UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

FILIPE FERNANDES

# UM ESTUDO QUALITATIVO DO CONTRAEXEMPLO DE PINCHUK

SÃO CARLOS
2017

# UM ESTUDO QUALITATIVO DO CONTRAEXEMPLO DE PINCHUK

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

FILIPE FERNANDES

# UM ESTUDO QUALITATIVO DO CONTRAEXEMPLO DE PINCHUK

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

*Orientação: Prof. Dr. Francisco Braun.*

SÃO CARLOS
2017

## BANCA EXAMINADORA

(aqui vai a folha de aprovação, com as assinaturas da banca)

*Para minha família*

# Agradecimentos

Agradeço a minha família, sem ela nada disso seria possível; ao meu orientador, Professor Francisco Braun, por todos os ensinamentos apoio e paciência; a todos os meus amigos, em especial ao Cristiano Souza e ao Matheus Rodrigues por todo o companherismo e por todas as risadas; e à CAPES pelo apoio financeiro.

# Resumo

Neste trabalho estudamos o comportamento topológico das curvas de níveis do polinômio $p$ do contra-exemplo de Pinchuk à Conjectura Jacobiana Real, isto é, uma aplicação polinomial não injetora de $\mathbb{R}^2$ da forma $(p, q)$ com determinante da matriz Jacobiana que nunca se anula, utilizando técnicas da teoria qualitativa de equações diferenciais. Também encontramos uma família de aplicações polinomiais que são contraexemplos para a conjectura Jacobiana Real.

**Palavras-chave:** Análise Matemática. Campos vetoriais. Injetividade.

# Abstract

In this work we studied the topological behaviour of the level curves of the polinomial $p$ of Pinchuk counterexample of the Real Jacobian Conjecture, namely, a polinomial non-injective map of $\mathbb{R}^2$ with the form $(p, q)$ with a nonvanishing Jacobian Matrix determinant, using techniques of the qualitative theory of differential equations. We also found a family of polinomial functions witch are counterexamples of the Real Jacobian conjecture.

**Keywords:** Mathematical Analysis. Vector fields. Injectivity.

# Sumário

**1 Princípios da Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais Planares 10**

1.1 Primeiros Teoremas . . . . . 10

1.2 Pontos Singulares . . . . . 20

1.3 Estrutura Local das Singularidades Hiperbólicas . . . . . 26

1.4 Ingredientes de Retratos de Fase . . . . . 31

1.5 A Técnica de Blow Up . . . . . 33

1.6 Compatificação de Poincaré . . . . . 41

**2 A Conjectura Jacobiana Real e o Contraexemplo de Pinchuk 47**

2.1 Resultados de Injetividade . . . . . 48

2.2 Equações Úteis . . . . . 50

2.3 O Contraexemplo de Pinchuk . . . . . 57

2.3.1 Contraexemplos para grau$(G) \leq 3$ . . . . . 61

2.3.2 Outros contraexemplos . . . . . 67

**3 Retrato de Fase Topológico Global Do Campo $H_p$ 68**

3.1 Estudo das singularidades infinitas do campo $H_p$ . . . . . 68

3.1.1 Estudo Qualitativo da Carta $U_1$ . . . . . 69

3.1.2 Estudo Qualitativo da Carta $U_2$ . . . . . 78

3.2 Parte finita . . . . . 89

3.2.1 Retrato de fase Topológico Global do Campo $H_p$ . . . . . 100

# Introdução

Em 1939, Ott-Heinrich Keller propôs a Conjectura Jacobiana em [14]. A Conjectura Jacobiana afirma que se uma aplicação polinomial sob um corpo de característica zero possui determinante da matriz Jacobiana constante não nulo, então essa aplicação é inversível e sua inversa é polinomial. Esse é um dos problemas mais importantes em aberto na Matemática atualmente, presente na lista dos dezoito problemas de Smale e estudado por inúmeros pesquisadores. Dentre os trabalhos relacionados a Conjectura Jacobiana, destacamos o de Hyman Bass, Edwin H. Connell e David Wright em [5]. Neste Artigo, eles mostram que a Conjectura Jacobiana segue de um caso especial em que os polinômios possuem grau 3, porém aumentando o número de variáveis. Uma coletânea de resultados relacionados a esse problema bem como um tratamento sistemático da conjectura Jacobiana e problemas relacionados podem ser encontrados no livro de Arno van den Essen em [24]. Naturalmente surgiu uma nova pergunta sob o corpo dos números reais: Uma aplicação polinomial cujo determinante da matriz Jacobiana que nunca se anula é inversível? Esse problema é conhecido como a Conjectura Jacobiana Real. Em 1994, Sergey Pinchuk em [21] respondeu negativamente a essa pergunta construindo um exemplo: Uma aplicação polinomial não injetora de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ cujo determinante da matriz Jacobiana nunca se anula em que um das coordenadas possui grau 10 e a outra grau 40.

Um trabalho importante relacionado ao contraexemplo de Pinchuk é o de L. A. Campbell em [10]. Nesse artigo, dentre outras coisas, Campbell mostra que o grau da segunda componente do contraexemplo pode ser reduzido a 25, encontra uma parametrização para os níveis da primeira componente e encontra a *variedade assintótica* do contraexemplo. Outro trabalho relacionado com o contraexemplo de Pinchuk é o de Ronen Peretz em [20]. Nesse trabalho, Peretz mostra que as componentes do contraexemplo de Pinchuk estão contidas em um subanel dos polinômios e que não é possível construir um contraexemplo

para a Conjectura Jacobiana partindo desse subanel.

Com o objetivo de encontrar um exemplo mais simples para a Conjectura Jacobiana Real, generalizamos a construção de Pinchuk no segundo capítulo. Apesar disso, todos os exemplos que encontramos possuem a coordenada de menor grau com grau $\geq 10$. Com o mesmo intuito, Francisco Braun e José Ruidival dos Santos Filho em [8] mostraram que se uma das coordenadas possui grau 3, não é possível construir um exemplo. Mais ainda, pelo resultado de Francisco Braun e Bruna Oréfice-Okamoto em [7], se uma das coordenadas possui grau 4 também não é possível construir um contraexemplo. Até o presente, ainda não se sabe se é possível encontrar algum exemplo em que uma das coordenadas possui grau n, com $4 < n < 10$. Esses resultados e o resultado de Janusz Gwoździewicz em [13], que diz que se a fronteira de uma meia componente de Reeb é uma reta, utilizam fortemente o estudo das curvas de níveis de um polinômio relacionado com a injetividade de uma aplicação polinomial. Ainda no segundo capítulo desenvolvemos alguns resultados sobre esse estudo.

No terceiro capítulo, nos dedicamos a estudar as curvas de níveis de uma das componentes do contraexemplo de Pinchuk. Para tanto, criamos o retrato de fase global das curvas de níveis da primeira componente do contraexemplo de Pinchuk. O modo como isso foi realizado foi por meio das técnicas de teoria qualitativa de equações diferenciais desenvolvidas no primeiro capítulo. Uma das técnicas que desenvolvemos é a *compatificação de Poincaré*. Ela nos permite estudar globalmente qualquer campo vetorial polinomial em $\mathbb{R}^2$. Outra técnica fundamental para o nosso estudo é a técnica de *Blow Up* tendo como referência o artigo [1]. Essa técnica nos permite estudar qualitativamente qualquer tipo de singularidade isolada de um campo vetorial polinomial.

As ferramentas desenvolvidas no capítulo 1 e utilizadas no capítulo 3, embora tenham sido aplicadas a um exemplo específico de um campo hamiltoniano, podem ser aplicadas em um campo polinomial qualquer para criarmos seu retrato de fase topológico global.

# Capítulo 1

# Princípios da Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais Planares

Nesta sessão, iremos introduzir alguns conceitos básicos da teoria qualitativa de equações diferenciais planares que serão utilizados ao longo do texto. Estudaremos equações do tipo:

$$x' = X(x) \tag{1.0.1}$$

em que $X$ é um campo vetorial de $\mathbb{R}^n$.

## 1.1 Primeiros Teoremas

**Definição 1.1.1.** Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ uma função diferenciável. Dizemos que $\varphi$ é uma *solução* da equação diferencial (1.0.1) se

$$\varphi'(t) = X(\varphi(t)) \tag{1.1.1}$$

para todo $t \in I$.

**Definição 1.1.2.** Sejam $U$ um aberto em $\mathbb{R}^n$ e $X : U \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe $C^r$, $r \geq 1$. Dizemos que um ponto $p \in U$ é um *ponto singular* da equação diferencial (1.0.1) se $X(p) = 0$. Dizemos que $p$ é um *ponto regular* caso contrário.

**Definição 1.1.3.** Sejam $x_0 \in U$ e $\varphi : I_{x_0} \to \mathbb{R}^n$ uma solução de (1.0.1) tal que $\varphi(0) = x_0$. Dizemos que $\varphi$ é uma *solução maximal passando por* $x_0$ se para toda outra solução

$\psi : J \to \mathbb{R}^n$ com $\psi(0) = x_0$ tivermos $J \subset I_{x_0}$. Neste caso, diremos que $I_{x_0}$ é o *intervalo maximal passando por* $x_0$. Ao longo do texto, denotaremos por $I_{x_0}$ tal intervalo.

**Definição 1.1.4.** Seja $\varphi : I_x \to U$ uma solução maximal. A imagem de $\varphi$, $\gamma_\varphi = \{\varphi(t) \mid t \in I_x\} \subset U$, é chamada de *órbita* associada à solução maximal $\varphi$. Observemos que uma solução maximal induz naturalmente uma orientação na sua respectiva órbita dada pela sua variação crescente no tempo. Uma órbita com sua orientação natural será chamada de *órbita orientada*.

A seguir teremos um resultado particular do Teorema de Picard sobre condições de existência e unicidade de soluções, além disso apresentamos duas propriedades fundamentais das nossas equações e também a definimos o fluxo de um campo vetorial.

**Teorema 1.1.5.** *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $X : U \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe $C^r$, $r \geq 1$. Valem os seguintes resultados:*

*i) (Existência e unicidade de soluções maximais). Para todo $x_0 \in U$ existe um intervalo aberto $I_{x_0}$ maximal tal que uma única solução maximal $\varphi_{x_0}$ de (1.0.1) está definida e satisfaz $\varphi_{x_0}(0) = x_0$.*

*ii) (Continuidade com respeito às condições iniciais). Seja $D = \{(t, x) \mid x \in U, t \in I_x\}$. Então $D$ é aberto em $\mathbb{R}^{n+1}$ e $\varphi : D \to \mathbb{R}^n$ dada por $\varphi(t, x) = \varphi_x(t)$ é uma função de classe $C^r$. Dizemos que $\varphi$ assim definida é o fluxo de $X$.*

*iii) (Propriedade de fluxo). Sejam $\phi_x : I_x \to \mathbb{R}^n$ e $\phi_y : I_y \to U$ soluções maximais satisfazendo $\varphi_x(0) = x$ e $\varphi_y(0) = y$. Suponha que $y = \varphi_x(t)$ com $t \in I_x$, então $I_y = \{r - t \mid r \in I_x\}$ e $\varphi_x(r + t) = \varphi_y(r)$.*

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [23], página 209. Vale ressaltar que (i) e (ii) também são válidos para equações diferenciais mais gerais na forma $x' = F(x, t)$.

Vamos introduzir noções para podermos fazer comparações entre campos vetoriais e seus fluxos.

**Definição 1.1.6.** Sejam $U_1$ e $U_2$ abertos de $\mathbb{R}^n$, $X_1 : U_1 \to \mathbb{R}^n$ e $X_2 : U_2 \to \mathbb{R}^n$ campos vetoriais, $\varphi_1 : D_1 \to \mathbb{R}^n$ e $\varphi_2 : D_2 \to \mathbb{R}^n$ seus respectivos fluxos. Dizemos que $X_1$ é

*topologicamente equivalente* ($C^r$ equivalente, respectivamente) a $X_2$ se existir um homeomorfismo (difeomorfismo de classe $C^r$, respectivamente) $h : U_1 \to U_2$ que leva órbitas de $X_1$ em órbitas de $X_2$ preservando a orientação. Isto é, se $\gamma_{\varphi_1}$ for uma órbita orientada de $X_1$, $h(\gamma_{\varphi_1})$ será uma órbita orientada de $X_2$.

Vamos apresentar uma condição suficiente para $C^r$-equivalência entre campos:

**Proposição 1.1.7.** *Sejam $U$ aberto de $\mathbb{R}^n$, $X_1 : U \to \mathbb{R}^n$ e $X_2 : U \to \mathbb{R}^n$ campos vetoriais de classe $C^r$, $r \geq 1$, tais que exista uma função $p : U \to \mathbb{R}$, $p(x) > 0$ para todo $x \in U$ de classe $C^r$ de modo que*

$$X_1(x) = p(x)X_2(x).$$

*Então $X_1$ e $X_2$ são $C^r$ equivalentes.*

*Demonstração.* Seja $\varphi_2 : I_2 \to U$ uma solução maximal de $X_2$. Pelo item (i) do Teorema 1.1.5 existe uma única função $f : I_0 \to I_2$, solução maximal de

$$x' = p(\varphi_2(x))$$

satisfazendo

$$f'(t) = p(\varphi_2(f(t))),$$
$$f(0) = 0.$$

A função $f(t)$ é um difeomorfismo crescente com sua imagem pois $f'(t) = p(\varphi_2(f(t))) > 0$. Afirmamos que a imagem de $f$ é $I_2$. De fato, se fosse $t_m = \sup\{f(I_0)\} < \sup\{I_2\}$, teríamos pelo item (i) do Teorema 1.1.5, que dado $\alpha \in \mathbb{R}$, existiria uma solução $f^* : I^* \to I_2$ satisfazendo

$$f^{*\prime}(t) = p(\varphi_2(f^*(t))),$$
$$f^*(\alpha) = t_m,$$

em que $I^* = (\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon)$. Como $f^{*\prime}(t) = p(\varphi_2(f^*(t))) > 0$, $f^{*\prime}$ é estritamente crescente,

assim, existe $\delta > 0$ tal que $f^*(\alpha - \epsilon/2) = t_m - \delta$. Tomemos $\alpha = f^{-1}(t_m - \delta) + \epsilon/2$. Assim,

$$f^*(\alpha - \epsilon/2) = f(\alpha - \epsilon/2).$$

Logo $f$ e $f^*$ coincidem em um ponto. Contudo, $f$ é a única solução maximal passando por $t_m - \delta$, logo $f^*(I^*) \subset f(I_0)$, uma contradição. Assim, segue que $\sup\{f(I_0)\} = \sup\{I_2\}$. Podemos mostrar de maneira análoga que $\inf\{f(I_0)\} = \inf\{I_2\}$ e assim concluímos que $f(I_0) = I_2$. Definamos

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(f(t)).$$

Mostremos que assim definida, $\varphi_1$ é uma solução maximal de $X_1$. De fato,

$$\varphi_1'(t) = \varphi_2'(f(t))f'(t) = X_2(\varphi_2(f(t))p(\varphi_2(f(t))) = p(\varphi_1(t))X_2(\varphi_1(t)) = X_1(\varphi_1(t)),$$

logo $\varphi_1$ é uma solução de $X_1$. Seja $I_1$ o intervalo maximal de uma solução por $X_1$ por $\varphi_1(0)$. Resta mostrar que $I_0 = I_1$. Assim, o difeomorfismo identidade, $h : U \to U$, $h(x) = (x)$ leva órbitas de $X_1$ ($X_2$) em órbitas de $X_2$ ($X_1$) preservando orientação como queríamos. □

Observemos que no caso em que $p(x) < 0$, $h$ como definido acima leva órbitas de $X_1$ ($X_2$) em órbitas de $X_2$ ($X_1$), porém inverte a orientação.

**Definição 1.1.8.** Sejam $U_1$ e $U_2$ abertos de $\mathbb{R}^n$, $X_1 : U_1 \to \mathbb{R}^n$ e $X_2 : U_2 \to \mathbb{R}^n$ campos vetoriais, $\varphi_1 : D_1 \to \mathbb{R}^n$ e $\varphi_2 : D_2 \to \mathbb{R}^n$ seus respectivos fluxos. Dizemos que $X_1$ é *topologicamente conjugado* ($C^r$-conjugado, respectivamente) a $X_2$ se existir um homeomorfismo (difeomorfismo de classe $C^r$, respectivamente) $h : U_1 \to U_2$ tal que $h(\varphi_1(t, x)) = \varphi_2(t, h(x))\ \forall (t, x) \in D_1$. Se esse for o caso, dizemos que h é uma F entre $X_1$ e $X_2$.

O seguinte resultado caracteriza conjugação $C^r$:

**Lema 1.1.9.** *Sejam $U_1$ e $U_2$ abertos de $\mathbb{R}^n$, $X_1 : U_1 \to \mathbb{R}^n$ e $X_2 : U_2 \to \mathbb{R}^n$ campos vetoriais de classe $C^r$ e $h : U_1 \to U_2$ um difeomorfismo de classe $C^r$, $r \geq 1$. Então $h$ é uma conjugação entre $X_1$ e $X_2$ se e somente se*

$$Dh(p)X_1(p) = X_2(h(p)) \tag{1.1.2}$$

*para todo* $p \in U_1$.

*Demonstração.* Sejam $\varphi_1$ e $\varphi_2$ os fluxos por $X_1$ e $X_2$ respectivamente. Assumamos que h satisfaz (1.1.2). Dado $p \in U_1$, seja $\psi(t) = h(\varphi_1(t,p))$. Mostremos que $\psi$ é solução de $x' = X_2(x)$.

$$\psi'(t) = Dh(\varphi_1(t,p))\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,p) = Dh(\varphi_1(t,p))X_1(\varphi_1(t,p)) = X_2(h(\varphi_1(t,p))) = X_2(\psi(t)).$$

Logo $\psi$ é solução de $x' = X_2(x)$. Observemos que se $\psi$ não fosse maximal, então $\varphi_1(t,p) = h^{-1}(\psi(t))$ também não seria. Como $\psi(0) = h(p)$, segue que $h(\varphi_1(t,p)) = \varphi_2(t,h(p))$ e assim concluímos que $h$ é uma conjugação. Reciprocamente, suponhamos que $h$ é uma conjugação, isto é $h(\phi_1(t,p)) = \phi_2(t,h(p))$, para todo $(t,p) \in D_1$. Derivando essa equação em relação a t, obtemos, pela regra da cadeia,

$$Dh(\varphi_1(t,p))\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(t,p) = \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(t,h(p)),$$

portanto

$$Dh(\varphi_1(t,p))X_1(\varphi_1(t,p)) = X_2(\varphi_2(t,h(p))).$$

Assim, tomando t=0, obtemos (1.1.2). □

Com exceção do Teorema 1.1.20, as demais proposições e teoremas dessa seção são particulares de $\mathbb{R}^2$.

**Definição 1.1.10.** Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto, $X : U \to \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe $C^r$ e $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Uma curva $f : I \to U$ de classe $C^r$ é chamada de *seção transversal local de* $X$ *em* $p = f(a_0)$ quando para todo $a \in I$, $f'(a)$ e $X(f(a))$ forem linearmente independentes. Tome $\Sigma = f(I)$ com a topologia induzida. Se $f : I \to \Sigma$ for um homeomorfismo e uma seção transversal local de X em $f(a)$ para cada $a \in I$ dizemos que $\Sigma$ é uma *seção transversal de* $X$.

**Lema 1.1.11.** *Sejam* $U \subset \mathbb{R}^2$ *aberto,* $X : U \to \mathbb{R}^2$ *um campo vetorial de classe* $C^r$, $r \geq 1$, *e* $p \in U$. *Então* $X$ *admite uma seção transversal local em* $p$ *se e somente se* $p$ *for um ponto regular.*

*Demonstração.* Suponhamos que $p$ seja um ponto regular. Então $X(p) \neq 0$. Logo existe $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $\det(X(p), v) \neq 0$, em que $(X(p), v)$ denota a matriz $2 \times 2$ com colunas $X(p)$ e $v$. Definamos $f : \mathbb{R} \to U$, $f(t) = tv + p$. Observemos que a função

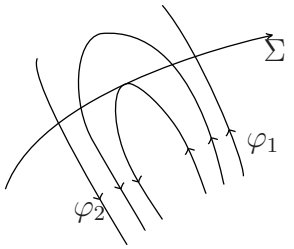
$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \det(X(f(t)), f'(t)) \end{aligned}$$

é uma função contínua e $\det(X(f(0)), f'(0)) = \det(X(p), v) \neq 0$. Logo existe uma vizinhança $I$ de 0, tal que $\det(X(f(t)), f'(t)) \neq 0$. Assim $f|_I$ é uma seção transversal local de X em $p = f(0)$. Suponhamos agora que $p$ não seja um ponto regular. Então $X(p) = 0$ e portanto não existe nenhum vetor em $\mathbb{R}^2$ linearmente independente a $X(p)$. Portanto $X$ não admite seção transversal local em $p$. □

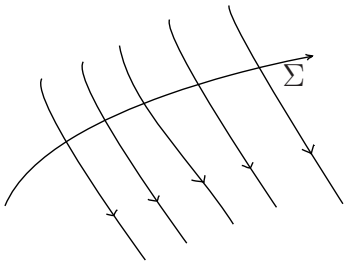
**Definição 1.1.12.** Sejam $I, J \subset \mathbb{R}$ intervalos abertos e $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto, $f : I \to U$ e $g : J \to U$ curvas de classe $C^r$, $r \geq 1$. Dizemos que $g$ *cruza* $f$ *da direita para a esquerda (respectivamente esquerda para direita) em* $p \in f(I) \cap g(B)$ se $p = f(\tau_1) = g(\tau_2)$ e $\det(g'(\tau_2), f'(\tau_1)) < 0$ (respetivamente $> 0$).

**Proposição 1.1.13.** *Sejam $X : U \to \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe $C^r$, $r \geq 1$, e $f : I \to U$ uma seção transversal local de $X$. Então as soluções de $X$ cruzam $f$ na mesma direção em todos os pontos de $F(I)$.*

*Demonstração.* Suponhamos por absurdo que existam duas soluções de $X$, $\varphi_1 : A_1 \to U$ e $\varphi_2 : A_2 \to U$, que cruzam $f$ em direções opostas (Figura (1.1) (a)). Sejam $\varphi_1(t_1) = f(\tau_1)$ e $\varphi_2(t_2) = f(\tau_2)$ os pontos os quais $\varphi_1$ e $\varphi_1$ intersectam $f(A)$. Como cruzam $f$ em direções opostas, $\det(\varphi_1'(t_1), f'(\tau_1))$ e $\det(\varphi_2'(t_2), f'(\tau_2))$ tem sinais opostos. Por outro lado, $\varphi_1'(t_1) = X(\varphi_1(t_1)) = X(f(\tau_1))$ e $\varphi_1'(t_2) = X(\varphi_2(t_2)) = X(f(\tau_2))$. Logo $\det(X(f(\tau_1)), f'(\tau_1))$ e $\det(X(f(\tau_2)), f'(\tau_2))$ tem sinais opostos. Definamos $g : A \to \mathbb{R}$ por $g(t) = \det(X(f(t)), f'(t))$. Como $g(\tau_1)$ e $g(\tau_2)$ tem sinais opostos, $g$ é contínua e $A$ é conexo, pelo Teorema do Valor Intermediário existe $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ tal que $g(\tau) = 0$. Logo $\det(X(f(\tau)), f'(\tau)) = 0$, uma contradição, pois $f$ é uma seção transversal local. Portanto toda solução de $X$ cruza $\Sigma$ na mesma direção. □




(a) cruzando em direções opostas




(b) cruzando na mesma direção

**Definição 1.1.14.** Dizemos que uma *curva de Jordan* é a imagem de uma aplicação contínua $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ tal que $\phi(0) = \phi(1)$ e $\phi|_{[0,1)}$ é injetora.

Vamos enunciar o Teorema da Curva de Jordan para podermos demonstrar uma proposição que nos será útil mais adiante.

**Teorema 1.1.15** (Teorema da Curva de Jordan)**.** *Seja $C$ uma curva de Jordan. Então seu complementar $\mathbb{R}^2 \backslash C$ consiste em exatamente duas componentes conexas. Uma delas limitada, denotada por $\mathrm{int}(C)$, e a outra ilimitada, denotada por $\mathrm{ext}(C)$, e a curva $C$ é a fronteira de cada componente.*

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [17], página 390.

**Definição 1.1.16.** Seja $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\phi(t) = (x(t), y(t))$ uma curva de Jordan de classe $C^1$, tal que $\phi'(t) \neq (0,0)$ para todo $t \in [0,1]$. Definamos $n_\phi(t) = (-y'(t), x'(t))$. Dizemos que $\phi$ é *positivamente orientada* se para todo $t \in [0,1]$ existir $\epsilon > 0$ tal que $\phi(t) + \epsilon' n_\phi(t) \in \mathrm{int}(\phi)$ sempre que $\epsilon > \epsilon' > 0$ (ver Figura 1.1).

**Observação 1.** É possível definir orientação para qualquer parametrização de uma curva de Jordan sem algumas das hipóteses que utilizamos na Definição 1.1.16. Entretanto, será suficiente ao longo do texto utilizarmos tal definição.

**Definição 1.1.17.** Seja $X : U \to \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe $C^r$, $r \geq 1$, e $\varphi(t,x)$ o fluxo de $X$. Dizemos que um conjunto $M \subset U$ é *invariante* se para qualquer $p \in M$ tivermos $\varphi(t,p) \in M$ para todo $t \in I_x$. Dizemos que $M$ é *positivamente invariante por $X$* se para qualquer $p \in M$ tivermos $\varphi(t,p) \in M$ para todo $t > 0$, $t \in I_x$. Por fim, dizemos

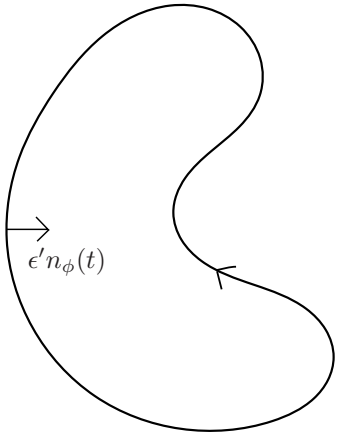



Figura 1.1: Curva orientada positivamente.

que $M$ é *negativamente invariante por* $X$ se para qualquer $p \in M$ tivermos $\varphi(t,p) \in M$ para todo $t < 0$, $t \in I_x$.

Para a próxima proposição, utilizaremos o seguinte teorema:

**Teorema 1.1.18** (Teorema da Alfândega)**.** *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto arbitrário. Se um conjunto conexo $C \subset \mathbb{R}^n$ contém um ponto $a \in X$ e $b \notin X$, então $C$ contém um ponto $c \in \mathrm{fr}X$.*

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [15], página 27.

**Proposição 1.1.19.** *Sejam $U$ aberto de $\mathbb{R}^2$, $X : U \to \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe $C^r$, $r \geq 1$, e $g : [0,1] \to U$ uma curva de Jordan $C$ orientada positivamente. Fixemos $\delta > 0$ e suponhamos que*

$$\begin{aligned} f : (-\delta, 1+\delta) &\to U \\ t &\mapsto g(t - \lfloor t \rfloor) \end{aligned}$$

*seja uma seção transversal de $X$, em que $\lfloor t \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z} | m \leq t\}$. Se $\varphi : I \to U$ for uma solução de $X$ que cruza $f$ da direita para a esquerda então $\mathrm{int}(C) \cup C$ é positivamente invariante. Mais ainda, se $p \in C$, $\varphi(t,p) \in \mathrm{int}(f)$ para todo $t > 0$.*

*Demonstração.* Observemos que assim definida, $f$ é de classe $C^1$. Da Definição 1.1.10 segue que $\det(X(f(t)), f'(t)) \neq 0$ para todo $t \in [0,1]$. Pela Proposição 1.1.13, segue que

$< X(f(t)), n_f(t) >= -\det(X(f(t)), f'(t)) > 0$ para todo $t \in (-\delta, 1+\delta)$. Assim $X(f(t))$ e $n_f(t)$ formam um ângulo oblíquo (Figura 1.2). Logo existe $\epsilon > 0$ tal que

$$f(t) + \epsilon' X(f(t)) \in \text{int}(C) \tag{1.1.3}$$

para todo $\epsilon' \in (\epsilon, 0)$.

Dado $q \in C$, temos $q = f(t')$ para algum $t' \in (-\delta, 1+\delta)$. Segue pelo Teorema de Taylor que $\varphi(s, q) = q + sX(q) + O(s^2)$, logo para todo $s > 0$ suficientemente pequeno, $\varphi(s, q) \in \text{int}(C)$ por (1.1.3).

Agora suponhamos que $q \in \text{int}(C)$. Se tivéssemos $\varphi(t, q) \in \text{ext}(C)$ para algum $t > 0$, existiria pelo Teorema da Alfândega $t > \tau > 0$ tal que $p = \varphi(\tau, q) \in C$. Seja $t' = \sup\{s \in (0, t) \mid \varphi(s, q) \in C\}$. De fato $t' = \max\{s \in (0, t) \mid \varphi(s, q) \in C\}$, pois $C$ é um conjunto fechado, logo $\varphi(t', q) \in C$. Segue que $\varphi(s, p) = \varphi(s + t', q) \in \text{int}(C)$ para todo $s > 0$ suficientemente pequeno, pelo que acabamos de provar acima. Assim, novamente pelo Teorema da Alfândega, existiria $t'' \in (t', t)$ tal que $\varphi(t'', q) \in C$, o que contradiria a maximalidade de $t'$. Portanto $\varphi(t, q) \in \text{int}(C)$ para todo $t > 0$. □

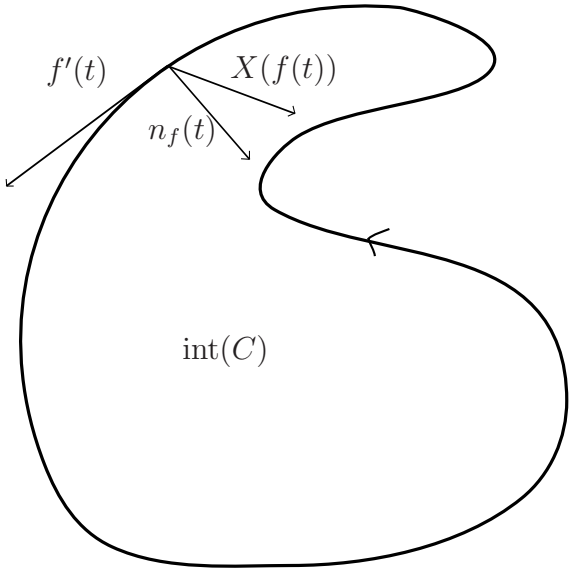



Figura 1.2: Curva orientada positivamente.

**Observação 2.** Pelo Lema 1.1.11, dado um ponto $p$ regular de um campo de classe $C^r$, sempre existe uma seção transversal local em $p$. O próximo resultado descreve qualitativamente uma vizinhança de $p$.

**Teorema 1.1.20** (Teorema do Fluxo Tubular)**.** *Seja $p$ um ponto regular de um campo vetorial de classe $C^r$, $r \geq 1$, $X : U \to \mathbb{R}^2$, e $f : I \to \Sigma$ uma seção transversal local de $X$ de classe $C^r$ com $f(0) = p$. Então existe uma vizinhança $V$ de $p$ contida em $U$ e um difeomorfismo $h : V \to (-\epsilon, \epsilon) \times B$ de classe $C^r$, em que $\epsilon$ é um número real positivo e $B$ é um intervalo aberto centrado na origem de modo que*

i) $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$;

ii) $h$ é uma conjugação de classe $C^r$ entre $X|_V$ e o campo vetorial constante $Y : (-\epsilon, \epsilon) \times B \to \mathbb{R}^2$ definido por $Y = (1, 0)$.

*Demonstração.* Sejam $\varphi : D \to U$ o fluxo de $X$ e $F : D_A = \{(t, u) \mid (t, f(u)) \in D\} \to U$ definida por $F(t, u) = \varphi(t, f(u))$. A aplicação $F$ transforma retas paralelas em relação ao eixo $u$ em órbitas de X. Vamos mostrar que F é um difeomorfismo local em $0 = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Pelo Teorema da Função Inversa, é suficiente provar que $DF(0)$ é um isomorfismo.

Temos

$$D_1F(0) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, f(0))|_{t=0} = X(\varphi(0, p)) = X(p)$$

$$D_2F(0) = \frac{\partial}{\partial u}\big(\varphi(0, f(u))\big)|_{u=0} = \frac{\partial}{\partial u} f(u)|_{u=0} = f'(0).$$

Assim, como $f$ é uma seção transversal local de $X$, $D_1F(0)$ e $D_2F(0)$ são linearmente independentes e geram $\mathbb{R}^2$, portanto $DF(0)$ é um isomorfismo. Logo Teorema da Função Inversa, existe $\epsilon > 0$ e uma vizinhança da origem $B$ tal que $F|_{(-\epsilon,\epsilon)\times B}$ é um difeomorfismo com o conjunto aberto $V = F((-\epsilon, \epsilon) \times B)$. Seja $h = (F|_{(-\epsilon,\epsilon)\times B})^{-1}$. Então $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$, pois $F(0, u) = f(u) \in \Sigma$ para todo $u \in B$. Isso prova i).

Por outro lado,

$$Dh^{-1}(t, u)Y(t, u) = DF(t, u)(1, 0) = D_1F(t, u) = X(\varphi(t, f(u))) = X(h^{-1}(t, u)).$$

Portanto pelo Lema 1.1.9, $h^{-1}$ é uma conjugação entre $Y$ e $X$ como queríamos. □

**Definição 1.1.21.** Sejam $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe $C^r$, $r \geq 1$, $\varphi : D \to \mathbb{R}^2$ seu respectivo fluxo e $\gamma$ a órbita de $X$ passando pelo ponto $p$ com intervalo maximal $I_p$, dizemos que o conjunto $\omega(\gamma) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \text{existe sequência } \{t_n\} \to$

$\sup\{I_p\}$ tal que $\lim_{n\to\infty}\varphi(t_n,p)=x\}$ é o *conjunto $\omega$-limite de $\gamma$*. Dizemos que o conjunto $\alpha(\gamma)=\{x\in\mathbb{R}^2 \mid$ existe sequência $\{t_n\}\to\inf\{I_p\}$ tal que $\lim_{n\to\infty}\varphi(t_n,p)=x\}$ é o *conjunto $\alpha$-limite de $\gamma$*.

**Definição 1.1.22.** Sejam $X:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe $C^r$, $r\geq 1$, $\varphi: D\to\mathbb{R}^2$ seu respectivo fluxo e $p\in X$, dizemos que o conjunto $\gamma^+(p)=\{\varphi(t,p)\in\mathbb{R}^2 \mid t\geq 0, t\in I_p\}$ é a *semiórbita positiva por p.*

**Teorema 1.1.23** (Teorema de Poincaré-Bendixon)**.** *Sejam $X:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe $C^r$, $r\geq 1$, $\varphi: D\to\mathbb{R}^2$ seu respectivo fluxo, $p\in X$, $\gamma^+(p)$ a semiórbita positiva por $p$ e $\gamma$ a órbita passando por $p$. Se $\gamma^+(p)$ for limitada e $\omega(\gamma)$ não possui pontos singulares, então*

*i) $\gamma^+=\omega(\gamma)$, ou*

*ii) $\omega(\gamma)=\overline{\gamma^+}\backslash\gamma^+$*

*Em ambos os casos, o $\omega(\gamma)$ é uma órbita periódica. A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [12] página 24.*

## 1.2 Pontos Singulares

Sabemos pelo Teorema 1.1.20 que dado um ponto regular $p$ de um campo vetorial $X$, existe um difeomorfismo de classe $C^r$ que conjuga $X$ em uma vizinhança de $p$ com o campo constante $Y=(1,0)$. O próximo passo é estudar pontos singulares.

**Definição 1.2.1.** Sejam $p$ um ponto singular e $X=(P,Q)$ um campo vetorial de classe $C^r$, $r\geq 1$. Dizemos que

$$DX(p)=\begin{bmatrix} P_x(p) & P_y(p) \\ Q_x(p) & Q_y(p)\end{bmatrix}$$

é a *parte linear* do campo vetorial X no ponto singular p.

Dizemos que $p$ é *não-degenerado* se 0 não for autovalor de $DX(p)$.

Dizemos que $p$ é *hiperbólico* se a parte real de cada autovalor de $DX(p)$ for não nula.

Dizemos que $p$ é *semi-hiperbólico* se exatamente um autovalor de $DX(p)$ for igual a 0.

Dizemos que $p$ é uma singularidade *elementar* se for uma singularidade hiperbólica ou semi-hiperbólica. Caso contrário, $p$ é *não-elementar*.

Dizemos que $p$ é *nilpotente* se ambos os autovalores de $DX(p)$ forem nulos, mas $DX(p) \neq 0$.

Dizemos que $p$ é *linearmente zero* se $DX(p) = 0$.

Dizemos que $p$ é um *centro* se existir uma vizinhança de p consistindo apenas de órbitas periódicas. A singularidade é chamada de *linearmente centro* se os autovalores de $DX(p)$ forem puramente imaginários não nulos. Nesse caso é difícil distinguir se o campo possui um centro ou um foco em $X(p)$.

**Definição 1.2.2.** Sejam $U$ aberto de $\mathbb{R}^2$, $X : U \to \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe $C^1$, $p$ um ponto singular e $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ uma solução maximal de $X$. Dizemos que $\varphi$ é uma *órbita característica* em $p$ se $\varphi(t) \to p$, quando $t \to \sup(I)$ (respectivamente $t \to \inf(I)$) e $\lim_{t\to\infty}(\varphi(t) - p)/||\varphi(t) - p||$ (respectivamente $\lim_{t\to-\infty}(\varphi(t) - p)/||\varphi(t) - p||$).

**Definição 1.2.3.** Sejam $U$ aberto de $\mathbb{R}^2$, $X : U \to \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe $C^1$ com um ponto singular $p \in U$, $\phi : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ uma curva de Jordan $C$ de classe $C^2$ orientada positivamente tal que $\phi'(t) \neq (0, 0)$ para todo $t \in [0, 1]$, $p \in \text{int}(C)$ e $p$ é o único ponto singular de $X$ em $\text{int}(C)$.

i) Dizemos que $X|_{\text{int}(C)}$ é um *centro* se $C$ for uma órbita periódica e se todas as órbitas em $\text{int}(C)\backslash\{p\}$ forem periódicas.

ii) Dizemos que $X|_{\text{int}(C)}$ é um *foco\nó atrator* se em cada ponto de $C$ as órbitas cruzam $C$ da direita para a esquerda e para cada $q \in \text{int}(C)\{p\}, \omega(q) = \{p\}$ e $\gamma(q) \cap C \neq \emptyset$

iii) Dizemos que $X|_{\text{int}(C)}$ é um *foco\nó repulsor* se em cada ponto de $C$ as órbitas cruzam $C$ da esquerda para a direita e para cada $q \in \text{int}(C)\{p\}, \alpha(q) = \{p\}$ e $\gamma(q) \cap C \neq \emptyset$

iv) Dizemos que $X|_{\text{int}(C)}$ possui uma *decomposição setorial finita* se não for um dos casos i), ii) ou iii) e se existe um número finito de órbitas características, $c_0, ..., c_{n-1}$, cada uma intersectando $C$ transversalmente em exatamente um ponto $p_i \in C$.

**Definição 1.2.4.** Sob as hipóteses da definição 1.2.3 iv). Seja $t_i \in [0, 1)$ tal que $\phi(t_i) = p_i$ suponhamos adicionalmente que $c_i$ esteja ordenado de modo que $t_i < t_{i+1}$. Dizemos que

a região compacta limitada por $\{p\}, c_i, c_{i+1}$ e $\phi([t_i, t_{i+1}])$, $S_i$, é um *setor* de $X|_{\text{int}(C)}$. Denotemos por $\phi(A) = \{\phi(t)|t \in A\}$. Existem quatro possibilidades de setores:

i) *Setor parabólico atrator.* Em todos os pontos de $\phi([t_i, t_{i+1}])$, as órbitas cruzam $\phi$ da direita para a esquerda, e para todo $q \in S_i\{p\}$, $\omega(q) = \{p\}$ e $\gamma(q) \cap C \neq \emptyset$.

ii) *Setor parabólico repulsor.* Em todos os pontos de $\phi([t_i, t_{i+1}])$, as órbitas cruzam $\phi$ da esquerda para a direita, e para todo $q \in S_i\{p\}$, $\alpha(q) = \{p\}$ e $\gamma(q) \cap C \neq \emptyset$.

iii) *Setor hiperbólico.* Existe um ponto $q_i \in \phi((t_i, t_{i+1}))$ com a propriedade de que todos os pontos $\phi([t_i, q_i))$ cruzam $\phi$ da direita para a esquerda (respectivamente da esquerda para a direita) enquanto todos os pontos de $\phi((q_i, p_{i+1}])$ cruzam $\phi$ da esquerda para a direita (respectivamente da direita para a esquerda), em $q_i$ o campo é tangente a $\phi$, e $\gamma(q_i) \cap \text{int}(C) = \emptyset$ e para todo $q \in \text{int}(S_i))$, $\gamma^+(q) \cap \phi((t_i, t_{i+1})) \neq \emptyset$ e $\gamma^-(q) \cap \phi((t_i, t_{i+1})) \neq \emptyset$.

iv) *Setor Elíptico.* Existe um ponto $q_i = \phi(t) \in \phi((t_i, t_{i+1}))$ com a propriedade de que $\gamma(q_i) \in S_i$, $\omega(q_i) = \alpha(q_i) = \{p\}$, o campo em $\phi((t_i, t))$ aponta da direita para a esquerda e em $\phi(t, t_{i+1})$ aponta da esquerda para a direita, e para qualquer $q \in \phi((t_i, t))$, $\gamma^+(q) \subset S_i$, com $\omega\{q\} = \{p\}$, e para qualquer $q \in \phi(t, t_{i+1})$, $\alpha\{q\} = \{p\}$ $\gamma^-(q) \subset S_i$, e para todo $q \in \text{int}(\gamma q_i \cup p)$, $\alpha\{q\} = \omega\{q\} = \{p\}$.

**Observação 3.** Sem perda de generalidade, podemos sempre tomar a origem como ponto singular: se $p$ for um ponto singular de um campo vetorial $X$, então através de uma translação do campo, obtemos um novo campo $Y(x) = X(x + p)$ cuja origem é um ponto singular com $DY(0) = DX(p)$. Note que $X$ e $Y$ são $C^\infty-$conjugados através da conjugação $h(x) = x + p$.

Seja $X$ um campo vetorial em $\mathbb{R}^n$ em que a origem é um ponto singular, isto é, $X(0) = 0$. Podemos escrever $X = A + f$, em que $A = DX(0)$ é a parte linear de $X$ e $f = X - DX(0)$. Pelo Teorema de Taylor temos $||f(x)|| = ||X(x) - DX(0)(x)|| = O(||x||^2)$, logo $f(0) = 0$ e $||Df(x)|| = O(||x||)$ e portanto $Df(0) = 0$.

A seguir, apresentaremos o Teorema da Forma Normal Formal. O objetivo desse teorema é garantir a existência de uma mudança de coordenadas analítica, de modo que a

parte não-linear do campo pertença a uma classe restrita e o mais simples possível de não linearidades para cada transformação linear $A$. Para determinar tal classe, vamos definir a seguinte aplicação no conjunto dos campos vetoriais polinomiais homogêneos de grau $m \in \mathbb{N}$ em $\mathbb{R}^n$ denotado por $H^m(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} ad_m A : H^m(\mathbb{R}^n) &\to H^m(\mathbb{R}^n) \\ X &\mapsto [A, X], \end{aligned}$$

tal que

$$[A, X](x) = DA(x)X(x) - DX(x)A(x) = AX(x) - DX(x)A(x)$$

.

Vamos mostrar que $ad_m A$ está bem definida: Temos $AX(x) \in H^m(\mathbb{R}^n)$ pois $A$ é transformação linear, e a soma de polinômios homogêneos de grau n é um polinômio homogêneo de grau n. Cada entrada da matriz $DX(x)$ é um polinômio homogêneo de grau $n-1$ e cada entrada do vetor $A(x)$ é um polinômio homogêneo de grau 1. Como o produto de polinômios homogêneos $m$ e $n$ é polinômio homogêneo de grau $m+n$, obtemos que $DX(x)A(x) \in H^m(\mathbb{R}^n)$. Como a soma de elementos de $H^m(\mathbb{R}^n)$ é fechada, concluímos que de fato, $ad_m A$ está bem definida.

Será útil notar que $ad_m A$ é linear. De fato

$$\begin{aligned} [A, X + \lambda Y](x) &= DA(x)(X(x) + \lambda Y(x)) - D(X + \lambda Y)(x)A(x) \\ &= AX(x) + \lambda AY(x) - DX(x)A(x) - \lambda DY(x)A(x) \\ &= AX(x) - DX(x)A(x) + \lambda(AY(x) - DY(x)A(x)) \\ &= [A, X](x) + \lambda[A, Y](x). \end{aligned}$$

Seja $G^m = H^m(\mathbb{R}^n) - ad_m A : H^m(\mathbb{R}^n)$. Como $ad_m A$ é uma transformação linear, temos $H^m(\mathbb{R}^n) = ad_m A(H^m(\mathbb{R}^n)) \oplus G^2$.

**Teorema 1.2.5** (Teorema da Forma Normal Formal)**.** *Seja $X$ um campo vetorial de classe $C^r$, $r \geq 1$, definido em uma vizinhança de $0$ com $X(0) = 0$ e $DX(0) = A$. Então existe uma mudança de coordenadas analítica $h$ definida em uma vizinhança de $0$ tal que*

$Y = h(X)$ *é da forma*

$$Y(x) = Ax + g_2(x) + ... + g_r(x) + o(||x||^r)$$

*com* $g_i \in G^i, i = 2, ..., r$.

*Demonstração.* A prova será feita por indução em $2 \leq s < r$. Mostremos que vale para $s = 2$. Podemos assumir que

$$X(x) = A(x) + f_2(x) + o(||x||^2)$$

em que $f_2(x)$ é um campo vetorial homogêneo de grau 2, pois $||X(x) - A(x)|| = O(||(x)||^2)$. Consideremos a mudança de coordenadas da forma

$$x = y + P(y), \tag{1.2.1}$$

em que $P$ é um campo vetorial polinomial homogêneo de grau 2 a ser determinado. Derivando (1.2.1) ao longo de uma solução e substituindo $x'$ por $X(x)$, obtemos

$$\begin{aligned}(I + DP(y))y' = X(x) &= A(x) + f_2(x) + o(||x||^2) \\ &= A(y + P(y)) + f_2(y) + o(||y||^2),\end{aligned}$$

pois $o(||x||^2) = o(||y||^2)$ e $f_2(y+P(y)) = f_2(y)+o(||y||^2)$ porque $f_2$ e $P$ são homogêneos de grau 2. Como $DP(0) = 0$, existe $\epsilon_1 > 0$ tal que para todo $y \in B_{\epsilon_1}(0) = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid ||y|| < \epsilon\}, \det(I + DP(y)) \neq 0$. Assim,

$$y' = (I + DP(y))^{-1}[A(y) + AP(y) + f_2(y) + o(||y||^2)] \tag{1.2.2}$$

Por outro lado, existe $\epsilon_2 > 0$ tal que para todo $y \in B_{\epsilon_2}(0)$ temos $||DP(y)|| < 1$ e portanto vale

$$\begin{aligned}(I + DP(y))^{-1} &= I + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i(DP(y))^i + o(||DP(y)||^n) \\ &= I - DP(y) + o(||DP(y)||^2)\end{aligned}$$

Como $P$ é homogêneo de grau 2, $O(||DP(y)||) = O(||y||)$. Portanto

$$(I + DP(y))^{-1} = I - DP(y) + O(||y||^2). \tag{1.2.3}$$

Substituindo (1.2.3) em (1.2.2), obtemos

$$\begin{aligned} y' &= (I - DP(y) + O(||y||^2))[A(y) + AP(y) + f_2(y) + o(||y||^2)] \\ &= A(y) + AP(y) + f_2(y) - DP(y)A(y) - DP(y)AP(y) - DP(y)f_2(y) + o(||y||^2) \\ &= A(y) + AP(y) - DP(y)A(y) + f_2(y) + o(||y||^2) \end{aligned}$$

para $y \in B_{\epsilon_2}(0)$. Como $H^2(\mathbb{R}^n) = ad_2A(H^2(\mathbb{R}^n)) \oplus G^2$, podemos escrever $f_2 = h_2 + g_2$, com $h_2 \in ad_2A(H^2(\mathbb{R}^n))$ e $g_2 \in G^2$. Assim, escolhendo $P$ de forma que $AP(y) - DP(y)Ay = h_2$ obtemos

$$y' = A(y) + g_2 + o(||y||^2)$$

como queríamos. O caso geral é análogo mas o faremos por completude. Suponhamos agora que o teorema é valido para $s - 1 < r$. Vamos mostrar que vale para $s$. Temos

$$X(x) = A(x) + g_2(x) + ... + g_{s-1}(x) + o(||x||^{s-1}).$$

Podemos assumir que

$$X(x) = A(x) + g_2(x) + ... + g_{s-1}(x) + f_s + o(||x||^s),$$

em que $f_s$ é um campo vetorial polinomial homogêneo de grau s. Fazendo a mudança de variáveis

$$x = y + P(y),$$

em que P(y) é um campo vetorial polinomial homogêneo de grau s a ser determinado. Derivando ao longo de uma solução obtemos

$$\begin{aligned} (I + DP(y))y' = X(x) &= A(x) + g_2(x) + ... + g_{s-1}(x) + f_s(x) + o(||x||^s) \\ &= A(y) + AP(y) + g_2(y) + ... + g_{s-1}(y) + f_s(y) + o(||y||^s), \end{aligned}$$

pois $g_i(x) = g_i(y) + O(|| < y, P(y) > ||) = g_i(y) + O(||y||^{s+1})$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}(I + DP(y))^{-1} &= I + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i(DP(y))^i + o(||DP(y)||^n) \\ &= I - DP(y) + o(||DP(y)||^2)\end{aligned}$$

Como $P$ é homogêneo de grau s, $O(||DP(y)||) = O(||y||^{s-1})$. Logo

$$(I + DP(y))^{-1} = I - DP(y) + o(||y||^s).$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}Y(y) &= (I - DP(y) + O(||y||^2))[A(y) + AP(y) + g_2(y) + ... + f_s + o(||y||^s)] \\ &= A(y) + g_2(y) + ... + g_{s-1}(y) + f_s(y) + AP(y) - DP(y)Ay + o(||y||^s).\end{aligned}$$

Assim, podemos escolher $P$ de forma que $f_s(y) + AP(y) - DP(y)Ay = g_s \in G^s$ como queríamos demonstrar. □

## 1.3 Estrutura Local das Singularidades Hiperbólicas

Na seção anterior vimos pelo Teorema 1.1.20 que pontos regulares de campos vetoriais de classe $C^r$ são localmente conjugados a um campo constante. Nesta seção, iremos estudar a relação entre vizinhanças de singularidades hiperbólicas de campos vetoriais $C^\infty$ e suas respectivas partes lineares. Tal estudo culminará num caso particular do seguinte teorema:

**Teorema 1.3.1** (Teorema de Hartman-Grobman)**.** *Sejam $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $X_1 : U_1 \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe $C_1$ com $p \in U_1$ uma singularidade hiperbólica. Então existem vizinhanças $A \subset U_1$ de $p$ e $B \subset \mathbb{R}^n$ de $0 \in \mathbb{R}^n$ tais que $X|_A$ é topologicamente conjugado a $DX(p)|_B$.*

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [23] página 287.

Seja $X : U \to \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe $C^\infty$ com uma singularidade hiperbólica

na origem. Então podemos escrever a equação diferencial $v' = X(v)$ como

$$x' = ax + by + P(x, y),$$
$$y' = cx + dy + Q(x, y),$$

com $P(0,0) = Q(0,0) = DP(0,0) = DQ(0,0) = 0$, e

$$DX(0) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

**Proposição 1.3.2.** *A menos de uma conjugação $C^\infty$, podemos supor que $DX(0)$ está na sua forma canônica de Jordan.*

*Demonstração.* De fato, suponha que $DX(0) = CBC^{-}1$ em que a matriz $B$ é a matriz na forma canônica de Jordan de $DX(0)$. Considere a mudança de variáveis $y = Cx$ ao longo de uma solução de $X$. Temos

$$y' = Cx' = CX(x) = CX(C^{-1}y) = By + (CX(C^{-1}y) - CDX(0)C^{-1}y)$$

Como transformações lineares preservam o grau das componentes de grau homogêneo, obtemos que o campo $Y$ tem parte linear na sua forma canônica de Jordan. Mostremos que a aplicação $h : U \to U$, $h(X) = CX$ é uma conjugação $C^\infty$ entre X e Y.

$$Dh_pX(p) = CX(p) = Y(Cp) = Y(h(p)).$$

Assim, pelo Lema 1.1.9 obtemos o resultado. □

As possíveis formas canônicas de Jordan para matrizes $2 \times 2$ são:

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

O primeiro caso ocorre quando os autovalores são complexos conjugados, isto é, $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ . O segundo caso ocorre quando $\lambda_1 = \lambda_2$ e sua multiplicidade geométrica é igual a 1. O terceiro caso ocorre quando a matriz $DX(0)$ é diagonalizável. Vamos mostrar que uma singularidade hiperbólica é localmente topologicamente conjugada a sua parte linear. Estudaremos os casos os quais a parte real é não nula com exceção

do caso em que temos autovalores com sinal trocado. Suponhamos que o sistema é atrator, isto é, $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ e $\alpha < 0$. O caso repulsor, isto é, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ e $\alpha > 0$ pode ser reduzido ao caso atrator através de uma mudança de variáveis e será discutido após a demonstração do caso atrator. Iniciaremos pelo primeiro caso. Definamos $f_r : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $f_r(t) = (rcos(2\pi t), rsen(2\pi t))$. Mostremos que $f_r$ é uma seção transversal local de $X$ e de $DX(0)$ para todo $r > 0$ suficientemente pequeno. Temos

$$\begin{aligned}\det(DX(0)(f_r(t)), f_r'(t)) &= \det \begin{bmatrix} \alpha rcos(2\pi t) + \beta rsen(2\pi t) & -2\pi rsen(2\pi t) \\ -\beta rcos(2\pi t) + \alpha rsen(2\pi t) & 2\pi rcos(2\pi t) \end{bmatrix} \\ &= 2\pi\alpha r^2 < 0,\end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}\det(X(f_r(t)), f_r'(t)) &= \det \begin{bmatrix} \alpha rcos(2\pi t) + \beta rsen(2\pi t) + o(r) & -rsen(2\pi t) \\ -\beta rcos(2\pi t) + \alpha rsen(2\pi t) + o(r) & rcos(2\pi t) \end{bmatrix} \\ &= 2\pi\alpha r^2 + o(r^2).\end{aligned}$$

Logo existe $\epsilon > 0$ tal que se $r < \epsilon$, $det(X(f_r(t)), f_r'(t)) < 0$ como queríamos.

Fixemos $r_0 < \epsilon$ e sejam $\varphi(t,p)$ e $\psi(t,p)$ os fluxos por $X$ e $DX(0)$ respectivamente. Mostremos que tanto as órbitas de $X$ quanto as de $DX(0)$ passando por $p \in \text{int}(f_{r_0}) \cup \text{Im}(f_{r_0})$ tendem a 0 quando $t \to \infty$ e saem de $\text{int}(f_{r_0})$ quando $t \to -\infty$. De fato, $\text{int}(f_{r_0})$ é um conjunto positivamente invariante pela Proposição 1.1.19, não possui órbitas periódicas e possuí um único ponto crítico, a origem, no seu interior. Logo toda órbita tende a 0 quando $t \to \infty$. Se alguma órbita não saísse de $\text{int}(f_{r_0})$ para $t \to -\infty$, ela tenderia a 0, o que é uma contradição, pois cruzaria $\text{Im}(f_r)$ da esquerda para a direita. Portanto toda órbita sai de $\text{int}(f_{r_0})$ para $t \to -\infty$.

Pelas observações acima, para cada $p \in \text{int}(f_r) - \{0\}$, existe um único $t_p > 0$ tal que $\varphi(-t_p, p) \in S_{r_0}$. Notemos que $t_p$ é contínua, pois pelo Teorema da Função Implícita a equação $\text{dist}(\varphi(t,p), \text{Im}(f_{r_0})) = 0$ pode ser resolvida localmente continuamente por $t_p = t(p)$. Definamos o homeomorfismo que conjuga $X$ e $DX(0)$ localmente $h : \text{int}(f_r) \to$

$\text{int}(f_r)$ da seguinte maneira:

$$h(0) = 0,$$
$$h(p) = \psi(t_p, \varphi(-t_p, p)).$$

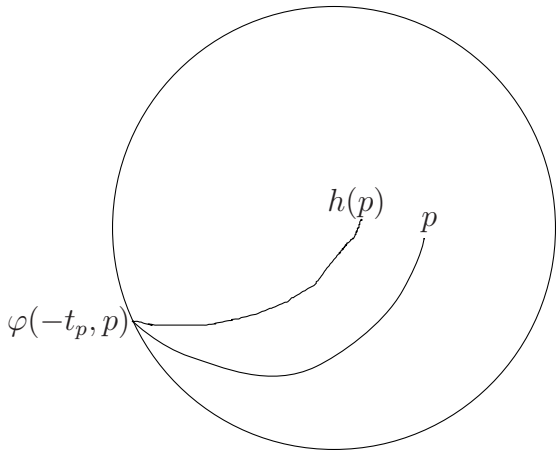



Figura 1.3: Conjugação h

Vamos mostrar que de fato $h$ é um homeomorfismo. Notemos que $h|_{\text{int}(f_r)-\{0\}}$ é contínua pois é a composição de funções contínuas. Temos também, que $h^{-1}$ é dada por

$$h^{-1}(0) = 0,$$
$$h^{-1}(q) = \varphi(t'_q, \psi(-t'_q, q)),$$

em que $t'_q$ é tal que $\psi(-t'_q, q) \in B_{r_0}$. Utilizando os mesmos argumentos para $t_p$, podemos mostrar que $t'_q$ é única e depende continuamente de $q$. Vamos mostrar que de fato $h^{-1}$ assim definida é a função inversa de $h$. Note que para $q \neq 0$, temos $t_{\varphi(t'_q, \psi(-t'_q, q))} = t'_q$ e

$$\begin{aligned} h(\varphi(t'_q, \psi(-t'_q, q))) &= \psi(t'_q, \varphi(-t'_q, \varphi(t'_q, \psi(-t'_q, q)))) \\ &= \psi(t'_q, \varphi(0, \psi(-t'_q, q))), \text{pelo Teorema 1.1.5 iii)} \\ &= \psi(t'_q, \psi(-t'_q, q)) \\ &= \psi(0, q), \text{novamente pelo Teorema 1.1.5 iii)} \\ &= q. \end{aligned}$$

Assim, segue que $h^{-1}$ é inversa a direita de $h$. Analogamente, $h^{-1}$ é inversa a esquerda de $h$. Portanto $h^{-1}$ é a inversa de h.

Nos resta demonstrar que $h$ é contínua em 0. De fato, dado $\epsilon > 0$, seja $t' > \sup\{t_p \mid \psi(t_p, p) \in S_\epsilon,\ p \in B_{r_0}\}$. Vamos mostrar que existe $\delta > 0$ tal que $\varphi(t', q) \in B_{r_0}$ para todo $q \in B_\delta$. Suponha por absurdo, que para todo $\delta > 0$, existe $p_\delta \in S_\delta$ tal que $\varphi(t', p_\delta) \notin B_{r_0}$. Então existe uma sequência $\{p_n\}$, $p_n \to 0$ tal que $\varphi(t', p_n) \notin B_{r_0}$. Mas $\varphi$ é contínua e $\varphi(t', 0) = 0$, logo $\varphi(t', p_n) \to 0$ o que é uma contradição. Seja $\delta > 0$ de modo que $\varphi(t', p) \in B_{r_0}$ para todo $p \in B_\delta$. Notemos que $t' > t_p$ para todo $p \in B_\delta$. Seja $p \in B_\delta$, vamos mostrar que $||h(p)|| < \epsilon$:

$$\begin{aligned} ||h(p)|| &= ||\psi(t_p, \varphi(-t_p, p))|| \\ &\leq ||\psi(t', \varphi(-t_p, p))||, \text{ pois } ||\psi_p(t)|| \text{ é decrescente para } p \in B_\delta \\ &< \epsilon, \text{ pois } \varphi(-t_p, p) \in B_{r_0}. \end{aligned}$$

Portanto $h$ é contínua em 0. O caso em que $h^{-1}$ é contínua em 0 é análogo. Assim concluímos que $h$ é uma conjugação topológica entre $X$ e $DX(0)$ como queríamos demonstrar.

Para o segundo caso, é possível através da mudança de coordenadas linear $F(x, y) = (x + \frac{\epsilon - 1}{\lambda_1} y, y)$, transformar a parte linear do sistema DX(0) na forma

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \epsilon \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

em que $\epsilon > 0$ é qualquer número positivo dado. Vamos mostrar que se $\epsilon < |\lambda_1|$, $f_r$ como definido anteriormente também é uma seção transversal local de ambos $X$ e $DX(0)$ para todo $r > 0$ suficientemente pequeno. De fato,

$$\begin{aligned} \det(DX(0)(f(t)), f'(t)) &= \det \begin{bmatrix} \lambda_1 r cos(2\pi t) + \epsilon r sen(2\pi t) & -2\pi r sen(2\pi t) \\ \lambda_1 r sen(2\pi t) & 2\pi r cos(2\pi t) \end{bmatrix} \\ &= 2\pi(\lambda_1 r^2 cos^2(2\pi t) + \lambda_1 r^2 sen^2(2\pi t) + \epsilon r^2 sen(2\pi t) cos(2\pi t)) \\ &= 2\pi(\lambda_1 r^2 + \epsilon r^2 sen(2\pi t) cos(2\pi t)) < 0, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\det(X(f(t)), f'(t)) &= \det\begin{bmatrix} \lambda_1 r cos(2\pi t) + \epsilon r sen(2\pi t) + o(r) & -2\pi r sen(2\pi t) \\ \lambda_1 r sen(2\pi t) + o(r) & 2\pi r cos(2\pi t) \end{bmatrix} \\ &= 2\pi(\lambda_1 r^2 cos^2(2\pi t) + \lambda_1 r^2 sen^2(2\pi t) + \epsilon r^2 sen(2\pi t)cos(2\pi t) + o(r^2)) \\ &= 2\pi(\lambda_1 r^2 + \epsilon r^2 sen(2\pi t)cos(2\pi t) + o(r^2)).\end{aligned}$$

Como $\lambda_1 r^2 + \epsilon r^2 sen(t)cos(t) < 0$, existe $\epsilon'$ tal que se $r < \epsilon'$, $\det(X(f(t)), f'(t)) \neq 0$ e portanto $f$ é uma seção transversal local de $DX(0)$ e $X$ como queríamos. O restante da demonstração é análogo a demonstração do primeiro caso.

Para o terceiro caso, vamos mostrar novamente que $f_r$ é uma seção transversal local de $X$ e $DX(0)$ para todo $r > 0$ suficientemente pequeno.

$$\begin{aligned}\det(DX(0)(f(t)), f'(t)) &= \det\begin{bmatrix} \lambda_1 r cos(2\pi t) & -2\pi r sen(2\pi t) \\ \lambda_2 r sen(2\pi t) & 2\pi r cos(2\pi t) \end{bmatrix} \\ &= 2\pi r^2(\lambda_1 cos^2(2\pi t) + \lambda_2 sen^2(2\pi t)) < 0\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\det(X(0)(f(t)), f'(t)) &= \det\begin{bmatrix} \lambda_1 r cos(2\pi t) + o(r) & -2\pi r sen(2\pi t) \\ \lambda_2 r sen(2\pi t) + o(r) & 2\pi r cos(2\pi t) \end{bmatrix} \\ &= 2\pi r^2(\lambda_1 cos^2(2\pi t) + \lambda_2 sen^2(2\pi t) + o(r^2))\end{aligned}$$

O restante da demonstração é análogo ao primeiro caso.

## 1.4 Ingredientes de Retratos de Fase

Para campos de vetores lineares em $\mathbb{R}^2$, é possível descrever todas as classes de conjugação, porém isso não é possível quando estudamos campos de vetores não lineares. Entretanto, existe uma caracterização geral das classes de equivalência topológicas no plano. Para fazer tal caracterização, é suficiente supormos que o campo $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ admita a existência de um fluxo $\phi$ contínuo.

**Definição 1.4.1.** Seja $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um campo de vetores que admita a existência de um fluxo $\phi$ contínuo. Dizemos que $\phi$ é *paralelo* se for topologicamente equivalente a um dos seguintes fluxos:

i) O fluxo definido em $\mathbb{R}^2$ pelo sistema diferencial $x' = 1$, $y' = 0$.

ii) O fluxo definido em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ definido pelo sistema diferencial em coordenadas polares por $r' = 0$, $\theta' = 1$.

iii) O fluxo definido em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ definido pelo sistema diferencial em coordenadas polares por $r' = r$, $\theta' = 0$.

Dada uma região maximal aberta de $\mathbb{R}^2$ a qual o fluxo é paralelo, é interessante conhecer a estrutura das órbitas que compõem sua fronteira. Existem três possibilidades:

i) um ponto singular;

ii) uma órbita periódica de modo que não possua uma vizinhança consistindo apenas de órbitas periódicas;

iii) uma órbita $\gamma(p)$, homeomorfa a $\mathbb{R}$ a qual não exista uma vizinhança $N$ de $\gamma(p)$ tal que

   1) para todo $q \in N \alpha(q) = \alpha(p)$ e $\omega(q) = \alpha(p)$,

   2) a fronteira de $N$, $\overline{N} \setminus N$, é formada por $\alpha(p), \omega(p)$ e duas órbitas $\gamma(q_1)$ e $\gamma(q_2)$ tais que $\alpha(p) = \alpha(q_1)$ e $\omega(p) = \omega(q_1) = \omega(q_2)$.

Chamamos de *separatriz* uma órbita que satisfaz uma dessas três condições.

**Observação 4.** Observemos que se $X$ for um campo de vetores não singular, então as separatrizes do seu fluxo satisfazem apenas iii), visto que a existência de uma órbita periódica garante a existência de um ponto singular, pelo Teorema 1.1.23.

**Definição 1.4.2.** Seja $X$ como na Definição 1.4.1 e $\phi$ o seu fluxo. A união de todas as separatrizes de $\phi$ é chamada de *esqueleto estendido de separatrizes*.

**Definição 1.4.3.** Seja $X$ como na Definição 1.4.1, $\phi$ o seu fluxo e $S$ o esqueleto estendido de separatrizes de $\phi$. Cada componente conexa de $\mathbb{R}^2 \setminus S$ é chamada de *região canônica* de $\phi$.

**Proposição 1.4.4.** *Seja $X$ como na Definição 1.4.1 e $\phi$ o seu fluxo, então toda região canônica de $\phi$ é paralela.*

*Demonstração.* A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em [12], página 34. □

**Definição 1.4.5.** Seja $X$ como na Definição 1.4.1 e $\phi$ o seu fluxo. Chamamos de *esqueleto completo de separatrizes de $\phi$* a união do esqueleto estendido de separatrizes com uma órbita de cada região canônica.

**Definição 1.4.6.** Sejam $X_1$ e $X_2$ campos de vetores como na Definição 1.4.1, $\phi_1$ e $\phi_2$ seus respectivos fluxos e $S_1$ e $S_2$ seus respectivos esqueletos completos de separatrizes. Dizemos que $S_1$ e $S_2$ são topologicamente equivalentes se existir um homeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ tal que envie as órbitas de $S_1$ em $S_2$ preservando orientação.

O seguinte teorema determina uma classe de equivalência topológica entre sistemas diferenciais através do esqueleto completo de separatrizes.

**Teorema 1.4.7** (Markus-Neumann-Peixoto)**.** *Sejam $X_1$ e $X_2$ campos de vetores como na Definição 1.4.1, $\phi_1$ e $\phi_2$ seus respectivos fluxos. Assumamos que $\phi_1$ e $\phi_2$ possuam apenas singularidades isoladas. Então $\phi_1$ e $\phi_2$ são topologicamente equivalentes se e somente se seus esqueletos completos de separatrizes forem topologicamente equivalentes.*

*Demonstração.* A demonstração desse teorema pode ser encontrado em [19]. □

## 1.5 A Técnica de Blow Up

Na seção 1.3 estudamos a estrutura local de singularidades hiperbólicas. Uma classificação completa de singularidades semi-hiperbólicas e nilpotentes, com exceção do caso centro-foco podem ser encontradas em [3] e [2] respectivamente. Já as singularidades linearmente-zero são bem mais complicadas. Temos que estudar caso a caso e a técnica de Blow Up que será apresentada nessa seção é uma ferramenta que permite esse estudo.

A técnica consiste em "explodir" a singularidade por meio de uma mudança de variáveis, que não é um difeomorfismo, levando a singularidade em todo o eixo $y$. Após a mudança de coordenadas, cancelamos fatores em comum no campo, e então vemos que aparecerão novas singularidades no eixo $y$ do novo campo que serão "mais simples" que a singularidade original. Se essas novas singularidades forem linearmente nulas, repete-se o processo até obtermos singularidades elementares. Em 1977, Dumortier provou em [11] que esse processo iterativo é sempre finito. A mudança de variáveis que usaremos é a seguinte:

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2, \\ (x, y) &\mapsto (u, w), \end{aligned} \tag{1.5.1}$$

em que $x = u$ e $y = uw$.

Ao longo dessa seção, tomaremos $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ como um campo de vetores polinomial com uma singularidade na origem,

$$\begin{aligned} x' &= P(x, y), \\ y' &= Q(x, y), \end{aligned} \tag{1.5.2}$$

**Proposição 1.5.1.** *Seja $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ como em* (1.5.2)*, então o campo após a mudança de coordenadas tem a seguinte expressão:*

$$\begin{aligned} u' &= P(u, uw), \\ w' &= \frac{Q(u, uw) - wP(u, uw)}{u}. \end{aligned} \tag{1.5.3}$$

*Demonstração.* Temos $x = u$ e $y = uw$. Logo $x' = u'$ e $y' = u'w + uw'$. Como $x' = P(x, y)$, segue que $u' = P(u, uw)$. Como $w' = (y' - u'w)/u$ e $y' = Q(u, uw)$, segue que

$$w' = \frac{Q(u, uw) - wP(u, uw)}{u}$$

como queríamos. □

Como $X$ possui uma singularidade na origem, podemos escrever $P$ e $Q$ da seguinte

maneira:

$$P(x,y) = P_m(x,y) + ... + P_n(x,y)$$
$$Q(x,y) = Q_m(x,y) + ... + Q_n(x,y)$$

em que $P_j(x,y)$ e $Q_j(x,y)$ são as partes homogêneas de grau $j$ de $P$ e $Q$ respectivamente, em que $m > 0$ é a parte homogênea não nula de menor grau de X.

A seguinte proposição nos mostrará algumas propriedades dessa mudança de variáveis:

**Proposição 1.5.2.** *Seja $T$ como em* (1.5.1)*, então vale:*

*i) $T$ transforma a origem na reta $u = 0$,*

*ii) a reta $y = ax$ com exceção da origem é levada na reta $w = a$, com exceção da reta $u = 0$,*

*iii) o primeiro quadrante é levado no primeiro quadrante,*

*iv) o quarto quadrante é levado no quarto quadrante,*

*v) o segundo quadrante é levado no terceiro quadrante,*

*vi) o terceiro quadrante é levado no segundo quadrante,*

*vii) $T|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}\times\mathbb{R}} \to \mathbb{R}\setminus\{0\}\times\mathbb{R}$ a restrição de $T$ ao conjunto $\mathbb{R}\setminus\{0\}\times\mathbb{R}$ é um difeomorfismo.*

*Demonstração.* i) Os pontos os quais a origem é levada satisfaz o sistema:

$$\begin{cases} u &= 0 \\ uw &= 0 \end{cases}$$

cuja solução é a reta $u = 0$.

ii) O conjunto de pontos $y = ax$ é levado em

$$uw = au.$$

Se $x \neq 0$, $u \neq 0$ e então

$$w = a$$

como queríamos.

iii) Se $x$ e $y > 0$, então $u$ e $w > 0$ e portanto o primeiro quadrante é levado no primeiro quadrante.

iv) Se $x > 0$ e $y < 0$, então $u > 0$ e $w < 0$, e portanto o quarto quadrante é levado no quarto quadrante.

v) Se $x < 0$ e $y > 0$, então $u < 0$ e $w < 0$, e portanto o segundo quadrante é levado no terceiro quadrante.

vi) Se $x < 0$ e $y < 0$, então $u < 0$ e $w > 0$, e portanto o terceiro quadrante é levado no segundo quadrante.

vii) $T|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}\times\mathbb{R}} \to \mathbb{R}\setminus\{0\} \times \mathbb{R}$ é injetora: Se $T(x_1, y_1) = T(x_2, y_2)$, então

$$(x_1, \frac{y_1}{x_1}) = (x_2, \frac{y_2}{x_2}),$$

logo $x_1 = x_2$, e $y_1 = y_2$.

$T|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}\times\mathbb{R}} \to \mathbb{R}\setminus\{0\} \times \mathbb{R}$ é sobrejetora: Seja $(x, y) \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \times \mathbb{R}$. Temos $T(x, xy) = (x, y)$ e portanto $T_{\mathbb{R}\setminus\{0\}\times\mathbb{R}}$ é sobrejetora.

$T|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}\times\mathbb{R}}$ possuí matriz jacobiana

$$DT|_{\mathbb{R}\setminus\{0\}\times\mathbb{R}}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{y}{x^2} & x^{-1} \end{bmatrix}$$

bem definida sempre que $x \neq 0$, portanto $T$ é um difeomorfismo de $\mathbb{R}\setminus\{0\} \times \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}\setminus\{0\} \times \mathbb{R}$

□

Tendo em vista o item i) da Proposição 1.5.2 é natural se pensar que, dado $X$ como em (1.5.2) suas órbitas tendendo a origem com inclinação $arctan(a)$ são levadas pela mudança de coordenadas em órbitas tendendo ao ponto $(0, a)$. Para realizar tal estudo, necessitaremos de algumas definições.

**Definição 1.5.3.** Seja $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ como em (1.5.2), dizemos que

$$\mathcal{F} =< (P_m(x,y), Q_m(x,y)), (-y,x) >= xQ_m(x,y) - yP_m(x,y) \tag{1.5.4}$$

é o *polinômio característico de* $X$. Seja $(x,y)$ uma raiz de $\mathcal{F}$. Se $y \neq 0$, dizemos que ambas as direções $\theta \in [0, 2\pi)$ tais que $tan(\theta) = x/y$ são *direções características de* $X$. Se $y = 0$, dizemos que $\pi/2$ e $3\pi/2$ são direções características de $X$.

Observemos que as direções características são os pontos os quais $(P_m(x,y), Q_m(x,y))$ é tangente ao campo $(x,y)$. Com isso, vemos as direções características como a tangente do ângulo das órbitas tendendo a origem. A seguinte proposição sintetiza essa afirmação.

**Proposição 1.5.4.** *Seja $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um campo vetorial polinomial e $\varphi_t$ uma órbita de $X$ que tende a origem. Suponhamos que $\mathcal{F} \not\equiv 0$ e assumamos que $\varphi_t$ é tangente a uma das duas direções com ângulo $\theta$ tal que $tan(\theta) = a$. Então são validas as seguintes afirmações:*

*i) Ambas as direções $\theta = arctan(a)$ são direções características.*

*ii) O ponto $(0, v)$ é uma singularidade do sistema após o blow up.*

*iii) A trajetória $\varphi_t$ tendendo a origem corresponde a uma trajetória tendendo ao ponto $(0, a)$.*

*iv) Reciprocamente, uma trajetória tendendo ao ponto $(0, a)$ após o blow up corresponde a uma solução tendendo a origem com uma das duas direções $\theta$, $tan(\theta) = a$.*

Resta estudarmos o caso em que $\mathcal{F} \equiv 0$.

**Proposição 1.5.5.** *Se $\mathcal{F} \equiv 0$, então existe um polinômio homogêneo de grau $m-1$, $W_{m-1}$ tal que $Q_m = yW_{m-1}$ e $P_m = xW_{m-1}$.*

*Demonstração.* Como $\mathcal{F} \equiv 0$, pela equação (1.5.4), segue que

$$xQ_m(x,y) = yP_m(x,y). \tag{1.5.5}$$

Como $y$ divide o lado direito da igualdade, segue que $y$ divide $Q_m(x,y)$, isto é,

$$Q_m(x,y) = yW_{m-1}, \tag{1.5.6}$$

em que $W_{m-1}$ é um polinômio homogêneo de grau $m-1$. Substituindo (1.5.6) em (1.5.5) e cancelando o fator $y$ dos dois lados da igualdade obtemos o resultado. □

**Definição 1.5.6.** Suponhamos que o polinômio característico de $X$, $\mathcal{F}$, seja identicamente nulo, dizemos que a origem do campo $X$ é um ponto *dicrítico*. Seja $(x, y)$ uma raiz do polinômio $W_{m-1}$ da Proposição 1.5.5 dizemos que $arctan(x/y)$ é uma *direção singular de* $X$.

**Proposição 1.5.7.** *Suponhamos que o polinômio característico seja identicamente nulo. Então para cada direção não singular $\theta$ existe exatamente uma semi-órbita tendendo a origem na direção $\theta$. Se $\theta^*$ for uma direção singular, pode não existir semi-órbitas tendendo a origem na direção $\theta^*$, ou existe um número finito ou infinito de órbitas.*

O processo de desingularização é algorítmico e será descrito a seguir:

1) Transladar a singularidade para a origem.

2) Calcular parte linear. Temos 2 possibilidades:

   1) Não-degenerada.

      1) Linearmente centro. Nesse caso utilize a técnica de constantes de Liapunov para determinar se temos um centro ou um foco.

      2) Hiperbólica. Utilize o Teorema de Hartman-Grobman.

   2) Degenerada. Calcule o polinômio característico. Temos duas possibilidades:

      1) $\mathcal{F} \equiv 0$. Nesse caso calcule o polinômio $W$. Temos 3 possibilidades:

         1) 0 e $\pi/2$ são direções singulares. Nesse caso, faça Blow Up nas duas direções.

         2) $\pi/2$ é direção singular, mas 0 não é direção singular. Nesse caso, troque os eixos e faça o Blow Up.

         3) $\pi/2$ não é direção singular. Faça o Blow Up diretamente.

      2) $\mathcal{F} \not\equiv 0$. Nesse caso, temos 3 possibilidades:

         1) 0 e $\pi/2$ são direções características. Nesse caso, faça Blow Up nas duas direções.

2) $\pi/2$ é direção característica, mas 0 não é direção característica. Nesse caso, troque os eixos e faça o Blow Up.

3) $\pi/2$ não é direção característica. Faça o Blow Up diretamente.

Encontre as singularidades ao longo do eixo $y$. Volte para o passo 1.

Após fazer o processo de desingularização, retorne ao seu campo original utilizando as proposições 1.5.4 e 1.5.7 para obter o comportamento topológico próximo a singularidade. No seguinte exemplo, aplicaremos a técnica de Blow Up para entender o comportamento próximo a singularidade.

**Exemplo 1.5.8.** Consideremos o campo

$$x' = -x^2 + 3y^2,$$
$$y' = 2xy.$$

Observemos que ao longo do eixo $y$, com exceção da origem, este campo sempre aponta da esquerda para a direita, pois $x' > 0$ quando $x = 0$. Este campo possui uma singularidade, na origem. Sua parte linear é

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo a origem é uma singularidade degenerada. Temos como polinômio característico

$$\mathcal{F} = 3y(x - y)(x + y).$$

Logo $F \not\equiv 0$ e $\pi/2$ não é direção característica. Seguindo o algoritmo, devemos fazer o Blow Up diretamente. Após a mudança de variáveis, o campo possui a seguinte expressão:

$$u' = u^2(3w^2 - 1),$$
$$w' = -3uw(w^2 - 1).$$

Observemos que o campo possui um fator $u$ nas duas entradas. Tendo em vista a Proposição 1.1.9, cancelando tal fator, obtemos um campo topologicamente equivalente ao original para $u > 0$ e topologicamente equivalente, porém com orientação trocada para

$u < 0$. Devemos agora, estudar as singularidades do campo

$$u' = u(3w^2 - 1),$$
$$w' = -3w(w^2 - 1),$$

ao longo do eixo $w$. São três singularidades ao longo do eixo $w$: $(0, -1), (0, 0)$ e $(0, 1)$. Suas partes lineares são:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Assim, pelo Teorema 1.3.1, cada uma dessas singularidades é topologicamente equivalente a uma sela. Observemos também, que ambos os eixos são invariantes. Na Figura 1.5.8 segue um esboço do campo após o Blow Up.

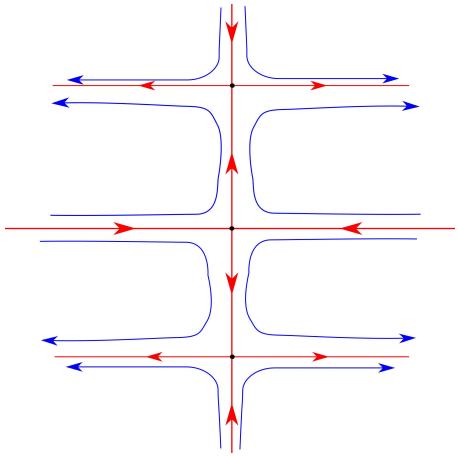


Figura 1.4: Comportamento topológico do campo após Blow Up.

Devemos agora voltar as nossas variáveis originais. Vamos utilizar a Proposição 1.5.4 analisando cada quadrante para determinarmos o comportamento topológico do nosso campo original próximo a singularidade. Observemos que em cada quadrante existe apenas uma órbita tendendo ao eixo $y$. Cada uma dessas órbitas correspondem a uma órbita tendendo a origem do nosso campo original. As órbitas que tendem a origem que passam pelo primeiro e quarto quadrante correspondem a órbitas tendendo a origem também no primeiro e quarto quadrante. Já a órbita tendendo a origem pelo segundo quadrante corresponde a uma órbita tendendo a origem pelo terceiro quadrante, e a do terceiro

quadrante corresponde a uma do segundo quadrante, visto que a transformação que utilizamos troca o segundo quadrante com o terceiro. Pelo fato de que cancelamos um fator $u$, a orientação das órbitas do segundo e terceiro quadrantes são trocadas. Cada uma das regiões de cada um dos quadrantes delimitada pelo eixo $x$ e uma dessas órbitas formará um setor hiperbólico. Tendo em vista que ao longo do eixo $y$ o campo aponta da direita para a esquerda, segue que em uma vizinhança da origem os setores formados pela órbita que delimita os setores hiperbólicos do primeiro e segundo quadrantes delimitam um outro setor hiperbólico. O mesmo ocorre na região entre o terceiro e quarto quadrante. Na Figura 1.5.8 temos um esboço do campo após o Blow Down.

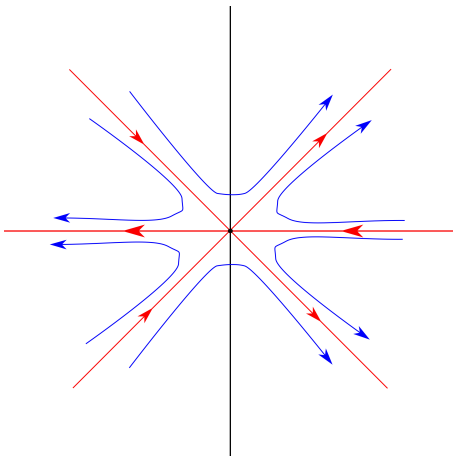


Figura 1.5: Comportamento topológico do campo após Blow Down.

## 1.6 Compatificação de Poincaré

Nesta seção construiremos a compatificação de Poincaré de um campo de vetores polinomial em $\mathbb{R}^2$. Tal compatificação é uma ferramenta muito útil para estudar o comportamento global de fluxos polinomiais no plano.

Seja $X(x_1, x_2) = (P(x_1, x_2), Q(x_1, x_2))$ um campo vetorial polinomial planar. Nessa seção, identificaremos o plano $\mathbb{R}^2$ no espaço $\mathbb{R}^3$ como o conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2, 1), x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2\}$. Seja $\mathbb{S}^2 = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\}$. Dividamos $\mathbb{S}^2$ em três partes: o hemisfério norte $H_+ = \{y \in \mathbb{S}^2 \mid y_3 > 0\}$, o hemisfério sul $H_- = \{y \in \mathbb{S}^2 \mid y_3 < 0\}$ e o equador $\mathbb{S}^1 = \{y \in \mathbb{S}^2 \mid y_3 = 0\}$.

Dado $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, consideremos a reta passando por $(0, 0, 0)$ e $(x_1, x_2, 1)$

(Figura 1.6). Essa reta intersecta $\mathbb{S}^2$ em exatamente dois pontos antipodais, $y^+ = \left(\frac{x_1}{\Delta(x)}, \frac{x_2}{\Delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)}\right) \in H_+$ e $y^- = -\left(\frac{x_1}{\Delta(x)}, \frac{x_2}{\Delta(x)}, \frac{1}{\Delta(x)}\right) \in H_-$ em que $\Delta(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + 1}$. Definamos as projeções centrais $f^+$ e $f^- : \mathbb{R}^2 \to \S^2$ por $f^+(x) = y^+$ e $f^-(x) = y^-$.

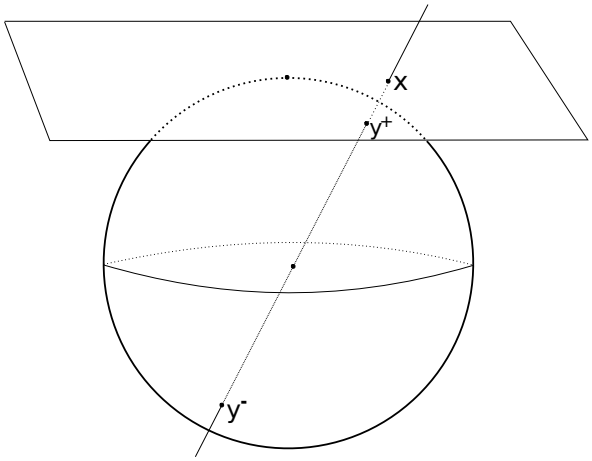



Figura 1.6: Projeção central.

Consideremos o campo induzido $\overline{X} : H^+ \cup H^- \to H^+ \cup H^-$ definido por

$$\overline{X}(y) = \begin{cases} Df^+(x)X(x), & \text{se} \quad y = f^+(x) \in H^+, \\ Df^-(x)X(x), & \text{se} \quad y = f^-(x) \in H^-. \end{cases}$$

Definido de tal maneira, segue pelo Lema 1.1.9 que a restrição do campo $\overline{X}$ em cada hemisfério é $C^\infty$ conjugado ao campo $X$. É fácil verificar que se $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{S}^2$,

$$(f^+)^{-1}(y) = \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3}\right), \text{para } y_3 > 0,$$
$$(f^-)^{-1}(y) = \left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3}\right) \text{para } y_3 < 0,$$

Podemos escrever o campo $\overline{X}$ explicitamente:

$$\overline{X}(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} Df^+\left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3}\right) X\left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3}\right), & \text{se} \quad y_3 > 0, \\ Df^-\left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3}\right) X\left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3}\right), & \text{se} \quad y_3 < 0. \end{cases}$$

Assim, tendo em conta que $\Delta(x) = 1/|y_3|$, segue que

$$Df^+\left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3}\right) X\left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3}\right) = y_3 \begin{bmatrix} {y_2}^2 + {y_3}^2 & -y_1 y_2 \\ -y_1 y_2 & {y_1}^2 + {y_3}^2 \\ -y_3 y_1 & -y_3 y_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} P\left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3}\right) \\ Q\left(\frac{y_1}{y_3}, \frac{y_2}{y_3}\right) \end{pmatrix},$$

e

$$Df^{-}\left(\frac{y_1}{y_3},\frac{y_2}{y_3}\right)X\left(\frac{y_1}{y_3},\frac{y_2}{y_3}\right)=y_3\begin{bmatrix} {y_2}^2+{y_3}^2 & -y_1y_2 \\ -y_1y_2 & {y_1}^2+{y_3}^2 \\ -y_3y_1 & -y_3y_2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} P\left(\frac{y_1}{y_3},\frac{y_2}{y_3}\right) \\ Q\left(\frac{y_1}{y_3},\frac{y_2}{y_3}\right) \end{pmatrix}.$$

Isto é, tanto em $H^+$ quanto em $H^-$, o campo $\overline{X}$ tem a mesma expressão. Notemos que quando $||x|| \to \infty$, $\pi_3(f^+(x)) \to 0$, em que $\pi_3(y_1,y_2,y_3)=y_3$. Nesse sentido, o equador representa o "infinito"do campo $X$. Para estudar o comportamento do campo no infinito, gostaríamos de definir o campo em toda a esfera. Contudo, o campo próximo ao equador em geral não é limitado. Para contornar esse problema, multiplicaremos o campo vetorial $\overline{X}$ pelo fator $\rho(y)=y_3^{d-1}$, em que $d=\max\{\text{grau}(P),\text{grau}(Q)\}$. Observemos que agora o campo pode ser estendido continuamente em $y_3=0$, visto que

$$\begin{pmatrix} y_3^d P\left(\frac{y_1}{y_3},\frac{y_2}{y_3}\right) \\ y_3^d Q\left(\frac{y_1}{y_3},\frac{y_2}{y_3}\right) \end{pmatrix}$$

é polinômio (em particular é um polinômio homogêneo de grau $d$ nas variáveis $y_1, y_2$ e $y_3$. O novo campo $p(X)(x)=\rho(y)\overline{X}(y)$ é chamado de *compatificação de Poincaré* do campo de vetores $X$. Notemos que agora $X$ não é $C^\infty$ conjugado aos hemisférios do campo $p(X)$, porém pela Proposição 1.1.7 $X$ continua sendo $C^\infty$ equivalente ao hemisfério norte de $p(X)$ , e também $C^\infty$ equivalente ao hemisfério sul a menos de orientação, caso $d$ seja par.

Para continuar a construção, notemos que $\mathbb{S}^2$ é uma variedade $C^\infty$ compacta que pode ser coberta pelas seguintes seis cartas locais: $(U_k,\phi_k)$ dadas por $\phi_k : U_k \to \mathbb{R}^2$, $\phi_k(y)=(\frac{y_m}{y_k},\frac{y_n}{y_k})$, $m<n$, $m,n\neq k$, em que $U_k=\{y\in\mathbb{S}^2 \mid y_k>0\}$ e $(V_k,\psi_k)$ dadas por $\psi_k : V_k \to \mathbb{R}^2$, $\psi_k(y)=-\phi_k(-y)$, $V_k=\{y\in\mathbb{S}^2 \mid y_k<0\}$ com $k\in\{1,2,3\}$.

Nosso objetivo agora é calcular a expressão de $\rho(X)$ nas cartas locais. Calcularemos para a carta local $\phi_1$. Para as demais cartas locais, os cálculos são análogos. Em $U_1\cap H^+$, suponhamos que $y=f^+(x)$ e que $\phi(y)=(u,v)$, denotando por $\overline{X}_{U_i}$ o campo $\overline{X}$ na carta $U_i$, temos

$$\overline{X}_{U_1}(u,v)=D\phi_1(y)\overline{X}(y)=D\phi_1(y)Df^+(x)X(x)=D\phi_1\circ f^+(x)X(x),$$

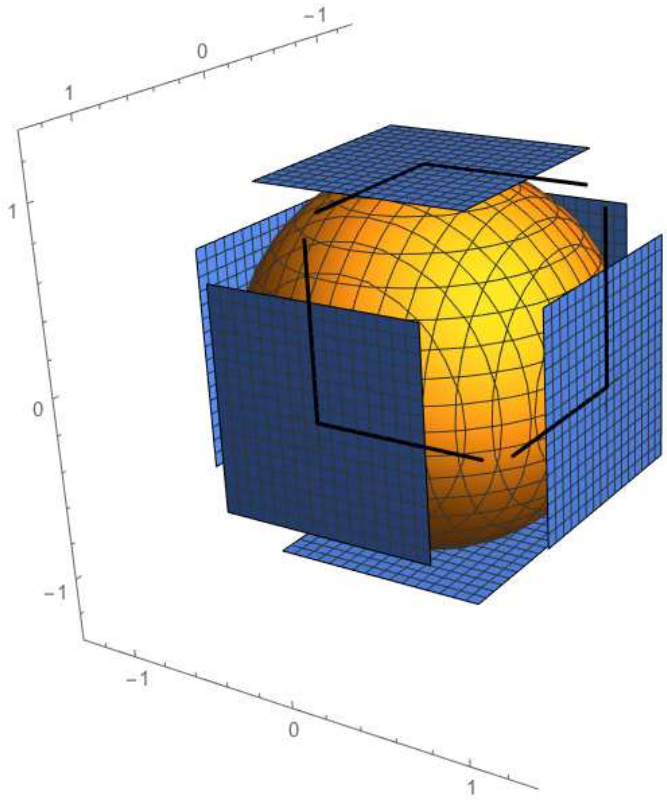



Figura 1.7: Cartas locais.

por outro lado,

$$\phi_1 \circ f^+(x) = \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{1}{x_1}\right) = (u, v),$$

então obtemos

$$D(\phi_1 \circ f^+)(x) = \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{x_1^2} & \frac{1}{x_1} \\ -\frac{1}{x_1^2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -uv & v \\ -v^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

e então

$$\begin{aligned} \overline{X}_{U_1}(u, v) &= \begin{pmatrix} -uv & v \\ -v^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \\ Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) \end{pmatrix} \\ &= v^2 \left(-\frac{u}{v} P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) + \frac{1}{v} Q\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right), -P\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right)\right). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \rho(y) = y_3^{d-1} = \frac{1}{\Delta(x)^{d-1}} = (1 + x_1^2 + x_2^2)^{(1-d)/2} = \left(1 + \frac{1}{v^2} + \frac{u^2}{v^2}\right)^{(1-d)/2} \\ = v^{d-1}(1 + v^2 + u^2)^{(1-d)/2} = v^{d-1} m(u, v), \end{aligned}$$

em que $m(u, v) = (1 + v^2 + u^2)^{(1-d)/2}$. As contas para $U_1 \cap H^-$ são feitas de maneira

análoga.

Observemos que os pontos os quais $v = 0$ são para qualquer carta local os pontos do equador. Assim,

$$p(\overline{X})(u,v) = v^{d+1}m(u,v)\left(-\frac{u}{v}P\left(\frac{1}{v},\frac{u}{v}\right)+\frac{1}{v}Q\left(\frac{1}{v},\frac{u}{v}\right),-P\left(\frac{1}{v},\frac{u}{v}\right)\right)$$

está bem definida em $v = 0$, pois multiplicando pelo fator $v^{d+1}$ cancelamos qualquer fator de $v$ que apareça no denominador.

Como $m(z) > 0$, podemos dividir o campo por $m(z)$ obtendo um campo $C^\infty$ equivalente, pela Proposição 1.1.7. Observemos que assim obtemos um campo polinomial. Escrevamos explicitamente as expressões para as cartas locais: Para a carta $(U_1, \phi_1)$, temos:

$$\begin{aligned} u' &= v^d\left[-uP\left(\frac{1}{v},\frac{u}{v}\right)+Q\left(\frac{1}{v},\frac{u}{v}\right)\right], \\ v' &= -v^{d+1}P\left(\frac{1}{v},\frac{u}{v}\right). \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

Para $(U_2, \phi_2)$:

$$\begin{aligned} u' &= v^d\left[P\left(\frac{u}{v},\frac{1}{v}\right)-uQ\left(\frac{u}{v},\frac{1}{v}\right)\right], \\ v' &= -v^{d+1}Q\left(\frac{u}{v},\frac{1}{v}\right). \end{aligned} \tag{1.6.2}$$

e para $(U_3, \phi_3)$:

$$\begin{aligned} u' &= P(u,v), \\ v' &= Q(u,v). \end{aligned}$$

**Observação 5.** Observemos pelas equações (1.6.1) e (1.6.2) que o eixo $v$ das cartas $U_1$ e $U_2$ é invariante, e consequentemente, o mesmo ocorre para as cartas $V_1$ e $V_2$.

A expressão para $p(X)$ na carta $(V_k, \psi_k)$, $k \in \{1, 2, 3\}$, é a mesma de $(U_k, \phi_k)$ multiplicadas por $(-1)^{d-1}$. Assim, para estudar o comportamento do campo $X$, incluindo seu comportamento no infinito, é suficiente trabalhar em $H_+ \cup \mathbb{S}^1$. A projeção de $H_+ \cup \mathbb{S}^1$ em $\mathbb{R}^2$ será chamada de *disco de Poincaré*.

**Definição 1.6.1.** Chamamos de *pontos singulares finitos* (*infinitos* respectivamente) de $X$ ou $p(X)$ os pontos singulares de $p(X)$ em $\mathbb{S}^2 \backslash \mathbb{S}^1$ ($\mathbb{S}^1$ respectivamente).

Notemos que se $y$ for uma singularidade infinita, então $-y$ também será, visto que as expressões nas cartas $U_k$ e $V_k$ se distinguem apenas pelo fator $(-1)^{d-1}$. O grau $d$ irá determinar a orientação das órbitas em $H^-$. No caso em que $d$ for par, a orientação será trocada. Já quando $d$ for ímpar, a orientação será mantida. Assim, pelo fato de que os pontos singulares infinitos aparecem em antípodas, é suficiente estudar um deles.

Estudemos as singularidades infinitas. Já observamos que os pontos infinitos são da forma $(u, 0)$. Denotemos por $P_i$ e $Q_i$ as partes homogêneas de grau $i$ de $P$ e $Q$.

**Proposição 1.6.2.** *Seja $X = (P, Q)$ um campo vetorial polinomial em $\mathbb{R}^2$ como no início da seção. Então $(u, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_1 \cup V_1)$ é um ponto singular infinito de $p(X)$ se e somente se*

$$F(u) \equiv Q_d(1, u) - uP_d(1, u) = 0$$

*Demonstração.* Inicialmente, observemos pela equação (1.6.1) que

$$\lim_{t\to 0} t^d \left[-uP\left(\frac{1}{t}, \frac{u}{t}\right) + Q\left(\frac{1}{t}, \frac{u}{t}\right)\right] = Q_d(1, u) - uP_d(1, u).$$

Suponhamos que $(u, 0)$ seja um ponto singular. Então $Q_d(1, u) - uP_d(1, u) = 0$ como queríamos. Reciprocamente, suponhamos que $Q_d(1, u) - uP_d(1, u) = 0$. Mais ainda, novamente pela equação (1.6.1)

$$\lim_{t\to 0} -t^{d+1} Q\left(\frac{1}{t}, \frac{u}{t}\right) = 0$$

Assim, $(u, 0)$ é um ponto singular. □

De maneira análoga podemos provar que $(u, 0) \in \mathbb{S}^1 \cap (U_2 \cup V_2)$ é um ponto singular de $p(X)$ se e somente se $G(u) \equiv P_d(u, 1) - uQ_d(u, 1) = 0$.

# Capítulo 2

# A Conjectura Jacobiana Real e o Contraexemplo de Pinchuk

A Conjectura Jacobiana é um problema proposto por Ott-Heinrich Keller [14] em 1939 e segue em aberto até hoje. Com o intuito de enunciar o problema, fixemos $N \in \mathbb{N}$. Sejam $K[X_1, ..., X_N]$ o anel dos polinômios em $N$ variáveis em um corpo $K$ de característica 0, $F : k^n \to k^n$ uma aplicação polinomial, isto é,

$$F(X_1, ..., X_N) = (f_1(X_1, ..., X_N), ..., f_N(X_1, ..., X_N))$$

com $f_i(X_1, ..., X_N) \in K[X_1, ..., X_N]$ para $i = 1, ..., N$. Denotaremos o determinante da matriz jacobiana de $F$,

$$\det \begin{bmatrix} f_{1X_1} & \cdots & f_{1X_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{NX_1} & \cdots & f_{NX_N} \end{bmatrix}$$

por $J(F)$ ou $J(f_1, ..., f_N)$.

A Conjectura Jacobiana afirma que se $J(F)$ for uma constante não nula, então $F$ possui uma função inversa e sua inversa é uma aplicação polinomial.

Notemos que a hipótese de $K$ ser um corpo de característica 0 é essencial, pois em $\mathbb{Z}_p$, o polinômio $P(x) = x - x^p$ tem como determinante da matriz jacobiana (a derivada neste caso) $P'(x) = 1 - px^{p-1} = 1$, porém não possui inversa, pois pelo Pequeno Teorema de Fermat $P(q) = 0$ para todo $q \in K$.

Observemos que para corpos algebricamente fechados, $J(F)$ não se anula se e somente se for uma constante não nula, pois $J(F)$ é um polinômio. Contudo, isso não é verdade

em corpos que não são algebricamente fechados. Por exemplo, em $K = \mathbb{R}$, se tomarmos a aplicação polinomial $F = (x^3+x, y)$ obtemos $J(F) = 3x^2+1$, e portanto $J(F)$ não se anula. Com isso surgiu a *conjectura Jacobiana real*, que afirma que se $J(F)$ não se anula, então $F$ é inversível. Em 1994, Sergey Pinchuk em [21] encontrou um contraexemplo $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, para a conjectura. Observe que utilizando este contraexemplo, se definirmos $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ para $n \geq 3$ como

$$G(x_1, ..., x_n) = (p_1(x_1, x_2), p_2(x_1, x_2), x_3..., x_n),$$

$G$ é um contraexemplo para a conjectura para $N = n$. Vale ressaltar que em seu artigo, o autor comenta que muitos pesquisadores estavam tentando provar a conjectura, mas poucos estavam à procura de um contraexemplo.

Dedicaremos o restante do capítulo para discutir resultados sobre injetividade, construir o contraexemplo de Pinchuk e discutir como podemos encontrar novos contraexemplos.

## 2.1 Resultados de Injetividade

**Teorema 2.1.1.** *Seja $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ uma aplicação polinomial. Se $F$ for injetora, então $F$ é sobrejetora.*

Esse teorema foi demonstrado inicialmente para $\mathbb{K}^n = \mathbb{R}^2$ por Donald Joseph Newman em [18]. A versão como enunciada foi demonstrada por Bialynicki-Birula e Rosenlicht em [6]. Uma outra demonstração mais elementar para o caso $\mathbb{K}^n = \mathbb{C}^n$ foi feita por Walter Rudin em [22].

**Definição 2.1.2.** Seja $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma aplicação de classe $C^1$. Dizemos que o campo vetorial $H_p = (-p_y, p_x)$ é o *campo hamiltoniano de p.*

**Proposição 2.1.3.** *Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (p, q)$ um campo vetorial de classe $C^1$. Se $J(p, q)$ nunca se anula então $H_p$ nunca se anula.*

*Demonstração.* Suponhamos por contradição que $H_p(c) = (0, 0)$ para algum $c \in \mathbb{R}^2$. Então $p_x(c) = p_y(c) = 0$. Entretanto, $J(p, q)(c) = p_x(c)q_y(c) - p_y(c)q_x(c) = 0$. Logo $H_p(c) \neq (0, 0)$ para todo $c \in \mathbb{R}^2$. □

**Proposição 2.1.4.** *Seja $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma aplicação de classe $C^1$ e $H_p$ o campo hamiltoniano de $p$. Se $H_p$ nunca se anula, então as suas órbitas são as componentes conexas das curvas de nível de $p$.*

*Demonstração.* Afirmamos que $p$ é constante ao longo das soluções de $H_p$. De fato, seja $\varphi$ solução de $H_p$. Então $\varphi'(t) = (-p_y(\varphi(t)), p_x(\varphi(t)))$. Mas

$$(p \circ \varphi)'(t) = Dp_{\varphi(t)} D\varphi(t) = (p_x(\varphi(t)), p_y(\varphi(t))) \cdot (-p_y(\varphi(t)), p_x(\varphi(t)))^T = 0.$$

Logo $p$ é constante ao longo das soluções de $H_p$, e portanto cada órbita de $H_p$ está contida numa componente conexa de uma curva de nível de $p^{-1}\{c\}$. Como $\nabla p(x) \neq (0,0)$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$, segue do Teorema da Função Implícita que $p^{-1}\{c\}$ é uma variedade de dimensão 1. Logo cada componente conexa de $p^{-1}\{c\}$ também o é. Como $H_p$ não tem pontos singulares, por consequência do Teorema de Poincaré-Bendixon, segue que cada órbita contida nesta componente conexa é ilimitada e portanto é toda a componente conexa. □

**Lema 2.1.5.** *Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (p,q)$ uma aplicação de classe $C^1$. Se as curvas de nível de $p$ ou $q$ forem conexos para todo $c \in \mathbb{R}$ e $J(F) \neq 0$, então $F$ é injetora.*

*Demonstração.* Suponhamos que $p^{-1}\{c\}$ seja conexo para todo $c \in \mathbb{R}$. Dados $a$ e $b$ distintos tais que $p(a) = p(b) = c$, é suficiente mostrarmos que $q(a) \neq q(b)$. Como $p^{-1}\{c\}$ é conexo, segue da Proposição 2.1.4 que $p^{-1}\{c\}$ é uma órbita de $H_p$, que denotamos por $\varphi(t)$. Observemos que $a$ e $b$ fazem parte dessa órbita. Temos

$$\frac{d}{dt} q(\varphi(t)) = (q_x(\varphi(t)), q_y(\varphi(t))) \cdot (p_y(\varphi(t)), -p_x(\varphi(t)))^T = J(F)(\varphi(t)) \neq 0.$$

Como $\frac{d}{dt} q(\varphi(t))$ é uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ contínua não nula, segue que é estritamente positiva ou negativa. Assim $q \circ \varphi$ é estritamente crescente ou decrescente. Portanto $q(a) \neq q(b)$ como queríamos. O caso para $q$ é análogo. □

**Corolário 2.1.6** (da demonstração)**.** *Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (p,q)$ tal que $J(F) > 0$. Então $q$ é crescente ao longo das soluções de $H_p$*

**Teorema 2.1.7.** *Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (p,q)$, uma aplicação polinomial tal que $J(F)$ nunca se anula. Então $F$ é injetora se e somente se os níveis de $p$ são conexos.*

*Demonstração.* Suponhamos que $F$ seja injetora. Então pelo Teorema 2.1.1, $F$ é sobrejetora e portanto um difeomorfismo global, logo $F^{-1}$ é contínua. Dado $c \in \mathbb{R}$, $\{c\} \times \mathbb{R}$ é um conjunto conexo, $F^{-1} = (p^{-1}, q^{-1})(\{c\} \times \mathbb{R})$ também o é. Portanto $p^{-1}\{c\}$ é conexo como queríamos. Pelo Lema 2.1.5, se os níveis de $p$ forem conexos, então $F$ é injetora concluindo a demonstração. □

A hipótese de $F$ ser uma aplicação polinomial é essencial como veremos no exemplo a seguir:

**Exemplo 2.1.8.** Seja $F = (p, q) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $F(x, y) = ((1 - x^2)e^y, -xe^y)$. Temos

$$\begin{aligned} J(F) &= (1-x^2)J(e^y, -xe^y) + e^y J(1-x^2, -xe^y) \\ &= (1-x^2)(-xJ(e^y, e^y) - e^y J(e^y, x)) + 2xe^y J(x, xe^y) \\ &= (1-x^2)e^y J(x, e^y) + 2xe^y(xJ(x, e^y) + e^y J(x, x)) \\ &= (1-x^2)e^y J(x, e^y) + 2x^2 e^y J(x, e^y) \\ &= (1+x^2)e^{2y} \end{aligned}$$

Assim, $J(F) > 0$ e os níveis de $q$ são conexos, logo pelo Lema 2.1.5 $F$ é injetora. Contudo $f^{-1}\{0\}$ possui duas componentes conexas: $\{1\} \times \mathbb{R}$ e $\{-1\} \times \mathbb{R}$.

## 2.2 Equações Úteis

Para nos auxiliar na construção de contraexemplos, discutiremos algumas propriedades de $J : C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$. Observemos que $J$ é multilinear e antissimétrico, isto é,

$$J(f_1, ..., af_i + bg_i, ..., f_N) = aJ(f_1, ..., f_i, ..., f_N) + bJ(f_1, ..., g_i, ..., f_N)$$

e

$$J(f_1, ..., f_i, ..., f_j, ..., f_N) = -J(f_1, ..., f_j, ..., f_i, ..., f_N).$$

Denotaremos por $\mathbb{R}(x_1..., x_n)$ o corpo das funções racionais nas variáveis $x_1, ..., x_n$ com coeficientes reais e o determinante da matriz Jacobiana de funções $G, H$ nas variáveis

$(f,h)$ por

$$J_{(f,h)}(G(f,h),H(f,h)) = G_f H_h - G_h H_f$$

.

**Proposição 2.2.1.** *Sejam $f,g,h,G,H \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ e $F \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, então:*

*(i)* $J(fg,h) = fJ(g,h) + gJ(f,h)$

*(ii)* $J(F(f),g) = F'(f)J(f,g)$

*(iii)* $J(F(f),f) = 0$

*(iv)* $J(G(f,h),H(f,h)) = J_{(f,h)}(G(f,h),H(f,h))J(f,h)$

*Demonstração.* O item (i) segue da regra do produto como veremos:

$$\begin{aligned} J(fg,h) &= (fg)_x h_y - (fg)_y h_x \\ &= fg_x h_y + gf_x h_y - fg_y h_x - gf_y h_x \\ &= f(g_x h_y - fg_y h_x) + g(f_x h_y - f_y h_x) \\ &= fJ(g,h) + gJ(f,h). \end{aligned}$$

Já (ii) é uma aplicação da regra da cadeia:

$$\begin{aligned} J(F(f),g) &= (F(f))_x g_y - (F(f))_y g_x \\ &= F'(f)f_x g_y - F'(f)f_y g_x \\ &= F'(f)J(f,g). \end{aligned}$$

Para o item (iii), por (ii), segue que $J(F(f),f) = F'(f)J(f,f)$. Mas J é antissimétrico, logo $J(f,f) = -J(f,f)$. Segue que $J(f,f) = 0$ como queríamos. O item (iv) também é

uma aplicação da regra da cadeia:

$$\begin{aligned}
J(G(f,h),H(f,h)) &= (G(f,h))_x(F(f,h))_y - (G(f,h))_y(F(f,h))_x \\
&= (G_f f_x + G_h h_x)(F_f f_y + F_h h_y) - (G_f f_y + G_h h_y)(F_f f_x + F_h h_x) \\
&= G_f f_x F_h h_y + G_h h_x F_f f_y - G_f f_y F_h h_x - G_h h_y F_f f_x \\
&= f_x h_y(G_f F_h - G_h F_f) - f_y h_x(G_f F_h - G_h F_f) \\
&= J_{(f,h)}(G(f,h),H(f,h))(f_x h_y - f_y h_x) \\
&= J_{(f,h)}(G(f,h),H(f,h))J(f,h)
\end{aligned}$$

como queríamos. □

Ao longo do texto usaremos livremente a Proposição 2.2.1 sem nos referirmos novamente a ela.

Observemos que dada uma aplicação $H \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$, $J(H) \in C^0(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, e pelo Teorema do Valor Intermediário, $J(H(x,y)) \neq 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ é equivalente a $J(H(x,y)) > 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ou $J(H(x,y)) < 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Vale ressaltar que **não** é verdade que um polinômio em duas variáveis que não se anula é a soma de quadrados. Temos como exemplo o polinômio $s(x,y) = x^4y^2 + x^2y^4 - 3x^2y^2 + 2$. O polinômio $s - 1$ é conhecido como polinômio de Motzkin que pode ser encontrado na referência [16].

**Proposição 2.2.2.** *Para o polinômio $s$ acima temos:*

*(i) $s \geq 1$ em $\mathbb{R}^2$.*

*(ii) $s$ não é a soma de quadrados.*

*Demonstração.* O item (i) segue diretamente da desigualdade entre a média aritmética e a média geométrica

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}, (\text{ se } a,b,c \geq 0) \tag{2.2.1}$$

tomando $a = 1$, $b = x^2y^4$ e $c = x^4y^2$.

Para o item (ii), suponhamos por contradição que $s = \Sigma f_i^2$. Como o grau de $s$ é 6,

podemos supor que grau$(f_i) \leq 3$. Com isso, $f_i$ é combinação linear de termos da forma

$$1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3.$$

Se $x^3$ ou $y^3$ aparecesse em algum $f_i$, existiria um termo da forma $x^6$ ou $y^6$ com coeficiente positivo em $s$. Similarmente, $f_i$ não possui termos da forma $x^2$, $y^2$, $x$ e $y$. Assim podemos assumir que $f_i$ é da forma

$$f_i = a_i + b_ixy + c_ix^2y + d_ixy^2.$$

Se fosse esse o caso, observemos que o monômio da forma $x^2y^2$ somente pode ser criado a partir dos quadrados dos termos da forma $xy$ de $f_i$. Assim, igualando os coeficientes do termo $x^2y^2$ em $s$ e $\Sigma f_i^2$, teríamos $0 \leq \Sigma b_i^2 = -3$, o que é uma contradição. Portanto $s$ não é a soma de quadrados. □

O seguinte teorema, provado em 1927 por Emil Artin em [4], nos diz que qualquer polinômio que nunca se anula é a soma de quadrados de funções racionais.

**Teorema 2.2.3** (Décimo sétimo problema de Hilbert)**.** *Dado $f \in \mathbb{R}[x_1, ..., x_n]$ tal que $f(x_1, ..., x_n) \geq 0$ para todo $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, então existem $f_1, ..., f_s \in \mathbb{R}(x_1, ..., x_n)$ tais que $f = \Sigma f_i^2$.*

**Exemplo 2.2.4.** Tendo em vista o Teorema 2.2.3, o polinômio $s$ da Proposição 2.2.2 pode ser escrito como a soma de quadrados de funções racionais da seguinte maneira:

$$s = \left(\frac{x^2y(x^2+y^2-2)}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{xy^2(x^2+y^2-2)}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{xy(x^2+y^2-2)}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2 + 1^2$$

Apesar das observações feitas acima, construiremos um contraexemplo em que $J(p, q)$ é a soma de quadrados de polinômios. O que faremos é encontrar três polinômios, t,h e f, de modo que t e f não se anulem simultaneamente para construir $p = p(h, f)$ e $q = q(t, h, f)$ tais que $J(p, q) = t^2 + f^2 + (a(t, h, f))^2$. As seguintes proposições nos ajudarão a encontrar tais polinômios:

**Proposição 2.2.5.** *Dados polinômios $u, v \in \mathbb{R}[x, y]$ satisfazendo $J(u, v) = 1$ e $P \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, então $t = uv + P(u)$ é solução de $J(u, t) = u$.*

*Demonstração.* Temos

$$J(u,t) = J(u, uv + P(u)) = uJ(u,v) + J(u, P(u)) = u,$$

pela Proposição 2.2.1. Logo, $J(u,t) = u$. □

**Proposição 2.2.6.** *Dados polinômios $t, u \in \mathbb{R}[x,y]$ satisfazendo $J(u,t) = u$ e $F \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, então $h = F(t)u + t$ é solução de $J(h,t) = h - t$.*

*Demonstração.* Temos

$$J(h,t) = J(F(t)u + t, t) = uJ(F(t),t) + F(t)J(u,t) = F(t)u$$

pela Proposição 2.2.1. Logo, $J(h,t) = h - t$. □

**Proposição 2.2.7.** *Sejam $t$ e $h$ como na Proposição 2.2.6, e seja $G \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, então $f = \frac{G(h)}{h-t}$ é solução de $J(f,h) = -f$.*

*Demonstração.* Temos

$$\begin{aligned} J(f,h) = J\left(\frac{G(h)}{h-t}, h\right) &= G(h)J((h-t)^{-1}, h) + (h-t)^{-1}J(G(h),h) \\ &= -\frac{G(h)}{(h-t)^2}J(h-t,h) \\ &= -\frac{G(h)}{(h-t)^2}J(h,t) \\ &= -\frac{G(h)}{(h-t)} \\ &= -f, \end{aligned}$$

como queríamos. □

Observemos que $f$ não está bem definida em $h - t = 0$. Resolveremos esse problema na próxima seção tomando $h, t$ e $G(h)$ polinomiais de modo que $G(h)$ tenha um fator $h - t$. Assim, $f$ poderá ser estendida analiticamente para todo $\mathbb{R}^2$. Podemos ainda, obter mais um resultado que nos será útil.

**Proposição 2.2.8.** *Sejam $t$, $h$ e $f$ como na Proposição 2.2.7. Então $J(f,t) = -f + G'(h)$*

*Demonstração.* Temos

$$\begin{aligned} J(f,t) = J\left(\frac{G(h)}{h-t}, t\right) &= G(h)J((h-t)^{-1} + (h-t)^{-1}J(G(h),t) \\ &= -\frac{G(h)}{(h-t)^2}J(h-t,t) + G'(h)\frac{J(h,t)}{h-t} \\ &= -\frac{G(h)}{(h-t)^2}J(h,t) + G'(h) \\ &= -f + G'(h), \end{aligned}$$

como queríamos. □

Sob as hipóteses da Proposição 2.2.8, vamos tomar a função $p$ da forma

$$p = f + h.$$

Tal forma nos é conveniente por causa das seguintes proposições:

**Proposição 2.2.9.** *Seja $U = U(f,h) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^1$, $p = f + h$, $f, h$ sob as hipóteses da Proposição 2.2.8 então:*

$$J(p,U) = -f(U_h - U_f)$$

*Demonstração.* Temos

$$J(p,U) = J_{(f,h)}(f+h, U(f,h))J(f,h) = -f(U_h - U_f)$$

como queríamos. □

**Proposição 2.2.10.** *Dado um polinômio $v(f,h)$, a equação diferencial*

$$U_h - U_f = v(f,h) \tag{2.2.2}$$

*admite solução polinomial.*

*Demonstração.* Fazendo as substituições $h = \tilde{h}$ e $f = \tilde{f} - \tilde{h}$, ou seja, $\tilde{h} = h$ e $\tilde{f} = f + h$ e

denotando $\tilde{U}(\tilde{f},\tilde{h}) = U(f,h)$, $\tilde{v}(\tilde{f},\tilde{h}) = v(f,h)$ obtemos pela regra da cadeia:

$$U_h = \tilde{U}_{\tilde{f}}\tilde{f}_h + \tilde{U}_{\tilde{h}}\tilde{h}_h = \tilde{U}_{\tilde{f}} + \tilde{U}_{\tilde{h}},$$
$$U_f = \tilde{U}_{\tilde{f}}\tilde{f}_f + \tilde{U}_{\tilde{h}}\tilde{h}_f = \tilde{U}_{\tilde{f}}.$$

Substituindo essas expressões em (2.2.2), obtemos $\tilde{U}_{\tilde{h}} = \tilde{v}(\tilde{f},\tilde{h})$, que obviamente admite solução polinomial. Retornando as variáveis originais, obtemos solução de (2.2.2) polinomial. □

Para construir o polinômio $q$, vamos precisar de mais duas equações. Para obter um termo da forma $t^2$ na expressão de $J(p,q)$, calculamos $J(p,-t^2)$:

$$J(p,-t^2) = -2t(J(f,t) + J(h,t)) = 2tf - 2tG'(h) + 2t^2 - 2th \tag{2.2.3}$$

Veremos que os termos da forma $fth^n$ serão utilizados para completar quadrados. Para eliminarmos os termos da forma $th^n$, utilizaremos a seguinte equação: Dada $M \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} J(p,M(h)t) &= M(h)J(f+h,t) + tJ(f+h,M(h)) \\ &= M(h)\big(J(f,t) + J(h,t)\big) + tM'(h)J(f+h,h) \\ &= M(h)\big(-f + G'(h) + (h-t)\big) - ftM'(h) \\ &= -fM(h) - tfM'(h) + M(h)G'(h) + hM(h) - tM(h) \end{aligned}$$

Assim, tomando $M(h) = -2h - 2G'(h)$ obtemos:

$$J(p,-t^2 + M(h)t) = 2t^2 - f(-2h - 2G'(h)) - tf(-2 - 2G''(h)) - 2(G'(h)+h)^2. \tag{2.2.4}$$

Se existir $K(h) \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tal que

$$K(h)G(h) = -2(G'(h)+h)^2, \tag{2.2.5}$$

utilizando a Proposição 2.2.7 podemos completar quadrados em (2.2.4) da seguinte ma-

neira:

$$\begin{aligned} J(p, -t^2 + tM(h)) &= 2t^2 - f(-2h - 2G'(h)) - tf(-2 - 2G''(h) + K(h)G(h) \\ &= 2t^2 - f(-2h - 2G'(h)) - tf(-2 - 2G''(h)) + f(h - t)K(h) \\ &= t^2 + (t + f(1 + G''(h) - K(h)2^{-1}))^2 + f^2 + fv(h, f) \end{aligned}$$

em que

$$v(h, f) = -f + (-2h - 2G'(h)) - f(1 + G''(h) - K(h)2^{-1})^2$$

Observemos que no caso em que $K$ e $G$ forem polinômios, $v(h, f)$ também será um polinômio nas variáveis $h$ e $f$. Pela Proposição 2.2.10, existe polinômio $U(h, f)$ tal que $J(p, U(h, f)) = fv(f, h)$, ou seja, $v(f, h)$ pode ser "eliminado", isto é, tomando $q = -t^2 - 2ht - 2tG'(h) - U(h, f)$ obtemos

$$J(p, q) = t^2 + (t + f(1 + G''(h) - K(h)2^{-1}))^2 + f^2. \tag{2.2.6}$$

Caso ocorra que $t$ e $f$ não se anulem simultaneamente, obtemos um exemplo de classe $C^1$ de aplicação com matriz Jacobiana que nunca se anula.

## 2.3 O Contraexemplo de Pinchuk

Levando em consideração as equações (2.2.5), (2.2.6), a Proposição 2.2.7 e o Teorema 2.1.7 é suficiente encontrarmos $t, u \in \mathbb{R}[x, y]$, $F, G \in \mathbb{R}[x]$ tais que:

1. exista $K \in \mathbb{R}[x]$ tal que $G(x)K(x) = -2(G'(x) + x)^2$,
2. $f = \frac{G(h)}{h-t} = \frac{G(uF(t)+t)}{uF(t)}$ seja polinômio,
3. $t$ e $f$ não se anulem simultaneamente,
4. algum nível de $p = f + h$ é desconexo,

para encontramos um contraexemplo para a conjectura jacobiana real.

Com o intuito de encontrar soluções com o menor grau possível, vamos analisar algumas possibilidades para $G$ satisfazer a condição 1.

**Proposição 2.3.1.** *Se grau$(G) \leq 3$, então é necessário e suficiente que $G$ tenha uma das seguintes formas para satisfazer a condição 1:*

$$G(x) = a,$$
$$G(x) = ax + a^2,$$
$$G(x) = \frac{-x^2}{2} + c,$$
$$G(x) = ax^2,$$
$$G(x) = ax^3 + x^2,$$

*em que $a, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Mais ainda, se*

$$G(x) = ax^n + \frac{x^2}{n-2},$$

*então a condição 1 é satisfeita.*

O seguinte Lema nos ajudará a demonstrar tal afirmação:

**Lema 2.3.2.** *Seja $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função racional que possui série de Taylor na origem,*

$$K(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i.$$

*Se $K(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, grau$(P) = m$ e $Q(x) = b_n x^n + ... + b_0$, então os coeficientes da série de Taylor de $K$ satisfazem:*

$$\sum_{i=0}^{n} b_i a_{k-i} = 0$$

*para todo $k > max(m, n)$.*

*Demonstração.* Temos

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

Portanto, pelo produto de Cauchy

$$\begin{aligned} P(x) &= Q(x)\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \\ &= (b_n x^n + ... + b_0)\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \\ &= b_0 a_0 + (b_0 a_1 + b_1 a_0)x + ... + \sum_{i=0}^{n} b_i a_{k-i} x^k + ... \end{aligned}$$

como todo coeficiente da série de Taylor de $P$ é nulo a partir de $m+1$, igualando os coeficientes concluímos o resultado. □

**Corolário 2.3.3.** *Seja $K$ como no Lema 2.3.2, suponhamos adicionalmente que $m > n$ então $K$ é um polinômio se e somente se $a_{m-n+1} = ... = a_{m+1} = 0$.*

*Demonstração.* Suponhamos que $K$ seja um polinômio. Então grau$(K) = m - n$. Logo $a_j = 0$ para todo $j > m - n$. Portanto $a_{m-n+1} = ... = a_{m+1} = 0$. Suponhamos agora que $a_{m-n+1} = ... = a_{m+1} = 0$. Vamos mostrar por indução que $a_k = 0$ para todo $k > m + 1$. Temos como base de indução que $a_{m-n+1} = ... = a_{m+1} = 0$. Assumamos como hipótese de indução que $a_{k-1} = ... = a_{k-n} = 0$. Pelo Lema 2.3.2 segue que $\sum_{i=0}^{n} b_i a_{k-i} = 0$. Como $b_0 \neq 0$ obtemos que $a_k = 0$. Assim, $a_j = 0$ para todo $j > m + 1$. Portanto $K$ é um polinômio. □

Demonstremos a Proposição 2.3.1.

Se $G(x) = a$, $K(x) = \frac{-2x^2}{a}$ e portanto a condição 1 é satisfeita.

Se $G(x) = ax + b$, $K(x) = \frac{-2(x+b)^2}{(ax+a)}$. Pelo corolário 2.3.3, se $b \neq 0$, $K$ é polinômio se e somente se $K''(0) = 0$. Assim, obtemos que $b = a^2$ é a única solução. Já no caso em que $b = 0$, é fácil ver que $\frac{-2(x+a)^2}{x}$ não é polinômio, pois $a \neq 0$.

Se $G(x) = ax^2 + bx + c$, dividamos em 2 casos: $c = 0$ e $c \neq 0$. Se $c = 0$, temos que $G(0) = 0$, logo, para $K$ ser polinômio é necessário que $G'(x) + x$ se anule em 0, isto é, $G'(0) = 0$. Logo 0 é raiz dupla de $G$ e portanto $b = 0$. Se $G(x) = ax^2$, temos $K(x) = \frac{-2(a+1)}{a}$ polinômio. Já no caso em que $c \neq 0$, pelo corolário 2.3.3, $K$ é polinômio se e somente se $K'(0) = K''(0) = 0$. Nesse caso obtemos que $a = -\frac{1}{2}$ e $c \in R$.

Se $G(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, dividamos novamente em 2 casos: $d = 0$ e $d \neq 0$. Se $d = 0$, $c = 0$, como argumentamos no caso anterior. Temos que analisar dois subcasos:

$b = 0$ e $b \neq 0$. Se $b = 0$, $G(x) = ax^3$, e é fácil ver que nesse caso $K(x)$ não é polinômio. Se $b \neq 0$, observemos que $K(x) = \frac{-2(3ax+2b+1)^2}{ax+b}$. Para $K$ ser polinômio basta $K''(0) = 0$, isto é, $b = 1$ e $a \neq 0$. Já no caso em que $d \neq 0$, basta encontrar as soluções de $K''(0) = K'''(0) = K''''(0) = 0$. Nesse caso não há soluções com $a \neq 0$. Portanto as possibilidades para $G$ com grau 3 são da forma $G(x) = ax^3 + x^2$.

Já para $n > 2$, é suficiente que $G(x) = ax^n + \frac{x^2}{n-2}$.

De fato, se $G(x) = ax^n + \frac{x^2}{n-2}$,

$$K(x) = \frac{-2(anx^{n-1} + \frac{nx}{n-2})^2}{ax^n + \frac{x^2}{n-2}} = \frac{-2n^2(ax^{n-2} + \frac{1}{n-2})^2}{ax^{n-2} + \frac{1}{n-2}} = -2n^2(ax^{n-2} + \frac{1}{n-2}),$$

e portanto $K$ é polinômio.

A seguinte proposição nos dará uma equivalência para a condição 2:

**Proposição 2.3.4.** *Seja $f$ como na Proposição 2.2.7, $F$ e $G \in \mathbb{R}[x]$. Então a condição 2 é satisfeita se e somente se*

$$\frac{G(t)}{uF(t)}$$

*é polinômio.*

*Demonstração.* Expandindo $G(uF(t) + t)$ em série de Taylor no ponto $uF(t)$, temos:

$$G(uF(t) + t) = G(t) + uF(t)G'(t) + ... + (uF(t))^n \frac{G^{(n)}(t)}{n!}$$

e então,

$$f = \frac{G(t)}{uF(t)} + G'(t) + ... + (uF(t))^{n-1} \frac{G^{(n)}(t)}{n!}.$$

Logo, se $\frac{G(t)}{uF(t)}$ for polinômio, $f$ é polinômio. Reciprocamente, se $f$ for polinômio, temos

$$\frac{G(t)}{uF(t)} = f - (G'(t) + ... + (uF(t))^{n-1} \frac{G^{(n)}(t)}{n!}).$$

Portanto $\frac{G(t)}{uF(t)}$ é polinômio como queríamos. □

**Corolário 2.3.5.** *Sejam $f$, $F$ e $G$ como na Proposição 2.3.4. Se $f$ for um polinômio, então grau($F$) <grau($G$).*

*Demonstração.* Denotemos por $\text{grau}_{(u,v)}(M)$ o grau de $M$ em relação as variáveis $u$ e $v$. Temos

$$\begin{aligned}\text{grau}_{(u,v)}(f) &= \text{grau}_{(u,v)}(G(t)) - \text{grau}_{(u,v)}(F(t)) - \text{grau}_{(u,v)}(u) \\ &= (\text{grau}(G) - \text{grau}(F))\text{grau}_{(u,v)}(t) - 1\end{aligned}$$

Como $\text{grau}(f) \geq 0$, e $\text{grau}_{(u,v)}(t) \geq 2$, (veja equação (2.2.6)), temos

$$\text{grau}(G) \geq \text{grau}(F) + \frac{1}{\text{grau}_{(u,v)}(t)},$$

e portanto

$$\text{grau}(G) > \text{grau}(F)$$

como queríamos. □

**Corolário 2.3.6.** *Sejam $f$ como na Proposição 2.3.4 e $F, G \in \mathbb{R}[x]$. Se $f$ for um polinômio, então $F$ divide $G$.*

*Demonstração.* Suponhamos por contradição que $F$ não divide $G$. Então, por consequência do Teorema Fundamental da Álgebra, existiriam $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tal que $F(z) = 0$, $G(z) \neq 0$ e $t(z_1, z_2) - z = 0$. Nesse caso, dado $\epsilon > 0$, $f$ é ilimitada em $B_\epsilon(z_1, z_2) - (z_1, z_2)$ que é um conjunto limitado, e portanto não pode ser um polinômio. □

### 2.3.1 Contraexemplos para grau$(G) \leq 3$

Nesta seção mostraremos que o menor grau possível para $G$ nessa construção é 3 tentando construir um contraexemplo a partir dos polinômios $G$ que satisfazem a condição 1 e possuem grau menor ou igual a 3.

Não é possível construir um contraexemplo quando $\text{grau}(G) = 0$, pois $\text{grau}(F) < \text{grau}(G)$.

Também não é possível construir um contraexemplo quando $G(x) = ax + a^2$ como veremos. Nesse caso, $F(x) = b$. Assim,

$$f = \frac{a(ub + t + a)}{ub}$$

e $f$ é polinômio se e somente se

$$\frac{a(t+a)}{ub}$$

for polinômio. Para isso, necessitamos que $t+a$ se anule em $u=0$. Como $t=uv+P(u)$, temos $P(0)=-a$, ou seja, $P(u)=uQ(u)-a$. Assim, $t+a=u(v+Q(u))$. Logo

$$f=\frac{a(v+Q(u)+b)}{b}.$$

Observemos que a condição 3 não é satisfeita: $t$ e $f$ se anulam em $v=Q(\frac{a}{b})-b, u=\frac{a}{b}$.

Suponhamos agora que $G(x)=\frac{-x^2}{2}+c$. Temos duas opções para $F$: $F(x)=b$ ou $F(x)=bx+e$. Se $F(x)=b$,

$$f=\frac{-(ub+t)^2+2c}{2u}$$

é polinômio se e somente se

$$\frac{-t^2+2c}{2u}$$

for polinômio. Se tivéssemos $c<0$, vemos que o numerador nunca se anularia, contudo $u$ se anula, logo $c>0$. Assim, escrevemos $c=\frac{d^2}{2}$. Logo $f$ é polinômio se e somente se

$$\frac{(t+d)(t-d)}{u}$$

for polinômio. Para isso, novamente é necessário que $t+a=u(v+Q(u))$, em que $a=d$ ou $-d$. Suponhamos sem perda de generalidade que $a=d$. Temos

$$f=\frac{(b+(v+Q(u))(ub+u(v+Q(u))-2d)}{2}.$$

Observemos que novamente $f$ e $t$ se anulam simultaneamente em $v=Q(\frac{a}{b})-b, u=\frac{a}{b}$.

Se $F(x)=bx+e$, como $F$ divide $G$, é necessário que $G$ seja redutível em $\mathbb{R}[x]$, para isso $2c=d^2$. Para $F$ dividir $G$ é necessário que $e=bd$ ou $e=-bd$. Sem perda de generalidade suponhamos que $e=-bd$. Assim temos

$$f=\frac{(bu+1)\,(bdu-btu-d-t)}{2bu}.$$

Logo é necessário que $u$ divida $t+d$, pois $u$ não divide $bu+1$. Para isso tomamos $t+d=u(v+Q(u))$. Contudo novamente a terceira condição não pode ser satisfeita, pois

$t$ e $f$ se anulam simultaneamente em $u = \frac{1}{b}, v = bd - Q(\frac{1}{b})$.

Suponhamos agora, que $G(x) = ax^2$. Nesse caso, temos duas possibilidades para $F$, $F(x) = bx$ ou $F(x) = b$. Se $F(x) = bx$,

$$f = \frac{at\left(ub+1\right)^2}{ub}.$$

Logo é necessário que $u$ divida $t$. Para isso tomamos $t = u(v + Q(u))$. Assim,

$$f = \frac{\left(ub+1\right)^2\left(v+Q\left(u\right)\right)a}{b}.$$

Porém $f$ e $t$ se anulam quando $v = -Q(u)$ e portanto a terceira condição não é satisfeita.

Se $F(x) = b$, $f$ é polinômio se e somente se

$$\frac{at^2}{ub}$$

for polinômio. Para isso, é necessário que $t = u(v + Q(u))$. Nesse caso,

$$f = \frac{au\left(b+v+Q\left(u\right)\right)^2}{b}.$$

Porém $f$ e $t$ se anulam simultaneamente quando $u = 0$, e portanto a terceira condição não é satisfeita.

Suponhamos que $G(x) = ax^3 + x^2$. Nesse caso, $F(x) = b$, $F(x) = abx + b$, $F(x) = bx$, $F(x) = abx^2 + bx$ ou $F(x) = bx^2$.

Se $F(x) = b$, $f$ é polinômio se e somente se

$$\frac{at^3 + t^2}{ub}$$

for polinômio. Para isso, $u$ divide $t$ ou $at + 1$. Suponhamos que $u$ divide $t$. Nesse caso, $t = u\left(v + Q\left(u\right)\right)$, logo

$$f = \frac{u\left(b+v+Q\left(u\right)\right)^2\left(Q\left(u\right)au + abu + auv + 1\right)}{b}.$$

Logo $f$ e $t$ se anulam quando $u = 0$ e a condição 3 não é satisfeita.

Suponhamos que $u$ divide $at+1$. Nesse caso, $t = u\left(v + Q\left(u\right)\right) - \frac{1}{a}$, logo

$$f = \frac{\left(uaQ\left(u\right) + uba + uav - 1\right)^2 \left(Q\left(u\right) + b + v\right)}{ab}.$$

Logo $f$ e $t$ se anulam quando $u = -\frac{1}{ab}$ e $v = -Q\left(-\frac{1}{ab} - b\right)$.

Se $F(x) = abx + b$, $f$ é polinômio se e somente se

$$\frac{t^2}{bu}$$

for polinômio. Para isso é necessário que $t = u(v + Q(u))$. Nesse caso,

$$f = \frac{\left(abu + 1\right) u \left(abuQ\left(u\right) + abuv + Q\left(u\right) + b + v\right)^2}{b}$$

Logo $f$ e $t$ se anulam quando $u = 0$.

Se $F(x) = bx$, $f$ é polinômio se e somente se

$$\frac{t\left(at+1\right)}{ub}$$

for polinômio. Para isso é necessário que $u$ divida $t$ ou $at+1$. Se $u$ divide $t$, $t = u(v+Q(u))$. Nesse caso,

$$f = \frac{\left(Q\left(u\right) abu^2 + abu^2 v + Q\left(u\right) au + auv + 1\right) \left(bu+1\right)^2 \left(v + Q\left(u\right)\right)}{b}.$$

Logo $t$ e $f$ se anulam quando $v = -Q(u)$ e portanto a condição 3 não é satisfeita. Suponhamos que $u$ divide $at+1$, nesse caso $t = u\left(v + Q\left(u\right)\right) - \frac{1}{a}$. Assim,

$$f = \frac{\left(abuQ\left(u\right) + abuv + Q\left(u\right) a + av - b\right) \left(bu+1\right)^2 \left(Q\left(u\right) au + auv - 1\right)}{ab}$$

Logo $f$ e $t$ se anulam quando $v = -\frac{Q(u)au-1}{au}$, para $u \neq 0$.

Se $F(x) = abx^2 + bx$, $f$ é polinômio se e somente se

$$\frac{t}{bu}$$

for polinômio. Nesse caso $u$ divide $t$ e então $t = u(v + Q(u))$. Assim,

$$f = \frac{(v + Q(u))\left(abu^2Q(u) + abu^2v + bu + 1\right)^2\left(abu^2Q(u) + abu^2v + 1\right)}{b}$$

Logo $f$ e $t$ se anulam simultaneamente em $v = -Q(u)$.

Por fim, se $F(x) = bx^2$, temos que $f$ é polinômio se e somente se

$$\frac{at + 1}{ub}$$

é polinômio. Para isso, temos que $u$ divide $at + 1$. Logo $t = u(v + Q(u)) - \frac{1}{a}$. Assim,

$$f = (ubt + 1)^2(abt^2 + v + Q(u)).$$

Se $t = 0$, $f = v + Q(u)$. Porém se $v + Q(u) = 0$, $t = -\frac{1}{a} \neq 0$. Logo $t$ e $f$ não se anulam simultaneamente e portanto a condição 3 é satisfeita. Sob tais condições,

$$p = (ubt + 1)[(ubt + 1)(abt^2 + v + Q(u)) + t]$$

e assim o nível 0 de $p$ é desconexo portanto a condição 4 também é satisfeita. Observemos que grau$(p) = 10$ nas variáveis $u, v$, se grau$(Q) \leq 1$ e que o grau mínimo possível para $G$ é 3. O polinômio $p$ encontrado por Pinchuk em [21] é um caso particular dessa construção tomando $u = x, v = y, a = 1, b = 1$ e $Q(u) = 0$. O contraexemplo encontrado por Pinchuk é dado por $N = (p, q)$,

$$p = f + h = \left(x^2y^2 - 2\,xy + y + 1\right)\left(x^2y - x + 1\right) \tag{2.3.1}$$

$$q = -t^2 - 6th(h + 1) + U(f, h),$$

em que $U(f, h) = \frac{75}{4}\,f^4 + (75\,h + 67)\,f^3 + \left(201\,h + 91 + \frac{225}{2}\,h^2\right)f^2 + 12\,fh$

**Observação 6.** No artigo [10], Campbell mostra que o menor grau possível para $U(f, h)$ ser solução da Equação (2.2.2) é 25 e é tomado da forma

$$U(f, h) = 170fh + 91h^2 + 195fh^2 + 69h^3 + 75fh^3 + \frac{75}{4}h^4.$$

Neste mesmo artigo, considerando $p$ de Pinchuk e $q$ dessa forma, Cambell considera a

curva $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\beta(s) = (s^2 - 1, -75s^5 + \frac{345}{4}s^4 - 29s^3 + \frac{117}{2}s^2 - \frac{163}{4}),$$

e prova que $(0, 0)$ e $(-1, -163/4)$ não têm pré imagem por $F$. Os demais pontos de $\beta(\mathbb{R})$ têm exatamente uma pré-imagem e todos os outros pontos de $\mathbb{R}^2$ têm duas pré imagens por $F$. Um esboço dessa curva, fora de escala, pode ser vista na Figura 2.1.

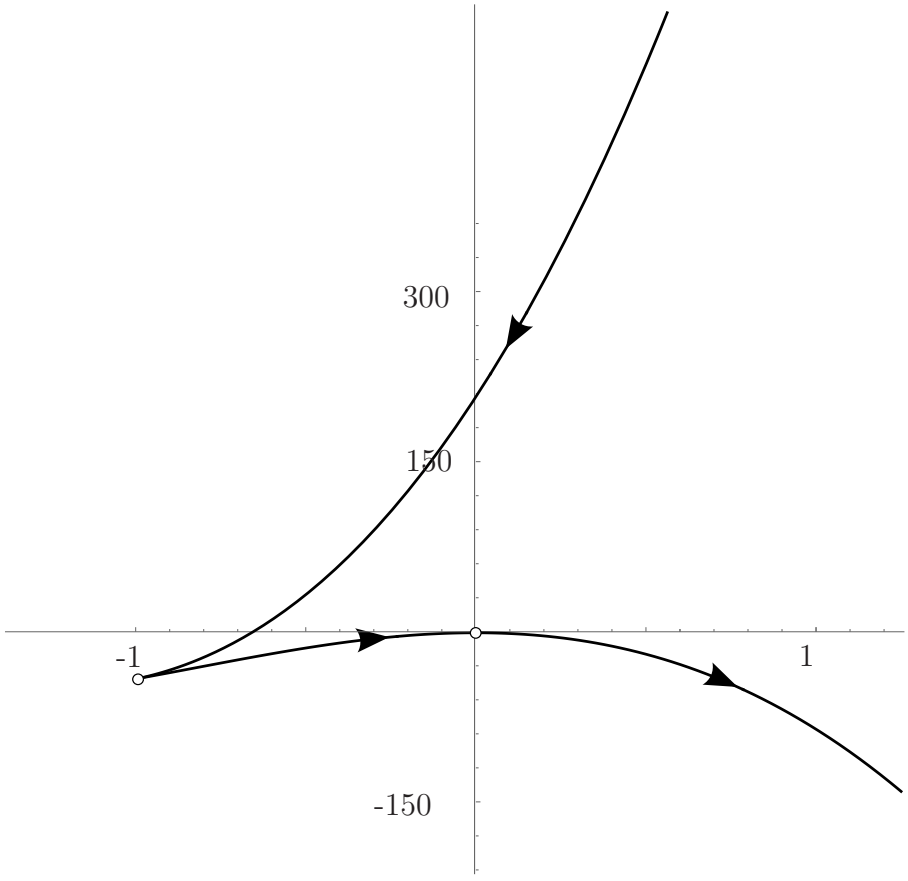



Figura 2.1: Variedade assintótica do contraexemplo de Pinchuk.

### 2.3.2 Outros contraexemplos

Nessa seção iremos obter outros exemplos de aplicações polinomiais não injetoras com matriz jacobiana que nunca se anula. Se tomarmos

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{-x^n}{n-2} + \frac{x^2}{n-2}, \\ F(x) &= x^2, \\ t &= u(v+Q(u))+1, \text{com } Q(x) \in \mathbb{R}[x]. \end{aligned}$$

Nesse caso, a condição 1 é satisfeita. Sob as hipóteses da Proposição 2.2.7, $h = ut^2 + t$ e

$$(n-2)f = (ut+1)^2(t^2+v+Q(u))(M(h)),$$

em que $M(h) = h^{n-3} + ... + h^j + ... + 1$. Assim a condição 2 é satisfeita. Observemos que se $t = 0$, temos $h = 0$ e $M(0) = 1$. Assim, se $t = 0$, $(n-2)f = (v+Q(u))$, logo $t$ e $f$ não se anulam simultaneamente e portanto a condição 3 é satisfeita. Temos

$$p = (ut+1)\left[t + \frac{(ut+1)(t^2+v+Q(u))(M(h))}{n-2}\right].$$

Sob a hipótese de que $(u, v)$ é um difeomorfismo, podemos provar que o nível 0 de $p$ é desconexo e portanto a condição 4 é satisfeita. A seguinte proposição nos dá uma maneira de produzir outros exemplos a partir dos exemplos que já temos.

**Proposição 2.3.7.** *Sejam $M = (a(x,y), b(x,y)), N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplicações polinomiais tais que o determinante da matriz jacobiana nunca se anula. Se $M$ não for injetora, $N \circ M$ não será injetora e $J(N \circ M)$ nunca se anula.*

*Demonstração.* Como $M$ não é injetora, existem $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}^2$ tais que $M(x_1) = M(x_2)$. Logo $N \circ M(x_1) = N \circ M(x_2)$ e portanto $N \circ M$ não é injetora. Temos $J(N \circ M) = J_{(a,b)}(N \circ M)J(M)$. Como $J(N)$ nunca se anula, $J_{(a,b)}(N \circ M)$ nunca se anula. Como $J(M)$ nunca se anula obtemos que $J(N \circ M)$ nunca se anula como queríamos. □

# Capítulo 3

# Retrato de Fase Topológico Global Do Campo $H_p$

Neste capítulo, construiremos o retrato de fase global do campo Hamiltoniano $H_p$ do polinômio $p$ (2.3.1) de Pinchuk.

$$p = \left(x^2y^2 - 2\,xy + y + 1\right)\left(x^2y - x + 1\right)$$

e

$$H_p = (-p_y, p_x)\,.$$

O estudo das curvas de níveis tem implicações diretas em resultados sobre a injetividade injetividade como podemos ver Teorema 2.1.7, e nos artigos [8], [7] e [13].

Dividiremos o capítulo em três seções. Na primeira seção estudaremos o comportamento topológico das singularidades infinitas da compatificação de Poincaré do campo $H_p$ em suas cartas locais através da técnica de Blow Up. Na segunda seção, estudaremos o comportamento do campo na sua parte finita. Para concluir o capítulo faremos o retrato de fase global do campo no disco de Poincaré.

## 3.1 Estudo das singularidades infinitas do campo $H_p$

Nesta seção estudaremos o comportamento topológico das singularidades da compatificação de Poincaré do campo $H_p$, $p(H_p)$. Mostremos que $p(H_p)$ não possui singularidades finitas:

**Proposição 3.1.1.** *O campo $p(H_p)$ não possui singularidades finitas.*

*Demonstração.* Sabemos pela Proposição 2.1.3, que o campo $H_p$ não possui singularidades. Como $H_p$ é topologicamente equivalente a cada hemisfério do campo $p(H_p)$, $p(H_p)$ não possui singularidades finitas. □

O seguinte Teorema clássico, junto com a Proposição 3.1.1 nos garantirá a existência de singularidades infinitas:

**Teorema 3.1.2** (Teorema da Bola Cabeluda)**.** *Não existe campo vetorial não singular contínuo em $S^{2n} = \{x \in \mathbb{R}^{2n+1} \mid ||x|| = 1\}$.*

A demonstração desse teorema pode ser encontrado em [17].

Assim, como $p(H_p)$ não possui singularidades finitas, necessáriamente possui singularidades infinitas. Para estudar tais singularidades, iremos estudar o campo em suas cartas locais.

### 3.1.1 Estudo Qualitativo da Carta $U_1$

O processo que faremos para estudar qualitativamente o campo na carta $U_1$ será dividido em algumas etapas. Os cálculos serão omitidos porém podem ser reproduzidos através dos passos em qualquer programa de computação algébrica. É inviável que o processo seja feito a mão visto que grau$(H_p) = 9$.

Primeiramente, devemos encontrar os pontos singulares infinitos do campo na carta $U_1$. Para isso, utilizemos a Proposição 1.6.2. No nosso caso temos $d = 9$, $P = -p_y$, $Q = p_x$, $P_9(x, y) = -4x^6y^3$, $Q_9(x, y) = 6x^5y^4$ e então

$$F(u) = 10u^4.$$

Concluímos que a origem é o único ponto singular infinito do campo na carta $U_1$.

Estudemos o comportamento dessa singularidade. A expressão do campo é dado pela Equação (1.6.1), da qual obtemos:

$$x' = 10x^4 - 32x^3y^2 + (...),$$
$$y' = y(4x^3 - 12x^2y^2 + (...)).$$

É de cáculo direto que o eixo $x$ é invariante e aponta da direita para a esquerda. Calculando a parte linear do campo na origem, temos

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, a origem é uma singularidade linearmente zero. Logo é necessário fazermos um Blow Up. O primeiro passo é calcularmos o polinômio característico. Calculando o polinômio característico através da equação (1.5.4) obtemos:

$$\mathcal{F}(u, v) = -6u^4 v.$$

Logo, são direções características $0, \pi/2, \pi$ e $3\pi/2$. Para estudarmos as direções 0 e $\pi$, façamos um Blow Up diretamente. Temos um Blow Up de ordem 3, ímpar. A expressão do campo é dada pela Equação (1.5.3):

$$x' = x(10 - 32xy^2 + (...)),$$
$$y' = y(-6 + 20xy^2 + (...)).$$

Tal campo possui apenas uma singularidade ao longo do eixo $y$, na origem. Tal singularidade possui parte linear

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Assim a origem é uma sela a qual os eixos são invariantes: o eixo $x$ é repulsor e o eixo $y$ atrator. Assim, a informação sobre nosso campo original que obtivemos, tendo em vista o Teorema 1.5.4, é que o eixo $x$ do nosso campo original é invariante e não existem outras órbitas tendendo a origem com inclinação 0 ou $\pi$.

Para estudarmos as direções características $\pi/2$ e $3\pi/2$ do nosso campo original, devemos voltar ao campo original, fazer uma troca de coordenadas e em seguida um Blow Up. Fazendo tais mudanças, temos novamente um Blow Up de ordem 3, ímpar. O novo

campo possui a seguinte expressão:

$$x' = x(12x^2y - 12xy^2 + 4y^3 + (...)),$$
$$y' = -12x^3y + 24x^2y^2 - 20xy^3 + 6y^4 + (...).$$

Observemos que a origem é a unica singularidade desse campo ao longo do eixo $y$. Tal singularidade possui parte linear

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, outro Blow Up é necessário. Devemos novamente calcular o polinômio característico. Calculando obtemos:

$$\mathcal{F}(u, v) = 2u(u - v)^4.$$

Como 0 e $\pi$ não são direções características, mas $\pi/2$ e $3\pi/2$ são, devemos fazer outra troca de coordenadas e em seguida um Blow Up. Aplicando essas transformações, temos agora um Blow Up de ordem 3, ímpar. O novo campo possui a seguinte expressão:

$$x' = x(6 - 20y + (...)),$$
$$y' = y(-2 + y + (...).$$

Esse campo possui duas singularidades ao longo do eixo $y$: A primeira na origem, e a segunda no ponto $(0, 1)$. Suas respectivas partes lineares são:

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, a origem é uma singularidade hiperbólica do tipo sela, em que o eixo $x$ é repulsor e o eixo $y$ é atrator. A singularidade no ponto $(0, 1)$ é do tipo linearmente nula. Para estudarmos tal singularidade, façamos uma translação do ponto $(0, 1)$ para a origem, e em seguida, calculemos o polinômio característico. Calculando o polinômio característico, obtemos:

$$\mathcal{F}(u, v) = -u^2(u - v)(u - 2v).$$

Como 0 e $\pi$ não são direções características, mas $\pi/2$ e $3\pi/2$ são, devemos fazer uma troca de coordenadas e em seguida um Blow Up. Agora temos um Blow Up de ordem 2, par. O novo campo possui a seguinte expressão, dada pela Equação (1.5.3):

$$x' = x(-2x - 2y + (...)),$$
$$y' = y(-2x - 2y + (...)).$$

Esse campo possui três singularidades ao longo do eixo $y$, nos pontos: Na origem, no ponto $(0, 1)$ e no ponto $(0, 2)$. Suas partes lineares são, respectivamente:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -28 & -4 \end{bmatrix}.$$

A singularidade na origem é do tipo linearmente nula. As outras duas são hiperbólicas do tipo sela. Em uma vizinhança de $(0, 1)$, o campo no eixo $y$ é atraído pela singularidade. Já em $(0, 2)$, o campo é repelido pela singularidade no eixo $y$. Para estudar a singularidade na origem, precisamos fazer um novo Blow Up. Calculando o polinômio característico, obtemos:

$$\mathcal{F}(u, v) = 0.$$

Logo, devemos calcular as direções singulares. Para isso, calculemos o polinômio $W$:

$$W(u, v) = -2u - 2v.$$

Assim, $\pi/4$ e $5\pi/4$ são as direções singulares. Façamos um Blow Up diretamente. Temos um Blow Up de ordem 3, ímpar com a seguinte expressão:

$$x' = -2 - 2x - 2y + (...),$$
$$y' = y(6 + 9y + (...)).$$

Tal campo possui apenas uma singularidade no eixo $y$, em $(0, -1)$. Tal singularidade tem parte linear

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

e possui autovalores $-1$ e $1$ com autovetores associados $(1/2, 1)$ e $(1, 1)$ respectivamente. Portanto é uma singularidade hiperbólica do tipo sela. Além disso, é de cáculo direto estudando a componente horizontal do campo que todas as órbitas que cruzam o eixo $y$, cruzam da direita para a esquerda quando $y < -1$ e da esquerda para direita quando $y > -1$. (veja a Figura 3.1.1).

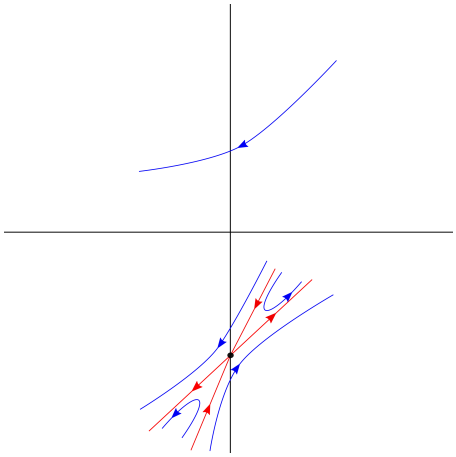


Figura 3.1: Esboço do campo próximo a singularidade após último Blow Up.

Na Figura 3.1.1, segue um esboço de todas as transformações feitas.

Devemos agora retornar às variáveis originais utilizando as informações que foram obtidas ao longo do processo. Utilizando as proposições 1.5.7 e 1.5.2 e tendo em vista que temos um Blow Up ímpar, concluímos que as órbitas que cruzam o eixo $y$ do primeiro para o segundo quadrante no nono campo, correspondem a duas órbitas tendendo a origem, uma no primeiro quadrante, e a outra no terceiro quadrante. Já as órbitas que cruzam o eixo $y$ do quarto para o terceiro quadrante, também correspondem a duas órbitas tendendo a origem, porém uma tendendo a origem no quarto quadrante, e a outra tendendo a origem no segundo quadrante. O setor hiperbólico do quarto quadrante corresponde a um setor hiperbólico no quarto quadrante, porém agora na origem. Já o setor hiperbólico do terceiro quadrante corresponde a um setor hiperbólico no segundo quadrante com orientação trocada. Juntando essa análise com as duas selas que temos no campo, obtemos o retrato de fase qualitativo do sétimo campo na Figura 3.1.1.

Devemos fazer um Blow Down par para obtermos o retrato de fase qualitativo do sexto campo. Para fazer o estudo no restante da seção, nos utilizaremos do Teorema 1.5.4. As

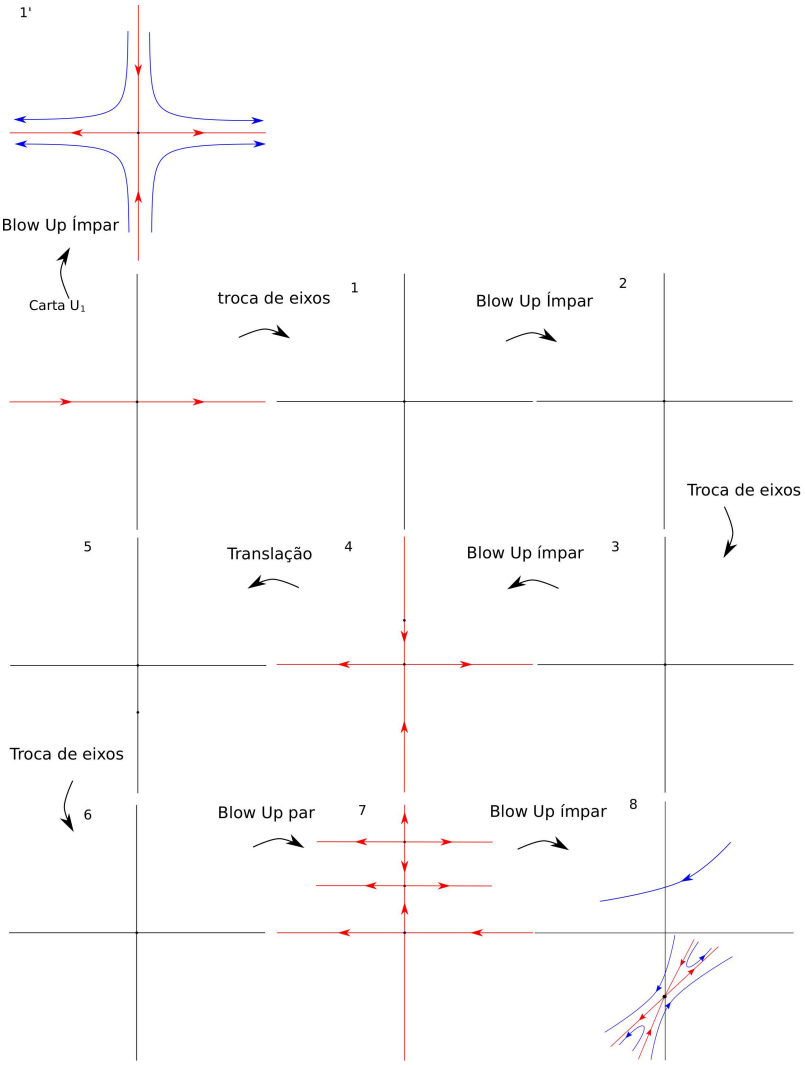



Figura 3.2: Esboço das transformações feitas.

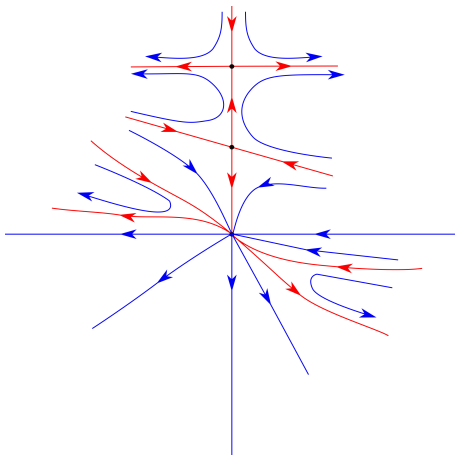


Figura 3.3: Comportamento topológico do sétimo campo.

órbitas do primeiro quadrante tendendo a origem, junto com o primeiro setor hiperbólico formam um setor parabólico após o Blow Down. Os dois seguintes setores hiperbólicos formam um único setor hiperbólico no primeiro quadrante. O último setor hiperbólico nos da a informação de que não existem mais órbitas tendendo a origem chegando pelo primeiro quadrante. Os setores do quarto quadrante são preservados, visto que as órbitas as quais existe uma mudança de comportamento tendendo a origem são preservadas. Temos no terceiro quadrante apenas órbitas saindo da origem, sem nenhum outro tipo de comportamento próximo ao eixo $y$. Tal comportamento é preservado, lembrando também que o terceiro quadrante é levado no segundo quadrante. Já para o segundo quadrante, observemos que as órbitas em vermelho delimitam as mudanças de comportamento. Tais órbitas são levadas para a origem, porém agora no segundo quadrante. Não existe nenhuma outra órbita que delimita alguma mudança de comportamento topológico próximo ao eixo $y$ no segundo quadrante. Assim temos dois setores hiperbólicos e um setor parabólico no terceiro quadrante do sétimo campo. A orientação das órbitas é preservada, pois fizemos um Blow Down de ordem par. O comportamento topológico do sexto campo é retratado pela Figura 3.1.1.

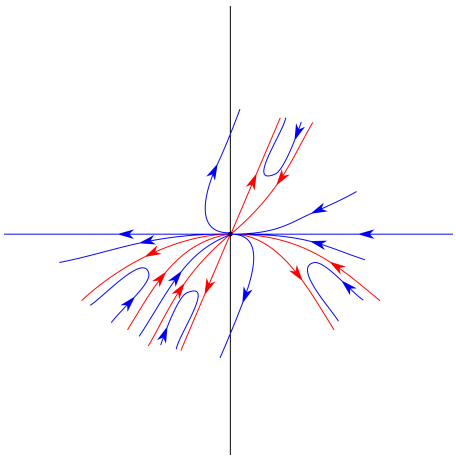


Figura 3.4: Esboço do sexto campo.

O próximo passo é apenas uma troca de eixos. Ver Figura 3.1.1.

A seguinte transformação é a translação da origem para o ponto $(0, 1)$, com a sela que tínhamos na origem. Ver Figura 3.1.1

Agora devemos fazer um Blow Down ímpar. No primeiro quadrante do quarto campo,

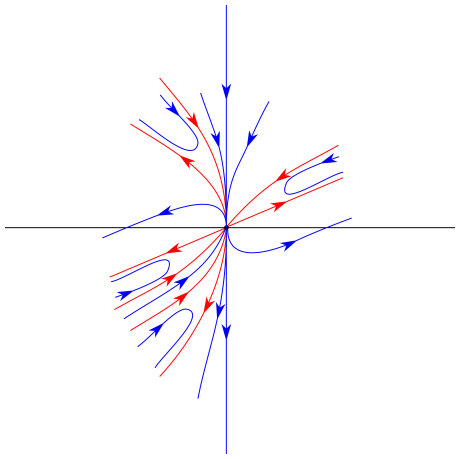


Figura 3.5: Esboço do quinto campo.

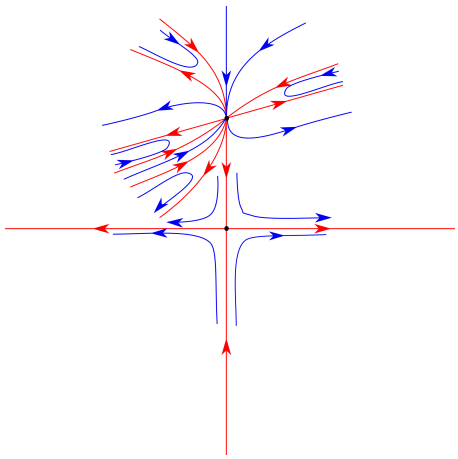


Figura 3.6: Esboço do quarto campo.

existem duas mudanças de comportamento. As órbitas saindo do ponto $(0, 1)$ correspondem a um setor parabólico na origem no quarto campo. Os outros dois setores: parabólico e hiperbólico no ponto $(0, 1)$ são preservados. A informação que obtemos no quarto quadrante, é que nenhuma órbita que passa pelo quarto quadrante tende a origem pelo quarto quadrante. Já para o terceiro quadrante, o estudo é análogo, porém lembramos que o quarto quadrante é levado no segundo quadrante, e a orientação é trocada, pois fizemos um Blow Down ímpar. Já no segundo quadrante, existem seis órbitas que delimitam mudanças de comportamento da singularidade no ponto $(0, 1)$. Tais órbitas correspondem a órbitas tendendo a origem, com a orientação trocada e no terceiro quadrante. Assim, os setores hiperbólicos e parabólicos dessa singularidade são preservados, temos um retrato topológico do terceiro campo na Figura 3.1.1.

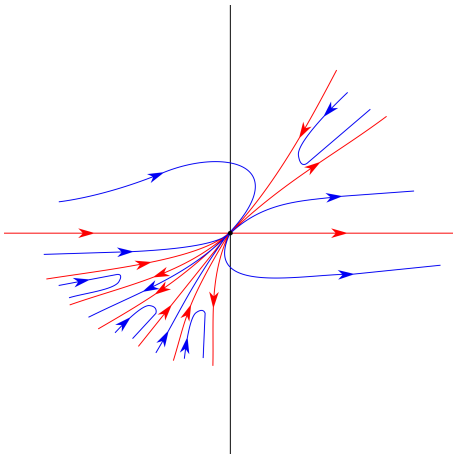


Figura 3.7: Esboço do terceiro campo.

A Figura 3.1.1 nos dá o retrato de fase do segundo campo após a troca de eixos do terceiro campo.

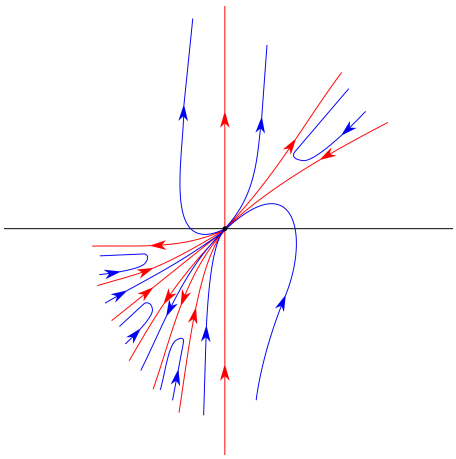


Figura 3.8: Esboço do segundo campo.

Devemos fazer um Blow Down ímpar para obtermos um retrato de fase do segundo campo. Já sabemos que o eixo $y$ é invariante e aponta de baixo para cima. No segundo campo, no semiplano no qual $x > 0$, temos duas órbitas que delimitam mudanças de comportamento. Tais órbitas são preservadas quando fazemos o Blow Down. Assim, todos os setores também são preservados. O comportamento do campo semiplano o qual $x < 0$ também é preservado, porém o segundo e terceiro quadrantes são trocados. Além disso, como fizemos um Blow Down ímpar, a orientação das órbitas é trocada. Na Figura 3.1.1 temos o comportamento topológico do primeiro campo.

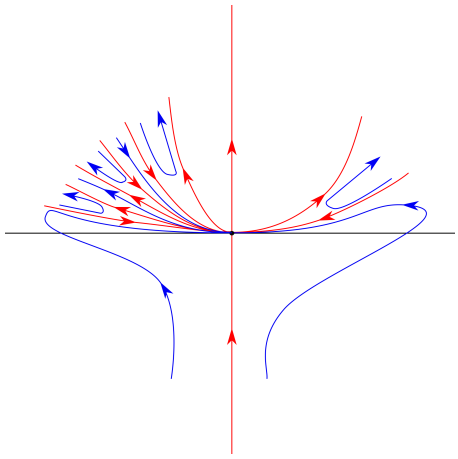


Figura 3.9: Esboço do primeiro campo.

Agora, com uma troca de eixos do primeiro campo, obtemos o retrato de fase do campo na carta $U_1$. Observemos que as órbitas próximas à origem no segundo e terceiro quadrante, com exceção do eixo $x$, cruzam o eixo $y$. Como nenhum valor no intervalo $(\pi/2, 3\pi/2)$ é direção característica e o campo ao longo do eixo $y$ aponta da direita para a esquerda, com exceção de $\pi$, segue que uma órbita tendendo a origem que passa pelo segundo ou terceiro quadrante cruza o eixo $y$.

Segue um esboço da origem do campo na carta $U_1$ na figura 3.1.1 a seguir:

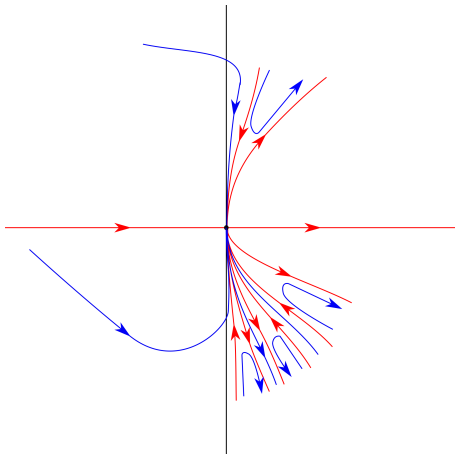


Figura 3.10: Comportamento qualitativo da singularidade do campo $U_1$.

### 3.1.2 Estudo Qualitativo da Carta $U_2$

Nesta subseção, faremos o estudo do campo na carta $U_2$ de um modo análogo ao que foi feito para a carta $U_1$. Na Figura 3.11 temos um esboço de todas as transformações que

faremos com as informações que utilizaremos para fazermos os Blow Downs.

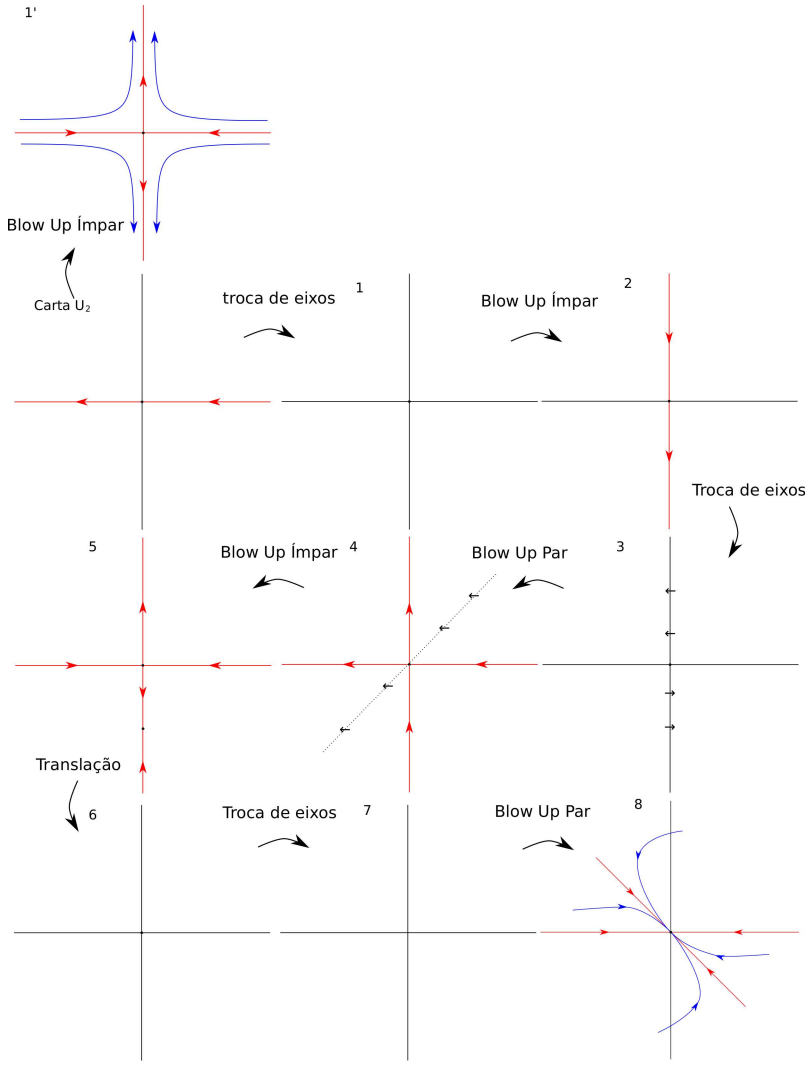



Figura 3.11: Esboço das transformações feitas.

O primeiro passo é utilizar a Proposição 1.6.2 para encontrarmos as singularidades do campo na carta $U_2$. Temos

$$G(u) = -10u^6.$$

Como $X$ não possui singularidades finitas, a origem é a única singularidade na carta $U_2$. Obtemos a expressão do campo na carta $U_2$ através da Equação (1.6.2):

$$x' = -10\,x^6 + x^5y^2 - 21\,x^4y^3 + (...),$$
$$y' = y(-6\,x^5 + 20\,x^4y^2 - 12\,x^3y^3 + (...)).$$

Observemos que o eixo $x$ é invariante e aponta da direita para a esquerda e a origem

é uma singularidade linearmente zero. Como a origem é uma singularidade linearmente zero, é necessário fazermos um Blow Up. Para isso, precisamos calcular o polinômio característico através da Equação (1.5.4), calculando obtemos:

$$\mathcal{F}(u, v) = 4\, u^6 v.$$

Como 0 e $\pi/2$ são direções características, faremos um Blow Up em cada direção. Aplicando o Blow Up diretamente, temos um Blow Up de ordem 5 ímpar, com expressão dada pela Equação (1.5.3):

$$\begin{aligned} x' &= x\left(-10 + 32\, xy^2 + (...)\right), \\ y' &= y\left(4 - 12\, xy^2 + (...)\right). \end{aligned}$$

É de cálculo direto que a origem é a única singularidade do campo ao longo do eixo $y$ e que ambos os eixos são invariantes. A parte linear do campo na origem é da forma:

$$\begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Logo a origem é uma singularidade hiperbólica do tipo sela, em que o eixo $x$ é atrator e o eixo $y$ é repulsor. Assim, utilizando a Proposição 1.5.4 e sabendo que temos um Blow Up ímpar, segue que o eixo $x$ do nosso campo original é invariante, aponta da direita para a esquerda e o campo não possuí mais nenhuma órbita atraida ou repelida pela origem com direção 0 ou $\pi$.

Voltando ao campo original, faremos agora uma troca de eixos e um novo Blow Up. Agora temos um Blow Up de ordem 5 ímpar e o campo possui a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} x' &= x\left(3x^3 - 6x^2y + x^4 - 10x^3y + 21x^2y^2 - 12xy^3 + (...)\right), \\ y' &= -x^3 - 6x^2y^2 + 3x^3y + (...). \end{aligned}$$

A origem é a única singularidade ao longo do eixo $y$ e possui parte linear

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo a origem é uma singularidade linearmente nula, então outro Blow Up é necessário. Calculando o polinômio característico obtemos:

$$\mathcal{F}(u) = -u^4.$$

Como 0 e $\pi$ são as únicas direções características, devemos fazer uma troca de eixos, e em seguida, um Blow Up.

Após a troca de eixos, calculando a componente horizontal do campo ao longo do eixo $y$, descobrimos que o campo cruza o eixo $y$ da direita para a esquerda no semiplano superior, e da esquerda para a direita no semiplano inferior.

Aplicando o Blow Up, o campo possui a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} x' &= x\left(-4x^3 - 9x^2y - 6xy^2 - y^3 + 12x^3y + 14x^2y^2 + 3xy^3 + (...)\right), \\ y' &= y\left(-2x^3 - 3x^2y + y^3 + 8x^3y + 7x^2y^2 + (...)\right). \end{aligned}$$

O Blow Up feito foi de ordem 2, par. É de cáculo direto que ambos os eixos são invariantes, o campo ao longo do eixo $y$ aponta de baixo para cima, e ao longo do eixo $x$ aponta da direita para a esquerda e que a origem é a única singularidade ao longo do eixo $y$ e possui parte linear identicamente nula:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Precisaremos de uma informação extra quando formos fazer os Blow Downs: O campo cruza a reta $x = y$ da direita para a esquerda em uma vizinhança da origem. Podemos verificar tal fato mostrando que o produto interno entre o campo e o vetor $(1, -1)$ que é ortogonal a reta $x = y$ é negativo próximo a origem. Calculando, obtemos:

$$< X(v, v), (1, -1) >= v^4(2v^4 - 5v^3 + 14v - 16),$$

que é menor que 0 sempre que $v \neq 0$ e $|v| < 1$ como queríamos. Como a origem é uma singularidade linearmente nula, devemos fazer outro Blow Up. Calculando o polinômio

característico, obtemos:

$$\mathcal{F}(u,v) = 2uv(u+v)^3$$

Assim, como 0 e $\pi/2$ são direções características, devemos fazer um Blow Up em cada direção. Vamos primeiramente trocar de eixos e estudar a singularidade na origem para obtermos o comportamento das órbitas chegando com direção $\pi/2$ e depois faremos um Blow Up diretamente. Fazendo a mudança de variáveis, temos um Blow Up de ordem 3, ímpar, e obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} x' &= x\left(1 - 3\,y^2 + (...)\right) \\ y' &= y\left(-2 - 6y + (...)\right). \end{aligned}$$

Calculando a parte linear da singularidade na origem, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Assim, a origem é uma singularidade hiperbólica do tipo sela em que o eixo $x$ é invariante e repulsor, e o eixo $y$ é invariante e atrator.

Voltando ao nosso campo antes de fazer a ultima troca de eixos, façamos diretamente um Blow Up para entender o comportamento do campo nas outras direções. Novamente temos um Blow Up de ordem 3, ímpar, e o campo possui a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} x' &= x\left(-4 - 9y + (...)\right) \\ y' &= y\left(2 + 6y + (...)\right)). \end{aligned}$$

A origem é uma singularidade hiperbólica do tipo sela com parte linear

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Concluímos que ambos os eixos são invariantes, o eixo $x$ é atrator, e o eixo $y$ é repulsor. Esse campo possui mais uma singularidade ao longo do eixo $y$ no ponto $(0,-1)$.

Calculando a parte linear do campo nesse ponto, obtemos

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Isto é, a singularidade é linearmente nula. Para estudar essa singularidade, façamos uma translação do ponto $(0,-1)$ para a origem. Calculando o polinômio característico obtemos:

$$\mathcal{F}(u,v) = 0.$$

Assim temos um ponto dicrítico. Calculando o polinômio $W$, obtemos:

$$W(u,v) = u.$$

Logo precisamos fazer uma troca de eixos, pois $\pi/2$ e $3\pi/2$ são as únicas direções características, e em seguida um Blow Up. Temos um Blow Up par de ordem 2 com a seguinte expressão:

$$x' = -2x - y - xy + 2x^2 + (...)$$
$$y' = -y - 6y^2 - 3xy + (...).$$

O sistema possui apenas uma singularidade ao longo do eixo $y$. Essa singularidade se encontra na origem e possui parte linear

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Os autovalores dessa matriz são $-2$ e $-1$ e autovetores associados $(1,0)$ e $(-1,1)$, portanto a singularidade é um nó atrator. Calculando a componente horizontal do campo ao longo do eixo $y$, obtemos que as órbitas desse campo cruzam o eixo $y$ da direita para a esquerda no semiplano superior, e da esquerda para a direita no semiplano inferior. A seguinte figura ilustra o comportamento do campo:

Devemos voltar ao campo original tendo em vista as transformações feitas ilustradas pela Figura 3.11. Observemos que toda semi-órbita no primeiro quadrante suficientemente próxima ao eixo $y$ tende ao eixo $y$. Como consequência da Proposição 1.5.7, tais semi-

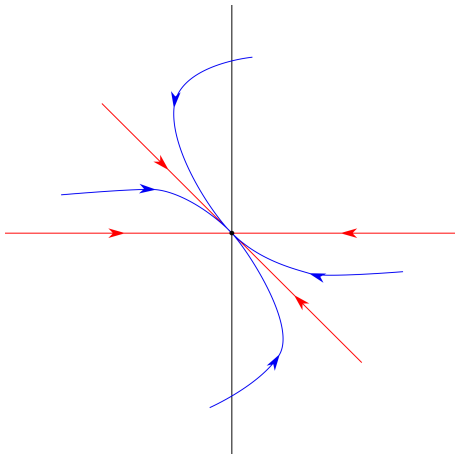


Figura 3.12: Esboço do campo próximo a singularidade após último Blow Up.

órbitas correspondem a órbitas no primeiro quadrante tendendo a origem com diferentes inclinações formando um setor parabólico. Observemos que no quarto quadrante, o setor parabólico entre as duas órbitas em vermelho também é levado em um setor parabólico no quarto quadrante. Já as semi-órbitas saindo do eixo $y$ tendendo a origem formam um setor elíptico. O estudo do segundo e terceiro quadrante é análogo ao estudo do quarto e primeiro quadrantes, respectivamente. A diferença é que agora o segundo quadrante é trocado com o terceiro quadrante. Como fizemos um Blow Up par, a orientação é preservada. Com isso, na Figura 3.1.2 ilustramos o comportamento topológico do sétimo campo.

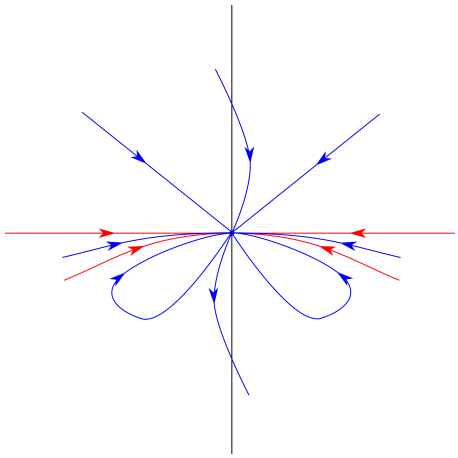


Figura 3.13: Esboço do sétimo campo.

O sexto campo é simplesmente a troca de eixos do primeiro campo e é ilustrado pela

Figura 3.1.2.

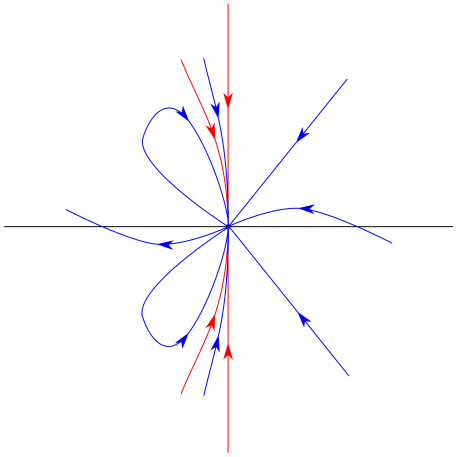


Figura 3.14: Esboço do sexto campo.

O quinto campo é a translação do sexto campo. A origem é levada no ponto $(0, -1)$. Na Figura 3.1.2 temos o retrato do quinto campo com a sela na origem a qual havíamos calculado.

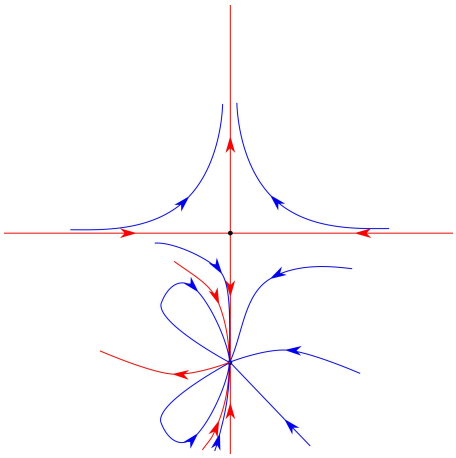


Figura 3.15: Esboço do quinto campo.

Para fazermos um retrato do quarto campo, faremos um Blow Down ímpar do quinto campo. Sabemos que ambos os eixos são invariantes: o campo no eixo $y$ aponta de baixo para cima, e no eixo $x$ aponta da direita para a esquerda. No primeiro quadrante do quinto campo, temos um setor hiperbólico. Tal setor é preservado, visto que todas as órbitas em uma vizinhança da origem cruzam a reta $x = y$ da direta para a esquerda. Analogamente, o mesmo ocorre no segundo quadrante, porém como temos um Blow Down

ímpar, o segundo quadrante é levado no terceiro quadrante e a orientação é trocada. Como todas as órbitas do quarto quadrante suficientemente próximas ao ponto $(0, -1)$ tendem a singularidade, tais órbitas correspondem a órbitas tendendo a origem do quarto campo. Assim segue pelo Teorema 1.5.4 que o quarto quadrante forma um setor parabólico atrator. Ambos os setores elípticos do terceiro quadrante coorespondem, a setores elípticos no segundo quadrante, porém com a orientação trocada. Na Figura 3.1.2 temos o retrato do quarto campo.

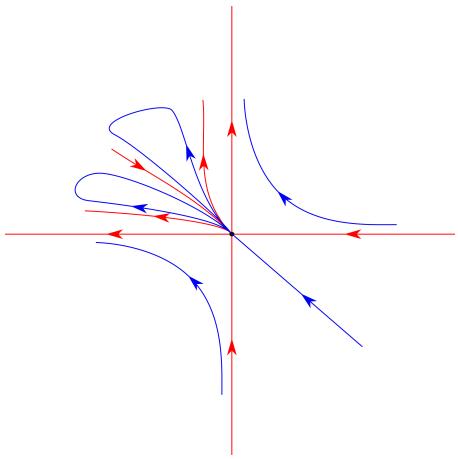


Figura 3.16: Esboço do quarto campo.

Agora, devemos fazer um Blow Down par. Sabemos que o eixo $x$ é invariante e aponta da direita para a esquerda. Observemos que nenhuma órbita do primeiro quadrante do quarto campo tende a origem. Como o terceiro campo aponta da direita para a esquerda ao longo do eixo $y$ no semiplano superior, as órbitas próximas a origem no primeiro quadrante deverão cruzar o eixo $y$. Já no quarto quadrante do quarto campo, todas as órbitas suficientemente próximas da origem tendem a origem. Assim, pelo Teorema 1.5.4, toda órbita do terceiro campo no quarto quadrante suficientemente próxima da origem também tende a origem. Estudando o comportamento do segundo quadrante do quarto campo, temos que os setores elípticos são preservados e correspondem a setores elípticos no segundo quadrante do terceiro campo. Já para o setor parabólico delimitado pelo eixo $y$ há uma mudança de comportamento. Uma órbita próxima ao eixo $y$ no segundo quadrante corresponde a uma órbita próxima ao eixo $y$ no terceiro quadrante após o Blow Down, porém ao longo do eixo $y$ no semiplano inferior o campo aponta da esquerda para

a direita. Assim, existe uma vizinhança da origem a qual toda órbita sai do terceiro quadrante e vai para o segundo quadrante. Porém, já vimos que próximo a origem no quarto quadrante, toda órbita tende a origem. Logo formamos um setor elíptico. O comportamento do terceiro campo é retratado na Figura 3.1.2.

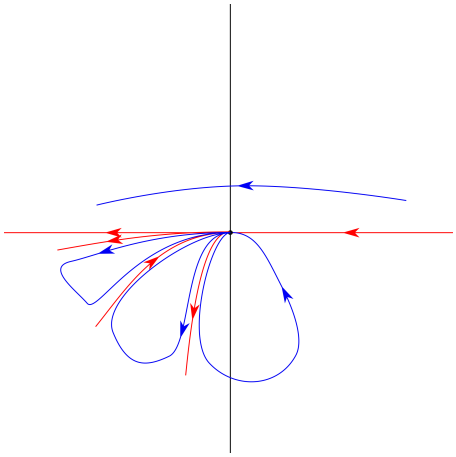


Figura 3.17: Esboço do terceiro campo.

O segundo campo é simplesmente uma troca de eixos do primeiro campo e pode ser visto na Figura 3.1.2.

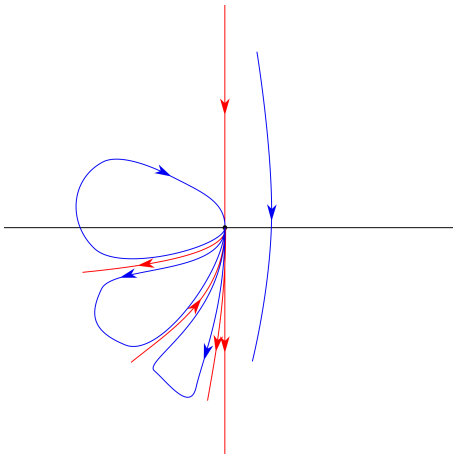


Figura 3.18: Esboço do segundo campo.

Devemos agora fazer um Blow Down ímpar. Já sabemos que o eixo $y$ é invariante e aponta de cima para baixo, assim o setor hiperbólico formado pelo primeiro e quarto quadrantes é mantido. Os setores elípticos do segundo e terceiro quadrante também são preservados, porém os quadrantes são invertidos e a orientação é trocada, pois temos um

Blow Down ímpar. Assim, na Figura 3.1.2 temos o retrato do campo após a primeira transformação.

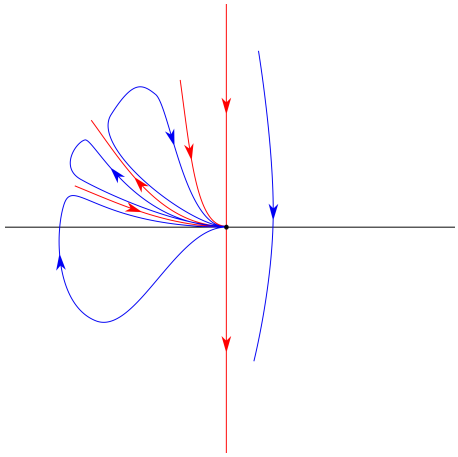


Figura 3.19: Esboço do primeiro campo.

Por fim, devemos fazer uma simples troca de eixos para obtermos o comportamento topológico do campo na carta $U_2$. Tal comportamento é ilustrado na Figura 3.1.2.

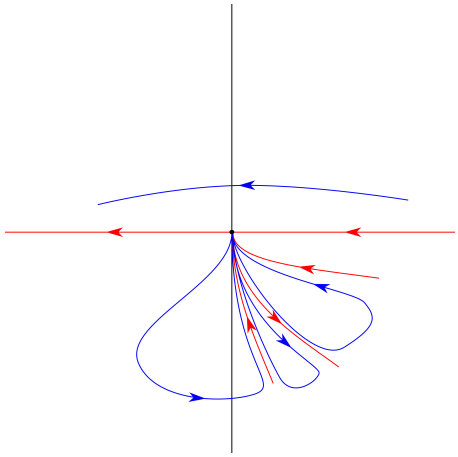


Figura 3.20: Comportamento topológico do campo na carta $U_2$.

Com o comportamento do campo nas cartas $U_1$ e $U_2$ podemos fazer parcialmente um retrato de fase do campo no disco de Poincaré, veja Figura 3.1.2. Para entendermos o comportamento global do campo, é necessário fazermos um estudo da parte finita, e é o que faremos na próxima seção.

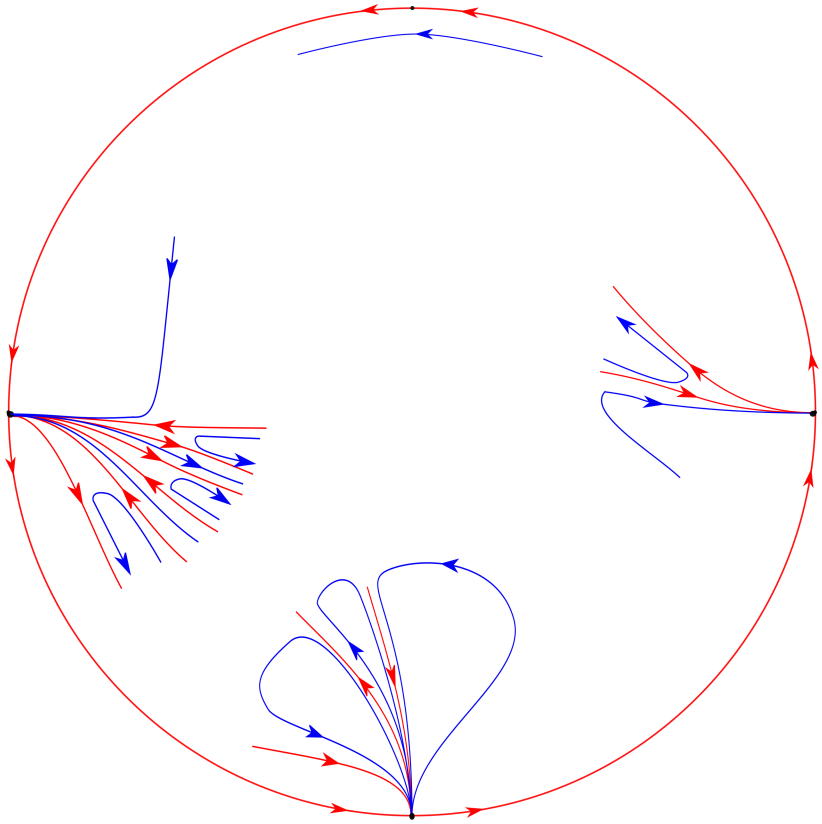


Figura 3.21: Comportamento topológico infinito do campo no disco de Poincaré.

## 3.2 Parte finita

Nesta seção calcularemos a quantidade de componentes conexas e encontraremos parametrizações de cada nível de $p$. Mostraremos também, que com exceção de uma componente conexa dos níveis $-1$ e $0$ de $p$ correspondem as fronteiras dos setores hiperbólicos que encontramos na carta no estudo infinito da singularidade na carta $U_1$.

Calculemos a quantidade de componentes conexas de cada nível de $p$. Uma maneira de se fazer esse cálculo é combinar o Corolário 2.1.6 com a Observação 6 considerando os 5 casos seguintes:

1) $c < -1$,

2) $c = -1$,

3) $-1 < c < 0$,

4) $c = 0$,

5) $c > 0$.

**Lema 3.2.1.** *Sejam $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ e $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F = (p, q)$ como na Observação 6. Para todo $c \in \mathbb{R}$ e todo intervalo de curva $I = \{c\} \times (a, b)$ tal que $\overline{I}$ não intersecta $\beta(\mathbb{R})$, a imagem inversa de $I$ pela aplicação $F$ é formada por dois subintervalos limitados de diferentes componentes conexas de $p^{-1}(c)$.*

*Demonstração.* □

Caso 1): Afirmamos que $p^{-1}(c)$ possui duas componentes conexas: Temos $p^{-1}(c) = F^{-1}(\{c\} \times \mathbb{R})$. Pelo Corolário 2.1.6 segue que dada uma componente conexa $\theta$ de $p^{-1}(c)$, que é uma solução maximal de $H_p$, que $q$ é crescente ao longo de $\theta$. Com isso segue que a imagem de $\theta$ por $F$ é igual a $\{c\} \times \mathbb{R}$. Segue do Lema 3.2.1 que $F^{-1}(\{c\} \times \mathbb{R})$ corresponde a duas componentes conexas de $p^{-1}(c)$.

Caso 2): Afirmamos que $p^{-1}(-1)$ possui quatro componentes conexas: Segue do Corolário 2.1.6, que dada uma componente conexa $\theta$ de $p^{-1}(c)$, que a imagem de $\theta$ por $F$ é igual a $-1 \times (-\infty, -163/4)$ ou $-1 \times (-163/4, \infty)$. Por outro lado, segue do Lema 3.2.1 que cada um desses intervalos correspondem a duas componentes conexas de $p^{-1}(-1)$. Portanto $p^{-1}(-1)$ possui quatro componentes conexas.

Caso 3): Afirmamos que $p^{-1}(c)$ possui quatro componentes conexas: Sabemos que $\#\{\{c\} \times \mathbb{R} \cap \beta(\mathbb{R})\} = 2$. Suponhamos que sejam $(c, a)$ e $(c, b) \in \{\{c\} \times \mathbb{R} \cap \beta(\mathbb{R})\}$ com $a < b$. Neste caso, existem seis possibilidades, a priori, para a imagem de uma componente conexa de $p^{-1}(c)$ por $F$. São elas: $\{c\} \times \mathbb{R}$, $\{c\} \times (-\infty, a)$, $\{c\} \times (-\infty, b)$,$\{c\} \times (a, b)$, $\{c\} \times (a, \infty)$, $\{c\} \times (b, \infty)$. Porém, elas não podem ocorrer simultaneamente, pois temos $\#\{F^{-1}(c, a)\} = \#\{F^{-1}(c, b)\} = 1$ e $\#\{F^{-1}(c, d)\} = 2$ se $c \neq a$ ou $b$. Assim, suponhamos que exista uma componente conexa de $p^{-1}(c)$ levada em $\{c\} \times \mathbb{R}$. Nesse caso, a imagem pela aplicação $F$ de nenhuma outra componente conexa de $p^{-1}(c)$ pode intersectar $\beta(\mathbb{R})$. Entretanto, como $\#\{F^{-1}(c, d)\} = 2$, para $d \neq a$ ou $b$, existe uma componente conexa de $p^{-1}(c)$ cuja imagem pela aplicação $F$ passa por $(c, d)$. Nesse caso, a única opção é que $p^{-1}(c)$ possui 4 componentes conexas, e elas são levadas em $\{c\} \times \mathbb{R}$, $\{c\} \times (-\infty, a)$, $\{c\} \times (b, \infty)$ e $\{c\} \times (a, b)$. Suponhamos agora, que $\{c\} \times \mathbb{R})$ não seja a imagem de uma componente conexa de $p^{-1}(c)$. Nesse caso, necessariamente $\{c\} \times (-\infty, b)$ e $\{c\} \times (a, \infty)$

são imagens pela aplicação $F$ de exatamente uma componente conexa de $p^{-1}(c)$, pois são os únicos intervalos que intersectam $(c,a)$ e $(c,b)$, respectivamente, e $\#\{F^{-1}(c,a)\} = \#\{F^{-1}(c,b)\} = 1$. Nesse caso, como $\#\{F^{-1}(c,d)\} = 2$ para $d \neq a$ ou $b$, só nos resta a opção que $p^{-1}(c)$ possui 4 componentes conexas, e elas são levadas pela aplicação $F$ em $\{c\}\times(-\infty,a)$, $\{c\}\times(-\infty,b)$, $\{c\}\times(a,\infty)$, $\{c\}\times(b,\infty)$. Portanto segue que $p^{-1}(c)$ possui 4 componentes conexas como queríamos.

Caso 4): Afirmamos que $p^{-1}(0)$ possui cinco componentes conexas: Como no Caso 3), sabemos que $\#\{\{0\}\times\mathbb{R}\cap\beta(\mathbb{R})\} = 2$. Sejam $(0,0)$ e $(0,a) \in \{\{0\}\times\mathbb{R}\cap\beta(\mathbb{R})\}$. Novamente, existem seis possibilidades, a priori, para a imagem de uma componente conexa de $p^{-1}(0)$ por $F$. São elas: $\{0\}\times\mathbb{R}$, $\{0\}\times(-\infty,0)$, $\{0\}\times(-\infty,a)$, $\{0\}\times(0,a)$, $\{0\}\times(0,\infty)$, $\{0\}\times(a,\infty)$. De fato, $\{0\}\times\mathbb{R}$ e $\{0\}\times(-\infty,a)$, não são possibilidades, pois $\#\{F^{-1}(0,0)\} = 0$. Nesse caso, é necessário que exatamente duas componentes conexas de $p^{-1}(0)$ sejam levadas em $\{0\}\times(-\infty,0)$, pois $\#\{F^{-1}(0,b)\} = 2$, para $b < 0$, exatamente uma componente conexa é levada em $\{0\}\times(0,\infty)$, pois $\#\{F^{-1}(0,a)\} = 1$. Assim, existem mais duas componentes conexas de $p^{-1}(0)$: Uma delas é levada em $\{0\}\times(0,a)$, e a outra em $\{0\}\times(a,\infty)$. Assim concluímos que $p^{-1}(0)$ possui cinco componentes conexas. Caso 5): Nesse caso $p^{-1}(c)$ possui 4 componentes conexas.

O Caso 5 é análogo ao Caso 3.

Na Figura 3.22, fazemos um esboço das curvas de níveis $-1$ e 0 de $p$ no disco de Poincaré: As curvas em vermelho e preto correspondem aos níveis $-1$ e 0, respectivamente.

Observemos que o polinômio $p$ se fatora da seguinte forma:

$$p = \left(x^2y - x + 1\right)\left(x^4y^3 - 3\,x^3y^2 + 2\,x^2y^2 + 3\,x^2y - 2\,xy - x + y\right), \tag{3.2.1}$$

e no nível $-1$:

$$p + 1 = \left(x^2y^2 - 2\,xy + y + 1\right)\left(x^4y^2 - 2\,x^3y + 2\,x^2y + x^2 - x + 1\right). \tag{3.2.2}$$

Com essas equações e, utilizando a função parametrization do programa Maple, obtivemos uma parametrização racional para as curvas $p = 0$ e $p = -1$. A partir dessas

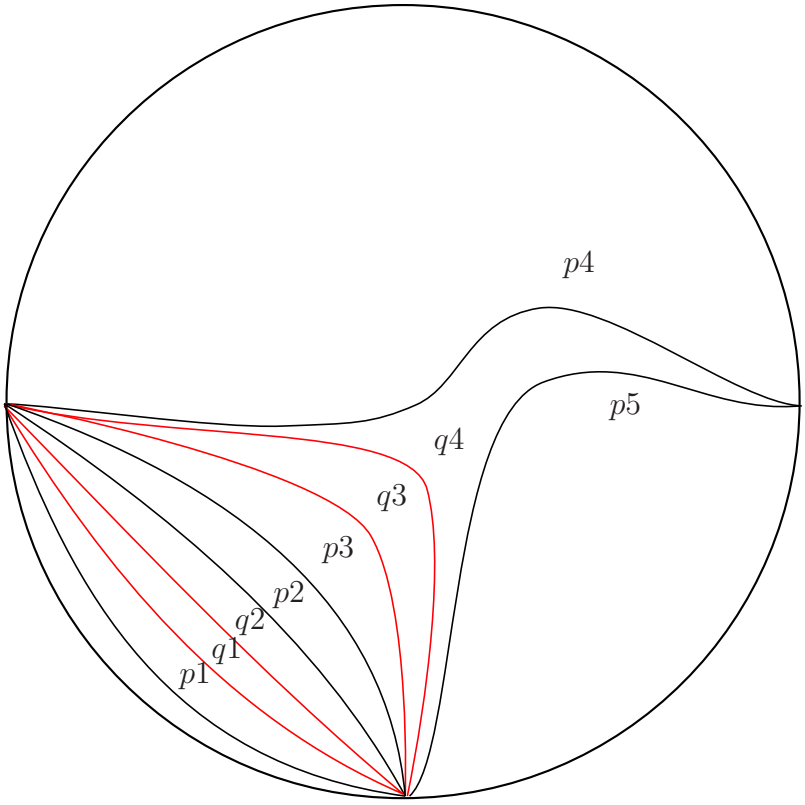



Figura 3.22: Curvas de nível $-1$ e $0$ de $p$.

parametrizações, obtivemos uma parametrização para cada componente conexa de $p$ nos níveis $-1$ e $0$. Chamaremos de $p1, ..., p5$ as componentes do nível $0$, e $q1, ..., q4$ as componentes do nível $-1$:

$$p1 = \left\{ \left( \frac{(s-1)^2}{s^2(s-2)}, \frac{s^2(s-2)}{(s-1)^4} \right) \in \mathbb{R}^2 \mid s \in (0,1) \right\},$$

$$p2 = \left\{ \left( \frac{(s-1)^2}{s^2(s-2)}, \frac{s^2(s-2)}{(s-1)^4} \right) \in \mathbb{R}^2 \mid s \in (1,2) \right\},$$

$$p3 = \left\{ \left( s, \frac{s-1}{s^2} \right) \in \mathbb{R}^2 \mid s \in (-\infty, 0) \right\},$$

$$p4 = \{(0,0)\} \cup \left\{ \left( \frac{(s-1)^2}{s^2(s-2)}, \frac{s^2(s-2)}{(s-1)^4} \right) \in \mathbb{R}^2 \mid s \in \mathbb{R} \setminus (0,2) \right\},$$

$$p5 = \left\{ \left( s, \frac{s-1}{s^2} \right) \in \mathbb{R}^2 \mid s \in (0, \infty) \right\}.$$

E para o nível $-1$:

$$q1 = \overline{\left\{ \left( -\frac{s^2}{(4\,s+1)^2}, -\frac{(21\,s^2+9\,s+1)\,(4\,s+1)^2}{s^4} \right) \in \mathbb{R}^2 \mid s \in \mathbb{R} \setminus \left( -\frac{1}{4}, 0 \right) \right\}},$$

$$q2 = \left\{ \left( -12, -\frac{1}{9} \right) \right\} \cup \left\{ \left( -\frac{(3\,s+1)\,(4\,s+1)}{s^2}, -\frac{s^2}{(3\,s+1)^2} \right) \in \mathbb{R}^2 \mid s \in \mathbb{R} \setminus \left( -\frac{1}{3}, 0 \right) \right\},$$

$$q3 = \left\{ \left( -\frac{s^2}{(4\,s+1)^2}, -\frac{(21\,s^2+9\,s+1)\,(4\,s+1)^2}{s^4} \right) \in \mathbb{R}^2 \mid s \in \left( -\frac{1}{4}, 0 \right) \right\},$$

$$q4 = \left\{ \left( -\frac{(3\,s+1)\,(4\,s+1)}{s^2}, -\frac{s^2}{(3\,s+1)^2} \right) \in \mathbb{R}^2 \mid s \in \left( -\frac{1}{3}, 0 \right) \right\}.$$

**Proposição 3.2.2.** *Cada componente conexa dos níveis $-1$ e $0$, com exceção de $p5$, intersecta o conjunto $C = \{(-1, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$ em exatamente um ponto.*

*Demonstração.* É de cálculo imediato utilizando a parametrização das componentes conexas dos níveis. □

A partir da Proposição 3.2.2 induz-se naturalmente uma relação de ordem entre as componentes conexas dos níveis $-1$ e $0$ de $p$ como veremos na seguinte proposição:

**Proposição 3.2.3.** *Seja $A$ o conjunto das componentes conexas dos níveis $-1$ e $0$ de $p$. Sejam $x, y \in A \setminus \{p5\}$. Denotemos por $x'$ a componente vertical do único elemento de $x \cap C$. Então a relação $x \prec y$ se e somente se $x' < y'$ define uma relação de ordem parcial estrita em $A \setminus \{p5\}$.*

*Demonstração.* Sejam $x, y, z \in A \setminus \{p5\}$. Temos $x \not\prec x$, pois $x' \not< x'$, logo $\prec$ é irreflexiva. Se $x \prec y$ e $y \prec z$, então $x' < y'$ e $y' < z'$, logo $x' < z'$ e assim $x \prec z$, logo $\prec$ é transitiva. Se $x \prec y$, então $x' < y'$, logo $y' \not< x'$, e então $y \not\prec x$. Logo $\prec$ é assimétrica. Portanto $\prec$ é uma relação de ordem parcial estrita em $A \setminus \{p5\}$. □

A partir da parametrização das componentes, é de calculo imediato que $p1 \prec q1 \prec q2 \prec p2 \prec p3 \prec q3 \prec q4 \prec p4$.

Observemos que duas componentes conexas de níveis de $p$ dividem o plano em três componentes conexas. Isso ocorre porque $p$ é uma submersão. Tal fato não é verdadeiro em geral. Chamaremos a componente conexa cuja fronteira é a união dessas duas componentes conexas de região entre as componentes conexas.

Observemos que a componente $p5$ está definida apenas no quarto quadrante e que não está contida em nenhuma das regiões delimitadas por componentes de $A \setminus \{p5, p4\}$.

No artigo [10], Campbell nos dá uma parametrização de um nível $c \neq -1$ ou 0 arbitrário de $p$:

$$x(s) = \frac{(c-s)(s+1)}{(c-2s-s^2)^2}, \tag{3.2.3}$$

$$y(s) = \frac{(c-2s-s^2)^2(c-s-s^2)}{(c-s)^2}. \tag{3.2.4}$$

Assim fixando $c < -1$, temos a parametrização das duas componentes conexas de $p^{-1}(c)$:

$$\theta_1(c) = \{x(s), y(s) \mid s \in (-\infty, c)\}$$

$$\theta_2(c) = \{x(s), y(s) \mid s \in (c, \infty)\}$$

**Proposição 3.2.4.** *Seja $c < -1$, $\theta_1$ e $\theta_2$ as duas componentes conexas de $p^{-1}(c)$. Então $\theta_1$ está contida na região entre $q1$ e $q2$ e $\theta_2$ está contida na região entre $q3$ e $q4$.*

*Demonstração.* Observemos que qualquer componente conexa de $p^{-1}(c)$ está contida, por continuidade, em uma das regiões entre $q1$ e $q2$ e entre $q3$ e $q4$. Observemos também, que $\alpha(x, y) = x^2y^2 - 2xy + y + 1$ é negativa na região entre $q2$ e $q4$ e positiva nas demais regiões. Similarmente, $\beta(x, y) = x^4y^2 - 2\,x^3y + 2\,x^2y + x^2 - x + 1$ é negativa na região entre $q1$ e $q3$ e positiva nas demais regiões. Calculando $\alpha(x(s), y(s))$, obtemos

$$\frac{(-s^2 + c - 2\,s)^2}{c - s}.$$

Assim, $\alpha$ é positiva para $s < c$ e negativa para $s > c$, isto é, $\theta_2$ está contida na região

entre $q2$ e $q_4$ e $\theta_1$ não está. Calculando $\beta(x(s), y(s))$, obtemos

$$\frac{(c+1)(c-s)}{(-s^2+c-2s)^2}.$$

Assim, $\beta$ é positiva para $s > c$ e negativa quando $s < c$, isto é, $\theta_1$ está contida na região entre $q1$ e $q3$ e $\theta_2$ não está. Observemos que a região entre $q2$ e $q3$ está contida na região entre $q1$ e $q3$ e na região entre $q2$ e $q4$. Como $\theta_1$ não está contida na região entre $q2$ e $q4$, $\theta_1$ não está contida na região entre $q2$ e $q3$. Como $\theta_1$ está contida na região entre $q1$ e $q3$ e não está contida na região entre $q2$ e $q3$, necessariamente está contida na região entre $q1$ e $q2$ como queríamos. De maneira análoga mostramos que $\theta_2$ está na região entre $q3$ e $q4$. □

**Proposição 3.2.5.** *Seja $-1 < c < 0$, então exatamente uma componente conexa de $p^{-1}(c)$ está contida em cada uma das seguintes regiões: Entre $p1$ e $q1$, entre $q2$ e $p2$, entre $p3$ e $q3$ e entre $q4$, $p4$ e $p5$.*

*Demonstração.* Observemos que o interior de cada uma dessas 4 regiões não contém nenhuma componente conexa dos níveis $-1$ e $0$ de $p$. Mais ainda, segue do fato de $p$ ser contínua que em cada uma dessas regiões $p$ deverá assumir todos os valores entre $-1$ e $0$, isto é, $p^{-1}(c)$ contém pelo menos uma componente conexa em cada uma dessas regiões. Por outro lado, sabemos que $p^{-1}(c)$ possui 4 componentes conexas, portanto exatamente uma componente conexa de $p^{-1}(c)$ está contida em cada uma dessas regiões como queríamos. □

Para nos auxiliar na localização das componentes conexas de $p$ para $c > 0$, vamos precisar de mais algumas proposições.

**Proposição 3.2.6.** *A componente conexa $p5$ divide o plano em duas regiões: uma que contém todas as outras componentes conexas do nível $0$, e a outra que não contém nenhuma, que chamaremos de $C_5$. Mais ainda, $p$ é ilimitado superiormente na região $C_5$.*

*Demonstração.* Segue da Proposição 3.2.2 que a reta $f(t) = (-1, t)$ está contida em uma das componentes conexas a qual $p5$ divide o plano. Como $f$ intersecta todas as outras componentes do nível 0, segue que todas as componentes estão contidas nessa região,

e então na outra região não contém nenhuma como queríamos. Para mostrar que $p$ é ilimitado na região que não contém nenhuma componente de $p^{-1}(0)$, consideremos a reta $g(t) = (t, -t)$. É de cálculo direto, $p(g(t)) = 0$ possui exatamente duas soluções reais: uma para $t = 0$ e a outra para $t < 0$ suficientemente grande. Uma dessas soluções intersecciona $p4$ e a outra $p5$. Segue então, que $p(g(t))$ está contido na componente conexa a qual $p5$ divide o plano e não contém nenhuma outra componente conexa do nível 0 para todo $t$ suficientemente grande. Por outro lado, $p(g(t)) \to \infty$, quando $t \to \infty$ como queríamos. □

**Proposição 3.2.7.** *A componente conexa $p4$ divide o plano em duas regiões: uma que contém todas as outras componentes conexas do nível 0, e a outra que não contém nenhuma, que chamaremos de $C_4$. Mais ainda, $p$ é ilimitado superiormente em $C_4$.*

*Demonstração.* Segue do fato de que $p1 \prec p2 \prec p3 \prec p4$, que $p1$, $p2$ e $p3$ estão contidas em uma mesma componente conexa a qual $p4$ divide o plano. Resta mostrar que $p5$ está contida nessa mesma componente conexa. É de cálculo direto que $g(t) = (t, -1)$ intersecta $p5$ e $p3$, mas não intersecta $p4$, e portanto $p5$ está contido na mesma região que $p3$. $p$ é ilimitado superiormente na região que não contém nenhuma componente conexa do nível 0, pois $p(g(t))$ está contido nessa região para todo $t > 0$ e $p(g(t)) \to \infty$ quando $t \to \infty$. □

**Proposição 3.2.8.** *A componente conexa $p1$ divide o plano em duas regiões: uma que contém todas as outras componentes conexas do nível 0, e a outra que não contém nenhuma, que chamaremos de $C_3$. Mais ainda, $p$ é ilimitado superiormente em $C_3$.*

*Demonstração.* A demonstração é análoga a das proposições 3.2.6 e 3.2.7. □

**Proposição 3.2.9.** *$p$ é ilimitado superiormente na região entre $p2$ e $p3$.*

*Demonstração.* Fixemos $c > 0$. Observemos que $p3$ e $p5$ dividem o plano em 3 componentes conexas, em que $\alpha(x, y) = x^2y - x + 1$ é positivo na região entre $p3$ e $p5$, e negativo nas demais regiões. Temos

$$\alpha(x(-2 - \sqrt{1+c}), y(-2 - \sqrt{1+c}) = -\frac{c + 2 + \sqrt{c+1}}{1 + 2\sqrt{c+1}}.$$

Logo $(x(-2-\sqrt{1+c}), y(-2-\sqrt{1+c}))$ não pertence a região entre $p3$ e $p5$. Como $x(-2-\sqrt{1+c}) < 0$, segue que $(x(-2-\sqrt{1+c}), y(-2-\sqrt{1+c}))$ é um ponto da região cuja fronteira é $p3$. Seja agora $\beta(x,y) = x^4y^3 - 3\,x^3y^2 + 2\,x^2y^2 + 3\,x^2y - 2\,xy - x + y$. Temos que $\beta$ é negativa nas região entre $p2$ e $p4$ e na componente conexa cuja fronteira é $p1$. Temos

$$\beta(x(-2-\sqrt{1+c}), y(-2-\sqrt{1+c})) = -\frac{c\left(1+2\sqrt{c+1}\right)}{c+2+\sqrt{c+1}} < 0.$$

Logo $(x(-2-\sqrt{1+c}), y(-2-\sqrt{1+c}))$ é um ponto da região cuja fronteira é $p1$ ou da região entre $p2$ e $p4$. Avaliando numericamente, podemos mostrar que $(x(-2-\sqrt{1+c}), y(-2-\sqrt{1+c}))$ é um ponto da região entre $p2$ e $p4$. Segue do fato de que $p2 \prec p3 \prec p4$ que $(x(-2-\sqrt{1+c}), y(-2-\sqrt{1+c}))$ pertence a região entre $p2$ e $p3$. □

**Proposição 3.2.10.** *Dado $c > 0$, cada uma das regiões $C_3$, $C_4$, $C_5$ e a região entre $p2$ e $p3$ contém exatamente uma componente conexa de $p^{-1}(c)$.*

*Demonstração.* Pelas proposições 3.2.6, 3.2.7, 3.2.8 e 3.2.9, cada uma dessas regiões contém ao menos uma componente conexa de $p^{-1}(c)$. Por outro lado, sabemos $p^{-1}(c)$ possui 4 componentes conexas. Portanto cada uma dessas regiões contém exatamente uma componente conexa como queríamos. □

No restante da seção desenvolveremos o necessário para conectar o estudo das partes finita e infinita para fazermos o retrato global.

**Definição 3.2.11.** Sejam $h_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $h_0(x,y) = xy$ e

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0, 0 < x + y \leq 2\}$$

Dada $\Gamma$ uma folheação $C^0$ de $\mathbb{R}^2$, dizemos que $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ é uma *meia-componente de Reeb* (ou simplesmente, uma mcR) de $\Gamma$ se existe um homeomorfismo $T : B \to \mathcal{A}$ que conjuga topologicamente a folheação determinada pelas soluções de $H_{h_0}$ (o campo hamiltoniano de $h_0$) restrita a $B$ e a folheação $\Gamma$ restrita a $\mathcal{A}$, satisfazendo:

i) O segmento $\{(x,y) \in B \mid x + y = 2\}$ é levado por $T$ em um segmento que intersecta as folhas de $\Gamma$ transversalmente (a menos do ponto $T(1,1)$). Diremos que este é o *lado compacto* de $\mathcal{A}$.

ii) Os segmentos $\{(x, y) \in B \mid x = 0\}$ e $\{(x, y) \in B \mid y = 0\}$ são levados por $T$ em semiórbitas de $\Gamma$. Diremos que estes são os *lados não compactos* de $\mathcal{A}$. Veja Figura 3.2.

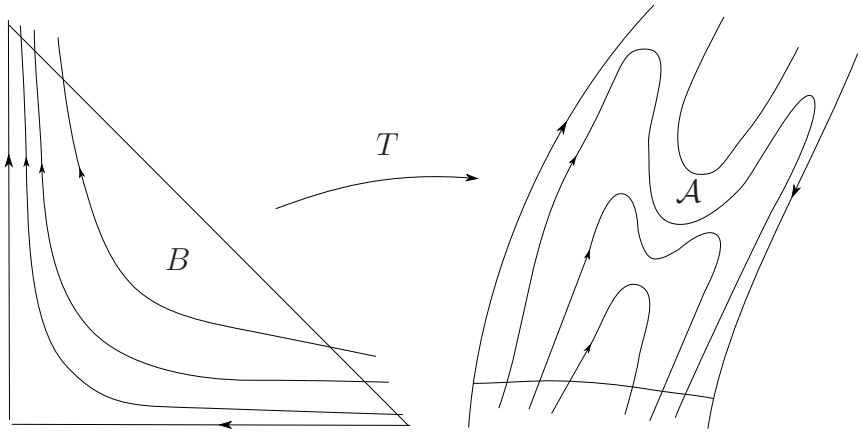



Figura 3.23: Definição de mcR.

**Observação 7.** Observemos que um campo vetorial $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ não-singular induz naturalmente uma folheação em $\mathbb{R}^2$. Neste caso, as folhas são as soluções maximais do campo $X$.

**Proposição 3.2.12.** *Seja $f \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ uma submersão e $H_f$ seu campo Hamiltoniano. Seja $\Gamma$ a folheação induzida pelo campo $H_f$. Se $\Gamma$ possui uma mcR $\mathcal{A}$, então os lados não compactos de $\mathcal{A}$ correspondem a partes de duas componentes conexas de um mesmo nível de $f$.*

*Demonstração.* Mostremos primeiramente que os lados não compactos de $\mathcal{A}$ estão contidos em um mesmo nível de $f$. Sejam $h_0$ e $T$ como na Definição 3.2.11, $g : [0, 1] \to B$ uma parametrização da transversal (a menos do ponto $(1, 1)$ por $B$ definida por $g(t) = (1 - t)(0, 1) + t(1, 0)$, e $\{x_n\}$, $x_n \in (0, 1)$ tal que $x_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Definamos a sequência $\{y_n\}$ por $y_n = 1 - x_n$. Assim definida, $y_n \in (0, 1)$ e $y_n \to 1$, $g(x_n)$ e $g(y_n)$ são pontos de uma mesma órbita de $H_{h_0}$. Logo $T(g(x_n))$ e $T(g(y_n))$ são pontos de uma mesma órbita de $H_f$, e então $f(T(g(x_n))) = f(T(g(x_n)))$. Como $f, T$ e $g$ são contínuas, aplicando o limite obtemos $f(T(0, 1)) = f(T(1, 0))$ com $T(0, 1)$ e $T(1, 0)$ pertencentes a

lados não compactos distintos. Como cada lado não compacto também é uma semiórbita de $H_f$, segue que os lados não compactos estão em um mesmo nível de $f$. Mostremos agora que cada lado não compacto está em componentes distintas de $f$. Suponhamos por contradição, que os lados não compactos estão contidos em uma mesma componente conexa de $f$. Seja $\gamma$ uma órbita que possui uma parte contida em $\mathcal{A}$. Se $\gamma$ intersecta o lado compacto de $\mathcal{A}$ em uma quantidade finita de pontos, então $\gamma^+$ é limitado. Logo, por consequência do Teorema 1.1.23, teríamos um ponto singular em $H_f$, uma contradição, pois $f$ é uma submersão. Suponhamos agora, que $\gamma$ intersecta o lado compacto em uma quantidade infinita de pontos. Por consequência da demonstração do Teorema 1.1.23, $\gamma$ deverá intersectar $T(g(t)|_{(0,1/2)})$ e $T(g(t)|_{(1/2,1)})$ monotonicamente, e então $T(1,1) \in \omega(\gamma)$ e $\gamma^+$ é limitado, ou $\alpha(\gamma)$ e $\gamma^-$ é limitado. Em qualquer um dos dois casos, segue novamente por consequência do Teorema 1.1.23 que $H_f$ possui um ponto singular, uma contradição. Portanto os lados não compactos de $\mathcal{A}$ correspondem a partes de duas componentes conexas de um mesmo nível de $f$ como queríamos demonstrar. □

**Proposição 3.2.13.** *Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma submersão tal que $f^{-1}(c)$ seja desconexo para algum $c \in \mathbb{R}$, $\Gamma$ a folheação induzida por $H_f$, $\gamma_1$ e $\gamma_2$ duas componentes conexas de $f^{-1}(c)$. Consideremos região entre $\gamma_1$ e $\gamma_2$ e $\lambda$ uma curva contida no fecho dessa região conectando $\gamma_1$ e $\gamma_2$. Então existe uma mcR de $\mathcal{F}(f)$ contida na região entre $\gamma_1$ e $\gamma_2$ cujo lado não compacto intersecta o início e o fim da curva $\lambda$.*

*Demonstração.* A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em [9]. □

**Proposição 3.2.14.** *Existe uma mcR de $H_p$ no primeiro quadrante, a qual os lados não compactos são composta por partes de $p4$ e $p5$.*

*Demonstração.* Observemos que $(0,0) \in p4$ e $(1,0) \in p5$. Consideremos $\lambda$ o segmento de reta que une esses dois pontos. É fácil ver que $\lambda$ está contida na região entre $q4$, $p4$ e $p5$. Tomando a parametrização $f : [0,1] \to \lambda$, $f(t) = (t,0)$ e compondo com $p$, é fácil verificar que o valor mínimo de $p|_\lambda$ é $-1/4$. Utilizando as equações (3.22), igualando $y(s)$ a zero, verificamos que dado $c \in (-1/4, 0)$, um nível intersecta $\lambda$ em dois pontos, e para $c = -1/4$ em exatamente um ponto. Mais ainda, um nível $-1 < c < -1/4$ nessa região,

somente possui pontos no terceiro ou quarto quadrantes. Assim, segue que existe uma mcR no primeiro quadrante delimitada por $p4$ e $p5$. □

**Proposição 3.2.15.** *O campo $H_p$ possui exatamente 4 mcR. As fronteiras dessas mcR são partes de $q1$ e $q2$, $p2$ e $p3$, $q3$ e $q4$, e $p4$ e $p5$.*

*Demonstração.* Pela Proposição 3.2.13, sabemos que existe uma *mcR* em cada uma dessas regiões. Pelas proposições 3.2.4, 3.2.10, existe exatamente uma componente de cada nível em cada uma das regiões entre $q1$ e $q2$, $p2$ e $p3$, e $q3$ e $q4$. Logo por consequência da Proposição 3.2.12, esses níveis necessariamente são as fronteiras de mcR. □

### 3.2.1 Retrato de fase Topológico Global do Campo $H_p$

Utilizando a Proposição 3.2.15 e o retrato qualitativo das cartas $U_1$ e $U_2$, criamos o esqueleto completo de separatrizes de $H_p$ no disco de Poincaré, como pode ser visto na Figura 3.2.1.

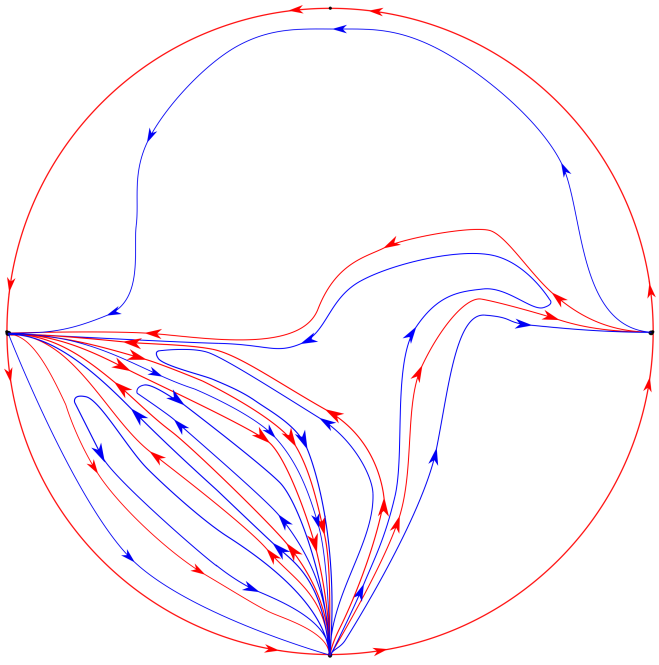


Figura 3.24: Esqueleto completo de separatrizes de $H_p$.

Assim, pelo Teorema 1.4.7, obtivemos um retrato de fase global topológico do campo $H_p$.

# Referências Bibliográficas


[1] M. J. Álvarez, A. Ferragut, X. Jarque, *A Survey on the Blow Up Technique*, International Journal of Bifurcation and Chaos, Volume 21, Issue 11, (2011).

[2] A. Andreev, *Investigation on the behaviour of the integral curves of a system of two differential equations in the neighborhood of a singular point*, Transactions of the American Mathematical Society, Providence, 8:187–207.

[3] A. A. Andronov, E. A. Leontovich, I. I. Gordon e A. G. Maier, *Qualitative theory of 2nd order dynamic systems*, J. Wiley & Sons. 1973.

[4] E. Artin, *Uber die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, Hamburg 5:100-115, 1927.

[5] H. Bass, E. H. Connell e D. Wright, *The Jacobian conjecture: Reduction of degree and formal expansion of the inverse*, Bulletin of the American Mathematical Society, Volume 7, 287-330 (1982).

[6] A. Białynicki-Birula e M. Rosenlicht, *Injective morphisms of real algebraic varieties*, Proceedings of the American Mathematical Society, Providence, 13:200-203, 1962.

[7] F. Braun, B. Oréfice-Okamoto, *On polynomial submersions of degree 4 and the real Jacobian conjecture in* $\mathbb{R}^2$ Journal of Mathematical Analysis and Applications. Volume 443, Issue 2, 688–706 2016.

[8] F. Braun, J. R. dos Santos Filho, *The real Jacobian conjecture on* $\mathbb{R}^2$ *is true when one of the components has degree* 3, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Springfield, 26:75–87 2010.

[9] F. Braun, J. R. dos Santos Filho, M. A. Teixeira, *Foliations, solvability and global injectivity*, arXiv:1603.07543.

[10] L. A. Campbell, *The Asymptotic Variety of a Pinchuk Map as a Polynomial Curve*, Applied Mathematics Letters Volume 24, Issue 1, 62–65 (2011)

[11] F. Dumortier, *Singularities of vector fields on the plane*, Journal of Differential Equations, Academic Press, San Diego, 23:53–106.

[12] F. Dumortier, J. Llibre, J. C. Artés, *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[13] J. Gwoździewicz, *Real Jacobian mates*, arXiv:1505.04967.

[14] O. Keller, *Ganze Cremona-Transformatione*, Monatshefte für Mathematik und Physik, Johnson reprint corporation, New York 47:299-306, 1939.

[15] E. L. Lima, *Análise Real Volume 2* IMPA. 1993.

[16] T. S. Motzkin, *The arithmetic-geometric inequality*, Proceedings Symposium on Inequalities, Academic Press, New York:205-224, 1967.

[17] J. Munkres, *Topology*, Prentice Hall. 2000.

[18] D. J. Newman, *One-one polynomial maps*, Proceedings of the American Mathematical Society, Providence, 11:867-870, 1960.

[19] D. A. Neumann, *Classification of continuous flows on 2-manifolds*, Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 48, 73-81 (1975).

[20] R. Peretz, *On counterexamples to Keller's problem*, Illinois Journal of Mathematics. Volume 40, Issue 2, 293-303 (1996).

[21] S. Pinchuk, *A counterexample to the strong real Jacobian conjecture*, Mathematische Zeitschrift, Springer, Berlin, 217(1):1–4, 1994.

[22] W. Rudin, *Injective polynomial maps are automorphisms*, American Mathematical Monthly. 102:540-543, 1995.

[23] J. Sotomayor, *Lições de equações diferenciais ordinárias*, Projeto Euclides volume 11. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.

[24] A. van den Essen, *Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture*, Progress in Mathematics, Birkhäuser Verlag, Volume 190, Basel (2000).