}{13}\right)^{\frac{1}{2}}(x-bt)\right],$$

e, assim, por (3.92), *obtemos*

$$\begin{aligned}\|\partial_x u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}}(\partial_x u(t,x))^2 dx \\ &\leq \frac{44100\kappa^5\gamma_0}{371293}\int_{\mathbb{R}}\operatorname{sech}^8\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\kappa}{13}\right)^{\frac{1}{2}}(x-bt)\right]dx \\ &\leq \frac{44100\kappa^5\gamma_0 2^9}{1485172\left(\frac{\kappa}{13}\right)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \tag{3.95}$$

Portanto, por (3.88), (3.94) *e* (3.95), *concluímos que*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\|u(t,\cdot)\|^2_{H^1(\mathbb{R})} \leq M_2.$$

Verificação de (3.3)*: Fixado* $t \in \mathbb{R}$, *procedendo como na verificação de* (3.5), *teremos*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} e^{2\lambda|x-bt|}u^2(t,x)dx &= \frac{11025\kappa^4\gamma_0}{28561}\int_{\mathbb{R}} e^{2\lambda|x-bt|}\operatorname{sech}^8\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\kappa}{13}\right)^{\frac{1}{2}}(x-bt)\right]dx \\ &\leq \frac{11025\kappa^4\gamma_0 2^9}{28561}\int_0^\infty \frac{e^{2\lambda y}}{e^{4\left(\frac{\kappa}{13}\right)^{\frac{1}{2}}y}}dy.\end{aligned}$$

Então, por (3.82) *e* (3.86), *obtemos*

$$2\lambda = 2\left(\frac{35\kappa^2\gamma_0}{169}\right)^{\frac{1}{5}} \leq 2C_0 < 4\left(\frac{\kappa}{13}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.96}$$

e, portanto, concluímos que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{2\lambda|x-bt|}u^2(t,x)dx < \infty.$$

Por outro lado, derivando e observando que $|\tanh(s)| \leq 1$, *para todo* $s \in \mathbb{R}$, *podemos concluir que existem constantes* $\kappa_j \in \mathbb{R}$, *para* $j = 1,\ldots,5$, *tais que*

$$\left|\partial_x^j\left(\operatorname{sech}^4\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\kappa}{13}\right)^{\frac{1}{2}}(x-bt)\right]\right)\right| \leq \kappa_j\,\operatorname{sech}^4\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\kappa}{13}\right)^{\frac{1}{2}}(x-bt)\right]. \tag{3.97}$$

Assim, utilizando (3.96) *e* (3.97), *obtemos*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{2\lambda|x-bt|}(\partial_x^j u(t,x))^2 dx < \infty, \qquad \forall j = 1,\ldots,5.$$

Exemplo 3.5.2 *Considere as constantes κ e γ_0 definidas no Exemplo* 3.5.1. *Provaremos que a solução* (3.90) *de* (3.89) *satisfaz* (3.3), (3.4) *e* (3.5), *se escolhermos*

$$\lambda = C_0(1 + \kappa\gamma_0 + \gamma_0 + \kappa\gamma_0^2) \qquad e \qquad b = \frac{36\kappa^2\gamma_0}{169}. \tag{3.98}$$

Além disto, também mostraremos que para estas escolhas de λ e b, valem

$$\lambda = \max\left\{C_0(1 + \kappa\gamma_0 + \gamma_0 + \kappa\gamma_0^2), \frac{2^5 C_1^{\frac{1}{6}+1}\gamma_0}{\min\{1, \kappa\gamma_0 + \gamma_0^2\}}\right\} \qquad e \qquad b < \lambda^5. \tag{3.99}$$

De fato, começaremos justificando (3.99). *Por* (3.83), *segue que*

$$C_0 \geq \frac{2^5 C_1^{\frac{1}{6}+1}}{\kappa} > \frac{2^5 C_1^{\frac{1}{6}+1}}{\kappa + \gamma_0} = \frac{2^5 C_1^{\frac{1}{6}+1}\gamma_0}{\kappa\gamma_0 + \gamma_0^2},$$

portanto, por (3.84), *obtemos*

$$C_0 \geq \frac{2^5 C_1^{\frac{1}{6}+1}\gamma_0}{\min\{1, \kappa\gamma_0 + \gamma_0^2\}},$$

e, desta forma, concluímos que

$$\max\left\{C_0(1 + \kappa\gamma_0 + \gamma_0 + \kappa\gamma_0^2), \frac{2^5 C_1^{\frac{1}{6}+1}\gamma_0}{\min\{1, \kappa\gamma_0 + \gamma_0^2\}}\right\} = C_0(1 + \kappa\gamma_0 + \gamma_0 + \kappa\gamma_0^2) = \lambda.$$

Por fim, por (3.86), *obtemos*

$$b = \frac{36\kappa^2\gamma_0}{169} \leq C_0^5 < \left[C_0(1 + \kappa\gamma_0 + \gamma_0 + \kappa\gamma_0^2)\right]^5 = \lambda^5.$$

Agora, iremos verificar que a solução, não trivial, (3.90) *de* (3.89) *satisfaz* (3.3), (3.4) *e* (3.5) *para λ e b dados em* (3.98).

Verificações de (3.5) *e* (3.4)*: Seguem exatamente como no Exemplo* 3.5.1.

Verificação de (3.3)*: Por* (3.85), *observamos que*

$$2\lambda = 2C_0(1 + \kappa\gamma_0 + \gamma_0 + \kappa\gamma_0^2) \leq 4C_0,$$

então, por (3.82), *teremos*

$$4\left(\frac{\kappa}{13}\right)^{\frac{1}{2}} > 4C_0 \geq 2\lambda. \tag{3.100}$$

Por outro lado, procedendo como no Exemplo 3.5.1*, obtemos*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{2\lambda|x-bt|}u^2(t,x)dx \leq \frac{11025\kappa^4\gamma_0 2^9}{28561}\int_0^\infty \frac{e^{2\lambda y}}{e^{4\left(\frac{\kappa}{13}\right)^{\frac{1}{2}}y}}dy, \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

e, por (3.100),

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{2\lambda|x-bt|}u^2(t,x)dx < \infty.$$

Por fim, por (3.97) *e* (3.100)*, concluímos que*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{2\lambda|x-bt|}(\partial_x^j u(t,x))^2dx < \infty, \qquad ,\forall j = 1,\ldots,5.$$

Referências Bibliográficas

[1] R. A. Adams e J. J. F. Fournier, *Sobolev Space*, Second edition, Academic Press (Elsevier), 2003.

[2] P. Appell, *Sur l' équation* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ *et la théorie de la chaleur*, J. Math. pures appl., 4^e série, **8** (1892), 187-216.

[3] H. Bahouri, J.-Y. Chemin e R. Danchin, *Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equation*, Springer-Verlag, 2011.

[4] T. B. Benjamim, *Lectures on Nonlinear Wave Motion*, Lectures Notes in Applied Mathematics, **15** (1974), 3-47.

[5] T. B. Benjamin, J. L. Bona e J.J. Mahony, *Model equations for long waves in nonlinear dispersive system*, Phil. Trans. R. Soc. London, **A 272** (1972), 47-78.

[6] J. L. Bona, *Nonlinear Wave Phenomena*, 51° Seminário Brasileiro de Análise, Florianópolis, 2000.

[7] J. L. Bona, W. G. Pritchard e L. R. Scott, *An evaluation of a model equation for water waves*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser., **A 302** (1981), 457-510.

[8] J. Boussinesq, *Théorie de l' intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation se propageant dans un canal re rectangular*, Comptes Rendus, **72** (1871), 755-759.

[9] J. Boussinesq, *Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d' un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vi-*

tesses sensiblement pareilles de la surface au fond, Journal de mathématiques pures et appliquées, **17** (1872), 55-108.

[10] H. Burkhardt, *Sur les fonctions de Green relatives a un domaine d'une dimension*, Bull. Soc. Math., **22** (1894), 71-75.

[11] Y. Chen, *On existence theorems of periodic traveling wave solution to the generalized forced Kadomtsev-Petviashvili equation*, Arch. Mech., Vol. **48** (1996), No. 5, 925-931.

[12] Y. Chen, *A nonexistence theorem of small periodic traveling wave solutions to the generalized Boussinesq equation*, Arch. Mech., Vol. **49** (1997), No. 4, 697-704.

[13] D. G. Duffy,*Green's Functions with Applications*, Chapman and Hall/CRC Press, Boca Raton, Florida, 2001.

[14] L. Escauriaza, C. E. Kenig, G. Ponce e L. Vega, *Unique continuation for Schrödinger evolutions, with applications to profiles of concentration and traveling waves*, Commun. Math. Phys., **305** (2011), 487-512.

[15] G. B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley & Sons, 1999.

[16] H. Grad e P. N. Hu. *Unified shock profile in a plasma*, Phys. Fluids, **10** (1967), 2596-2602.

[17] G. Green, *An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, **44** (1852), 356-374.

[18] E. W. Hobson, *Synthetical solutions in the conduction of heat*, Proc. London Math. Soc., **19** (1888), 279-294.

[19] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators I*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **256** (1983), Springer-Verlag, Berlin .

[20] T. Iguchi, *A long wave approximation for capillary-gravity waves and the Kawahara Equations*, Academia Sinica (New Series), Vol. **2** (2007), No. 2, 179-220.

[21] A. Jeffey e M. N. B. Mohamad, *Traveling Wave Solutions to a Higher Order KdV Equation*, Chaos, Solitons, Fractals, **1** (1991), 187-194.

[22] R. S. Johnson, *A nonlinear equation incorporating damping and dispersion*, J. Fluid Mech., **42** (1970), 49-60.

[23] R. S. Johnson, *Shallow water waves on a viscous fluid-the undular bore*, Phys. Fluids, **15** (1972), 1693-1699.

[24] T. Kato, *On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation*, Advances in Mathematics Supplementary Studies, Studies in Applied Math., **8** (1983), 93-128.

[25] T. Kawahara, *Oscillatory solitary waves in dispersive media*, J. Phys. Soc. Japan, **33** (1972), 260-264.

[26] C. E. Kenig, G. Ponce e L. Vega, *Lower bounds for non-trivial travelling wave solutions of equations of KdV type*, Nonlinearity, **25** (2012), 1235-1245.

[27] L. J. Kenneth, He Xiaogui e C. Yunkai, *Existence of periodic traveling wave solution to the forced generalized nearly concentric Korteweg-de Vries equation*, Internat. J. Math. & Math. Sci., Vol. **24** (2000), No. 6, 371-377.

[28] G. Kirchhoff, *Zur Theorie der Lichtstrahlen*, Sitzber. K. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (1882), 641-669.

[29] D. J. Korteweg e G. de Vries, *On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel, and on a new type of long stationary waves*, Phil Mag, **39** (1895), 422-443.

[30] B.-P. Liu e C. V. Pao, *Green's function method for periodic traveling wave solutions of the KdV equation*, Applicable Analysis, **14** (1983), 293-301.

[31] Huang Nanjing, *Existence of periodic traveling wave solutions for a class of generalized BBM equation*, Applied Mathematics and Mechanic, Vol. **18** (1997), No. 6, 599-603.

[32] L. Rayleigh, *On waves*, Phil. Mag., **1** (1876), 257-279.

[33] J. S. Russell, *Report on Waves*, Report of the fourteenth meeting of the British Association for the Advancement of Science, York (1844), 311-390.

[34] G. Schneider e C. E. Wayne, *The Rigorous Approximation of Long-Wavelength Capillary-Gravity Waves*, Arch. Rational Mech. Anal., **162** (2002), 247-285.

[35] D. R. Smart, *Fixed point theorems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1974.

[36] A. Sommerfeld, *Zur analytischen Theorie der Wärmeleitung*, Math. Ann., **45** (1894), 263-277.

[37] I. Stakgold, *Green's Functions and Boundary Value Problems*, John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, 1979.

[38] A. M. Wazwaz, *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.