Universidade Federal de São Carlos
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Departamento de Matemática

Recobrimentos Ramificados entre Superfícies e 2-Orbifolds Geométricos

Laurindo Daniel Silva da Rocha

Orientador: *Prof. Dr. Daniel Vendrúscolo*

São Carlos - SP
2014

Recobrimentos Ramificados entre Superfícies e 2-Orbifolds Geométricos

Laurindo Daniel Silva da Rocha

Orientador: *Prof. Dr. Daniel Vendrúscolo*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

São Carlos - SP
2014

Autor

Orientador

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

R672rr

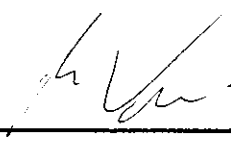
Rocha, Laurindo Daniel Silva da.
Recobrimentos ramificados entre superfícies e 2-orbifolds geométricos / Laurindo Daniel Silva da Rocha. -- São Carlos : UFSCar, 2014.
138 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2014.

1. Topologia algébrica. 2. *Orbifolds*. 3. Recobrimento ramificado. 4. Hurwitz, Problema de. I. Título.

CDD: 514.2 (20ª)

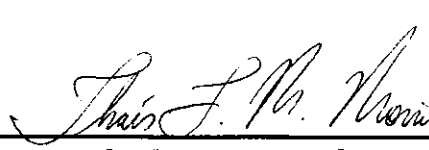
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Daniel Vendrúscolo
DM – UFSCar



Prof. Dr. Dirk Töben
DM – UFSCar



Prof. Dr. Thais Fernanda Mendes Monis
IGCE - UNESP

Este trabalho é dedicado ao maior homem que conheci, o qual tenho a honra de carregar o mesmo nome e chamá-lo Pai. Dedico também a minha Mãe que sempre me apoiou, mesmo quando não compreendeu minhas escolhas.

"Nunca deixe que lhe digam que não vale a pena acreditar no sonho que se tem..."
Mais uma Vez - Renato Russo

Agradecimentos

Agradeço a Deus por todas as bênçãos que tem realizado em minha vida e também pelas dificuldades que tive de enfrentar para concluir mais esta etapa; elas me mostraram o valor da perseverança.

Aos meus pais (Laurindo e Fátima) que, mesmo nas dificuldades, me criaram com muito amor e carinho e me ensinaram a enfrentar as adversidades de cabeça erguida. Aos meus irmãos (Rosimeire, João Paulo e Luiz) que sempre estiveram ao meu lado.

Estas páginas seriam insuficientes para expressar minha eterna gratidão ao meu orientador Prof. Dr. Daniel Vendrúscolo que me ensinou muito mais do que Matemática. Ele aceitou me orientar em uma fase atribulada de minha vida, deu total apoio quando decidi conciliar o mestrado e o trabalho como professor e quando eu estava perdido me resgatou, permitindo que este trabalho fosse concluído. Por tudo isto passei a admirá-lo ainda mais e vê-lo como um Amigo.

Agradeço ao Prof. Dr. José Ruidival dos Santos Filho pela conversa franca que tivemos e pelo incentivo que me deu a continuar. Ao Prof. Dr. Sadao Massago pelo modelo de dissertação disponibilizado em sua página pessoal. Aos professores Dr. Renato José de Moura e Dr. Rodrigo da Silva Rodrigues que assumiram minhas aulas quando estive afastado. Aos professores Dr. César Issao Kondo e Dr. Fábio Gomes Figueira que muito me ajudaram. Aos professores que fizeram parte da minha formação através das aulas ministradas.

Agradeço também aos professores que participaram da minha banca, Drª. Thaís Fernanda Mendes Monis e Dr. Dirk Töben, pelas preciosas sugestões.

Aos amigos que se importaram e me deram força durante todo este período. Em especial, sou muito grato à pessoa que me sugeriu iniciar o mestrado como aluno especial e àquelas que me ajudaram a escrever o resumo em inglês.

Enfim, agradeço a todos que direta ou indiretamente tornaram este trabalho possível e me permitiram realizar este sonho.

Abstract

The purpose of this work is to study the realizability problem of branched coverings between closed, connected and orientable surfaces. For each covering, there exists a set of naturally associated data called *branch datum* that should satisfy the Riemann-Hurwitz formula.

A classical problem (for possibly non-orientable surfaces) asks whether for a branch datum satisfying the condition of Riemann-Hurwitz exists a branched cover between surfaces having it as branch datum. The correct answer is: not always. When a branch datum satisfies the necessary conditions to come from a branched covering, we call it a *candidate branched covers*; if indeed it comes from a branched cover we call it *realizable* and, if not, we call it *exceptional*.

In fact, it is known that exceptions can occur only if the covered surface is the sphere or the projective plane, but the general solution is still unknown.

Among the various tools used to attack the problem we will work directly with two of them: the *orbifolds* and *dessins d'enfant*.

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar o problema de realizabilidade de recobrimentos ramificados entre duas superfícies orientáveis, fechadas e conexas. Para cada recobrimento existe um conjunto de dados naturalmente associado chamado *dados de ramificação* que devem satisfazer a fórmula de Riemann-Hurwitz.

Um problema clássico (para superfícies possivelmente não-orientáveis) questiona se, para um dado de ramificação satisfazendo a condição de Riemann-Hurwitz, existe um recobrimento ramificado entre superfícies tendo-o como dado de ramificação. A resposta correta é: nem sempre. Quando um dado de ramificação satisfaz as condições necessárias para vir de um recobrimento ramificado, o chamamos de um *candidato a recobrimento ramificado*; se de fato ele vier de um recobrimento ramificado o chamamos *realizável* e, caso contrário, *excepcional*.

De fato, é sabido que exceções podem ocorrer somente se a superfície recoberta é a esfera ou o plano projetivo, mas a solução geral permanece desconhecida.

Dentre as diversas ferramentas utilizadas para atacar o problema trabalharemos diretamente com duas delas: os *orbifolds* e os *dessins d'enfant*.

Sumário

Introdução **xv**

1 Preliminares **1**
1.1 Ações de Grupos 1
1.2 Ações Discretas 3
1.3 Ações Propriamente Descontínuas 5

2 Recobrimentos Ramificados **7**
2.1 Espaços de Recobrimento 7
2.2 Recobrimentos Ramificados 9
2.3 Fórmula de Riemann-Hurwitz 11
2.4 Candidatos a Recobrimentos Ramificados 12

3 2-Orbifolds Geométricos **13**
3.1 Orbifolds 14
3.2 Singularidades de Orbifolds de Dimensão Dois 18
3.3 Característica de Euler Orbifold 23
3.4 Estruturas Geométricas 33

4 O Problema de Hurwitz **39**
4.1 O Problema de Existência de Hurwitz 39
4.2 Pontos de Vistas Diversos 40
4.3 Resultados conhecidos 47
4.4 A Conjectura do Grau Primo 50

5 Recobrimentos entre Orbifolds com $\chi^{\text{orb}} \geq 0$ **51**
5.1 A Abordagem Geométrica 51
5.2 Característica de Euler Positiva 53
5.3 O Caso Euclidiano 78

6 Recobrimentos Orbifolds com $\chi^{\text{orb}} < 0$ **117**
6.1 2-Orbifolds Triangulares Hiperbólicos 117

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar o problema de realizabilidade de recobrimentos ramificados entre duas superfícies $\widetilde{\Sigma}$ e Σ orientáveis, fechadas (isto é, compactas e sem bordo) e conexas. Para cada recobrimento existe um conjunto de dados naturalmente associado representado pela $5-$upla $\left(\widetilde{\Sigma}, \Sigma, n, d, \Pi_i = (d_{ij})_{j=1}^{m_i}\right)$, que chamaremos de *dados de ramificação*, onde $n \geq 0$ é o número de pontos de ramificação, $d \geq 2$ é o *grau* do recobrimento, $\Pi_i = (d_{ij})_{j=1}^{m_i}$ é uma partição de d, sendo $(d_{ij})_{j=1}^{m_i}$ a coleção dos graus locais nas pré-imagens do $i-$ésimo ponto de ramificação, satisfazendo a fórmula de Riemann-Hurwitz

$$\chi(\widetilde{\Sigma}) - \ell(\Pi) = d \cdot (\chi(\Sigma) - n),$$

onde $\ell(\Pi) = \sum_{i=1}^{n} m_i$ e χ é a característica de Euler da superfície.

De modo geral, para superfícies $\widetilde{\Sigma}$ e Σ possivelmente não-orientáveis as seguintes condições ditas de *Riemann-Hurwitz* são satisfeitas:

(1) $\chi(\widetilde{\Sigma}) - \ell(\Pi) = d(\chi(\Sigma) - n)$;

(2) $n \cdot d - \ell(\Pi)$ é par;

(3) Se Σ é orientável, então $\widetilde{\Sigma}$ também é orientável;

(4) Se Σ é não-orientável e d é ímpar, então $\widetilde{\Sigma}$ também é não-orientável;

(5) Se Σ é não-orientável e $\widetilde{\Sigma}$ é orientável, então cada partição $(d_{ij})_{j=1,\ldots,m_i}$ de d refina a partição $(d/2, d/2)$.

Um problema clássico, proposto primeiro por Hurwitz em 1891, questiona o seguinte: se um dado de ramificação satisfaz as condições de Riemann-Hurwitz, existe um recobrimento ramificado entre superfícies tendo-o como dado de ramificação? Em outras palavras, as condições de Riemann-Hurwitz são suficientes para que exista um recobrimento ramificado entre superfícies tendo esses dados de ramificação? A resposta correta é *não, a condição de Riemann-Hurwitz não é suficiente.* Quando um dado de ramificação satisfaz as condições necessárias para vir de um recobrimento ramificado, o chamamos de um *candidato a recobrimento ramificado*; se de fato ele vier de um recobrimento ramificado o chamamos *realizável* e, caso contrário, *excepcional.*

Considerável energia foi gasta ao longo do tempo para uma compreensão geral dos candidatos a recobrimentos ramificados entre superfícies e bastante progresso foi feito (em particular, foi mostrado que excessões podem ocorrer somente se Σ é a esfera S^2 ou o plano projetivo). Em [15] é apresentada uma coletânea de resultados conhecidos, mas a solução geral para o problema permanece desconhecida.

Dentre as diversas ferramentas utilizadas para atacar o problema trabalharemos diretamente com duas delas: os *orbifolds* e os *dessins d'enfant*, com maior destaque aos primeiros.

Os *orbifolds* são generalizações naturais das variedades e podem ser localmente olhados como o quociente de uma variedade por uma ação de grupos finitos. Seu estudo é encontrado primeiramente no trabalho de Satake [17], com o nome de *V-variedades*. William P. Thurston obteve mais sucesso ao reintroduzir este conceito durante um curso dado por ele em Princeton em 1978-79. A grande melhoria de Thurston sobre a versão anterior de Satake foi mostrar que a teoria de espaços de recobrimento e de grupo fundamental podem ser aplicadas aos orbifolds.

Naquele curso, um dos objetivos de Thurston foi descrever uma ligação muito forte entre geometria e topologia em dimensão baixa. No último capítulo da versão eletrônica das notas, ele introduziu a noção de orbifold, cuja ideia foi estudar espaços quocientes de $\mathbb{R}^n$ sobre a ação de um grupo que age de forma propriamente descontínua mas não necessariamente livre.

Dessins d'enfant é uma técnica clássica que foi introduzida por Grothendieck em [4] para estudar as aplicações algébricas entre superfícies de Riemann. A ideia principal é estabelecer uma associação entre recobrimentos ramificados e grafos bipartidos. Recorde que um grafo bipartido é um 1-complexo finito tal que seu conjunto de vértices se divide como $V_1 \sqcup V_2$ e cada aresta tem um extremo em V_1 e outro em V_2.

Neste trabalho, introduzimos os dessins d'enfant em sua forma original, que é válida apenas para recobrimentos da esfera com três pontos de ramificação. Para mais leitura, recomendamos [15], onde a técnica clássica é generalizada para um número arbitrário de pontos de ramificação.

Dentre os vários resultados ainda em abertos para o Problema de Hurwitz destacamos a seguinte conjectura proposta em [2]:

Conjectura 0.1. *Se $\widetilde{\Sigma} \overset{d:1}{\underset{\Pi}{\dashrightarrow}} S$ é um candidato a recobrimento ramificado entre superfícies e o grau d é um número primo, então o candidato é realizável.*

Observamos que todos os candidatos a recobrimentos ramificados entre superfícies excepcionais com $n = 3$ e $d \leq 20$ foram determinados por computador em [20]. Existem vários deles, mas nenhum ocorre para d primo, o que contribui para a confiabilidade da conjectura 0.1.

No Capítulo 1 fazemos uma breve revisão de *ações de grupo* e distinguimos as várias definições semelhantes de *ações discretas* e *ações propriamente descontínuas*, de modo a

esclarecer as diferenças entre elas. Além disso, observamos que a equivalência entre ações discretas e ações propriamente descontínuas para o caso de ações de grupos de isometrias de $\mathbb{R}^n$ é provada em [8]. Este fato é muito importante para o estudo da geometria dos orbifolds.

No Capítulo 2 apresentamos a definição de recobrimento ramificado entre superfícies, trabalhamos alguns exemplos que serão importantes no decorrer do trabalho e estabelecemos algumas notações para os candidatos a recobrimentos que serão úteis. Além disso, neste capítulo formalizamos pela primeira vez o *Problema de Hurwitz*.

No Capítulo 3 estudamos os objetos mais importantes de nosso trabalho: os orbifolds geométricos e a noção de recobrimento entre orbifolds. Este estudo nos permitirá compreender a relação existente entre recobrimentos ramificados e recobrimentos entre orbifolds. Veremos que se um grupo Γ age de maneira propriamente descontínua sobre uma variedade M, então o quociente M/Γ tem a estrutura de um orbifold. Como corolário, concluímos que todo quociente de uma variedade por uma ação de um grupo finito é um orbifold. Além disso, veremos os tipos de singularidades presentes quando estudamos os orbifolds de dimensão dois. Tais singularidades são descritas pelo *Teorema de Classificação* 3.9. Definimos os *recobrimentos entre orbifolds*, os *orbifolds bons*, a saber, aqueles que podem ser recobertos por uma variedade, os *orbifolds maus*, aqueles que não são bons, e a noção de *recobrimento universal entre orbifolds*. Mostramos que todo orbifold possui um recobrimento universal e damos uma caracterização dos orbifolds maus de dimensão dois. Também listamos os 2-orbifolds *maus*, *esféricos* e *euclidianos*; concluímos que todos os demais são *hiperbólicos* e que há um número infinito deles. Para finalizar o capítulo tratamos das estruturas geométricas dos orbifolds de acordo com sua característica de Euler orbifold (χ^{orb}), fornecendo uma ferramenta que será muito útil para as provas nos capítulos 5 e 6.

No Capítulo 4 aprofundamos as discussões sobre o *Problema de Hurwitz* e apresentamos as abordagens mais famosas e produtivas para o problema; a saber: Superfícies de Riemann, Permutações, Dessins d'enfant e 2-orbifolds. Mostramos que cada candidato a recobrimento ramificado tem um candidato a recobrimento entre 2-orbifolds associado. Também apresentamos uma coletânea das principais soluções parciais para o Problema de Hurwitz obtidas ao longo do tempo e, na última seção, trabalhamos sobre a *Conjectura do Grau Primo* discutindo alguns resultados conhecidos que a apoiam.

No Capítulo 5 fazemos uma análise completa dos recobrimentos entre orbifolds com $\chi^{\text{orb}} \geq 0$. Para analisar a realizabilidade de um candidato a recobrimento ramificado entre superfícies mudaremos para o candidato a recobrimento entre 2-orbifolds associado $\widetilde{X} \dashrightarrow X$ e usaremos a sua estrutura geométrica ou para construir explicitamente uma aplicação $f : \widetilde{X} \to X$ realizando-o, ou para mostrar que uma tal f não pode existir. Dentre os resultados apresentados, podemos destacar os seguintes:

Teorema. *5.28.* *Suponha $d = 4k + 1$ para $k \in \mathbb{N}$. Então*

$$S \xrightarrow{d:1} S \quad (\underbrace{2,\ldots,2}_{2k},1),(\underbrace{4,\ldots,4}_{k},1),(\underbrace{4,\ldots,4}_{k},1)$$

é um candidato a recobrimento ramificado entre superfícies, e é realizável se, e somente se, d pode ser expressado como $x^2 + y^2$ para algum $x, y \in \mathbb{N}$.

Teorema. *5.29.* *Suponha $d = 6k + 1$ para $k \in \mathbb{N}$. Então*

$$S \xrightarrow{d:1} S \quad (\underbrace{2,\ldots,2}_{3k},1),(\underbrace{3,\ldots,3}_{2k},1),(\underbrace{6,\ldots,6}_{k},1)$$

é um candidato a recobrimento ramificado entre superfícies, e é realizável se, e somente se, d pode ser expressado como $x^2 + xy + y^2$ para algum $x, y \in \mathbb{N}$.

Teorema. *5.30.* *Suponha $d = 3k + 1$ para $k \in \mathbb{N}$. Então*

$$S \xrightarrow{d:1} S \quad (\underbrace{3,\ldots,3}_{k},1),(\underbrace{3,\ldots,3}_{k},1),(\underbrace{3,\ldots,3}_{k},1)$$

é um candidato a recobrimento ramificado entre superfícies, e é realizável se, e somente se, d pode ser expressado como $x^2 + xy + y^2$ para algum $x, y \in \mathbb{N}$.

Encerramos o capítulo discutindo a relevância dos resultados apresentados em vista da conjectura 0.1. Em particular, recordamos os seguintes fatos aritméticos:

- ***(Fermat):*** Um número primo da forma $4k + 1$ sempre pode ser expressado como $x^2 + y^2$ para $x, y \in \mathbb{N}$;
- ***(Gauss):*** Um número primo da forma $6k + 1$ (ou equivalentemente $3k + 1$) sempre pode ser expressado como $x^2 + xy + y^2$ para $x, y \in \mathbb{N}$;
- Os inteiros que podem ser expressados como $x^2 + y^2$ ou como $x^2 + xy + y^2$ com $x, y \in \mathbb{N}$ têm densidade assintoticamente zero em $\mathbb{N}$.

Recordemos o que significa dizer que um conjunto tem densidade assintoticamente zero. Considere um conjunto $A \subset \mathbb{N}$ e defina uma sequência A_n de subconjuntos de A tais que $x \in A_n$ se, e somente se, $x \leq n$. Definimos uma sequência numérica $\{y_n\}$ dada por

$$y_n = \frac{\#A_n}{n},$$

onde $\#A$ é a cardinalidade de A_n. Assim, dizemos que A têm *densidade assintoticamente zero* em $\mathbb{N}$ se $\lim_{n \longrightarrow \infty} y_n = 0$.

Deste modo, concluímos que um recobrimento candidato em qualquer dos três teoremas acima é *"excepcional com probabilidade 1"*, embora seja realizável quando seu grau é primo.

Além disso, no caso mau/esférico a afirmação também é muito expressiva:

Teorema. *5.4.* *Seja* $\widetilde{\Sigma} \overset{d:1}{\underset{\Pi}{\dashrightarrow}} \Sigma$ *um candidato a recobrimento ramificado entre superfícies tendo um candidato a recobrimento entre 2-orbifolds associado* $\widetilde{X} \overset{d:1}{\dashrightarrow} X$ *com* $\chi^{\text{orb}}(X) > 0$. *Então* $\widetilde{\Sigma} \overset{d:1}{\underset{\Pi}{\dashrightarrow}} \Sigma$ *é excepcional se, e somente se,* $\widetilde{X}$ *é mau e* X *é esférico. Todas as exceções ocorrem com grau não-primo.*

No Capítulo 6 realizamos uma análise parcial do problema de Hurwitz para recobrimentos ramificados no caso em que o recobrimento entre orbifolds associado é hiperbólico. Nossa análise ficará restrita à família de recobrimentos de S^2 sobre S^2 com três pontos de ramificação. Mais precisamente, estratificamos essa imensa família com relação ao número de pontos singulares na esfera recoberta. Chamamos $\{C_n\}$, para $n \geq 3$, o estrato de todos os recobrimentos da forma

$$S(\alpha_1, ..., \alpha_n) \dashrightarrow S(p, q, r).$$

Faremos a análise do primeiro estrato C_3 e comentários acerca dos resultados obtidos para o segundo estrato C_4 em [12].

Após um longo trabalho de enumeração dos candidatos a recobrimentos, provaremos a realizabilidade e excepcionalidade usando principalmente *dessins d'enfant* de Grothendieck, já explorada em [15].

A saber, um 2-orbifold é chamado *triangular* se tem a forma $S(p, q, r)$ e, para este caso (estrato C_3), temos o seguinte resultado:

Teorema. *6.1.* *Existem 9 candidatos a recobrimentos ramificados entre superfícies tendo um candidato a recobrimento entre 2-orbifolds associado* $\widetilde{X} \dashrightarrow X$ *com* $\widetilde{X}$ *e* X *sendo orbifolds triangulares hiperbólicos. Todos são realizáveis, exceto dois. As exceções ocorrem nos graus 8 e 16 (que não são primos).*

Para o estrato C_4, em [12] é mostrado que:

Teorema. *6.3.* *Existem 141 candidatos a recobrimentos ramificados entre superfícies tendo um candidato a recobrimento entre 2-orbifolds associado* $\widetilde{X} \dashrightarrow X$ *sendo* $\widetilde{X}$ *a esfera com quatro pontos de cone e* X *um orbifold triangular hiperbólico. Dentre eles 29 são candidatos excepcionais, e eles não ocorrem em graus primos.*

Capítulo 1

Preliminares

O objetivo deste capítulo é recordar alguns conceitos sobre *ações de grupo* e distinguir as várias definições semelhantes de *ações discretas* e *ações propriamente descontínuas*, de modo a esclarecer as diferenças entre elas.

Na seção 1.1 definimos *ação de grupos*, *ação por homeomorfismos* e *ação efetiva*, que são, de fato, as ações que nos interessam. Definimos também a *órbita* Gx e o *grupo de isotropia* G_x de um ponto, o que nos permitirá dizer que uma ação é *livre* se $G_x = \{1_g\}\, \forall x \in X$.

Na seção 1.2 mostramos que se uma ação for *errante*, ela terá *órbitas discretas* e, que, para que uma ação seja *discreta*, é suficiente que ela tenha órbitas discretas e, desta forma, toda ação errante é discreta.

Na seção 1.3 mostramos que se uma ação for *propriamente descontínua* então ela será errante. Este resultado, juntamente com os resultados apresentados na seção 1.2 nos permitem concluir que toda ação propriamente descontínua é discreta. Terminamos a seção (e também este capítulo) observando que vale a equivalência entre ações discretas e ações propriamente descontínuas para o caso de ações de grupos de isometrias de $\mathbb{R}^n$.

Este fato será muito importante para o estudo da geometria dos orbifolds.

1.1 Ações de Grupos

Definição 1.1. Sejam $X \neq \emptyset$ e G um grupo. Uma *ação à esquerda de G em X* é uma aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

com as seguintes propriedades:

(i) $1_G \cdot x = x \qquad \forall x \in X.$

(ii) Se $g, h \in G$ então $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) \qquad \forall x \in X.$

Definição 1.2. Uma ação φ de G em X é dita ser uma *ação por homeomorfismos* se X é um espaço topológico e $\forall g \in G$ a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi_g : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

é um homeomorfismo. Uma ação por homeomorfismos será dita uma *ação efetiva* quando o único elemento que fixa todos os pontos de X for a identidade.

Observação 1.3. Estaremos interessados apenas nas ações efetivas. Note que, sendo assim, G pode ser olhado como um grupo de homeomorfismos de X. De fato, seja H o conjunto de todos os homeomorfismos φ_g de X, tais que $g \in G$. Então,

$$\varphi_{1_G}(x) = 1_G \cdot x = x, \qquad \forall x \in X.$$

Assim, $\varphi_{1_G} = 1_H \in H$. Além disso, se $g, h \in G$, então $\varphi_g, \varphi_h \in H$ e temos

$$(\varphi_g \circ \varphi_h)(x) = \varphi_g(\varphi_h(x)) = \varphi_g(h \cdot x) = g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x = \varphi_{gh}(x) \qquad \forall x \in X,$$

o que implica que $\varphi_{gh} \in H$. Temos ainda que a aplicação

$$\begin{aligned} \phi : G &\longrightarrow H \\ g &\longmapsto \varphi_g \end{aligned}$$

é um homomorfismo de grupos sobrejetivo (por definição) e, como a ação é efetiva, devemos ter $\ker \phi = 1_G$. Desta forma, $G \cong H \leq \mathrm{Hom}(X)$.

Se nada contrário for dito, usaremos o termo *ação* para designar uma *ação efetiva*, ou seja, será uma ação por homeomorfismos tal que o único elemento de G que fixa todos os elementos de X é o elemento identidade de G.

Definição 1.4. Dada uma ação de G em X, chamamos *órbita* de $x \in X$ o conjunto

$$Gx = \{gx : g \in G\}.$$

Proposição 1.5. *Dados $x, y \in X$, tem-se que ou $Gx = Gy$ ou $Gx \cap Gy = \emptyset$.*

Demonstração. De fato, considere a relação $\sim$ dada por

$$x \sim y \iff \exists g \in G \qquad \text{tal que} \qquad g \cdot x = y$$

e mostremos que esta é uma relação de equivalência. Com efeito,

- **(Reflexiva:)** $x \sim x$ pois, $1_G \in G$ e $1_G \cdot x = x$;

- **(Simétrica:)** se $x \sim y$ então, existe $g \in G$ tal que $g \cdot x = y$. Como G é grupo e $g \in G$, existe $g^{-1} \in G$ tal que $gg^{-1} = g^{-1}g = 1_G$. Assim, $g \cdot x = y \Longrightarrow g^{-1} \cdot (g \cdot x) = g^{-1} \cdot y \Longrightarrow (g^{-1}g) \cdot x = g^{-1} \cdot y \Longrightarrow x = g^{-1} \cdot y \Longrightarrow y \sim x$.

- **(Transitiva:)** Se $x \sim y$ e $y \sim z$, então existem $g, h \in G$ tais que $g \cdot x = y$ e $h \cdot y = z$. Logo, $(hg) \cdot x = h \cdot (g \cdot x) = h \cdot y = z$. Como G é grupo e $g, h \in G$, segue que $hg \in G$. Assim, $x \sim z$.

Finalmente, observe que a classe de equivalência de x é a sua órbita e, portanto, segue o resultado.

□

Definição 1.6. Definimos o *estabilizador* (ou o *grupo de isotropia*) de $x \in X$ como sendo o conjunto

$$G_x = \{g \in G : gx = x\}.$$

Definição 1.7. Dizemos que x é um *ponto fixo* pela ação de G se $G_x = G$ ou, equivalentemente, $Gx = \{x\}$.

Definição 1.8. Uma ação de G em X é dita *livre* se dado um ponto qualquer de X, o único elemento de G que fixa esse ponto é a identidade. Em outras palavras, se $G_x = \{1_g\}\, \forall x \in X$.

1.2 Ações Discretas

Definição 1.9. A *topologia da convergência uniforme* no espaço $C(X, Y)$ das aplicações contínuas de X em Y, com Y um espaço métrico, é a topologia que tem como base os conjuntos do tipo

$$B(f, \varepsilon) = \{g \in C(X, Y) : d(g(x), f(x)) < \varepsilon, \forall x \in X\}.$$

Definição 1.10. A *topologia da convergência uniforme sobre compactos* no espaço $C(X, Y)$ das aplicações contínuas de X em Y, com Y um espaço métrico, é a topologia que tem como base os conjuntos do tipo

$$B_f(K, \varepsilon) = \{g \in C(X, Y) : d(g(x), f(x)) < \varepsilon, \forall x \in K\},$$

onde K é um compacto de X.

Definição 1.11. A *topologia compacto-aberto* no espaço $C(X, Y)$ das aplicações contínuas de X em Y é a topologia que tem como sub-base os conjuntos

$$\mathcal{V}(K, U) = \{f \in C(X, Y) : f(K) \subset U\},$$

onde K é um compacto de X e U é um aberto de Y.

Observação 1.12.
- Se Y for um espaço métrico, então a topologia compacto-aberto coincide com a topologia da convergência uniforme sobre compactos.
- A topologia compacto-aberto não exige que Y seja um espaço métrico, logo a topologia da convergência uniforme sobre compactos é independente da métrica definida em Y.
- Se além disso X for um compacto, então esta topologia coincide com a topologia da convergência uniforme.

Definição 1.13. Uma ação de G em X é dita *discreta* se G é um subconjunto discreto do grupo de homeomorfismos de X, com a topologia compacta-aberta.

Definição 1.14. Dizemos que uma ação de G em X tem *órbitas discretas* se para todo $x \in X$ existe uma vizinhança U de x tal que o conjunto

$$\{g \in G : gx \in U\}$$

é finito.

Qualquer ação de um grupo finito tem órbitas discretas. No entanto, para que um grupo não finito tenha órbitas discretas é necessário que não haja pontos fixos, caso contrário, existiriam infinitos elementos do grupo que levariam este ponto em uma vizinhança qualquer dele.

Definição 1.15. Dizemos que uma ação de G em X é *errante* se para todo $x \in X$ existe uma vizinhança U de x tal que o conjunto

$$\{g \in G : gU \cap U \neq \emptyset\}$$

é finito.

Proposição 1.16. *Se uma ação for errante, então ela terá órbitas discretas.*

Demonstração. De fato, dado $x \in X$, seja U uma vizinhança de x tal que $\{g \in G : gU \cap U \neq \emptyset\}$ é finito (que existe pois a ação é errante). Como U é uma vizinhança de x, $gx \in gU$ e gU intersecta U no máximo para um número finito de $g \in G$, segue que $gx \in U$ no máximo para um número finito de $g \in G$, o que conclui a prova.

□

A recíproca não vale. Para um exemplo, sugerimos ao leitor consultar [8] páginas 12 a 15.

Proposição 1.17. *Para que uma ação seja discreta, basta que possua uma órbita discreta.*

Demonstração. De fato, se $x \in X$ tem uma órbita discreta, existe uma vizinhança U de x tal que $\{g \in G : gx \in U\}$ é finito, digamos $\{g_1, g_2, ..., g_k\}$, onde $g_1 = 1_G$. Logo, a função identidade Id_X, correspondente ao homeomorfismo φ_{g_1}, tem uma vizinhança, relativamente à topologia compacto-aberto, da forma

$$V(\{x\}, U) = \{f \in \text{Homeo}(X) : f(\{x\}) \subset U\}$$

que é tal que $V(\{x\}, U) \cap G = \{g_1, g_2, ..., g_k\}$. Sendo a identidade isolada, todas as outras funções $g \in G$ são isoladas, e portanto a ação é discreta. Com efeito, suponha que a identidade seja isolada e que exista $g \in G$ não isolada. Então, qualquer vizinhança

$$V_g(K, U) = \{f \in \text{Homeo}(X) : f(K) \subset U\}$$

contém um elemento $f \neq g$. Logo, $g^{-1}f \neq Id$ e

$$g^{-1}f(K) \subset g^{-1}(U) = U' \qquad \text{e} \qquad g^{-1}g(K) \subset g^{-1}(U) = U',$$

logo $Id(K) \subset U'$ e $g^{-1}f(K) \subset U'$, o que implica que $g^{-1}f$ pertence a uma vizinhança arbitrária da identidade $V_{Id}(K, U')$, o que leva a uma contradição.

□

1.3 Ações Propriamente Descontínuas

Definição 1.18. Um espaço topológico X é *localmente compacto* se todo ponto $x \in X$ tem uma vizinhança contida num compacto.

Exemplo 1.19. Os espaços euclidianos e qualquer conjunto compacto são localmente compactos.

Exemplo 1.20. Os espaços de Banach de dimensão infinita não são localmente compactos, pois num espaço de dimensão infinita, conjuntos compactos sempre têm interior vazio.

Definição 1.21. Seja X um espaço topológico localmente compacto. Dizemos que uma ação de G em X é *propriamente descontínua* se, para todo o compacto $K \subset X$, o conjunto

$$\{g \in G : gK \cap K \neq \emptyset\}$$

é finito.

Proposição 1.22. *Se uma ação de G em X for propriamente descontínua, então o estabilizador de qualquer ponto $x \in X$ terá de ser finito.*

Demonstração. Seja $x \in X$ e considere o seu estabilizador $G_x = \{g \in G : gx = x\}$. Se a ação for propriamente descontínua então, como $\{x\}$ é compacto, segue que o conjunto

$$\{g \in G : g\{x\} \cap \{x\} \neq \emptyset\} = \{g \in G : gx = x\} = G_x$$

será finito.

□

Proposição 1.23. *Se uma ação for propriamente descontínua, então ela será errante.*

Demonstração. Seja $x \in X$. Como X é localmente compacto, existe uma vizinhança U de x contida num compacto K. Se a ação for propriamente descontínua, o conjunto

$$\{g \in G : gK \cap K \neq \emptyset\}$$

será finito e, como $U \subset K$ e $gU \subset gK$, segue que $(gU \cap U) \subset gK \cap K$ o que implica que

$$\{g \in G : gU \cap U \neq \emptyset\}$$

será finito e portanto a ação será errante.

□

A recíproca não vale. Para um exemplo, sugerimos ao leitor consultar [8] página 16.

Corolário 1.24. *Se uma ação for propriamente descontínua, então ela será discreta.*

Demonstração. A demonstração segue diretamente aplicando as proposições 1.16, 1.17 e 1.23.

□

Observação 1.25. Em [8] é provada a equivalência entre ações discretas e ações propriamente descontínuas para o caso de ações de grupos de isometrias de $\mathbb{R}^n$. Além disso, esta equivalência ainda se mantém quando tratamos de ações de um grupo de isometrias numa variedade completa Riemanniana.

A observação 1.25 nos permite usar argumentos geométricos para o problema de Hurwitz.

Capítulo 2

Recobrimentos Ramificados

O objetivo deste capítulo é apresentar a definição de recobrimento ramificado entre superfícies, alguns exemplos que serão importantes no decorrer de nosso trabalho e estabelecer algumas notações para os candidatos a recobrimentos que nos serão úteis.

Na seção 2.1 exploramos a definição mais geral de *recobrimentos topológicos* e a noção de *recobrimento universal*.

Na seção 2.2 trabalhamos com os *recobrimentos ramificados* e damos uma caracterização local para tais aplicações.

Na seção 2.3 apresentamos a *Fórmula de Riemann-Hurwitz* para recobrimentos topológicos e, a partir daí, para recobrimentos ramificados.

Para finalizar o capítulo, na seção 2.4 apresentamos a notação que utilizaremos para os *candidatos a recobrimentos ramificados* e definimos os candidatos *realizáveis* e *excepcionais*. Estas definições são a base do *Problema de Hurwitz*.

2.1 Espaços de Recobrimento

Definição 2.1. Dizemos que uma aplicação entre espaços topológicos $p : \widetilde{\Sigma} \longrightarrow \Sigma$ é um *recobrimento* se $\forall x_0 \in \Sigma$ existe uma vizinhança U de x_0 tal que tal que $p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J(x_0)} V_j$ onde:

- V_j é um aberto não vazio de $\widetilde{\Sigma}$, $\forall j \in J(x_0)$;
- $p|_{V_j} : V_j \longrightarrow U$ é homeomorfismo;
- $V_j \cap V_k = \emptyset$ se $j \neq k$.

Neste caso, chamamos $\widetilde{\Sigma}$ de *espaço de recobrimento* de Σ, Σ é a *base do recobrimento* e, para cada $x \in \widetilde{\Sigma}$, o conjunto $p^{-1}(x)$ é chamado de *fibra* de x. Por abuso de linguagem, dizemos que $\widetilde{\Sigma}$ é um recobrimento de Σ, ou que $\widetilde{\Sigma}$ recobre Σ, significando que existe um recobrimento $p : \widetilde{\Sigma} \longrightarrow \Sigma$.

Observação 2.2. Se Σ é conexo então, como vemos em [7], página 119, proposição 3, $\#p^{-1}(x)$ é independente da escolha de $x \in \widetilde{\Sigma}$ e é chamado *grau do recobrimento* ou *número de folhas do recobrimento*. A figura 2.1 nos mostra um recobrimento de grau 2.

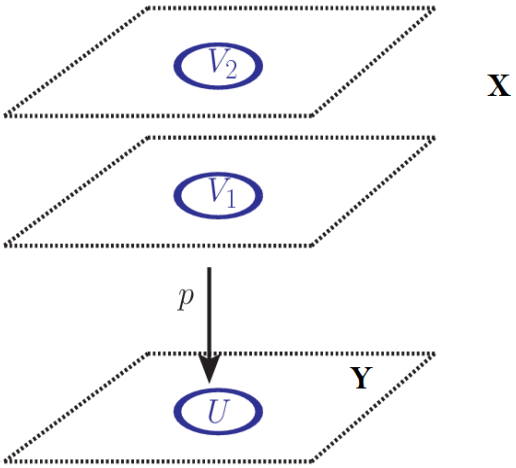


Figura 2.1: Recobrimento de Y por duas folhas.

Exemplo 2.3. A aplicação identidade $i : X \longrightarrow X$ é um recobrimento trivial de X.

Exemplo 2.4. A aplicação $q : S^1 \longrightarrow S^1$, do círculo unitário em si mesmo, definida por $q(z) = z^n$ é um recobrimento de S^1 por n folhas . Na figura 2.2 apresentamos o caso particular $n = 2$, que nos dá um recobrimento por 2 folhas.

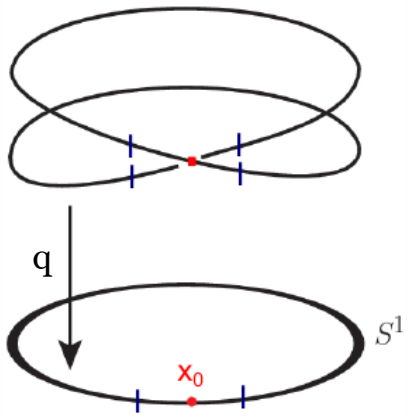


Figura 2.2: Recobrimento por 2 folhas de S^1 por si mesmo.

Exemplo 2.5. A aplicação $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ dada por $p(t) = e^{2\pi it}$ é um recobrimento de S^1 por $\mathbb{R}$. Neste caso, cada ponto $x \in S^1$ possui infinitas pré-imagens e portanto o grau do recobrimento é infinito. Veja a figura 2.3.

A próxima proposição nos permitirá definir *recobrimento universal*. Sua demonstração pode ser encontrada em [7], Corolário 1 da página 163.

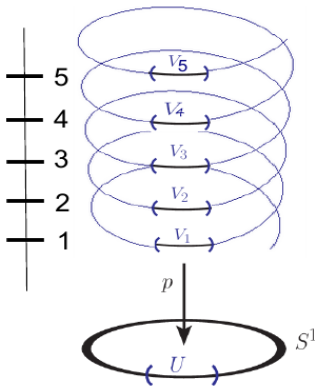
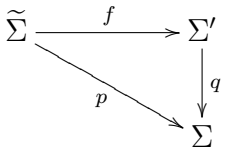


Figura 2.3: Recobrimento de S^1 por $\mathbb{R}$.

Proposição 2.6. *Seja $p : \widetilde{\Sigma} \longrightarrow \Sigma$ um recobrimento, cujo domínio $\widetilde{\Sigma}$ é simplesmente conexo e localmente conexo por caminhos. Para todo recobrimento $q : \Sigma' \longrightarrow \Sigma$ com Σ' conexo, existe um recobrimento $f : \widetilde{\Sigma} \longrightarrow \Sigma'$ tal que $q \circ f = p$.*

Em outras palavras, o diagrama



comuta.

Pela proposição 2.6, um recobrimento $p : \widetilde{\Sigma} \longrightarrow \Sigma$ com $\widetilde{\Sigma}$ simplesmente conexo e localmente conexo por caminhos é chamado *recobrimento universal*, pois $\widetilde{\Sigma}$ recobre qualquer outro recobrimento Σ' do espaço Σ.

Exemplo 2.7. A aplicação p do exemplo 2.5 é um recobrimento universal de S^1.

Exemplo 2.8. Qualquer aplicação q como no exemplo 2.4 *não* é um recobrimento universal de S^1, pois S^1 não é simplesmente conexo.

2.2 Recobrimentos Ramificados

Diversas vezes surgem aplicações que parecem ser um recobrimento mas, em determinados pontos, não o são. Podemos generalizar a noção de recobrimento através do conceito de recobrimento ramificado.

Definição 2.9. Um *recobrimento ramificado* é uma aplicação entre os espaços $\widetilde{\Sigma}$ e Σ que é um recobrimento, exceto num subconjunto discreto de Σ.

Observação 2.10. Enquanto num recobrimento usual, com base conexa, o número de elementos na fibra de qualquer ponto é igual para todos os pontos (definido como o grau

do recobrimento), num recobrimento ramificado, o número de elementos na fibra dos tais "pontos especiais", é diferente do número de elementos na fibra dos demais pontos. A estes "pontos especiais" damos o nome de *pontos de ramificação*.

Exemplo 2.11. Dado $k > 1$, a função $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^k$ é um recobrimento ramificado com ponto de ramificação em $z = 0$. Observe que, em todos os outros pontos z do plano tem-se $\#f^{-1}(z) = k$.

Localmente, um recobrimento ramificado comporta-se como a função do exemplo 2.11; isto é, dado um recobrimento $p : \widetilde{\Sigma} \longrightarrow \Sigma$, existem homeomorfismos $\varphi : \widetilde{\Sigma} \longrightarrow U$ e $\psi : \Sigma \longrightarrow V$ (U e V vizinhanças da origem $0 \in \mathbb{C}$) tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\Sigma} & \xrightarrow{f} & \Sigma \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle\psi^{-1}} \\ U & \xrightarrow{z\mapsto z^k} & V \end{array}$$

comuta. Deste modo, chamamos k o *grau local* do recobrimento.

Exemplo 2.12. Considere S^2 a esfera unitária centrada na origem $0 \in \mathbb{R}^3$ e $f : S^2 \longrightarrow S^2$ a aplicação que, para cada $z_0 \in [-1, 1]$ fixado, leva a curva que dá uma volta na circunferência de altura z_0 em S^2 na curva que dá d voltas ($d \geq 2$) na mesma circunferência. Observe que para todo ponto $P \in S^2$, com exceção dos pólos norte N e sul S, tem se $\#f^{-1}(P) = d$. Portanto, f é um recobrimento ramificado da esfera S^2 por si mesma. Observe a figura 2.4.

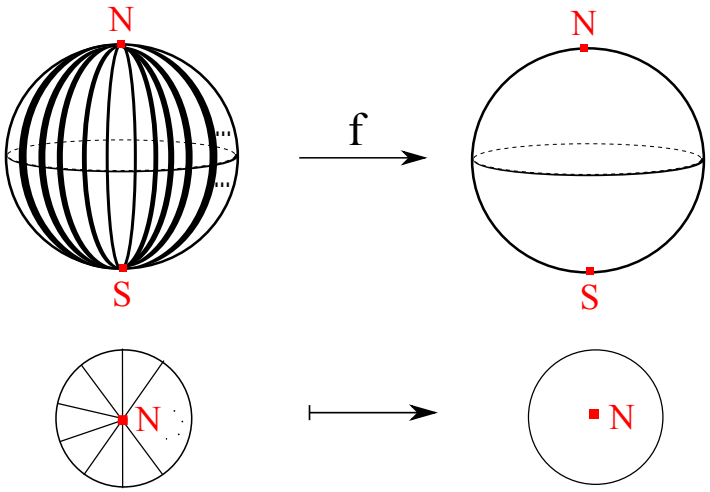


Figura 2.4: N e S são os *pontos de ramificação* de f.

Note que $f|_{S^2\setminus\{N,S\}} : S^2\setminus\{N, S\} \longrightarrow S^2\setminus\{N, S\}$ é um recobrimento usual por d folhas.

Definição 2.13. Dado $f : \widetilde{\Sigma} \longrightarrow \Sigma$ um recobrimento ramificado com $p_1, p_2, ..., p_n$ pontos de ramificação tal que $f^{-1}(p_i) = \{\widetilde{p}_{i_1}, \widetilde{p}_{i_2}, ..., \widetilde{p}_{i_{ki}}\}$, $1 \leq i \leq n$. O recobrimento usual

$f|_{\widetilde{\Sigma}\setminus\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(p_i)} : \widetilde{\Sigma} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(p_i) \longrightarrow \Sigma \setminus \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ é chamado de *recobrimento não ramificado associado.*

Nosso próximo objetivo é definir o que são dados de recobrimento. Esta ideia nos levará, no capítulo 4, ao estudo do Problema de Hurwitz.

2.3 Fórmula de Riemann-Hurwitz

Sejam $\widetilde{\Sigma}$ e Σ superfícies orientáveis, fechadas (isto é, compactas e sem bordo) e conexas e $f : \widetilde{\Sigma} \to \Sigma$ um recobrimento ramificado. Como vimos, f é modelada localmente por funções da forma $(\mathbb{C}, 0) \xrightarrow{z \mapsto z^k} (\mathbb{C}, 0)$ com $k > 1$, sendo que 0 no contradomínio $\mathbb{C}$ é um ponto de ramificação, e k é o grau local em 0 no domínio $\mathbb{C}$.

Além disso, vimos também que existe um número finito (n) de pontos de ramificação, e, removendo todos eles de Σ e suas pré-imagens de $\widetilde{\Sigma}$, segue que f induz um recobrimento não ramificado associado de algum grau d.

A coleção $(d_{ij})_{j=1}^{m_i}$ dos graus locais nas pré-imagens do $i-$ésimo ponto de ramificação é uma partição Π_i de d. Definimos agora:

- $\ell(\Pi_i)$ sendo o *comprimento* m_i de Π_i;
- Π como o conjunto $\{\Pi_1, ..., \Pi_n\}$ de todas as partições de d associadas a f;
- $\ell(\Pi)$ sendo o *comprimento total* $\ell(\Pi_1) + ... + \ell(\Pi_n)$ de Π.

Tendo definido recobrimentos ramificados, introduzimos agora a famosa *Fórmula de Riemann-Hurwitz.* Esta fórmula relaciona o número de pontos de ramificação, os graus locais e suas pré-imagens, e a característica de Euler das superfícies envolvidas no recobrimento. Apresentamos primeiramente a versão para recobrimentos não ramificados entre superfícies compactas orientáveis.

Considere um recobrimento topológico entre superfícies conexas (possivelmente com fronteira) $M_1 \longrightarrow M_2$ de grau d. Em seguida, tome uma triangulação suficientemente pequena da superfície base, adequada para calcular a característica de Euler, e faça o levantamento para o espaço de recobrimento. É natural que, para cada triângulo, lado ou vértice na base, existam d cópias no espaço de recobrimento. Assim:

$$\chi(M_1) = d \cdot \chi(M_2).$$

Vamos estender a fórmula de Riemann-Hurwitz para recobrimentos ramificados. Considere um recobrimento ramificado de grau d, $\widetilde{\Sigma} \longrightarrow \Sigma$, com Π seu conjunto de partições de d. Observe que fora de uma vizinhança das singularidades, o recobrimento ramificado é um recobrimento topológico de grau d, enquanto num pequeno disco ao redor do $i-$ésimo ponto de ramificação existem apenas $\ell(\Pi_i)$ pré-imagens, (e não d, como

para pontos não-singulares). Deste modo, aplicando a fórmula de Riemann-Hurwitz (para recobrimentos topológicos) e somando todos os termos, tomando cuidado dessas pré-imagens que faltam temos:

$$\begin{aligned}\chi(\widetilde{\Sigma}) &= d\cdot\chi(\Sigma) + (\ell(\Pi_1) - d) + ... + (\ell(\Pi_n) - d)\\ \chi(\widetilde{\Sigma}) &= d\cdot(\chi(\Sigma) - n) + (\ell(\Pi_1) + \ell(\Pi_2) + ... + \ell(\Pi_n))\\ \chi(\widetilde{\Sigma}) &= d\cdot(\chi(\Sigma) - n) + \ell(\Pi).\end{aligned}$$

Portanto, segue a seguinte fórmula para recobrimentos ramificados

$$\chi(\widetilde{\Sigma}) - \ell(\Pi) = d\cdot(\chi(\Sigma) - n). \tag{2.1}$$

2.4 Candidatos a Recobrimentos Ramificados

Considere novamente duas superfícies $\widetilde{\Sigma}$ e Σ orientáveis, fechadas (isto é, compactas e sem bordo) e conexas, inteiros $d \geq 2$ e $n \geq 1$, e um conjunto de partições $\Pi = \{\Pi_1, ..., \Pi_n\}$ de d, com $\Pi_i = (d_{ij})_{j=1}^{m_i}$, tais que a condição 2.1 seja satisfeita. Associamos a esses dados o símbolo

$$\widetilde{\Sigma} \overset{d:1}{\underset{(d_{11},...,d_{1m_1}),...,(d_{n1},...,d_{nm_n})}{\dashrightarrow}} \Sigma$$

que chamaremos um *candidato a recobrimento ramificado entre superfícies*.

Observe que para cada candidato a recobrimento da forma $S \overset{d:1}{\underset{\Pi}{\dashrightarrow}} S$, onde S é a 2-esfera, com três pontos de ramificação, como serão a maioria dos casos que trabalharemos, a fórmula de Riemann-Hurwitz dá:

$$\ell(\Pi) = d + 2. \tag{2.2}$$

De fato, pela fórmula de Riemann-Hurwitz temos:

$$\chi(S) - \ell(\Pi) = d\cdot(\chi(S) - 3) \Longrightarrow 2 - \ell(\Pi) = -d,$$

donde segue a equação 2.2.

Definição 2.14. Um candidato a recobrimento ramificado entre superfícies é dito *realizável* se é induzido por algum recobrimento ramificado $f : \widetilde{\Sigma} \to \Sigma$ existente.

Definição 2.15. Um candidato a recobrimento ramificado entre superfícies não-realizável será chamado *excepcional*.

Uma questão que surge naturalmente é: que candidatos a recobrimentos ramificados são realizáveis? Esta questão é conhecida como *Problema de Hurwitz* e será discutida mais a fundo no capítulo 4.

Capítulo 3

2-Orbifolds Geométricos

O objetivo deste capítulo é fazer um breve estudo dos objetos mais importantes de nosso trabalho: os orbifolds geométricos e a noção de recobrimento entre orbifolds. Este estudo nos permitirá compreender a relação existente entre recobrimentos ramificados e recobrimentos entre orbifolds.

Na seção 3.1 apresentamos uma definição de orbifolds bastante utilizada que nos fornece uma generalização da noção de variedades. Apresentamos exemplos de orbifolds e, dentre os resultados apresentados, mostramos que se um grupo Γ age de maneira propriamente descontínua sobre uma variedade M, então o quociente M/Γ tem a estrutura de um orbifold. Como corolário, concluímos que todo quociente de uma variedade por uma ação de um grupo finito é um orbifold.

Na seção 3.2 estudamos os tipos de singularidades presentes quando estudamos os orbifolds de dimensão dois. Tais singularidades são descritas pelo *Teorema de Classificação* 3.9. Além disso, definimos os *recobrimentos entre orbifolds*, os *orbifolds bons*, a saber, aqueles que podem ser recobertos por uma variedade, os *orbifolds maus*, a saber, aqueles que não são bons, e a noção de *recobrimento universal entre orbifolds*. Dentre os resultados apresentados, mostramos que todo orbifold possui um recobrimento universal e damos uma caracterização dos orbifolds maus de dimensão dois.

Na seção 3.3 apresentamos a *característica de Euler orbifold* e o *Teorema de Geometrização* que nos permitirão caracterizar topologicamente todos os 2-orbifolds de acordo com sua geometria, a saber, listamos os 2-orbifolds *maus*, *esféricos* e *euclidianos*; concluímos que todos os demais são *hiperbólicos* e que há um número infinito deles.

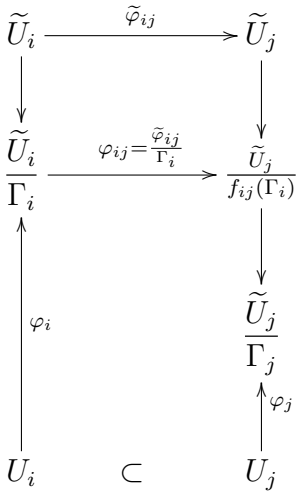
Na seção 3.4 tratamos das estruturas geométricas dos orbifolds de acordo com sua característica de Euler. O objetivo é fornecer uma ferramenta que será muito útil para as provas nos capítulos 5 e 6.

3.1 Orbifolds

Os orbifolds são generalizações naturais das variedades e podem ser localmente olhados como o quociente de uma variedade por uma ação de grupo finito. Seu estudo é encontrado primeiramente no trabalho de Satake [17], com o nome de *V-variedades*. William P. Thurston obteve mais sucesso ao reintroduzir este conceito durante um curso dado por ele em Princeton em 1978-79. A grande melhoria de Thurston sobre a versão anterior de Satake foi mostrar que a teoria de espaços de recobrimento e de grupo fundamental podem ser aplicadas aos orbifolds.

Naquele curso, um dos objetivos de Thurston foi descrever uma ligação muito forte entre geometria e topologia em dimensão baixa. No último capítulo da versão eletrônica das notas, ele introduziu a noção de orbifold, cuja ideia foi estudar espaços quocientes de $\mathbb{R}^n$ sobre a ação de um grupo que age de forma propriamente descontínua mas não necessariamente livre.

Definição 3.1. Um *orbifold* X *de dimensão* n é um espaço Σ de Hausdorff, chamado *espaço subjacente* de X, juntamente com uma cobertura aberta $\{U_i\}$ de Σ, fechada sobre interseções finitas tal que para cada U_i existe associado um grupo finito Γ_i, uma ação de Γ_i sobre um subconjunto aberto $\widetilde{U}_i$ de $\mathbb{R}^n$ e um homeomorfismo φ_i entre U_i e $\widetilde{U}_i/\Gamma_i$. Além disso, se $U_i \subset U_j$, deve existir um homomorfismo injetivo $f_{ij} : \Gamma_i \hookrightarrow \Gamma_j$ e um mergulho $\widetilde{\varphi}_{ij} : \widetilde{U}_i \hookrightarrow \widetilde{U}_j$ equivariante com relação à f_{ij} (isto é, para $\gamma \in \Gamma_i$, $\widetilde{\varphi}_{ij}(\gamma x) = f_{ij}(\gamma)\widetilde{\varphi}_{ij}(x)$) tal que o seguinte diagrama comuta:



Uma cobertura maximal de conjuntos abertos como os acima é chamada um *atlas orbifold*.

Observação 3.2. Consideramos $\widetilde{\varphi}_{ij}$ sendo definida apenas sobre a composição com elementos de Γ_j, e f_{ij} sendo definida para conjugação por elementos de Γ_j. Geralmente não é verdade que $\widetilde{\varphi}_{ik} = \widetilde{\varphi}_{jk} \circ \widetilde{\varphi}_{ij}$ quando $U_i \subset U_j \subset U_k$, mas deve existir um elemento $\gamma \in \Gamma_k$ tal que $\gamma\widetilde{\varphi}_{ik} = \widetilde{\varphi}_{jk} \circ \widetilde{\varphi}_{ij}$ e $\gamma \cdot f_{ik}(g) \cdot \gamma^{-1} = f_{jk} \circ f_{ij(g)}$.

De fato, a cobertura $\{U_i\}$ não é uma parte intrínseca da estrutura de um orbifold: duas coberturas dão origem a mesma estrutura orbifold se elas podem ser combinadas consistentemente para dar uma cobertura maior ainda satisfazendo as definições.

Exemplo 3.3. Uma variedade é um orbifold onde cada grupo Γ_i é o grupo trivial.

Observe que para todo $x \in X$ podemos definir o seu *grupo de isotropia* Γ_x sendo o menor grupo (no sentido das inclusões vistas na definição 3.1 de orbifold) tal que existe uma vizinhança U de x tal que $U = \widetilde{U}/\Gamma_x$. Utilizamos esta ideia na próxima definição.

Definição 3.4. Um ponto x é chamado *singular* se Γ_x não é o grupo trivial. Caso contrário, x é dito ponto *regular*.

Para definir um orbifold com bordo, permitimos simplesmente que cada $\widetilde{U}_i$ seja um aberto de $\mathbb{H}^n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n = 0\}$. O *bordo* do orbifold X é definido por

$$\partial X = \left\{ p \in X; \exists i \in I \quad \text{tal que} \quad p = \varphi_i^{-1}(x_i), x_i \in \widetilde{U}_i \cap \partial \mathbb{H}^n \right\}.$$

Abertos e *fechados* de um orbifold são abertos e fechados do seu espaço subjacente. Logo um orbifold é *compacto* ou *conexo* quando o seu espaço subjacente assim o for. Um orbifold sem bordo, compacto e conexo é dito *fechado*.

Exemplo 3.5. Seja $n > 1$ um número inteiro. A *lágrima (de ordem n)*, que denotamos por $S(n)$, é um orbifold com espaço subjacente S^2 e um atlas como segue. Fixemos um ponto $p \in S^2$. Podemos recobrir S^2 com abertos $U_1, ..., U_4$ conforme a figura 3.1

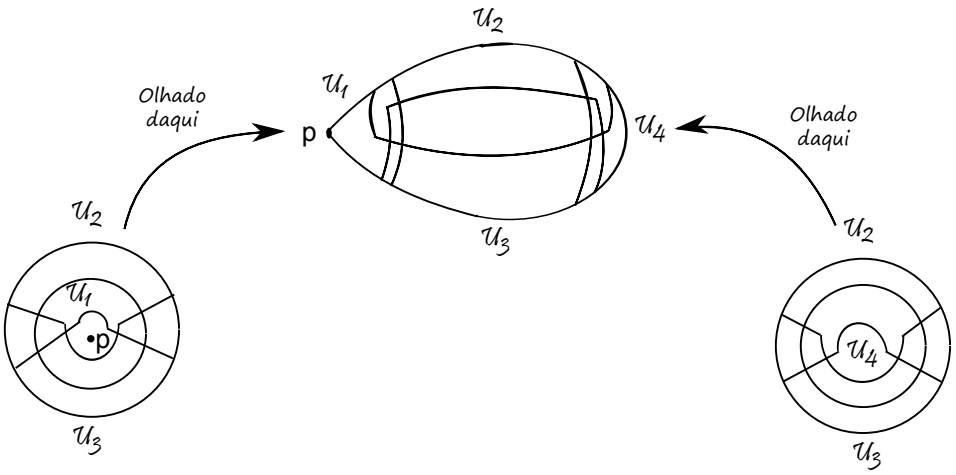


Figura 3.1: Abertos do atlas da *Lágrima*

Considere $U_{ij} = U_i \cap U_j$ e $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k$, sempre que essas intersecções forem não vazias. Temos assim um atlas com cartas

$$\varphi_i : U_i \longrightarrow \widetilde{U}_i/\Gamma_i$$
$$\varphi_{ij} : U_{ij} \longrightarrow \widetilde{U}_{ij}/\Gamma_{ij}, \quad i < j$$
$$\varphi_{ijk} : U_{ijk} \longrightarrow \widetilde{U}_{ijk}/\Gamma_{ijk}, \quad i < j < k$$

onde todos os $\widetilde{U}_i$'s, $\widetilde{U}_{ij}$'s e $\widetilde{U}_{ijk}$'s são discos e todos os Γ_i's, Γ_{ij}'s e Γ_{ijk}'s são grupos triviais, exceto Γ_1, que é o grupo $\mathbb{Z}_n$, gerado por uma rotação de ângulo $2\pi/n$ em torno de $\varphi_1^{-1}(p) \in \widetilde{U}_1$. A figura 3.2 ilustra o diagrama da definição 3.1 para $U_{12} \subset U_1$ no caso $n = 4$. Note que p é uma singularidade desse orbifold. Trataremos das singularidades dos orbifolds na próxima seção.

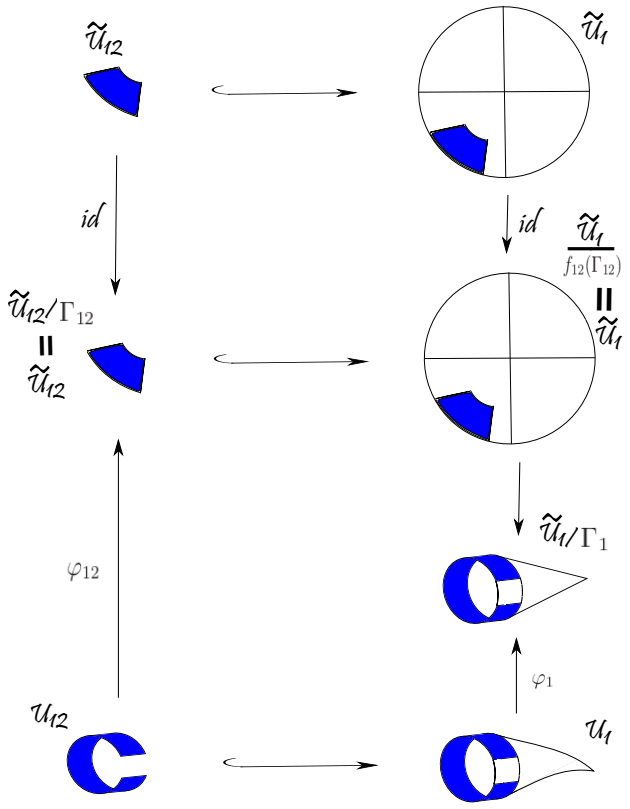


Figura 3.2: Troca de cartas do exemplo 3.5

Proposição 3.6. *Se M é uma variedade e Γ é um grupo agindo de maneira propriamente descontínua sobre M, então M/Γ tem a estrutura de um orbifold.*

Demonstração. Para qualquer ponto $x \in M/\Gamma$, escolha $\widetilde{x} \in M$ que se projeta sobre x. Seja $\Gamma_{\widetilde{x}}$ o grupo de isotropia de $\widetilde{x}$ ($\Gamma_{\widetilde{x}}$ de fato depende da escolha particular de $\widetilde{x}$).

Mostremos que existe uma vizinhança de $\widetilde{x}$ invariante por elementos de $\Gamma_{\widetilde{x}}$ e disjunta de suas translações por elementos fora de $\Gamma_{\widetilde{x}}$.

Como a ação é propriamente descontínua, escolhemos uma vizinhança $\widetilde{V}$ de $\widetilde{x}$ tal que $\gamma(\widetilde{V}) \cap \widetilde{V} \neq \emptyset$ apenas para um número finito de elementos em Γ. Sejam $\{\gamma_1, ..., \gamma_n\}$ aqueles

elementos que não estão em $\Gamma_{\widetilde{x}}$. (Note que isto implica que $\Gamma_{\widetilde{x}}$ é finito, pois, caso contrário, Γ não agiria de maneira propriamente descontínua sobre qualquer vizinhança $\widetilde{V}$ de $\widetilde{x}$.)

Para cada γ_j, sejam V_1 e V_2 conjuntos abertos tais que $\widetilde{x} \in V_1$, $\gamma_j \cdot \widetilde{x} \in V_2$ e $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ (tais conjuntos existem pois M é Hausdorff). Seja $W_j = \widetilde{V} \cap V_1 \cap \gamma_j^{-1}(V_2)$ uma vizinhança de $\widetilde{x}$.

Afirmamos que $W_j \cap \gamma_j(W_j) = \emptyset$. De fato, suponha por absurdo que exista $z \in W_j \cap \gamma_j(W_j)$. Desta forma, como $z \in W_j = \widetilde{V} \cap V_1 \cap \gamma_j^{-1}(V_2)$, segue que $z \in V_1$. Por outro lado, como $z \in \gamma_j(W_j)$, deve existir $w \in W_j = \widetilde{V} \cap V_1 \cap \gamma_j^{-1}(V_2)$ (o que implica $w \in \gamma_j^{-1}(V_2)$) tal que $z = \gamma_j w \in V_2$. Logo, $z \in V_1 \cap V_2$, o que é um absurdo. Portanto, $W_j \cap \gamma_j(W_j) = \emptyset$.

Fazendo $W = \bigcap W_j$ temos uma vizinhança de $\widetilde{x}$ tal que $W \cap \gamma(W) \neq \emptyset$ se, e somente se, $\gamma \in \Gamma_{\widetilde{x}}$.

Consideremos agora a seguinte vizinhança de $\widetilde{x}$: $\widetilde{U} = \bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma_{\widetilde{x}}} \gamma(W)$. Como $\widetilde{U} \subset W$, temos $\widetilde{U} \cap \gamma(\widetilde{U}) = \emptyset$ se $\gamma \notin \Gamma_{\widetilde{x}}$. Por outro lado, se $\sigma \in \Gamma_{\widetilde{x}}$ então $\sigma(\widetilde{U}) = \bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma_{\widetilde{x}}} \sigma\left(\gamma(W)\right) = \bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma_{\widetilde{x}}} (\sigma \cdot \gamma)(W) = \bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma_{\widetilde{x}}} \gamma(W) = \widetilde{U}$. Esta vizinhança de $\widetilde{x}$ tem a propriedade desejada. Podemos supor que $\widetilde{U}$ está contido em alguma carta coordenada, deste modo é homeomorfo a algum conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.

Sejam $Z = \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\widetilde{U})$ e $U_x = Z/\Gamma$. Restringindo esta projeção a $\widetilde{U}$ temos um homeomorfismo entre U_x e $\widetilde{U}/\Gamma_{\widetilde{x}}$ onde a ação de $\Gamma_{\widetilde{x}}$ é a restrição da ação de Γ sobre $\widetilde{U}$.

Nosso próximo passo é mostrar que U_x e suas intersecções finitas formam uma cobertura de M/Γ.

Sejam $U_{x_1}, ..., U_{x_k}$ tais que $U_{x_1} \cap ... \cap U_{x_k} \neq \emptyset$. Isto significa que existem $\gamma_1, ..., \gamma_k \in \Gamma$ tais que $\gamma_1(\widetilde{U}_{x_1}) \cap ... \cap \gamma_k(\widetilde{U}_{x_k}) \neq \emptyset$.

Considere o seguinte subgrupo de Γ:

$$G = \gamma_1 \Gamma_{x_1} \gamma_1^{-1} \cap ... \cap \gamma_k \Gamma_{x_k} \gamma_k^{-1}.$$

Seja $g \in G$, então $g = \gamma_i \sigma_i \gamma_i^{-1}$, onde $\sigma_i \in \Gamma_{x_i}$. Assim,

$$\begin{aligned} g(\gamma_1(\widetilde{U}_{x_1}) \cap ... \cap \gamma_k(\widetilde{U}_{x_k})) &= (g \cdot \gamma_1)(\widetilde{U}_{x_1}) \cap ... \cap (g \cdot \gamma_k)(\widetilde{U}_{x_k}) \\ &= (\gamma_1 \cdot \sigma_1 \cdot \gamma_1^{-1} \cdot \gamma_1)(\widetilde{U}_{x_1}) \cap ... \cap (\gamma_k \cdot \sigma_k \cdot \gamma_k^{-1} \cdot \gamma_1)(\widetilde{U}_{x_k}) \\ &= \gamma_1(\widetilde{U}_{x_1}) \cap ... \cap \gamma_k(\widetilde{U}_{x_k}). \end{aligned}$$

Cálculos semelhantes nos mostram que, para $g \notin G$ temos

$$(\gamma_1(\widetilde{U}_{x_1}) \cap ... \cap \gamma_k(\widetilde{U}_{x_k})) \bigcap g(\gamma_1(\widetilde{U}_{x_1}) \cap ... \cap \gamma_k(\widetilde{U}_{x_k})) = \emptyset.$$

Deste modo, $\frac{\gamma_1(\widetilde{U}_{x_1}) \cap ... \cap \gamma_k(\widetilde{U}_{x_k})}{G}$ é homeomorfo a $U_{x_1} \cap ... \cap U_{x_k}$ com o homeomorfismo dado pela projeção.

Isto conclui a prova.

□

Corolário 3.7. *Todo quociente de uma variedade por uma ação de um grupo finito é um orbifold.*

Demonstração. A demonstração segue diretamente da proposição anterior pois toda ação por um grupo finito é propriamente descontínua.

□

Exemplo 3.8. Se M é uma variedade com bordo, podemos considerar a variedade DM definida como M dobrada ao longo do seu bordo. Assim, $M = DM/\mathbb{Z}_2$ admite uma estrutura de orbifold.

3.2 Singularidades de Orbifolds de Dimensão Dois

Pelo que discutimos na seção anterior, um $n-$orbifold X é um espaço que pode ser localmente olhado como $\mathbb{R}^n/\Gamma$, ou seja, é localmente homeomorfo a um quociente de $\mathbb{R}^n$ pela ação de um grupo finito de homeomorfismos. Vimos também que cada ponto $x \in X$ tem um grupo associado Γ_x, bem-definido a menos de isomorfismo: num sistema de coordenadas locais $U = \widetilde{U}/\Gamma$; o grupo Γ_x é o grupo de isotropia de algum ponto em $\widetilde{U}$ correspondente a x.

O *lugar geométrico dos pontos singulares* de X é o conjunto $\{x \in X : \Gamma_x \neq \{1\}\}$. Além disso, um orbifold é *suave*, ou *diferenciável*, se cada Γ_i age suavemente sobre $\widetilde{U}_i$ e se as aplicações inclusão $\widetilde{\varphi}_{ij}$ são diferenciáveis. No caso suave, tomando a média da métrica euclidiana de $\mathbb{R}^n$ sobre a ação do grupo local, pode-se assumir, sem perda de generalidade, que cada grupo local Γ é um subgrupo do grupo ortogonal $O(n)$. Assim, para 2-orbifolds suaves, Γ é um subgrupo finito de $O(2)$ e sabemos que existem apenas três tipos de subgrupos próprios em $O(2)$; portanto podemos descrever todos os tipos de pontos singulares. No teorema abaixo, listamos os modelos locais de cada um deles. Para isto, vamos supor que cada $\widetilde{U}_i$ seja um disco.

Teorema 3.9. (***Teorema de Classificação):*** *O lugar geométrico dos pontos singulares de um 2-orbifold consiste de três tipos de pontos:*

(i) "pontos de espelho"*:* $\Gamma_i = \mathbb{Z}_2$*, grupo gerado por uma reflexão em um segmento* $l \subset \widetilde{U}_i$ *contendo* x_i*. Nesse caso, dizemos que* l *é uma* linha refletora *(Veja a Figura 3.3);*

(ii) "pontos elípticos de ordem n"*:* $\Gamma_i = \mathbb{Z}_n$*, grupo gerado por uma rotação de ângulo* $\frac{2\pi}{n}$*,* $n > 0$ *inteiro, em torno de* x_i*. Neste caso* x_i *é também chamado de* ponto de cone *de ordem* n *(Veja a Figura 3.4);*

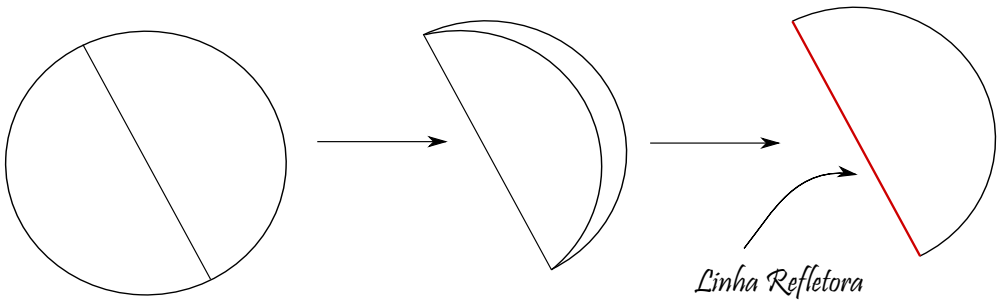


Figura 3.3: Identificação que resulta numa *linha refletora*

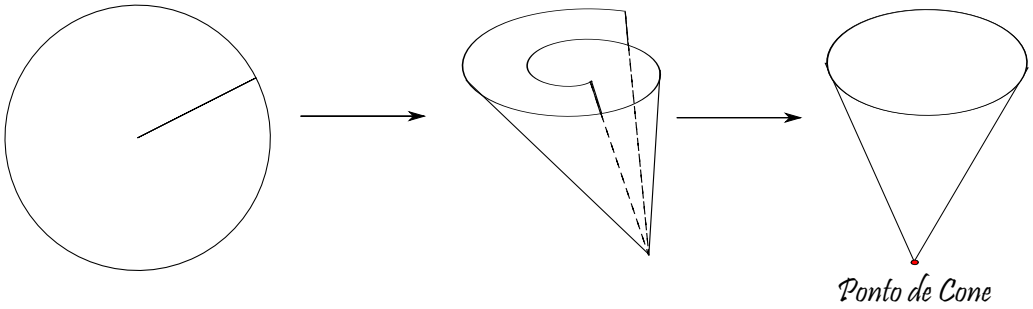


Figura 3.4: Identificação que resulta num *ponto de cone*

(iii) "cantos refletores de ordem n" *ou* "refletores de quina"*:* $\Gamma = D_n$*, onde* D_n *é o grupo diedral de ordem* $2n$*, com representação* $\langle a, b : a^2 = b^2 = (ab)^n = 1\rangle$*, e* a *e* b *são reflexões com respeito às retas fazendo um ângulo de* $\frac{\pi}{n}$ *(Veja a Figura 3.5).*

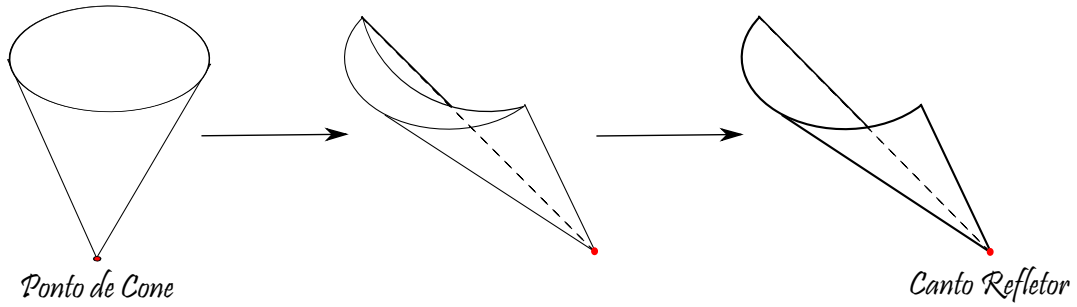


Figura 3.5: Identificação que resulta num *canto refletor*

Demonstração. Se Γ é um grupo finito agindo sobre $\mathbb{R}^2$, então ele deve ser um subgrupo finito de $O(2)$. Todo elemento de $O(2)$ consiste de uma rotação em torno da origem possivelmente composta com uma reflexão.

(i) Se Γ consiste apenas da identidade e de uma reflexão, então temos um ponto de espelho.

(ii) Se Γ não tem elementos invertendo a orientação, então tem apenas rotações. Suponha que ele contenha um elemento γ que é uma rotação de um ângulo α que não é um múltiplo racional de 2π. Então $\gamma^n \neq e$ qualquer que seja $n \neq 0$, mas γ^n pode estar arbitrariamente próximo de e, assim Γ não é finito. Seja γ a rotação de

$\frac{m}{n}2\pi$, onde $\frac{m}{n}$ é irredutível. Então, existem $q, p \in \mathbb{Z}$ tais que $mq - np = 1$, assim γ^q é uma rotação de $\frac{1}{n}2\pi$, que gera todas as rotações da forma $\frac{a}{n}2\pi$. Como Γ é finito, deve existir um n máximo tal que Γ contém a rotação $\frac{1}{n}2\pi$ e este elemento gera Γ. Temos então um ponto de cone de ordem n.

(iii) Se Γ contém rotações e reflexões, então os elementos de Γ que preservam orientação são gerados por um elemento γ, que é a rotação de $\frac{2\pi}{n}$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que Γ contenha um elemento α que é a reflexão sobre o eixo-x. O ponto $\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right), \text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$ é fixado por $\gamma \circ \alpha$. Entretanto, $\left(\cos\left(\frac{(n+1)\pi}{n}\right), \text{sen}\left(\frac{(n+1)\pi}{n}\right)\right)$ não é fixado, assim, $\gamma \circ \alpha = \beta$ deve ser uma reflexão em torno de uma reta que intersecta a origem formando um ângulo $\frac{\pi}{n}$. $\gamma = \beta \circ \alpha$, assim Γ é gerado por α e β e temos o grupo diedral D_n.

□

Note que, se pedimos um 2-orbifold suave, fechado (sem bordo, compacto e conexo) e localmente orientável (isto é, para qualquer x, o grupo Γ_x consiste de homeomorfismos preservando a orientação), teremos apenas pontos de cone. Este é o caso que estamos interessados e no qual focaremos nossa atenção neste trabalho.

De agora em diante, quando dissermos 2-orbifolds estaremos dizendo orbifold 2-dimensional fechado (sem bordo, compacto e conexo), suave e orientável. O Teorema de Classificação 3.9 nos permite enunciar para eles uma definição equivalente e mais simples:

Definição 3.10. Um 2-orbifold fechado (sem bordo, compacto e conexo), orientável $X = \Sigma(p_1, ..., p_n)$ consiste de uma superfície fechada (sem bordo, compacta e conexa) orientável Σ (espaço subjacente) com n pontos de cone de ordens $p_i \geq 2$, em que X tem uma estrutura singular diferenciável dada pelo quociente $\mathbb{C}/_{\langle \text{rot}(2\pi/p_i)\rangle}$.

Exemplo 3.11. A lágrima $S(p)$, os orbifolds do tipo $S(p, q)$ e os *orbifolds triangulares* $S(p, q, r)$ são 2-orbifolds fechados orientáveis, onde S denota a esfera S^2.

Como para espaços topológicos, podemos definir também a importante noção de *recobrimento* para orbifolds. Esta noção foi introduzida por Thurston em [19].

Definição 3.12. Um *recobrimento orbifold* de um orbifold X é um orbifold $\widetilde{X}$ com uma projeção $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ entre os espaços subjacentes com a seguinte propriedade: para todo $x \in X$ existe uma vizinhança $U \cong \widetilde{U}/\Gamma$ ($\widetilde{U}$ é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$) tal que cada componente conexa de $p^{-1}(U)$ é homeomorfa a $\widetilde{U}/\Gamma_i$ para algum subgrupo Γ_i de Γ. Além disso, o homeomorfismo deve respeitar ambas as projeções (p e a canônica entre $\widetilde{U}/\Gamma_i$ e $\widetilde{U}/\Gamma$).

Exemplo 3.13. Se Γ é um grupo que age de modo propriamente descontínuo sobre uma variedade M e $\Gamma_i < \Gamma$, então o orbifold M/Γ_i recobre o orbifold M/Γ.

Em particular, $M \longrightarrow M/\Gamma$ é um recobrimento orbifold.

Definição 3.14. Um recobrimento $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ é chamado de *recobrimento próprio de* X quando, na definição 3.12, pelo menos um dos Γ_i for subgrupo próprio de Γ. Em outras palavras, quando $|\Gamma_i|$ for um divisor próprio de $|\Gamma|$, para algum i. Quando o recobrimento $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ for um recobrimento próprio de X, diremos que X *admite recobrimento próprio*.

Exemplo 3.15. Se Γ é um grupo não trivial que age de modo propriamente descontínuo sobre uma variedade M, então $M \longrightarrow M/\Gamma$ é um recobrimento próprio.

Definição 3.16. Um recobrimento $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ é dito um *recobrimento por d folhas* se, para todo ponto regular $y \in X$, $p^{-1}(y)$ é um conjunto finito com d elementos. Veja a figura 3.6.

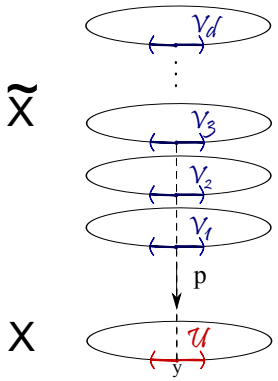


Figura 3.6: Recobrimento por d folhas

Os próximos exemplos serão fundamentais para a caracterização dos orbifolds maus de dimensão 2.

Exemplo 3.17. Para qualquer $d > 0$ inteiro, $S^2(p)$ recobre $S^2(dp, d) = S^2(p)/\mathbb{Z}_d$ por d folhas, mas não possui recobrimento próprio.

Demonstração. Este resultado seguirá como um caso particular do exemplo 3.18.

□

Exemplo 3.18. Para qualquer $d > 0$ inteiro, $S^2(p, q)$, p e q primos entre si, recobre $S^2(dp, dp) = S^2(p)/\mathbb{Z}_d$ por d folhas e não possui recobrimento próprio.

Demonstração. De fato, seja $p : \widetilde{X} \longrightarrow S^2(p, q)$ um recobrimento de grau d. Seja $\widetilde{\Sigma}$ a superfície subjacente a $\widetilde{X}$ e sejam $\widetilde{p}_1, ..., \widetilde{p}_n$ os pontos de cone de $\widetilde{X}$. Assim, pela característica de Euler para superfícies temos que

$$\chi\left(\widetilde{\Sigma} \setminus \{\widetilde{p}_1, ..., \widetilde{p}_n\}\right) = d \cdot \chi\left(S^2 \setminus \{p, q\}\right) = 0.$$

Desta forma, $\widetilde{\Sigma} \setminus \{\widetilde{p}_1, ..., \widetilde{p}_n\} \cong$ cilindro. Logo, $n = 2$ e $\widetilde{\Sigma} = S^2$. Além disso, para que o recobrimento seja próprio devemos ter $p = k \cdot \widetilde{p}_1$ e $q = h \cdot \widetilde{p}_2$ para algum $k, h \in \mathbb{Z}$.

Neste caso teríamos $d = k = h$ e, assim, p e q apresentam um fator comum ($\neq 1$) em sua decomposição.

Portanto, se p e q são primos entre si, então $S^2(p, q)$ não admite recobrimento próprio. Além disso, pelo que fizemos acima fica claro que, qualquer que seja $d > 0$, $S^2(p, q)$, p e q primos entre si, recobre $S^2(dp, dp) = S^2(p)/\mathbb{Z}_d$ por d folhas.

Finalmente, observe que tomando $q = 1$ obtemos o resultado enunciado no exemplo 3.17.

□

Veremos adiante que $S^2(p)$ e $S^2(p, q)$, p e q primos entre si, juntamente com as superfícies simplesmente conexas, são os únicos orbifolds (sem bordo) de dimensão dois que não possuem recobrimento próprio.

A próxima definição é equivalente à definição 3.16 para 2-orbifolds suaves, fechados (sem bordo, compactos e conexos) e orientáveis.

Definição 3.19. Um recobrimento $f : \widetilde{X} \longrightarrow X$ de grau d entre 2-orbifolds suaves, fechados (sem bordo, compactos e conexos) e orientáveis é uma aplicação tal que $f^{-1}(x)$ consiste genericamente de d pontos e localmente fazendo um diagrama comutativo da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}, 0) & \xrightarrow{id} & (\mathbb{C}, 0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\widetilde{X}, \widetilde{x}) & \xrightarrow{f} & (X, x), \end{array}$$

onde $\widetilde{x}$ e x têm ordens de cone $\widetilde{p}$ e $p = k \cdot \widetilde{p}$ respectivamente, e as setas verticais são as projeções correspondentes pelas ações de $\langle \mathrm{rot}(2\pi/\widetilde{p}) \rangle$ e $\langle \mathrm{rot}(2\pi/p) \rangle$, a saber as aplicações definindo estruturas diferenciais locais (possivelmente singulares) em $\widetilde{x}$ e x.

Antes de prosseguirmos, vamos dar a seguinte definição:

Definição 3.20. Um orbifold é *bom* se tem um recobrimento orbifold que é uma variedade. Caso contrário, é *mau*.

Exemplo 3.21. Toda variedade é um orbifold bom pois é trivialmente recoberta por ela mesma.

Exemplo 3.22. A *lágrima* é um orbifold mau. Recorde do exemplo 3.5 que a lágrima tem S^2 como seu espaço subjacente e $\{x \in X : \Gamma_x \neq \{1\}\}$ consiste de um único ponto singular cuja vizinhança é homeomorfa a $U/\mathbb{Z}_n$, onde U é uma vizinhança da origem de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{Z}_n$ age por rotações em torno da origem.



Figura 3.7: Lágrima

Este fato já foi demonstrado nos exemplos 3.17 e 3.18. Adiante introduzimos algumas ferramentas que nos ajudarão a concluir, de maneira mais simples, que a lágrima e outros orbifolds são maus.

Juntamente com a noção de recobrimento orbifold Thurston introduziu a *característica de Euler orbifold*, que será vista na próxima seção, designando que se $f : \widetilde{X} \xrightarrow{d:1} X$ é um recobrimento orbifold, então $\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X}) = d \cdot \chi^{\text{orb}}(X)$.

3.3 Característica de Euler Orbifold

O objetivo desta seção é definir uma importante ferramenta introduzida por Thurston que nos permitirá classificar os 2-orbifolds suaves: a generalização da *característica de Euler* clássica.

Definição 3.23. Seja X um orbifold e considere a decomposição celular (triangulação no caso 2-dimensional) da superfície subjacente Σ de X tal que o grupo de isotropia dos pontos interiores de cada célula é constante. Definimos a *característica de Euler orbifold*, $\chi^{\text{orb}}(X)$, pela seguinte fórmula:

$$\chi^{\text{orb}}(X) := \sum_{c} (-1)^{\dim(c)} \frac{1}{|\Gamma(c)|}$$

onde c é a imagem sobre as células e $\Gamma(c)$ é o grupo de isotropia associado a cada ponto da célula c.

A característica de Euler orbifold é também chamada de *número de Euler* de X, e será útil na classificação geométrica dos 2-orbifolds.

Teorema 3.24. *Se $f : \widetilde{X} \xrightarrow{d:1} X$ é um recobrimento entre orbifolds, então*

$$\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X}) = d \cdot \chi^{\text{orb}}(X). \tag{3.1}$$

Demonstração. Sejam $x \in X$ e $U \cong V/\Gamma_x$ uma vizinhaça recoberta de x. Seja y um ponto regular em U, que corresponde a $|\Gamma_x|$ pontos em V.

Cada pré-imagem de y por p está numa vizinhança de uma pré-imagem de x da forma $V/\Gamma_{\widetilde{x}}$. Desta forma, em cada uma dessas vizinhanças existem $\dfrac{|\Gamma_x|}{|\Gamma_{\widetilde{x}}|}$ pré-imagens de y. Calculando o número total de pré-imagens de y temos:

$$d = \sum_{\widetilde{x}:f(\widetilde{x})=x} \left(\frac{|\Gamma_x|}{|\Gamma_{\widetilde{x}}|}\right) \Longleftrightarrow \frac{d}{|\Gamma_x|} = \sum_{\widetilde{x}:f(\widetilde{x})=x} \frac{1}{|\Gamma_{\widetilde{x}}|}.$$

Observe que podemos construir uma decomposição celular em $\widetilde{X}$ tomando as pré-imagens de uma decomposição celular em X. Portanto,

$$d \cdot \chi^{\text{orb}}(X) = \sum_c (-1)^{\dim(c)} \frac{d}{|\Gamma(c)|} = \sum_{\widetilde{c}:f(\widetilde{c})=c} (-1)^{\dim(c)} \frac{1}{|\Gamma(\widetilde{c})|} = \chi^{\text{orb}}(\widetilde{X}).$$

□

O próximo teorema nos dá uma fórmula geral para a característica de Euler orbifold de um 2-orbifold suave X com m cantos refletores e n pontos de cone conhecidas as suas respectivas ordens. Esta fórmula será muito útil na hora de encontrarmos candidatos a recobrimentos entre orbifolds.

Teorema 3.25. *Seja X um 2-orbifold suave X com espaço subjacente Σ. Se X tem m cantos refletores de ordens $k_1, k_2, ..., k_m$ e n pontos elípticos de ordens $p_1, p_2, ..., p_n$, então:*

$$\chi^{\text{orb}}(X) := \chi(\Sigma) - \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{k_j}\right) \tag{3.2}$$

Demonstração. Para cada ponto de cone de ordem p_i adicionamos um ponto (célula 0-dimensional) com o grupo $\mathbb{Z}_{p_i}$. Isto significa que a adição de tal ponto de cone corresponde a uma diminuição da característica de Euler de $1 - \dfrac{1}{p_i}$.

Para cada canto refletor de ordem k_j adicionamos um ponto com o grupo D_{k_j} (grupo diedral que tem ordem $2k_j$) e uma célula do tipo espelho 1-dimensional com o grupo $\mathbb{Z}_2$ associado. Deste modo, a adição de tal canto refletor corresponde a uma diminuição da característica de Euler de $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2k_j}$.

Adicionando os m cantos refletores e os n pontos de cone e utilizando o raciocínio acima para cada um deles obtemos a fórmula 3.2.

□

Teorema 3.26. ***(Teorema de Classificação de Superfícies Compactas):*** *Toda superfície compacta e conexa M ou é homeomorfa a esfera, ou é uma soma conexa de toros ou é uma soma conexa de planos projetivos. Além disso, $\chi(S^2) = 2$, $\chi(\underbrace{T\#...\#T}_{n \text{ vezes}}) = 2-2n$ e $\chi(\underbrace{\mathbb{R}P^2\#...\#\mathbb{R}P^2}_{n \text{ vezes}}) = 1 - n$.*

Corolário 3.27. *A* Lágrima *é um orbifold mau.*

Demonstração. A Lágrima $S^2(p)$ possui um único ponto de cone (de ordem $p \geq 2$). Assim,

$$\chi^{\text{orb}}(S^2(p)) = \chi(S^2) - \left(1 - \frac{1}{p}\right) = 1 + \frac{1}{p} = \frac{p+1}{p}.$$

Se a Lágrima fosse recoberta por uma variedade M, então, pela fórmula 3.1 teríamos $\chi(M) = d \cdot \left(\frac{p+1}{p}\right)$ e M tem que ser compacta. Como a característica de Euler é um inteiro para variedades, segue que p divide d. Desta forma, $\chi(M) \geq p + 1 \geq 3$, o que é impossível pelo Teorema de Classificação de Superfícies Compactas 3.26.

□

Observe que esta demonstração utilizando a característica de Euler orbifold é muito mais fácil do que aquela apresentada para os exemplos 3.17 e 3.18. Além disso, a característica de Euler orbifold nos permitirá explorar mais a fundo a geometria dos 2-orbifolds.

Nossos próximos resultados vão na direção de prover essas estruturas geométricas.

Definição 3.28. Seja G um grupo topológico agindo em um espaço topológico X. Uma região fundamental de G é um subconjunto fechado $F \subset X$ tal que

$$\bigcup_{g \in G} (g \cdot F) = X$$

e

$$\overset{\circ}{F} \cap \left(g \cdot \overset{\circ}{F}\right) = \emptyset,$$

onde $\overset{\circ}{F}$ é o interior de F, e o fecho de $\overset{\circ}{F}$ é F.

Lema 3.29. *Sejam $p, q, r > 1$ números inteiros. Então, $S(p, q, r)$ possui recobrimento próprio.*

Demonstração. Observe que, pelo teorema 3.25,

$$\chi^{\text{orb}}(S(p,q,r)) = \chi(S) - \left[\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \left(1 - \frac{1}{q}\right) + \left(1 - \frac{1}{r}\right)\right] = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1.$$

Deste modo, temos três casos a considerar:

(1) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1.$

Neste caso, podemos encontrar retas r_1, r_2, r_3 em $\mathbb{R}^2$ determinando um triângulo cujos ângulos internos medem $\frac{\pi}{p}$, $\frac{\pi}{q}$ e $\frac{\pi}{r}$. Considere Γ o grupo gerado pelas reflexões sobre cada uma dessas três retas. A ação de Γ em $\mathbb{R}^2$ nos dá um ladrilhamento de $\mathbb{R}^2$ por triângulos euclidianos congruentes, veja a figura 3.8.

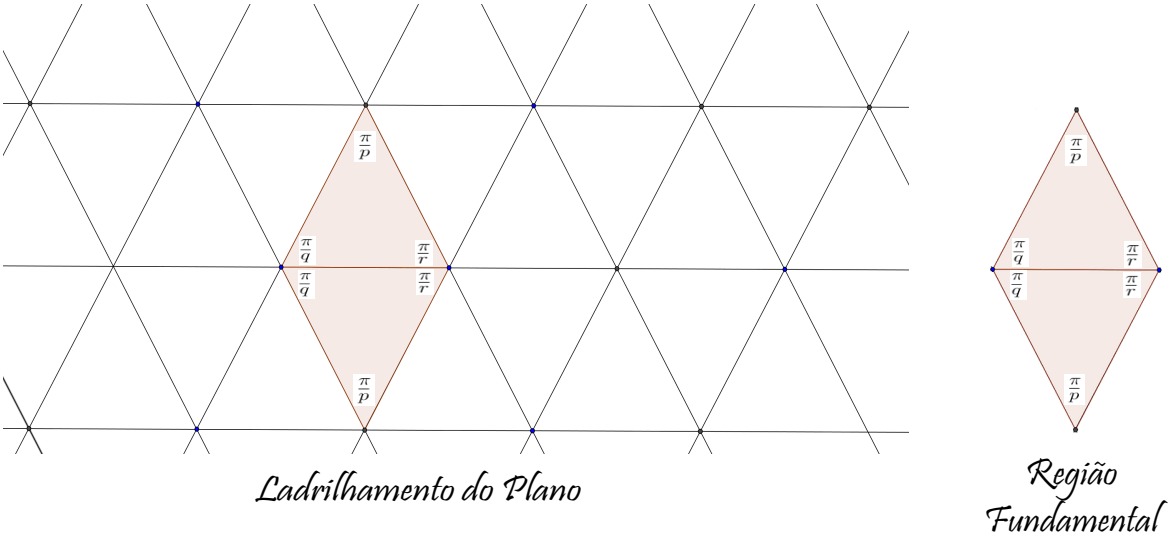


Figura 3.8: Ladrilhamento de $\mathbb{R}^2$ pela região fundamental do quociente $\mathbb{R}^2/\Gamma'$

Cada um desses triângulos é uma região fundamental de $\mathbb{R}^2/\Gamma$. Se $\Gamma' < \Gamma$ é o subgrupo dos elementos que preservam orientação, então qualquer união de dois triângulos com um lado em comum é uma região fundamental de $\mathbb{R}^2/\Gamma'$. De fato, os únicos valores possíveis para (p, q, r) neste caso são $(3, 3, 3)$, $(2, 3, 6)$ e $(2, 4, 4)$.

(2) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$.

Neste caso, podemos encontrar três geodésicas em S^2 (retas na geometria elíptica) determinando um triângulo elíptico cujos ângulos internos medem $\frac{\pi}{p}$, $\frac{\pi}{q}$ e $\frac{\pi}{r}$. Seja Γ o grupo gerado pelas reflexões em cada uma dessas três geodésicas. A ação de Γ em S^2 nos dá um ladrilhamento de S^2 por triângulos elípticos congruentes, veja a figura 3.9.

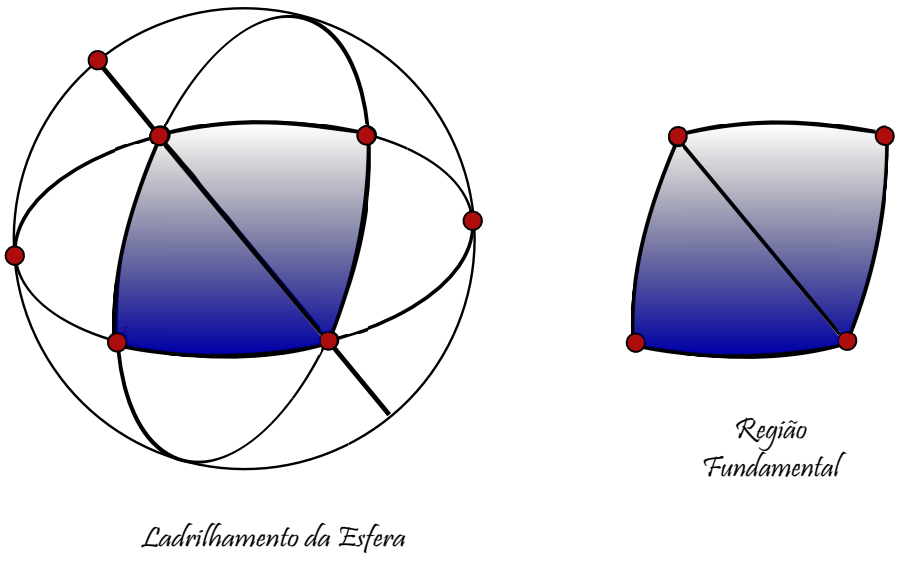


Figura 3.9: Ladrilhamento de S^2 pela região fundamental do quociente $\mathbb{R}^2/\Gamma'$

Cada um desses triângulos é uma região fundamental de S^2/Γ. Se $\Gamma' < \Gamma$ é o subgrupo dos elementos que preservam orientação, então qualquer união de dois desses triângulos com um lado em comum é uma região fundamental de $\mathbb{R}^2/\Gamma'$. De fato, os únicos valores possíveis para (p, q, r) neste caso são $(2, 2, p)$, para qualquer $p \in \mathbb{Z}$ positivo, $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$ e $(2, 3, 5)$.

(3) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1.$

Neste caso, podemos encontrar três geodésicas (retas na geometria hiperbólica) em H^2, o plano hiperbólico, determinando um triângulo hiperbólico cujos ângulos internos medem $\frac{\pi}{p}$, $\frac{\pi}{q}$ e $\frac{\pi}{r}$. Seja Γ o grupo gerado pelas reflexões em cada uma dessas três geodésicas. A ação de Γ em H^2 nos dá um ladrilhamento de H^2 por triângulos hiperbólicos congruentes. A figura 3.10 é uma ilustração de Maurits Cornelis Escher, na qual destacamos dois de seus triângulos para representar a região fundamental de um ladrilhamento de H^2 no modelo de disco de Poincaré.

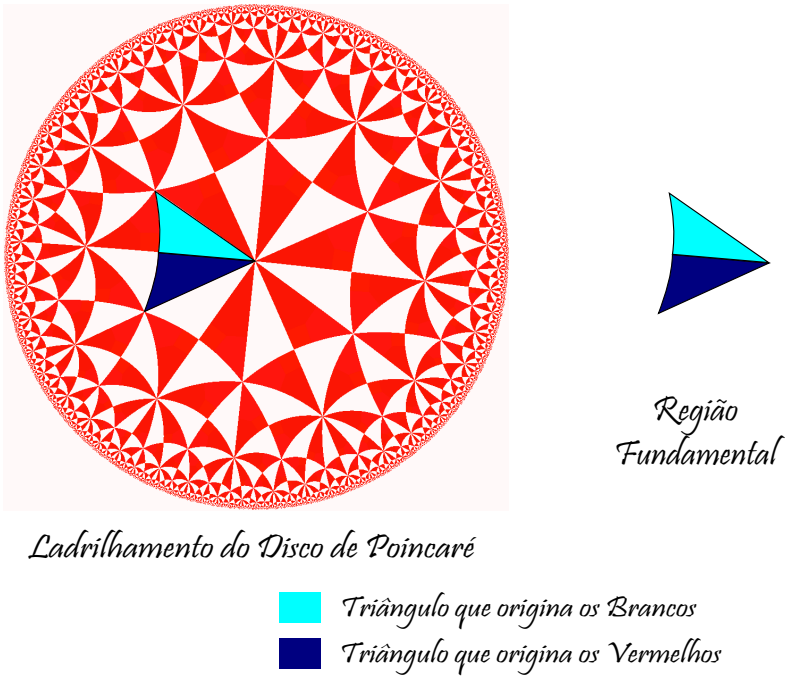


Figura 3.10: Ladrilhamento de H^2 pela região fundamental do quociente $\mathbb{R}^2/\Gamma'$

□

O teorema a seguir nos diz quais são os orbifolds de dimensão 2 que não admitem recobrimento próprio. Ele nos fornecerá ferramentas para caracterizar todos os orbifolds maus de dimensão 2.

Teorema 3.30. *Os únicos orbifolds de dimensão dois que não admitem recobrimento próprio são:*

(i) S^2;

(ii) $S^2(p)$;

(iii) $S^2(p,q)$, *com* p *e* q *primos entre si;*

(iv) $\mathbb{R}^2$.

Demonstração. Seja X um orbifold de dimensão 2 que não admite recobrimento próprio. Afirmamos que X não possui linha refletora. De fato, se X possuísse uma linha refletora, esta linha seria bordo de Σ (a superfície subjacente de X). Sendo assim, poderíamos dobrar Σ ao longo do seu bordo, obtendo um recobrimento duplo $D\Sigma$ de Σ. Esse recobrimento induziria um recobrimento de X por um orbifold com espaço subjacente $D\Sigma$, conforme vimos no exemplo 3.8. Logo, X admitiria um recobrimento próprio, o que é absurdo.

Se X possuir três (ou mais) pontos de cone, considere $\overline{D} \subset X$ um disco fechado contendo três pontos de cone em seu interior e nenhum outro ponto de cone em $\overline{D}$. Note que $\overline{D}$ é isomorfo a $S^2(p,q,r)$ menos um disco aberto que não contém pontos de cone. Vimos, no lema 3.29, que $S^2(p,q,r)$ pode ser recoberto por E^2, S^2 ou E^2. Deste modo, $\overline{D}$ pode ser recoberto por E^2, S^2 ou H^2 menos uma quantidade enumerável de discos abertos que não contém pontos de cone. Seja S uma tal superfície que recobre $\overline{D}$. Colando uma cópia de $X \setminus \overline{D}$ em cada componente do bordo de S, obtemos um orbifold $\widetilde{X}$ que será um recobrimento próprio de X. Portanto, X terá, no máximo, 2 pontos de cone e, como Σ é simplesmente conexo, devemos ter $\Sigma = S^2$ ou $\Sigma = \mathbb{R}^2$.

Se $\Sigma = S^2$ temos três casos a considerar:

1. $X = S^2$.

   Neste caso, como S^2 é uma variedade, o único grupo agindo sobre S^2 é o trivial. Assim, segue da definição 3.14 que S^2 não admite recobrimento próprio.

2. $X = S^2(p)$.

   Neste caso X também não admite recobrimento próprio, como já vimos no exemplo 3.17.

3. $X = S^2(p,q)$.

   Observe que, se p e q são primos entre si, então, pelo exemplo 3.18, $S(p,q)$ não admite recobrimento próprio. Por outro lado, se p e q não são primos entre si, deve existir $d \in \mathbb{Z}$ que divide p e q. Então o exemplo 3.18 nos diz que $S^2\left(\frac{p}{d}, \frac{q}{d}\right)$ recobre $S^2(p,q)$ por d folhas.

Para $\Sigma = \mathbb{R}^2$ temos dois casos:

1) $X = \mathbb{R}^2$.

   Então, o único grupo agindo sobre X é o grupo trivial e, portanto, X não admite recobrimento próprio.

2) X possui algum ponto de cone.

   Neste caso, X admitirá recobrimento próprio.

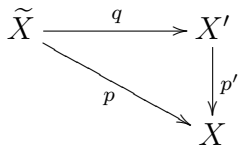
Isto conclui a prova.

□

Como para espaços topológicos, podemos definir o *recobrimento universal* de um orbifold.

Definição 3.31. Um orbifold conexo $\widetilde{X}$ é um *recobrimento universal* de X se existe uma projeção $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ com pontos bases não-singulares $\widetilde{x}$ e $x = p(\widetilde{x})$ que tem a propriedade universal, isto é, se $p' : X' \longrightarrow X$ é um recobrimento orbifold com $x = p'(x')$ então existe um recobrimento $q : \widetilde{X} \longrightarrow X'$ tal que $q(\widetilde{x}) = x'$ e $p' \circ q = p$.

Em outras palavras, o diagrama



comuta.

Teorema 3.32. *Todo orbifold possui um recobrimento universal.*

Observação 3.33. O teorema acima é válido em geral, no entanto, apresentaremos a prova apenas para dimensão 2, que é onde trabalharemos.

Demonstração. Suponhamos que X tenha n pontos de cone de ordens $p_1, ..., p_n$ como únicas singularidades. Nosso objetivo é construir o recobrimento universal $(\widetilde{X}, p)$ de X.

Para isto, vamos remover de Σ, exatamente, n discos abertos disjuntos, contendo, cada um, somente um ponto de cone, obtendo assim uma variedade N cujo bordo é uma união de círculos $C_1, ..., C_n$.

Sejam $\alpha_1, ..., \alpha_n$ os elementos de $\pi_1(N)$ representados por $C_1, ..., C_n$ respectivamente. Se $G = \langle \pi_1(N); \alpha_i^{m_i} = 1, i = 1, ...n \rangle$, então o núcleo K da projeção natural $\pi_1(N) \longrightarrow G$ é um subgrupo normal de $\pi_1(N)$ gerado por todos os conjugados de elementos $\alpha_i^{m_i}, i = 1, ..., n$.

Assim, podemos encontrar um recobrimento $(\widetilde{N}, p)$ de N (no sentido usual), tal que $p_*\pi_1(\widetilde{N}) = K$ (veja [11], p.175). Colando cones apropriados nas componentes do bordo de $\widetilde{N}$, temos um recobrimento $(\widetilde{X}, p)$ de X, onde estamos usando p tanto para a aplicação definida em N quanto para a sua extensão a $\widetilde{X}$.

Se (X', p') é outro recobrimento de X, então cada círculo C_i em Σ é levantado a uma curva fechada em X'. Seja $N' = p'^{-1}(N)$. Então $p'_*\pi_1(N') \supset K$, de forma que $(\widetilde{N}, p)$ é levantado a (N', p') ([11], p.159). Vemos facilmente que esse levantamento pode ser estendido a um levantamento de $(\widetilde{X}, p)$ a (X', p'). Logo, $(\widetilde{X}, p)$ é recobrimento universal de X.

Se X possuir uma linha refletora l, considere (X_2, q) o recobrimento por duas folhas de X obtido dobrando-se Σ ao longo do seu bordo.

Afirmamos que se $(\widetilde{X}_2, p)$ é recobrimento universal de X_2, então $(\widetilde{X}_2, q \circ p)$ é recobrimento universal de X. Seja (X', q') outro recobrimento de X.

Queremos encontrar um levantamento

$$\phi : (\widetilde{X}_2, q \circ p) \longrightarrow (X', q').$$

Podemos supor que X' não possui linha refletora. Seja $l' \subset X'$ uma componente de $q^{-1}(l)$. Não é difícil ver que l' divide X' em duas componentes homeomorfas. Logo, temos recobrimento (X', p') de X_2 tal que $q \circ p' = q'$. Mas, por hipótese, existe levantamento

$$f : (\widetilde{X}_2, p) \longrightarrow (X', p')$$

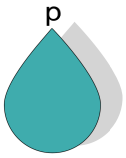
Como $q \circ p' = q'$, ϕ é levantamento de $(\widetilde{X}_2, q \circ p)$ a (X', q').

□

Observação 3.34. Pelo teorema 3.32 acima, todo orbifold admite recobrimento universal. Além disso, pela definição 3.31 de recobrimento universal, se $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ é um recobrimento universal de X, então $\widetilde{X}$ não admite recobrimento próprio, caso contrário, $\widetilde{X}$ não seria recobrimento universal de X. Portanto, pelo teorema 3.30, todo 2-orbifold deve admitir como recobrimento universal um dos seguintes orbifolds: S^2, $S^2(p)$, $S^2(p, q)$ (com p e q primos entre si) ou $\mathbb{R}^2$.

Feita esta observação podemos enunciar o seguinte:

Teorema 3.35. *Os únicos orbifolds maus de duas dimensões são do seguinte tipo:*

	Superfície Subjacente	Pontos de Cone	Refletores de Canto	Representação
(i)	S^2	$(p), p \neq 1$	-	
(ii)	S^2	$(p, q), p \neq q$	-	
(iii)	D^2	-	$(p), p \neq 1$	
(iv)	D^2	-	$(p, q), p \neq q$	

Os inteiros nos parênteses denotam os ângulos nos pontos singulares. Para um ponto de cone, (p) *denota um ângulo* $\frac{2\pi}{p}$*. Para refletores de canto,* (p) *denota um ângulo* $\frac{\pi}{p}$*.*

Demonstração. Pela observação 3.34, dado X um 2-orbifold, seu espaço de recobrimento (orbifold) $\widetilde{X}$ deve ser S^2, $S^2(p)$, $S^2(p, q)$ (com p e q primos entre si) ou $\mathbb{R}^2$. Se X é mau, então descartamos $\widetilde{X} = S^2$ e $\widetilde{X} = \mathbb{R}^2$, já que são variedades.

Concluímos a prova afirmando que os únicos 2-orbifolds recobertos por $S^2(p)$ e $S^2(p, q)$ (com p e q primos entre si) são os listados no enunciado deste teorema.

□

Definição 3.36. Dizemos que um orbifold é *Riemanniano* se sobre cada $\widetilde{U}_i$ existe uma métrica Riemanniana, se cada Γ_i age isometricamente e se as aplicações inclusão são isometrias.

Teorema de Geometrização: Seja X um 2-orbifold Riemanniano fechado e denote por $|X|$ a superfície subjacente a X. Então a curvatura K de X é definida sobre $|X|$, exceto nos pontos de cone e uma versão clássica da fórmula de Gauss-Bonnet é válida:

$$\int_{|X|} K dA = 2\pi\chi^{\text{orb}}(X).$$

Se X tem uma estrutura hiperbólica, euclidiana ou elíptica, isto implica que $\chi^{\text{orb}}(X)$ deve ser respectivamente, negativa, zero ou positiva; (e a área é $A(X) = 2\pi|\chi^{\text{orb}}(X)|$,

quando X é elíptico ou hiperbólico). Além disso, no caso de 2-orbifold conexo diferenciável Thurston mostrou que:

- Se $\chi^{\text{orb}}(X) > 0$, então X ou é *mau* (não recoberto por uma superfície no sentido de orbifolds) ou é *esférico*, a saber quociente da 2-esfera métrica $\mathbb{S}$ sobre uma ação isométrica finita.
- Se $\chi^{\text{orb}}(X) = 0$, então X é *euclidiano*, a saber o quociente do plano euclidiano $\mathbb{E}$ sobre uma ação isométrica discreta.
- Se $\chi^{orb}(X) < 0$, então X é *hiperbólico*, a saber o quociente do plano hiperbólico $\mathbb{H}$ sobre uma ação isométrica discreta.

Lema 3.37. *Se $\widetilde{X}$ é mau e X é bom, então não pode existir um recobrimento entre orbifolds $\widetilde{X} \to X$.*

Demonstração. De fato, suponhamos por absurdo que $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ seja um recobrimento orbifold entre $\widetilde{X}$ (mau) e X (bom). Como X é bom, X é recoberto por uma variedade M, ou seja, existe um recobrimento $p' : M \longrightarrow X$ onde M é uma variedade. Além disso, pelo Teorema 3.32, X admite um recobrimento universal $p_U : \widetilde{X}' \longrightarrow X$.

Mostremos que $\widetilde{X}'$ deve ser uma variedade. De fato, pela definição 3.31, sendo $p_U : \widetilde{X}' \longrightarrow X$ recobrimento universal e $p' : M \longrightarrow X$ outro recobrimento de X, deve existir um recobrimento $q : \widetilde{X}' \longrightarrow M$ tal que $p' \circ q = p_U$. Além disso, vimos no exemplo 3.21 que toda variedade é um orbifold onde o único grupo agindo é o grupo trivial. Logo, sendo $q : \widetilde{X}' \longrightarrow M$ um recobrimento orbifold, o único grupo agindo sobre $\widetilde{X}'$ deverá ser o grupo trivial. Portanto, $\widetilde{X}'$ é uma variedade.

Do mesmo modo, sendo $p_U : \widetilde{X}' \longrightarrow X$ recobrimento universal e $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ outro recobrimento de X, deve existir um recobrimento $q' : \widetilde{X}' \longrightarrow \widetilde{X}$ tal que $p \circ q' = p_U$. Mas, como $q' : \widetilde{X}' \longrightarrow \widetilde{X}$ é um recobrimento de $\widetilde{X}$ e $\widetilde{X}'$ é uma variedade, segue que $\widetilde{X}$ é bom. Absurdo!

Portanto segue o lema.

□

Os resultados permitem-nos dar uma *classificação topológica* de 2-orfifolds de acordo com a sua geometria. Classificamos abaixo todos os orbifolds maus, elípticos e euclidianos:

- **Mau:** $S^2(n)$, $S^2(n,m)$, $(2 \leq n < m)$;
- **Elíptico:** S^2, $S^2(n,n)$, $S^2(2,2,n)$, $S^2(2,3,3)$, $S^2(2,3,4)$, $S^2(2,3,5)$, $(n \geq 2)$;
- **Euclidiano:** T^2, $S^2(2,3,6)$, $S^2(2,4,4)$, $S^2(3,3,3)$, $S^2(2,2,2,2)$.

Os orbifolds não listados aqui são todos hiperbólicos. Tendo em mente que $\chi^{\text{orb}}(\Sigma(p_1,...,p_n)) \leq \chi(\Sigma)$, deduzimos imediatamente que o conjunto de 2-orbifolds hiperbólicos é infinito.

3.4 Estruturas Geométricas

Nesta seção trabalharemos algumas ideias geométricas que serão cruciais nas demonstrações dos principais resultados apresentados para os casos de características de Euler positiva e nula. Nestes casos a geometria de um orbifold com pontos de cone é *rígida* (a menos de reescala), com uma única exceção em $S(2,2,2,2)$, que trabalharemos de modo distinto.

Trabalharemos também o caso de característica de Euler negativa, que é completamente diferente. Sabe-se que um 2-orbifold hiperbólico é *rígido* se, e somente se, ele for *triangular*, a saber, se é baseado sobre a esfera e tem precisamente três pontos de cone. A análise geométrica de todos os outros orbifolds hiperbólicos é extremamente difícil e, desta forma, outras ferramentas são utilizadas para estudá-los.

Estruturas Esféricas

Como mencionado na seção anterior, qualquer 2-orbifold bom e fechado X, com $\chi^{\text{orb}}(X) > 0$, tem uma estrutura esférica dada pela ação de algum grupo finito Γ de isometrias sobre a esfera métrica $\mathbb{S}$. Nosso objetivo agora é descrever explicitamente cada Γ relevante e, deste modo, identificar X com o quociente $\mathbb{S}/\Gamma$. Para isto, consideramos $\mathbb{S}$ sendo sempre a esfera unitária em $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$.

A "Bola de Futebol Americano"

A geometria de $S(p,p)$ é muito fácil. Considere em $\mathbb{S}$ um "gomo" com vértices nos polos $(0, \pm 1)$ e bordas passando por $(1,0)$ e $(e^{i\pi/p}, 0)$. Desta forma, o ângulo entre suas bordas tem amplitude de π/p. Defina então $\widetilde{\Gamma}_{(p,p)}$ como o grupo de isometrias de $\mathbb{S}$ gerado pelas reflexões nas bordas do gomo, e $\Gamma_{(p,p)}$ como o seu subgrupo de isometrias preservando orientação. Então $\Gamma_{(p,p)}$ é gerado pela rotação de ângulo $2\pi/p$ ao redor dos polos $(0, \pm 1)$ e uma região fundamental para $\Gamma_{(p,p)}$ é a união de quaisquer dois gomos com uma borda em comum. Portanto, $S(p,p) = \mathbb{S}/\Gamma_{(p,p)}$. Veja a figura 3.11.

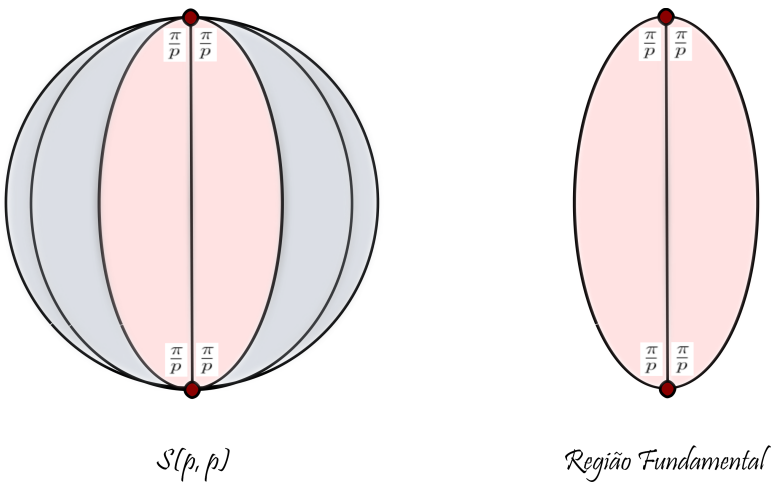


Figura 3.11: Ladrilhamento de $\mathbb{S}$ pela região fundamental de $\Gamma_{(p,p)}$.

Orbifolds Triangulares

Todos os outros 2-orbifolds esféricos são da forma $S(2,q,p)$ com ou $q=2$ ou $q=3$ e $p=3,4,5$. Eles são chamados de *orbifolds triangulares*. O grupo correspondente $\Gamma_{(2,q,p)}$ é o subgrupo dos elementos que preservam orientação do grupo $\widetilde{\Gamma}_{(2,q,p)}$ gerado por reflexões nas bordas de um triângulo $\Delta_{(2,q,p)}$ de ângulos internos $\pi/2$, π/q e π/p. Sendo assim, uma região fundamental de $\Gamma_{(2,q,p)}$ será a união de $\Delta_{(2,q,p)}$ com sua imagem sobre qualquer das reflexões em seus lados, e $\Gamma_{(2,q,p)} = \langle \alpha, \beta, \gamma : \alpha^2 = \beta^q = \gamma^p = \alpha\cdot\beta\cdot\gamma = 1\rangle$, onde α, β, γ são rotações centradas nos vértices de $\Delta_{(2,q,p)}$.

O principal ponto aqui é que de fato os triângulos $\Delta_{(2,q,p)}$ existem em $\mathbb{S}$.

A figura 3.12 nos mostra o ladrilhamento da esfera $\mathbb{S}$ pelo grupo $\Gamma_{(2,2,p)}$.

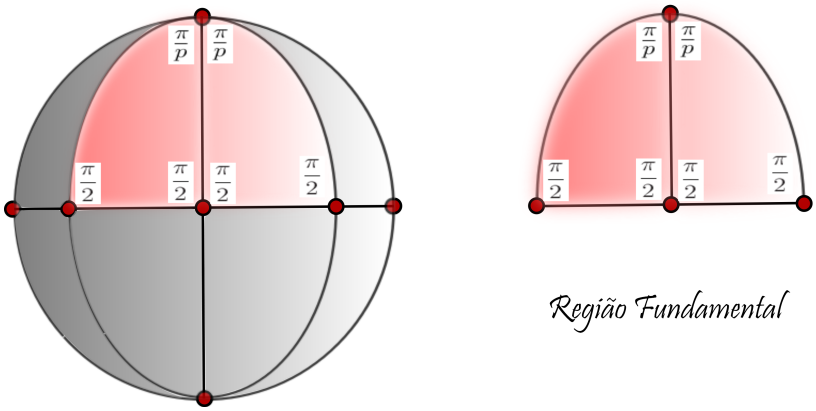


Figura 3.12: Ladrilhamento de $\mathbb{S}$ pela região fundamental de $\Gamma_{(2,2,p)}$.

A figura 3.13 nos mostra o ladrilhamento da esfera $\mathbb{S}$ pelo grupo $\Gamma_{(2,3,3)}$.

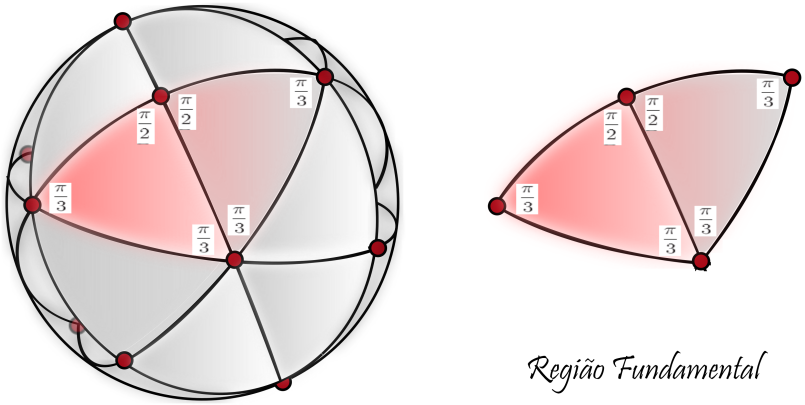


Figura 3.13: Ladrilhamento de $\mathbb{S}$ pela região fundamental de $\Gamma_{(2,3,3)}$.

A figura 3.14 nos mostra o ladrilhamento da esfera $\mathbb{S}$ pelo grupo $\Gamma_{(2,3,4)}$.

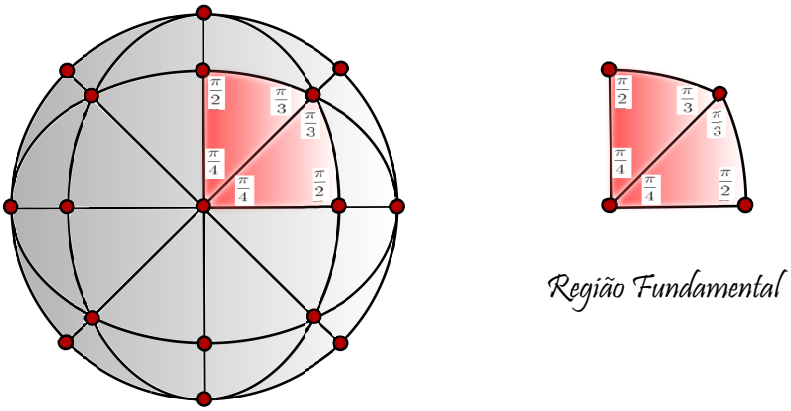


Figura 3.14: Ladrilhamento de $\mathbb{S}$ pela região fundamental de $\Gamma_{(2,3,4)}$.

A figura 3.15 nos mostra o ladrilhamento da esfera $\mathbb{S}$ pelo grupo $\Gamma_{(2,3,5)}$.

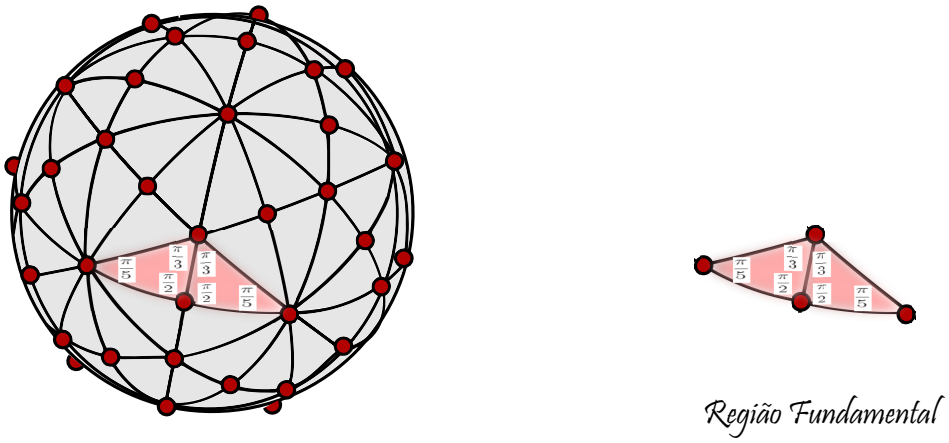


Figura 3.15: Ladrilhamento de $\mathbb{S}$ pela região fundamental de $\Gamma_{(2,3,5)}$.

Estruturas Euclidianas

Para cada um dos três orbifolds triangulares $S(p,q,r)$, com $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1$, a estrutura euclidiana (única a menos de reescala) é construída essencialmente como no caso esférico. Considere um triângulo $\Delta(p,q,r)$ em $\mathbb{E}$ (identificado com $\mathbb{C}$) com ângulos internos iguais a π/p, π/q e π/r, o grupo $\widetilde{\Gamma}_{(p,q,r)}$ gerado pelas reflexões nas bordas de $\Delta(p,q,r)$, e seu subgrupo $\Gamma_{(p,q,r)}$ das isometrias que preservam orientação. Então $S(p,q,r)$ é o quociente de $\mathbb{E}$ sobre a ação de $\Gamma_{(p,q,r)}$, que é gerado pelas rotações de ângulos $2\pi/p$, $2\pi/q$ e $2\pi/r$ ao redor dos vértices de $\Delta(p,q,r)$ e uma região fundamental é dada pela união de $\Delta(p,q,r)$ com qualquer de suas cópias refletidas em uma das bordas.

Faremos em cada caso uma escolha precisa dos vértices $\widetilde{A}^{(p)}$, $\widetilde{B}^{(q)}$, $\widetilde{C}^{(r)}$ de $\Delta(p,q,r)$ e determinaremos a área resultante $\mathcal{A}$ de $S(p,q,r)$.

Assim, para $S(2,4,4)$ fixamos

$$\Delta(2,4,4) : \widetilde{A}^{(2)} = 1, \widetilde{B}^{(4)} = 0, \widetilde{C}^{(4)} = 1+i, \mathcal{A}(S(2,4,4)) = 1,$$

e sua região fundamental é ilustrada na figura 3.16.

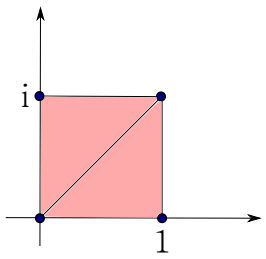


Figura 3.16: A região fundamental fixada para $S(2,4,4)$.

Da mesma forma, para $S(2,3,6)$ fixamos

$$\Delta(2,3,6) : \widetilde{A}^{(2)} = \frac{1}{2}, \widetilde{B}^{(3)} = 0, \widetilde{C}^{(6)} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \mathcal{A}(S(2,3,6)) = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

e sua região fundamental é ilustrada na figura 3.17.

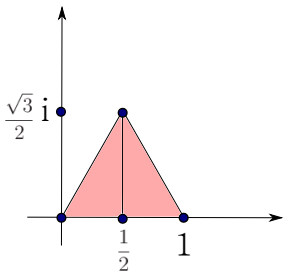


Figura 3.17: A região fundamental fixada para $S(2,3,6)$.

Para $S(3,3,3)$ fixamos

$$\Delta(3,3,3) : \widetilde{A}^{(3)} = 0, \widetilde{B}^{(3)} = 1, \widetilde{C}^{(3)} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \mathcal{A}(S(3,3,3)) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

e sua região fundamental é ilustrada na figura 3.18.

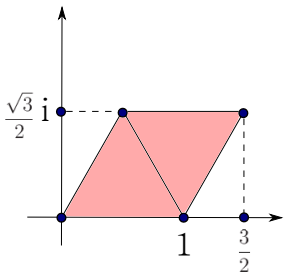


Figura 3.18: A região fundamental fixada para $S(3,3,3)$.

O caso $S(2,2,2,2)$ é um pouco diferente pois, além da reescala, existe flexibilidade, ou seja, neste caso a geometria não tem uma estrutura rígida. Para $s,t \in \mathbb{R}$ com $s > 0$ consideramos em $\mathbb{E}$ o quadrilátero $Q_{s,t}$ com vértices

$$\widetilde{A}^{(2)} = 0, \widetilde{B}^{(2)} = \frac{1}{s} + it, \widetilde{C}^{(2)} = \frac{1}{s} + i(s+t), \widetilde{D}^{(2)} = is$$

e definimos $\Gamma^{s,t}_{(2,2,2,2)}$ como o grupo gerado pelas rotações de ângulo π ao redor desses pontos. Então a ação de $\Gamma^{s,t}_{(2,2,2,2)}$ sobre $\mathbb{E}$ define sobre $S(2,2,2,2)$ uma estrutura euclidiana de área 2, e uma região fundamental é dado pela união de $Q_{s,t}$ com qualquer translação dele tendo uma borda em comum, como mostrado na figura 3.19.

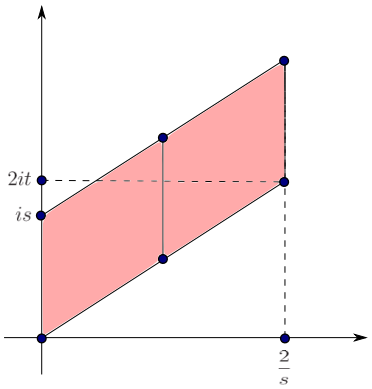


Figura 3.19: A região fundamental de $S(2,2,2,2)$ para s,t gerais.

Quando $S(2,2,2,2)$ desempenha o papel do X em $\widetilde{X} \dashrightarrow X$ o dotaremos com a estrutura dada por $s = t = 1$, como mostrada na figura 3.20. De fato, qualquer outra estrutura com área 2 é definida por $\Gamma^{s,t}_{(2,2,2,2)}$ para algum s,t.

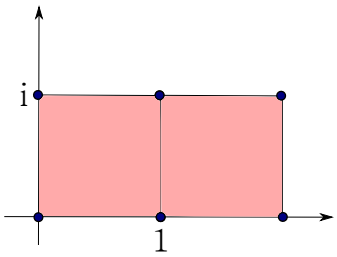


Figura 3.20: A região fundamental de $S(2,2,2,2)$ para $s = t = 1$.

Capítulo 4

O Problema de Hurwitz

O objetivo deste capítulo é aprofundar as discussões sobre o *Problema de Hurwitz*, já mencionado no capítulo 2.

Na seção 4.1 retomamos as definições básicas e apresentamos uma versão mais geral do Problema de Hurwitz para superfícies $\widetilde{\Sigma}$ e Σ possivelmente não-orientáveis. Destacamos o fato de que, quando lidamos com esse problema, não é restritivo assumir que o candidato a superfície recoberta Σ seja a 2-esfera S.

Na seção 4.2 revisamos algumas das abordagens mais famosas e produtivas para o Problema de Existência de Hurwitz. A saber: Superfícies de Riemann, Permutações, Dessins d'enfant e 2-orbifolds.

Na seção 4.3, apresentamos uma coletânea das principais soluções parciais para o Problema de Hurwitz obtidas ao longo do tempo.

Por último, na seção 4.4 apresentamos a Conjectura do Grau Primo que diz que se um candidato a recobrimento ramificado entre superfícies tem grau primo então ele é realizável e discutimos alguns resultados conhecidos que apóiam tal ideia.

4.1 O Problema de Existência de Hurwitz

Iniciamos esta seção retomando algumas definições vistas no capítulo 2.

Definição 4.1. Um candidato a recobrimento ramificado entre superfícies é dito *realizável* se é induzido por algum recobrimento ramificado $f : \widetilde{\Sigma} \to \Sigma$ existente.

Definição 4.2. Um candidato a recobrimento ramificado entre superfícies não-realizável será chamado *excepcional*.

O *Problema de Existência de Hurwitz* questiona quais candidatos a recobrimentos ramificados entre superfícies são, de fato, realizáveis e, embora este ainda seja um problema aberto, esforços combinados de vários matemáticos nos conduzem a resultados que discutiremos aqui.

Antes, deixe-nos enunciar uma versão mais geral do problema de Hurwitz para superfícies $\widetilde{\Sigma}$ e Σ possivelmente não-orientáveis. Neste caso, outras condições devem ser requeridas para que os dados de ramificação sejam compatíveis. Isto nos leva à seguinte definição:

Definição 4.3. Um dado de ramificação é *compatível* se as seguintes condições são satisfeitas:

(1) $\chi(\widetilde{\Sigma}) - \ell(\Pi) = d(\chi(\Sigma) - n)$;

(2) $n \cdot d - \ell(\Pi)$ é par;

(3) Se Σ é orientável, então $\widetilde{\Sigma}$ também é orientável;

(4) Se Σ é não-orientável e d é ímpar, então $\widetilde{\Sigma}$ também é não-orientável;

(5) Se Σ é não-orientável e $\widetilde{\Sigma}$ é orientável, então cada partição $(d_{ij})_{j=1,\dots,m_i}$ de d refina a partição $(d/2, d/2)$.

Observação 4.4. Note que a condição (5), nos diz que $(d_{ij})_{j=1,\dots,m_i}$ é obtida justapondo duas partições de $d/2$ e reordenando. Além disso, pela condição (4), d é par.

Observação 4.5. Na definição 4.3, é importante ressaltar que dizer que um dado de ramificação é *compatível* equivale a dizer que

$$\widetilde{\Sigma} \xrightarrow[(d_{11},\dots,d_{1m_1}),\dots,(d_{n1},\dots,d_{nm_n})]{d:1} \Sigma$$

é, de fato, um *candidato* a recobrimento ramificado.

Na discussão do Problema de Hurwitz os seguintes resultados são muito valiosos:

- Se $\chi(\Sigma) \leq 0$, então qualquer candidato a recobrimento ramificado entre superfícies é realizável, isto é, o problema de Hurwitz tem uma solução positiva neste caso.
- Se $\chi(\Sigma) > 0$, isto é, se Σ é a 2-esfera S, existem candidatos a recobrimento entre superfícies excepcionais.

Deste modo, quando lidamos com o problema de existência de Hurwitz, não é restritivo assumir que o *candidato a superfície recoberta* Σ é a 2-esfera S, o que faremos daqui por diante. Considerável progresso foi feito (veja a Seção 4.3 para resultados conhecidos), mas o padrão global permanece indefinido.

4.2 Pontos de Vistas Diversos

Por algum tempo, o problema de Hurwitz tem sido estudado por diversos matemáticos e, como consequência, a questão topológica original foi reformulada de vários modos diferentes. Nesta seção revisaremos algumas das abordagens mais famosas e produtivas.

Superfícies de Riemann

Sejam Σ uma superfície de Riemann conexa e compacta, e $M(\Sigma)$ o espaço de funções meromorfas sobre ela. Sabemos que, como Σ é compacto, o conjunto dos zeros e o conjunto dos polos são finitos. Consideremos uma $f \in M(\Sigma)$ não-constante como uma aplicação em $\mathbb{P}^1 \cong \widehat{\mathbb{C}}$, aplicando polos em ∞. Assim, f torna-se uma função analítica de Σ em $\widehat{\mathbb{C}}$. Normalmente tal função será um recobrimento ramificado pois podemos sempre escolher coordenadas locais de tal modo que f seja expressada por $z \longmapsto z^d$ próxima de um ponto não-singular, e $z \longmapsto z^m$, com $m = -\nu_p(f)$, ($\nu_p(f)$ é a ordem de f em p) próxima do polo p; além disso, f é aberta e sobrejetora.

Um fato clássico na Teoria de Superfícies de Riemann é que, se fixamos um conjunto finito $B \subset \widehat{\mathbb{C}}$, e denotamos por R_f o conjunto dos pontos de ramificação em Σ, os três seguintes conjuntos estarão em correspondência $1-1$ entre si:

- As classes de equivalência das aplicações analíticas de grau d de todas as $f : \Sigma \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ tal que $f(R_f) \subset B$.
- As classes de equivalência dos recobrimentos topológicos conexos de grau d, $f_0 : \Sigma \setminus f^{-1}(B) \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus B$ que se estendem a alguma $f \in M(\Sigma)$ tal que $f(R_f) \subset B$.
- As classes de equivalência das $|B|-$uplas $(\sigma_1, ..., \sigma_{|B|})$ de elementos de $\mathfrak{S}_d$ (o grupo das permutações de d elementos) gerando um subgrupo transitivo e tal que $\sigma_1 \cdot ... \cdot \sigma_{|B|} = 1$.

Permutações

Pela discussão anterior, torna-se evidente que o conjunto de equivalências descrito abaixo nos fornece, verdadeiramente, uma descrição algébrica para o Problema de Existência de Hurwitz. De fato, ele estabelece uma correspondência entre os subgrupos transitivos de permutações em $\mathfrak{S}_d$ e os recobrimentos ramificados de grau d sobre a esfera, onde $\mathfrak{S}_d$ representa o grupo de permutações. Para fazê-lo explicitamente, recordamos um fato fundamental, provado por Hurwitz, Husemoller, Ezell, Singerman e também revisto em [15]: uma realização de um candidato a recobrimento ramificado entre superfícies

$$\widetilde{\Sigma} \underset{(d_{11}, ..., d_{1m_1}),...,(d_{n1}, ..., d_{nm_n})}{\overset{d:1}{\dashrightarrow}} \Sigma$$

corresponde a uma escolha de permutações $\sigma_1, ..., \sigma_n \in \mathfrak{S}_d$ tal que:

- σ_i tem ciclos de comprimentos $(d_{ij})_{j=1}^{m_i}$;
- o produto $\sigma_1 \cdot ... \cdot \sigma_n$ é a identidade;
- o subgrupo de $\mathfrak{S}_d$ gerado por $\sigma_1, ..., \sigma_n$ age transitivamente sobre $\{1, ..., d\}$.

Vamos dar um exemplo de como encontrar uma realização através de permutações.

Considere o caso onde $\widetilde{\Sigma} \overset{d:1}{\underset{(d_{11},\ldots,d_{1m_1}),\ldots,(d_{n1},\ldots,d_{nm_n})}{\dashrightarrow}} S$ é um recobrimento ramificado da esfera na esfera com três pontos de ramificação. Fixemos um certo σ_1 com ciclos de comprimentos $(d_{1j})_{j=1}^{m_1}$ e deixe σ_2 variar na classe de conjugação das permutações tendo ciclos de comprimentos $(d_{2j})_{j=1}^{m_2}$, checando que $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ é um subgrupo transitivo e que $\sigma_1 \cdot \sigma_2$ têm ciclos de comprimentos d_{3j}. Tomando $\sigma_3 = (\sigma_1 \cdot \sigma_2)^{-1}$, obtemos as três permutações, satisfazendo as condições pedidas e, assim, realizando os dados de recobrimento fornecidos.

Exemplo 4.6. O candidato a recobrimento dado por $S \overset{4:1}{\underset{(2,2),(2,2),(3,1)}{\dashrightarrow}} S$ é excepcional.

De fato, se $S \overset{4:1}{\underset{(2,2),(2,2),(3,1)}{\dashrightarrow}} S$ fosse realizável, pela discussão anterior, existiriam permutações $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_4$ tais que os comprimentos de σ_1, σ_2 e $\sigma_1 \cdot \sigma_2$ seriam respectivamente $(2,2)$, $(2,2)$ e $(3,1)$. Entretanto, o conjunto de todos os elementos de $\mathfrak{S}_4$ com ciclos de comprimento $(2,2)$, juntamente com a permutação trivial, é um subgrupo de $\mathfrak{S}_4$, gerando assim uma contradição que nos leva a conclusão de que $S \overset{4:1}{\underset{(2,2),(2,2),(3,1)}{\dashrightarrow}} S$ é excepcional.

Exemplo 4.7. As permutações

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= (1,12)(2,8)(9,10)(6,7)(3,4), \\ \sigma_2 &= (3,2,1)(6,5,4)(9,8,7)(12,11,10), \\ \sigma_3 &= (1,10,7,4)(2,9,11,12)(3,5,6,8). \end{aligned}$$

realizam o dado de ramificação compatível $S \overset{12:1}{\underset{(2,\ldots,2,1,1),(3,3,3,3),(4,4,4)}{\dashrightarrow}} S$ (com a convenção que $(1,2) \cdot (2,3) = (1,2,3)$).

Note que usando permutações, pode-se levar muito tempo para decidir sobre a realizabilidade de recobrimentos com grau grande como, por exemplo, $S \overset{60:1}{\underset{(2,\ldots,2),(3,\ldots,3),(5,\ldots,5)}{\dashrightarrow}} S$. No próximo capítulo provaremos que este dado de ramificação candidato também é realizável, mas usando uma técnica diferente.

Dessins d'enfant

Esta é uma técnica clássica que foi introduzida por Grothendieck em [4] para estudar as aplicações algébricas entre superfícies de Riemann. A ideia principal é estabelecer uma associação entre recobrimentos ramificados e grafos bipartidos. Recorde que um grafo bipartido é um 1-complexo finito tal que seu conjunto de vértices se divide como $V_1 \sqcup V_2$ e cada aresta tem um extremo em V_1 e outro em V_2.

Neste trabalho, introduzimos os dessins d'enfant em sua forma original, que é válida apenas para recobrimentos da esfera com três pontos de ramificação. Para mais leitura,

recomendamos [15], onde a técnica clássica é generalizada para um número arbitrário de pontos de ramificação.

Definição 4.8. Um *dessin d'enfant* sobre uma superfície $\widetilde{\Sigma}$ é um grafo bipartido $D \subset \widetilde{\Sigma}$ tal que $\widetilde{\Sigma} \setminus D$ consiste de discos abertos. O comprimento de um desses discos é o número de arestas de D ao longo do qual passa sua fronteira, contada com multiplicidade.

A próxima proposição, cuja demonstração pode ser encontrada em [15], nos diz como passar de recobrimentos ramificados para dessins d'enfant.

Proposição 4.9. *A realização de um dado de ramificação* $\widetilde{\Sigma} \xrightarrow[(d_{11},\ldots,d_{1m_1}),\ldots,(d_{31},\ldots,d_{3m_3})]{d:1} S$ *corresponde a um dessin d'enfant* $D \subset \widetilde{\Sigma}$ *com conjunto de vértices* $V_1 \sqcup V_2$ *tal que para cada* $i = 1, 2$ *os vértices em* V_i *tem valências* $(d_{ij})_{j=1}^{m_i}$*, e os discos em* $\widetilde{\Sigma} \setminus D$ *tem comprimentos* $(2d_{3j})_{j=1}^{m_3}$.

Exemplo 4.10. O candidato $S \xrightarrow[(5,1),(4,1,1),(2,2,2)]{6:1} S$ é realizável. O Dessin d'enfant correspondente à sua realização pode ser visto na figura 4.1.

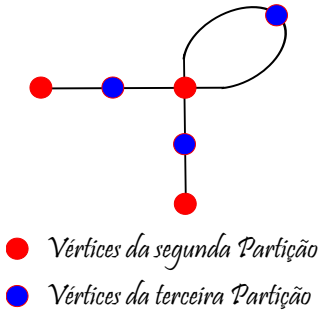


Figura 4.1: Realizabilidade de $S \xrightarrow[(5,1),(4,1,1),(2,2,2)]{6:1} S$.

Permutações e Dessins

Considere um candidato a recobrimento ramificado $\widetilde{\Sigma} \xrightarrow[(d_{11},\ldots,d_{1m_1}),\ldots,(d_{31},\ldots,d_{3m_3})]{d:1} S$; descreveremos agora uma correspondência entre um dessin d'enfant D realizando o recobrimento, e uma escolha adequada de permutações em $\mathfrak{S}_d$. Seja D tendo vértices $V_1 \sqcup V_2$ como de costume; para produzir a escolha de σ_1, σ_2 correspondentes à mesma realização procedemos como segue:

(i) Atribua rótulos de 1 a d para as arestas de D;

(ii) Então considere a aresta k e o vértice de V_i pertencente a ela: $\sigma_i(k)$ tem um ciclo para cada vértice v de V_i, o ciclo consistindo dos rótulos das arestas incidentes em v organizados como eles aparecem ao redor de v no sentido anti-horário.

Por outro lado, dadas duas permutações $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_d$ realizando o dado de ramificação dado, construímos um dessin $D(\sigma_1, \sigma_2)$ do seguinte modo:

(i) Tome o conjunto de ciclos de σ_i como o conjunto de vértices V_i;

(ii) Desenhe uma aresta rotulada k ($k = 1, 2, ..., d$) se existem dois ciclos, um em σ_1 e um em σ_2, contendo k.

Direcionamos o leitor para [15] para mais detalhes.

Recobrimentos entre 2-orbifolds vs recobrimentos ramificados entre superfícies

Nosso objetivo agora é discutir a relação existente entre recobrimentos ramificados (entre superfícies) e recobrimentos entre 2-orbifolds.

Ao final desta discussão, o leitor deverá estar convencido de que qualquer candidato a recobrimento ramificado entre superfícies $\widetilde{\Sigma} \overset{d:1}{\underset{\Pi}{\dashrightarrow}} \Sigma$ induz um *candidato a recobrimento entre 2-orbifolds*. Além disso, veremos que este candidato associado não é único e, portanto, se quisermos a unicidade, é preciso que façamos algumas restrições a ele, definindo o que chamaremos de *candidato a recobrimento 2-orbifold associado preferido*.

Finalmente, poder ir e vir de recobrimentos 2-orbifolds é o ponto crucial de nosso estudo de recobrimentos ramificados entre superfícies e esta ferramenta será fundamental para as provas apresentadas nos capítulos 5 e 6.

Iniciamos provando o seguinte:

Teorema 4.11. *Todo candidato a recobrimento ramificado entre superfícies* $\widetilde{\Sigma} \overset{d:1}{\underset{\Pi}{\dashrightarrow}} \Sigma$ *induz um candidato a recobrimento 2-orbifold associado* $\widetilde{X} \overset{d:1}{\dashrightarrow} X$ *satisfazendo* $\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X}) = d \cdot \chi^{\text{orb}}(X)$.

Demonstração. Considere o candidato a recobrimento ramificado entre superfícies dado pelos seguintes dados de ramificação:

$$\widetilde{\Sigma} \overset{d:1}{\underset{(d_{11}, ..., d_{1m_1}),...,(d_{n1}, ..., d_{nm_n})}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} \Sigma.$$

Queremos mostrar que estes dados de ramificação induzem um candidato a recobrimento entre orbifolds. Sejam $y_1, y_2, ..., y_n$ os pontos de ramificação em Σ. Assim, para cada y_i, existe uma vizinhança U_i tal que $p^{-1}(U_i) = \bigcup_{j=1}^{m_i} V_{i_j}$, onde cada $V_{i_j} \cong U_i$ e $p(z) = z^{d_{ij}}$, $\forall z \in V_{i_j}$ e p é a aplicação de recobrimento (se ela existir). Sendo assim, localmente, podemos pensar no recobrimento como uma ação do grupo $\mathbb{Z}_{d_{ij}}$. Além disso, $\sum_{j=i}^{m_1} d_{ij} = d$.

Desta forma, podemos considerar $p_i = \prod_{j=1}^{m_1} d_{ij}$ (na realidade basta que seja um múltiplo comum a todos os graus locais na vizinhança V_{i_j}) e $p_{ij} = \frac{p_i}{dij}$. Façamos $X = \Sigma(p_1, ..., p_n)$ e $\widetilde{X} = \widetilde{\Sigma}\left((p_{ij})_{i=1,...,n}^{j=1,...,m_i}\right)$.

Construídos desta forma temos que:

$$(p_{11}, ..., p_{1m_1}) \dashrightarrow p_1, ..., (p_{n1}, ..., p_{nm_n}) \dashrightarrow p_n$$

e a aplicação local que leva p_{ij} em p_i pode ser vista como da forma $z^{d_{ij}}$. Segue das observações anteriores que $\widetilde{p} : \widetilde{\Sigma}\left((p_{ij})_{i=1,...,n}^{j=1,...,m_i}\right) \dashrightarrow \Sigma(p_1, ..., p_n)$ (se existir) deverá satisfazer $\chi^{\text{orb}}(\widetilde{\Sigma}\left((p_{ij})_{i=1,...,n}^{j=1,...,m_i}\right)) = d \cdot \chi^{\text{orb}}(\Sigma(p_1, ..., p_n))$ e portanto é um candidato a recobrimento de grau d entre 2-orbifolds.

□

Observe que, na demonstração do Teorema 4.11, poderíamos ter escolhido os p_i's sendo qualquer múltiplo comum dos graus locais d_{ij}. Sendo assim, faz sentido escolhermos um recobrimento orbifold associado "mais fácil", isto é, aquele com as menores ordens de cone possíveis. Isto ocorre para *candidatos* a recobrimentos, escolhidos como segue.

Considere um candidato a recobrimento ramificado entre superfícies

$$\widetilde{\Sigma} \overset{d:1}{\underset{(d_{11}, ..., d_{1m_1}),...,(d_{n1}, ..., d_{nm_n})}{\dashrightarrow}} \Sigma$$

e defina

$$p_i = \text{mmc}\left\{d_{ij}; j = 1, ..., m_i\right\}, \qquad p_{ij} = p_i/d_{ij},$$

$$X = \Sigma(p_1, ..., p_n), \qquad \widetilde{X} = \widetilde{\Sigma}\left((p_{ij})_{i=1,...,n}^{j=1,...,m_i}\right),$$

onde "mmc" significa o "mínimo múltiplo comum". Então temos um candidato a recobrimento 2-orbifold associado que chamaremos de *preferido*, $\widetilde{X} \overset{d:1}{\dashrightarrow} X$ satisfazendo $\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X}) = d \cdot \chi^{\text{orb}}(X)$.

Uma observação importante que devemos fazer é que o candidato a recobrimento ramificado entre superfícies original não pode ser reconstruído de $\widetilde{X}$, X e d apenas, mas poderá se $\widetilde{X} \overset{d:1}{\dashrightarrow} X$ for complementado com as *instruções de recobrimento*

$$(p_{11}, ..., p_{1m_1}) \dashrightarrow p_1, ..., (p_{n1}, ..., p_{nm_n}) \dashrightarrow p_n$$

que algumas vezes incluiremos no próprio símbolo $\widetilde{X} \overset{d:1}{\dashrightarrow} X$, omitindo os $p_{ij}'s$ iguais a 1. De fato, um candidato a recobrimento ramificado entre superfícies é realizável se, e somente se, o candidato a recobrimento 2-orbifold associado com instruções de recobrimento apropriadas é realizável.

Para que o leitor fique familiarizado com o processo de determinar os recobrimentos 2-orbifolds preferidos associados a um recobrimento ramificado e, ao mesmo tempo, compreenda a força desta ferramenta no estudo do Problema de Hurwitz apresentamos

os dois próximos exemplos.

Exemplo 4.12. Existe um recobrimento ramificado satisfazendo $S \overset{9:1}{\underset{(2,\ldots,2,1),(3,3,3),(3,3,3)}{\dashrightarrow}} S$?

Pelo que vimos anteriormente, façamos: $p_1 = \text{mmc}\{1,2\} = 2$, $p_2 = \text{mmc}\{3\} = 3$, $p_3 = \text{mmc}\{3\} = 3$. Logo, $p_{11} = 1$, $p_{12} = 1$, $p_{13} = 1$, $p_{14} = 1$, $p_{15} = 2$, $p_{21} = 1$, $p_{22} = 1$, $p_{23} = 1$, $p_{31} = 1$, $p_{32} = 1$ e $p_{32} = 1$. Assim, $X = S(2,3,3)$ e, omitindo todos os p_{ij}'s iguais a 1, $\widetilde{X} = S(2)$. Portanto, nosso candidato associado preferido é dado por $S(2) \overset{9:1}{\dashrightarrow} S(2,3,3)$ satisfazendo

$$\chi^{\text{orb}}(S(2)) = 9 \cdot \chi^{\text{orb}}(S(2,3,3)) \Longrightarrow \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 9 \cdot \frac{1}{6}.$$

Entretanto, observe que, pelo lema 3.37, tal candidato a recobrimento entre 2-orbifolds é excepcional, já que $S(2)$ é mau e $S(2,3,3)$ é bom.

Portanto, pela discussão anterior, não existe recobrimento satisfazendo os dados de recobrimento propostos.

Exemplo 4.13. Existe um recobrimento ramificado satisfazendo $S \overset{4:1}{\underset{(2,2),(3,1),(3,1)}{\dashrightarrow}} S$?

Façamos $p_1 = \text{mmc}\{2\} = 2$, $p_2 = \text{mmc}\{3,1\} = 3$ e $p_3 = \text{mmc}\{3,1\} = 3$. Desta forma, $p_{11} = 1$, $p_{12} = 1$, $p_{21} = 1$, $p_{22} = 3$, $p_{31} = 1$ e $p_{32} = 3$.

Assim, desconsiderando todos os p_{ij}'s iguais a 1, temos $X = S(2,3,3)$ e $\widetilde{X} = S(3,3)$ e o candidato a recobrimento orbifold associado ao recobrimento ramificado dado é: $S(3,3) \overset{4:1}{\dashrightarrow} S(2,3,3)$, que satisfaz

$$\chi^{\text{orb}}(S(3,3)) = 4 \cdot \chi^{\text{orb}}(S(2,3,3)) \Longrightarrow \frac{2}{3} = 4 \cdot \frac{1}{6}.$$

Observe que $S(3,3)$ e $S(2,3,3)$ são orbifolds bons e portanto não podemos repetir o argumento anterior.

De fato, com as instruções de recobrimento adicionais $3 \dashrightarrow 3$ e $3 \dashrightarrow 3$ o recobrimento orbifold será realizável (e assim também o será o recobrimento ramificado) e sua realização pode ser compreendida geometricamente através da figura 4.2

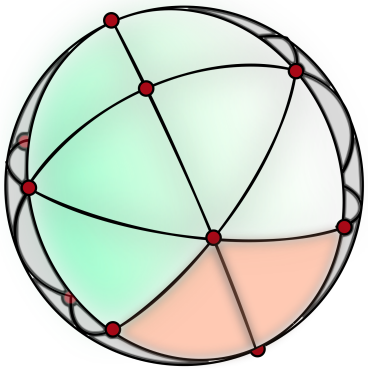


Figura 4.2: Realização geométrica do recobrimento $S(3,3) \overset{4:1}{\dashrightarrow} S(2,3,3)$

A figura 4.3 ilustra como podemos visualizar o recobrimento entre orbifolds $S(3,3) \overset{4:1}{\dashrightarrow} S(2,3,3)$, com as instruções adicionais de recobrimento $3 \dashrightarrow 3$ e $3 \dashrightarrow 3$, satisfazendo os dados de recobrimento $S \overset{4:1}{\underset{(2,2),(3,1),(3,1)}{\dashrightarrow}} S$.

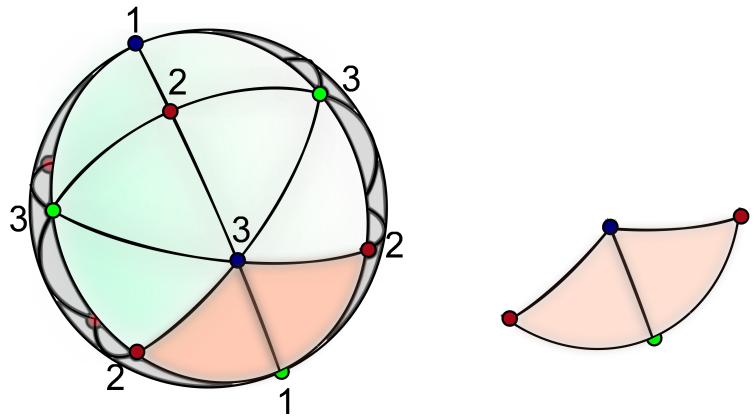


Figura 4.3: Realização geométrica do recobrimento $S(3,3) \overset{4:1}{\dashrightarrow} S(2,3,3)$ visto como recobrimento ramificado

A imagem à esquerda na figura 4.3 representa o orbifold $S(3,3)$, enquanto a imagem à direita representa o orbifold $S(2,3,3)$, ambos sobre a esfera S^2. Os números ao lado de cada um dos pontos da imagem à esquerda na figura 4.3 representam o grau do recobrimento sobre cada um deles. Observe que este número é exatamente o número de regiões fundamentais na vizinhança de cada um deles. Os pontos azuis (vermelhos ou verdes) representam as pré-imagens do vértice azul (vermelho ou verde) da imagem à direita da figura 4.3.

Observação 4.14. Devemos enfatizar esta passagem: ir e vir de recobrimentos 2-orbifolds é o ponto chave de nosso estudo de recobrimentos ramificados entre superfícies.

4.3 Resultados conhecidos

Nesta seção mencionamos brevemente, sem demonstração, as principais soluções parciais para o problema de Hurwitz obtidos ao longo do tempo.

Resultados conhecidos para $\Sigma \neq S$

Os resultados a seguir reduzem o problema de Hurwitz geral ao caso onde a superfície base é a esfera.

Este primeiro teorema é atribuído a Shephardson. Uma demonstração pode ser encontrada em [2] e [6]:

Teorema 4.15. *Um dado de ramificação compatível com superfície base orientável Σ e $\chi(\Sigma) \leq 0$ é realizável.*

O próximo resultado é provado em [2] e [3]:

Teorema 4.16. *Um dado de ramificação compatível com Σ e $\widetilde{\Sigma}$ não orientáveis, e $\chi(\Sigma) \leq 0$ é realizável.*

O seguinte fato, enunciado em [2], juntamente com os resultados anteriores nos leva ao caso completo $\chi(\Sigma) \leq 0$, na afirmativa: cada dado de ramificação compatível é realizável.

Proposição 4.17. *Um dado de ramificação compatível com Σ não-orientável e $\widetilde{\Sigma}$ orientável é realizável se, e somente se, é possível decompor para todo i a partição Π_i em um par de partições Π_i' e Π_i'' de $d/2$ de tal modo que o dado de ramificação*

$$\widetilde{\Sigma} \xrightarrow[\Pi_1',\Pi_1'',\ldots,\Pi_n'\Pi_n'']{d:1} \Sigma'$$

é realizável, onde Σ' é o duplo recobrimento orientável de Σ.

Para compreender o que acontece quando a base tem característica de Euler positiva, apresentamos o seguinte teorema devido a Edmonds, Kulkarni e Stong (veja [2]) que lida com o caso $\Sigma = \mathbb{P}$, o plano projetivo.

Teorema 4.18. *Um dado de ramificação compatível com $\Sigma = \mathbb{P}$ e $\widetilde{\Sigma}$ não-orientável é realizável.*

Assim, o problema de existência de Hurwitz permanece aberto quando:

- $\Sigma = S$;
- $\Sigma = \mathbb{P}$ e $\widetilde{\Sigma}$ orientável.

Entretanto, a questão de realizabilidade de algum $\widetilde{\Sigma} \dashrightarrow \mathbb{P}$ reduz-se à realizabilidade de um $\widetilde{\Sigma} \dashrightarrow S$ adequado. Então, de agora em diante, discutiremos apenas recobrimentos ramificados da esfera.

Resultados conhecidos para $\Sigma = S$

Vimos no exemplo 4.6 que quando a superfície base é a esfera, existem candidatos a recobrimentos ramificados excepcionais. Revisamos agora os principais resultados de existência e não-existência. Um dos resultados mais interessantes é o seguinte, no caso de $\widetilde{\Sigma} = S$ e $n = 3$:

Lema 4.19. *Se $d = ab$ com $a, b > 1$, então as partições*

$$(a, ..., a), (b + 1, 1, ..., 1), (a, a(b - 1))$$

dão um dado de ramificação compatível mas não realizável.

O seguinte resultado provado em [15] estende o anterior:

Teorema 4.20. *Sejam $d = h \cdot k$, com $k, h \geq 2$; $(h_j)_{j=1,...,p}$ uma partição de h com $p \geq 2$. Então o dado de ramificação*

$$S \overset{d:1}{\underset{(k,...,k),(h+p-1,1,...,1),(kh_1,...,kh_p)}{\dashrightarrow}} S$$

é não-realizável.

Além disso, também em [15] é estabelecido um teorema que implica um critério muito eficiente para reconhecer dados excepcionais:

Teorema 4.21. *Suponha que d e todos d_{ij} para $i, j = 1, 2$ são pares. Se o dado de ramificação*

$$S \overset{d:1}{\underset{\Pi_1,\Pi_2,\Pi_3}{\dashrightarrow}} S$$

é realizável, então (d_{3j}) refina a partição $(d/2, d/2)$.

Por outro lado, um dos resultados mais gerais de existência, generalizado para recobrimentos arbitrários por Edmonds, Kulkarni e Stong em [2]:

Teorema 4.22. *Um recobrimento ramificado compatível é realizável se uma das partições do grau é (d).*

Uma variação deste resultado é dada em [2]: ela classifica um dado de ramificação realizável com uma partição da forma $(d-1, 1)$.

Por causa da conjectura do grau primo, discutida na próxima seção, estamos mais interessados em recobrimentos com exatamente três pontos de ramificação. No entanto, existem também resultados relevantes para o caso onde o número de pontos de ramificação é "grande" comparado ao grau d. Um dos mais significantes é devido a Edmonds, Kulkarni e Stong:

Teorema 4.23. *Um dado de ramificação com $d \neq 4$ e $n \cdot d - \ell(\Pi) \geq 3(d-1)$ é realizável. Os dados de ramificação excepcionais com $d = 4$ são precisamente aqueles com partições $(2,2), ..., (2,2), (3,1)$.*

Uma consequência deste resultado é que o número de dados de ramificação excepcionais para qualquer $d \neq 4$ é finito.

Além disso, Pervova e Petronio, em [16], estudaram o dado de ramificação em que uma partição é $(d-2, 2)$, e provaram os três teoremas seguintes.

Teorema 4.24. *Seja $S \overset{d:1}{\underset{(d-2,2),\Pi_2,\Pi_3}{\dashrightarrow}} S$ um dado de ramificação compatível. Se d é ímpar então ele é realizável. Se $d = 2k$ é par então os dados de ramificação compatíveis e não-realizáveis são precisamente aqueles dos seguintes tipos:*

- $S \overset{2k:1}{\underset{(2k-2,2),(2,\ldots,2),(2,\ldots,2)}{\dashrightarrow}} S$ *com* $k > 2$;
- $S \overset{2k:1}{\underset{(2k-2,2),(2,\ldots,2),(k+1,1,\ldots,1)}{\dashrightarrow}} S$.

Teorema 4.25. *Com uma exceção simples de* $T \overset{6:1}{\underset{(4,2),(3,3),(3,3)}{\dashrightarrow}} S$, *todo dado de ramificação compatível da forma* $T \overset{d:1}{\underset{(d-2,2),\Pi_2,\Pi_3}{\dashrightarrow}} S$ *é realizável.*

Teorema 4.26. *Se* $g \geq 2$, *então todo dado de ramificação compatível da forma* $gT \overset{d:1}{\underset{(d-2,2),\Pi_2,\Pi_3}{\dashrightarrow}} S$ *é realizável.*

Teorema 4.27. *Seja* $\widetilde{\Sigma} \overset{d:1}{\underset{\Pi_1,\Pi_2,\Pi_3}{\dashrightarrow}} S$ *um dado de ramificação compatível. Seja* $p \geq 3$ *ímpar e suponha que todos* d_{ij} *são divisíveis por* p. *Então o dado é realizável.*

4.4 A Conjectura do Grau Primo

Em [2] o problema de existência de Hurwitz é reduzido ao caso de recobrimentos ramificados da 2-esfera; além disso o artigo contém o seguinte enunciado interessante:

Conjectura 4.28. *Se* $\widetilde{\Sigma} \overset{d:1}{\underset{\Pi}{\dashrightarrow}} S$ *é um candidato a recobrimento ramificado entre superfícies e o grau* d *é um número primo, então o candidato é realizável.*

Certamente ela foi motivada por um lema mostrado no mesmo artigo, sobre excepcionalidade em grau não-primo. Além disso, em [15] e [16] existem muitos outros exemplos de excepcionalidade de recobrimentos em grau não-primo.

Para abordar esta conjectura, é importante notar que em [2] os autores enunciam que estabelecendo a conjectura 4.28 no caso especial de três pontos de ramificação implicaria o caso geral.

Também em [20] encontramos resultados que dão suporte a esta conjectura. De fato, Zheng determinou por computador todos os candidatos a recobrimentos ramificados entre superfícies excepcionais com $n = 3$ e $d \leq 20$ e nenhum deles ocorre para d primo.

Ao final do capítulo 5 discutiremos a relevância dos resultados lá apresentados com respeito a esta conjectura.

Capítulo 5

Recobrimentos entre Orbifolds com $\chi^{\text{orb}} \geq 0$

Nosso objetivo neste capítulo é fazer uma análise completa dos recobrimentos entre orbifolds com $\chi^{\text{orb}} \geq 0$.

Na seção 5.1 apresentamos o método utilizado nas demonstrações deste capítulo; a saber, para analisar a realizabilidade de um candidato a recobrimento ramificado entre superfícies mudaremos para o candidato a recobrimento entre 2-orbifolds associado $\widetilde{X} \dashrightarrow X$ e usaremos a sua estrutura geométrica ou para construir explicitamente uma aplicação $f : \widetilde{X} \to X$ realizando-o, ou para mostrar que uma tal f não pode existir.

Na seção 5.2 determinamos todos os candidatos realizáveis e excepcionais para o caso de característica de Euler positiva.

Na seção 5.3 determinamos todos os candidatos realizáveis e excepcionais para o caso euclidiano. Encerramos a seção (e este capítulo) discutindo a relevância dos resultados apresentados em vista da conjectura do grau primo.

5.1 A Abordagem Geométrica

Nesta seção analisaremos a realizabilidade de um candidato a recobrimento ramificado entre superfícies mudando-o para o candidato a recobrimento entre 2-orbifolds associado $\widetilde{X} \dashrightarrow X$ e utilizaremos sua geometria ou para construir explicitamente uma aplicação $f : \widetilde{X} \to X$ realizando-o, ou para mostrar que uma tal f não pode existir.

Justificamos este procedimento observando que qualquer 2-orbifold X com uma estrutura geométrica do tipo $\mathbb{X} \in \{\mathbb{S}, \mathbb{E}, \mathbb{H}\}$ possui uma função distância bem-definida. De fato, a estrutura é dada por uma aplicação quociente $\mathbb{X} \to X$, que chamaremos um *recobrimento geométrico universal* de X, definido por uma ação isométrica e discreta (ainda que não livre). Portanto, qualquer caminho suave por partes α, em X, tem um comprimento bem-definido obtido por seu levantamento a um caminho $\widetilde{\alpha}$ em $\mathbb{X}$, mesmo que o próprio $\widetilde{\alpha}$ não seja único (a menos de automorfismos de $\widetilde{X}$) quando α passa por

algum ponto de cone de X. Agora, podemos enunciar o seguinte:

Proposição 5.1. *Seja $f : \widetilde{X} \to X$ um recobrimento entre 2-orbifolds. Suponha que X tenha uma geometria fixada com recobrimento geométrico universal $\pi : \mathbb{X} \to X$. Então, existem uma estrutura geométrica sobre $\widetilde{X}$ com recobrimento geométrico universal $\widetilde{\pi} : \mathbb{X} \to \widetilde{X}$ e uma isometria $\widetilde{f} : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ tais que $\pi \circ \widetilde{f} = f \circ \widetilde{\pi}$.*

Demonstração. Defina o comprimento de um caminho em $\widetilde{X}$ sendo o comprimento de sua imagem por f em X e considere a distância correspondente. Analisando o modelo local de f, vemos que esta distância é compatível com uma estrutura geométrica orbifold local também de tipo $\mathbb{X}$, assim existe uma tal estrutura global sobre $\widetilde{X}$, com recobrimento geométrico universal $\widetilde{\pi} : \mathbb{X} \to \widetilde{X}$.

Segue das propriedades do recobrimento universal que existe uma aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ tal que $\pi \circ \widetilde{f} = f \circ \widetilde{\pi}$. Por construção $\widetilde{f}$ preserva o comprimento dos caminhos e, pensando $\mathbb{X}$ como uma variedade, vemos que $\widetilde{f}$ é uma isometria local. Em particular é um recobrimento, mas $\mathbb{X}$ é simplesmente conexo, assim $\widetilde{f}$ é um homeomorfismo e portanto uma isometria.

□

Um 2-orbifold esférico X é *rígido*, a saber, o recobrimento geométrico universal $\mathbb{S} \to X$ é único a menos de automorfismos de $\mathbb{S}$ e X, assim no caso esférico não temos escolha senão aplicar a proposição 5.1. Ao contrário, 2-orbifolds euclidianos nunca são rígidos, já que a métrica sempre pode ser reescalada (e pode também ser escolhida do modo mais adequado sobre o toro T e sobre $S(2,2,2,2)$, como veremos adiante). Neste caso modificamos sutilmente o conteúdo da Proposição 5.1 reescalando $\widetilde{X}$ tal que sua área seja igual a de X, neste caso $\widetilde{f}$ não é mais uma isometria mas simplesmente uma aplicação complexa-afim $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, com $\mathbb{C}$ identificado com $\mathbb{E}$. Mais precisamente:

Proposição 5.2. *Seja $f : \widetilde{X} \xrightarrow{d:1} X$ um recobrimento entre 2-orbifolds. Suponha que X tenha uma estrutura euclidiana fixada com recobrimento geométrico universal $\pi : \mathbb{E} \longrightarrow X$. Então existem uma estrutura euclidiana sobre $\widetilde{X}$ com recobrimento geométrico universal $\widetilde{\pi} : \mathbb{E} \longrightarrow \widetilde{X}$ tal que X e $\widetilde{X}$ têm a mesma área, e uma aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ da forma $\widetilde{f}(z) = \lambda \cdot z + \mu$, com $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, tais que $\pi \circ \widetilde{f} = f \circ \widetilde{\pi}$. Isto implica que $d = |\lambda|^2$.*

Demonstração. Com respeito à estrutura sobre $\widetilde{X}$ dada pela proposição 5.1 a área de $\widetilde{X}$ é d vezes a de X, assim o fator escalante é $1/\sqrt{d}$. Após reescala, $\widetilde{f}$ é portanto $\sqrt{d}$ vezes uma isometria, e a conclusão segue.

□

Observação 5.3. A estrutura deste capítulo é uma consequência da divisão de recobrimentos entre orbifolds com relação ao sinal da característica de Euler. Apesar de todos os esforços, o caso hiperbólico está longe de ser resolvido por causa da dificuldade

de melhorar uma extensão para a ferramenta geométrica. Então, no próximo capítulo restringimo-nos ao estudo de recobrimentos relevantes entre 2-orbifolds hiperbólicos para a conjectura do grau primo.

5.2 Característica de Euler Positiva

Nosso principal objetivo nesta seção é provar o seguinte:

Teorema 5.4. *Um candidato a recobrimento ramificado entre superfícies $\widetilde{\Sigma} \dashrightarrow \Sigma$ tendo um candidato a recobrimento entre 2-orbifolds associado $\widetilde{X} \dashrightarrow X$ com $\chi^{\mathrm{orb}}(X) > 0$ é excepcional se, e somente se, $\widetilde{X}$ é mau e X é esférico. Isto ocorre precisamente para os seguintes candidatos a recobrimentos, em nenhum dos quais o grau é primo:*

$$
\begin{array}{ccc}
S \overset{9:1}{\underset{(2,\ldots,2,1),(3,3,3),(3,3,3)}{\dashrightarrow}} S & S \overset{9:1}{\underset{(2,\ldots,2,1),(3,3,3),(4,4,1)}{\dashrightarrow}} S & S \overset{10:1}{\underset{(2,\ldots,2),(3,3,3,1),(4,4,2)}{\dashrightarrow}} S \\
S \overset{16:1}{\underset{(2,\ldots,2),(3,\ldots,3,1),(4,\ldots,4)}{\dashrightarrow}} S & S \overset{16:1}{\underset{(2,\ldots,2),(3,\ldots,3,1),(5,5,5,1)}{\dashrightarrow}} S & S \overset{18:1}{\underset{(2,\ldots,2),(3,\ldots,3),(4,\ldots,4,2)}{\dashrightarrow}} S \\
S \overset{21:1}{\underset{(2,\ldots,2,1),(3,\ldots,3),(5,\ldots,5,1)}{\dashrightarrow}} S & S \overset{25:1}{\underset{(2,\ldots,2,1),(3,\ldots,3,1),(5,\ldots,5)}{\dashrightarrow}} S & S \overset{36:1}{\underset{(2,\ldots,2),(3,\ldots,3),(5,\ldots,5,1)}{\dashrightarrow}} S \\
S \overset{40:1}{\underset{(2,\ldots,2),(3,\ldots,3,1),(5,\ldots,5)}{\dashrightarrow}} S & S \overset{45:1}{\underset{(2,\ldots,2,1),(3,\ldots,3),(5,\ldots,5)}{\dashrightarrow}} S & S \overset{2k:1}{\underset{(2,\ldots,2),(2,\ldots,2),(h,2k-h)}{\dashrightarrow}} S
\end{array}
\tag{5.1}
$$

com $k > h \geq 1$ no último ítem.

Em adição à prova deste resultado descreveremos todos $\widetilde{\Sigma} \dashrightarrow \Sigma$ tendo associado $\widetilde{X} \dashrightarrow X$ com $\chi^{\mathrm{orb}}(X) > 0$ não listados na afirmação, e construiremos explicitamente uma realização geométrica de tais $\widetilde{X} \dashrightarrow X$. Para esboçar nosso argumento, recordamos que, pelo capítulo 3 seção 3.3, os 2-orbifolds X com $\chi^{\mathrm{orb}}(X) > 0$ são os seguintes:

$$S, \quad S(p), \quad S(p,q), \quad S(2,2,p), \quad S(2,3,3), \quad S(2,3,4), \quad S(2,3,5).$$

Em particular, vimos no capítulo 4 que para qualquer $\widetilde{\Sigma} \overset{d:1}{\underset{\Pi}{\dashrightarrow}} \Sigma$ relevante tem-se $\widetilde{\Sigma} = \Sigma = S$. Além disso, X é mau se, e somente se, é $S(p)$ para $p > 1$ ou $S(p,q)$ para $p \neq q > 1$, e em todos os outros casos ele tem uma estrutura esférica rígida. Nossos principais passos serão como segue:

- Determinaremos todos os candidatos a recobrimentos ramificados entre superfíces tendo um candidato associado $\widetilde{X} \dashrightarrow X$ com $\chi^{\mathrm{orb}}(\widetilde{X})$ e $\chi^{\mathrm{orb}}(X)$ positivas, e as instruções de recobrimento correspondentes para $\widetilde{X} \dashrightarrow X$;

- Para cada X esférico com $\chi^{\mathrm{orb}}(X) > 0$ descreveremos o recobrimento geométrico universal $\pi : \mathbb{S} \longrightarrow X$;

- Para cada $\widetilde{X} \dashrightarrow X$ com $\chi^{\text{orb}}(X) > 0$ (complementado com suas instruções de recobrimento) associado a algum candidato a recobrimento ramificado entre superfícies, exceto quando $\widetilde{X}$ é mau e X é esférico, mostraremos que é realizável.

Para listar todos os candidatos a recobrimentos ramificados entre superfícies tendo um candidato associado $\widetilde{X} \dashrightarrow X$ com $\chi^{\text{orb}}(X)$ positiva nossos passos serão como segue:

- Consideramos todos os pares possíveis $(\widetilde{X}, X)$ tais que $\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X})/\chi^{\text{orb}}(X)$ é um inteiro $d > 1$;

- Supondo que X tenha n pontos de cone $p_1, ..., p_n$, consideraremos todas as maneiras possíveis de agrupar as ordens dos pontos de cone de $\widetilde{X}$ como

$$(q_{11}, ..., q_{1\mu_1}), ..., (q_{n1}, ..., q_{n\mu_n})$$

  tal que q_{ij} divide p_i para todos i e j;

- Determinamos $m_i \geq \mu_i$ tal que, sendo $q_{ij} = 1$ para $j > \mu_i$ e $d_{ij} = \dfrac{p_i}{q_{ij}}$, temos que $\sum_{j=1}^{m_i} d_{ij}$ é igual a d para todo i;

- Checamos que p_i é o mínimo múltiplo comum de $(d_{ij})_{j=1}^{m_i}$.

Isto leva ao candidato a recobrimento ramificado entre superfícies $S \xdashrightarrow[\Pi]{d:1} S$ com $\Pi_i = (d_{ij})_{j=1}^{m_i}$ e $\Pi = (\Pi_i)_{i=1}^{n}$, tendo candidato associado $\widetilde{X} \dashrightarrow X$ com instruções de recobrimento

$$(q_{11}, ..., q_{1\mu_1}) \dashrightarrow p_1, ..., (q_{n1}, ..., q_{n\mu_n}) \dashrightarrow p_n.$$

Para facilitar a compreensão dos resultados, agrupamos nossas afirmações dependendo do tipo de $\widetilde{X}$. Nas demonstrações, algumas vezes será conveniente fazer os passos acima numa ordem diferente. Em particular, frequentemente não é fácil determinar antecipadamente quando $\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X})/\chi^{\text{orb}}(X)$ é um inteiro, assim esta condição é imposta no fim. Além disso, quando X tem três pontos de cone, ao invés de $\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X}) = d \cdot \chi^{\text{orb}}(X)$ usaremos a fórmula equivalente 2.2, expressada em termos dos dados do provável candidato a recobrimento ramificado entre superfícies.

Observação 5.5. Suponha que um $\widetilde{X} \xdashrightarrow{d:1} X$, onde X tem $n \geq 1$ pontos de cone, é associado a alguma $\widetilde{\Sigma} \xdashrightarrow[\Pi_1,...,\Pi_n]{d:1} \Sigma$. Então cada uma das n partições de d em Π têm ao menos uma entrada maior do que 1; caso contrário $\widetilde{\Sigma} \xdashrightarrow{d:1} \Sigma$ tem um candidato associado "mais fácil" $\widetilde{Y} \dashrightarrow Y$, onde Y tem menos do que n pontos de cone. Em particular $d > 1$.

Proposição 5.6. *Os candidatos a recobrimentos ramificados entre superfícies tendo candidato associado $\widetilde{X} \dashrightarrow X$ com $\widetilde{X}$ mau são precisamente aqueles listados em 5.1.*

Demonstração. Pelo teorema 3.35, sabemos que se $\widetilde{X}$ é mau, com $\chi^{\text{orb}}(X) > 0$, então $\widetilde{X} = S(\widetilde{p})$ ou $\widetilde{X} = S(\widetilde{p}, \widetilde{q})$. Deste modo, trabalharemos cada caso separadamente.

Considere $\boxed{\widetilde{X} = S(\widetilde{p}) \text{ para } \widetilde{p} \geq 2}$. Desta forma, segue que $\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X}) = 1 + \frac{1}{\widetilde{p}}$.

Se $X = S$, então $\chi^{\text{orb}}(X) = 2$ e temos

$$\frac{\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X})}{\chi^{\text{orb}}(X)} = \frac{1 + \frac{1}{\widetilde{p}}}{2} < 2.$$

Logo, não existe candidato relevante para $X = S$.

Da mesma forma, se $X = S(p)$, então $\chi^{\text{orb}}(X) = 1 + \frac{1}{p}$ e

$$\frac{\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X})}{\chi^{\text{orb}}(X)} = \frac{1 + \frac{1}{\widetilde{p}}}{1 + \frac{1}{p}} = \frac{\widetilde{p} + 1}{\widetilde{p}} \cdot \frac{p}{p + 1} = \frac{p\widetilde{p}}{p\widetilde{p} + \widetilde{p}} + \frac{p}{p\widetilde{p} + \widetilde{p}} < 2,$$

assim, também não existe candidato relevante para $X = S(p)$.

Suponha agora $X = S(p, q)$ e $\widetilde{p} \dashrightarrow p$, assim $\chi^{\text{orb}}(X) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ e $p = k \cdot \widetilde{p}$ para algum k, donde $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0$, e $d = k + (m_1 - 1) \cdot p = m_2 \cdot q$. Deste modo, segue de $\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X}) = d \cdot \chi^{\text{orb}}(X)$ que

$$1 + \frac{1}{\widetilde{p}} = d \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \Longrightarrow 1 + \frac{k}{p} = \frac{k}{p} + (m_1 - 1) + m_2 \Longrightarrow m_1 + m_2 = 2,$$

então $m_1 = m_2 = 1$ e $k = q = d$, mas p não é $\text{mmc}(k)$, e não existe candidato relevante para $X = S(p, q)$.

Consideremos o caso $X = S(2, 2, p)$ onde podemos ter $\widetilde{p} \dashrightarrow 2$ ou $\widetilde{p} \dashrightarrow p$. No primeiro caso teríamos $\widetilde{p} = 2$ e então $\Pi_1 = (2, ..., 2, 1)$, $\Pi_2 = (2, ..., 2)$ e $\Pi_3 = (p, ..., p)$ o que é impossível pois d seria par e ímpar ao mesmo tempo. No segundo caso temos $\chi^{\text{orb}}(X) = \frac{1}{p}$, $d = 2k$, e $m_1 = m_2 = k$. Por outro lado, $p = h\widetilde{p}$ para algum h e $d = h + (m_3 - 1)p$, assim de $\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X}) = d \cdot \chi^{\text{orb}}(X)$ temos

$$1 + \frac{1}{\widetilde{p}} = d \cdot \left(\frac{1}{p}\right) = 1 + \frac{h}{p} = \frac{h}{p} + (m_3 - 1) \Longrightarrow m_3 = 2.$$

Logo, de $d = 2k = h + p$ e $p = h\widetilde{p}$ vemos que $2k - h = h\widetilde{p}$ e então obtemos o candidato $S \underset{(2,...,2),(2,...,2),(h,2k-h)}{\overset{2k:1}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$ no caso especial onde h divide $2k - h$. Observe que este candidato foi encontrado utilizando as seguintes instruções $S(\widetilde{p}) \underset{\widetilde{p} \dashrightarrow p}{\overset{2k:1}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S(2, 2, p)$.

Seja $X = S(2, 3, 3)$, o que implica $\chi^{\text{orb}}(X) = \frac{1}{6}$. Temos dois casos a considerar $\widetilde{p} \dashrightarrow 2$ ou $\widetilde{p} \dashrightarrow 3$. No primeiro caso, devemos ter $2 = k\widetilde{p}$ para algum k e, como $\widetilde{p} \geq 2$, segue que

$k = 1$ e $\widetilde{p} = 2$. Da relação $\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X}) = d \cdot \chi^{\text{orb}}(X)$ temos

$$1 + \frac{1}{\widetilde{p}} = d \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \Longrightarrow 1 + \frac{1}{2} = d \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \Rightarrow d = 9.$$

Assim, $9 = d = 1 + (m_1 - 1) \cdot 2 = m_2 \cdot 3 = m_3 \cdot 3$, o que resulta $m_1 = 5$, $m_2 = m_3 = 3$ e o candidato $S \overset{9:1}{\underset{(2,...,2,1),(3,3,3),(3,3,3)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$. Observe que este candidato foi encontrado utilizando as seguintes instruções $S(2) \overset{9:1}{\underset{2\dashrightarrow 2}{\dashrightarrow\dashrightarrow}} S(2,3,3)$.

No segundo caso, devemos ter $3 = k\widetilde{p}$ para algum k e, como $\widetilde{p} \geq 2$, segue que $k = 1$ e $\widetilde{p} = 3$. Da relação $\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X}) = d \cdot \chi^{\text{orb}}(X)$ temos

$$1 + \frac{1}{\widetilde{p}} = d \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \Longrightarrow 1 + \frac{1}{3} = d \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \Rightarrow d = 8.$$

Este caso não resulta em nada porque $\Pi_2 = (3, ..., 3, 1)$ e $\Pi_3 = (3, ..., 3)$ são incompatíveis com $d = 8$.

Vamos considerar $X = S(2,3,4)$, o que implica $\chi^{\text{orb}}(X) = \dfrac{1}{12}$. Se $\widetilde{p} \dashrightarrow 2$, então, como anteriormente, teremos $\widetilde{p} = 2$. Da relação $\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X}) = d \cdot \chi^{\text{orb}}(X)$ temos

$$1 + \frac{1}{\widetilde{p}} = d \cdot \left(\frac{1}{12}\right) \Longrightarrow 1 + \frac{1}{2} = d \cdot \left(\frac{1}{12}\right) \Longrightarrow d = 18.$$

Este caso não resulta em nada porque $\Pi_1 = (2, ..., 2, 1)$ e $\Pi_3 = (4, ..., 4)$ são incompatíveis com $d = 18$.

Considere então $\widetilde{p} \dashrightarrow 3$ que, como anteriormente, nos leva a $\widetilde{p} = 3$. Da relação $\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X}) = d \cdot \chi^{\text{orb}}(X)$ temos

$$1 + \frac{1}{\widetilde{p}} = d \cdot \left(\frac{1}{12}\right) \Longrightarrow 1 + \frac{1}{3} = d \cdot \left(\frac{1}{12}\right) \Longrightarrow d = 16.$$

Como $16 = d = m_1 \cdot 2 = 1 + (m_2 - 1) \cdot 3 = m_3 \cdot 4$, segue que $m_1 = 8$, $m_2 = 6$ e $m_3 = 4$, o que nos leva ao candidato $S \overset{16:1}{\underset{(2,...,2),(3,...,3,1),(4,...,4)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$. Observe que este candidato foi encontrado utilizando as seguintes instruções $S(3) \overset{16:1}{\underset{3\dashrightarrow 3}{\dashrightarrow\dashrightarrow}} S(2,3,4)$.

Agora, suponhamos que $\widetilde{p} \dashrightarrow 4$. Neste caso, temos duas possibilidades: $\widetilde{p} = 2$ ou $\widetilde{p} = 4$. Se $\widetilde{p} = 2$, pela relação $\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X}) = d \cdot \chi^{\text{orb}}(X)$ temos

$$1 + \frac{1}{\widetilde{p}} = d \cdot \left(\frac{1}{12}\right) \Longrightarrow 1 + \frac{1}{2} = d \cdot \left(\frac{1}{12}\right) \Longrightarrow d = 18.$$

Assim, $18 = d = m_1 \cdot 2 = m_2 \cdot 3 = 2 + (m_3 - 1) \cdot 4$ e então $m_1 = 9$, $m_2 = 6$ e $m_3 = 5$ o que nos leva ao candidato $S \overset{18:1}{\underset{(2,...,2),(3,...,3),(4,...,4,2)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$. Observe que este candidato foi encontrado utilizando as seguintes instruções $S(2) \overset{18:1}{\underset{2\dashrightarrow 4}{\dashrightarrow\dashrightarrow}} S(2,3,4)$.

Se $\widetilde{p}=4$, pela relação $\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X})=d\cdot\chi^{\text{orb}}(X)$ temos

$$1+\frac{1}{\widetilde{p}}=d\cdot\left(\frac{1}{12}\right)\Longrightarrow 1+\frac{1}{4}=d\cdot\left(\frac{1}{12}\right)\Longrightarrow d=15.$$

Este caso não resulta em nada porque $\Pi_1=(2,...,2)$ e $\Pi_3=(4,...,4,1)$ são incompatíveis com $d=15$.

Seja $X=S(2,3,5)$, o que implica $\chi^{\text{orb}}(X)=\dfrac{1}{30}$. Se $\widetilde{p}\dashrightarrow 2$, então $\widetilde{p}=2$ e, pela relação $\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X})=d\cdot\chi^{\text{orb}}(X)$ temos

$$1+\frac{1}{\widetilde{p}}=d\cdot\left(\frac{1}{30}\right)\Longrightarrow 1+\frac{1}{2}=d\cdot\left(\frac{1}{30}\right)\Longrightarrow d=45.$$

Logo, $45=d=1+(m_1-1)\cdot 2=m_2\cdot 3=m_3\cdot 5$ e segue que $m_1=23$, $m_2=15$, $m_3=9$ o que nos leva ao candidato $S\overset{45:1}{\underset{(2,...,2,1),(3,...,3),(5,...,5)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}}S$. Observe que este candidato foi encontrado utilizando as seguintes instruções $S(2)\overset{45:1}{\underset{2\dashrightarrow 2}{\dashrightarrow\dashrightarrow}}S(2,3,5)$.

Se $\widetilde{p}\dashrightarrow 3$, então $\widetilde{p}=3$ e, pela relação $\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X})=d\cdot\chi^{\text{orb}}(X)$ temos

$$1+\frac{1}{\widetilde{p}}=d\cdot\left(\frac{1}{30}\right)\Longrightarrow 1+\frac{1}{3}=d\cdot\left(\frac{1}{30}\right)\Longrightarrow d=40.$$

Portanto, $40=d=m_1\cdot 2=1+(m_2-1)\cdot 3=m_3\cdot 5$, donde $m_1=20$, $m_2=14$ e $m_3=8$. Isto nos leva ao candidato $S\overset{40:1}{\underset{(2,...,2),(3,...,3,1),(5,...,5)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}}S$. Observe que este candidato foi encontrado utilizando as seguintes instruções $S(3)\overset{40:1}{\underset{3\dashrightarrow 3}{\dashrightarrow\dashrightarrow}}S(2,3,5)$.

Se $\widetilde{p}\dashrightarrow 5$, então $\widetilde{p}=5$ e, pela relação $\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X})=d\cdot\chi^{\text{orb}}(X)$ temos

$$1+\frac{1}{\widetilde{p}}=d\cdot\left(\frac{1}{30}\right)\Longrightarrow 1+\frac{1}{5}=d\cdot\left(\frac{1}{30}\right)\Longrightarrow d=36.$$

Deste modo, $36=d=m_1\cdot 2=m_2\cdot 3=1+(m_3-1)\cdot 5$, o que nos leva a $m_1=18$, $m_2=12$, $m_3=8$ e ao candidato $S\overset{36:1}{\underset{(2,...,2),(3,...,3),(5,...,5,1)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}}S$. Observe que este candidato foi encontrado utilizando as seguintes instruções $S(5)\overset{36:1}{\underset{5\dashrightarrow 5}{\dashrightarrow\dashrightarrow}}S(2,3,5)$.

Vamos considerar agora $\boxed{\widetilde{X}=S(\widetilde{p},\widetilde{q})\ com\ \widetilde{p}\neq\widetilde{q}>1}$. Desta forma, segue que $\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X})=\dfrac{1}{\widetilde{p}}+\dfrac{1}{\widetilde{q}}$.

Se $X=S$. Então, $\chi^{\text{orb}}(X)=2$. Assim, $\dfrac{\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X})}{\chi^{\text{orb}}(X)}<1$ e não existe candidato relevante.

Suponha $X=S(p)$. Então,

$$\frac{\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X})}{\chi^{\text{orb}}(X)}=\frac{\frac{1}{\widetilde{p}}+\frac{1}{\widetilde{q}}}{1+\frac{1}{p}}=\left(\frac{\widetilde{p}}{\widetilde{p}\widetilde{q}}+\frac{\widetilde{q}}{\widetilde{p}\widetilde{q}}\right)\cdot\frac{p}{p+1}<2$$

e novamente não existe candidato relevante.

Seja $X = S(p,q)$, o que implica $\chi^{\text{orb}}(X) = \frac{1}{p}+\frac{1}{q}$ e vamos supor primeiro que $\widetilde{p}, \widetilde{q} \dashrightarrow p$. Então $p = k \cdot \widetilde{p} = h \cdot \widetilde{q}$, para algum k, h e $d = k + h + (m_1 - 2) \cdot p = m_2 \cdot q$. Da relação $\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X}) = d \cdot \chi^{\text{orb}}(X)$ temos

$$\frac{1}{\widetilde{p}} + \frac{1}{\widetilde{q}} = d \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \Longrightarrow \frac{k}{p} + \frac{h}{p} = \frac{k}{p} + \frac{h}{p} + (m_1 - 2) + m_2 \Longrightarrow m_1 + m_2 = 2.$$

Portanto, $m_1 = 2$ e $m_2 = 0$, o que é impossível pois teríamos $d = 0$.

Suponha agora que $\widetilde{p} \dashrightarrow p$ e $\widetilde{q} \dashrightarrow q$, assim $p = k \cdot \widetilde{p}$ e $q = h \cdot \widetilde{q}$, para algum k, h e assim $d = k + (m_1 - 1) \cdot p = h + (m_2 - 1) \cdot q$. Da relação $\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X}) = d \cdot \chi^{\text{orb}}(X)$ temos

$$\frac{1}{\widetilde{p}} + \frac{1}{\widetilde{q}} = d \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \Longrightarrow \frac{k}{p} + \frac{h}{p} = \frac{k}{p} + (m_1 - 1) + \frac{h}{p} + (m_2 - 1) \Longrightarrow m_1 + m_2 = 2,$$

o que leva implica $m_1 = m_2 = 1$, mas então não podemos ter $p = \text{mmc}(k)$ ou $q = \text{mmc}(h)$, assim nada temos.

Se $X = S(2,2,p)$, então não podemos ter $(\widetilde{p}, \widetilde{q}) \dashrightarrow 2$ ou $\widetilde{p} \dashrightarrow 2$, $\widetilde{q} \dashrightarrow 2$ pois, caso contrário, $\widetilde{p} = \widetilde{q} = 2$ e então $\widetilde{X}$ seria bom. Se $\widetilde{p} \dashrightarrow 2$ e $\widetilde{q} \dashrightarrow p$, então devemos ter $\widetilde{p} = 2$ e segue que $\Pi_1 = (2, ..., 2, 1)$ e $\Pi_2 = (2, ..., 2)$ e, neste caso, d seria ambos par e ímpar, o que é impossível. Deste modo, façamos $(\widetilde{p}, \widetilde{q}) \dashrightarrow p$, o que implica $p = l\widetilde{p} = h\widetilde{q}$ para algum l, h, $d = 2k = l + h + (m_3 - 2) \cdot p$, $m_1 = m_2 = k$, e, pela relação $\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X}) = d \cdot \chi^{\text{orb}}(X)$ temos

$$\frac{1}{\widetilde{p}} + \frac{1}{\widetilde{q}} = d \cdot \left(\frac{1}{p}\right) \Longrightarrow \frac{l}{p} + \frac{h}{p} = \frac{l}{p} + \frac{h}{p} + (m_3 - 2) \Longrightarrow m_3 = 2,$$

o que nos diz que $d = 2k = l + h$, ou seja, $2k - h = l$ e obtemos o candidato $S \underset{(2,...,2),(2,...,2),(h,2k-h)}{\overset{2k:1}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$ com h e $2k - h$ não múltiplos um do outro. Observe que este candidato foi encontrado utilizando as seguintes instruções $S(\widetilde{p}, \widetilde{q}) \underset{(\widetilde{p},\widetilde{q}) \dashrightarrow p}{\overset{2k:1}{\dashrightarrow\dashrightarrow}} S(2,2,p)$.

Seja $X = S(2,3,4)$, o que implica $\chi^{\text{orb}}(X) = \frac{1}{12}$. Como anteriormente, não podemos ter $(\widetilde{p}, \widetilde{q}) \dashrightarrow 2$ ou $(\widetilde{p}, \widetilde{q}) \dashrightarrow 3$ pois em ambos os casos $\widetilde{X}$ seria bom. Suponha então que $(\widetilde{p}, \widetilde{q}) \dashrightarrow 4$. Como $4 = k\widetilde{p} = h\widetilde{q}$, podemos supor, sem perda de generalidade que $\widetilde{p} = 2$ e $\widetilde{q} = 4$. Da relação $\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X}) = d \cdot \chi^{\text{orb}}(X)$ temos

$$\frac{1}{\widetilde{p}} + \frac{1}{\widetilde{q}} = d \cdot \left(\frac{1}{12}\right) \Longrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = d \cdot \left(\frac{1}{12}\right) \Longrightarrow d = 9.$$

Este caso não resulta em nada porque $\Pi_1 = (2, ..., 2)$ e $\Pi_3 = (4, ..., 4, 2, 1)$ são incompatíveis com $d = 9$.

Façamos $\widetilde{p} \dashrightarrow 2$ e $\widetilde{q} \dashrightarrow 3$. Portanto, teremos $\widetilde{p} = 2$ e $\widetilde{q} = 3$ e, pela relação $\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X}) = d \cdot \chi^{\text{orb}}(X)$ segue que

$$\frac{1}{\widetilde{p}} + \frac{1}{\widetilde{q}} = d \cdot \left(\frac{1}{12}\right) \Longrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = d \cdot \left(\frac{1}{12}\right) \Longrightarrow d = 10.$$

Este caso não resulta em nada porque $\Pi_1 = (2, ..., 2, 1)$ e $\Pi_3 = (4, ..., 4)$ são incompatíveis com $d = 10$.

Considere $\widetilde{p} \dashrightarrow 2$ e $\widetilde{q} \dashrightarrow 4$. Portanto, para que $\widetilde{X}$ seja mau devemos ter $\widetilde{p} = 2$ e $\widetilde{q} = 4$ e, como antes, $d = 9$. Assim, $9 = d = 1+(m_1-1)\cdot 2 = m_2\cdot 3 = 1+(m_3-1)\cdot 4$, o que nos leva a $m_1 = 5$, $m_2 = 3$, $m_3 = 3$ e resulta o candidato $S \overset{9:1}{\underset{(2,...,2,1),(3,3,3),(4,4,1)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$. Observe que este candidato foi encontrado utilizando as seguintes instruções $S(2,4) \overset{9:1}{\underset{2\dashrightarrow 2 \quad 4\dashrightarrow 4}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S(2,3,4)$.

Finalmente, façamos $\widetilde{p} \dashrightarrow 3$ e $\widetilde{q} \dashrightarrow 4$. Sabemos que $\widetilde{p} = 3$, mas devemos considerar dois casos para $\widetilde{q}$: $\widetilde{q} = 2$ e $\widetilde{q} = 4$. No primeiro caso

$$\frac{1}{\widetilde{p}} + \frac{1}{\widetilde{q}} = d \cdot \left(\frac{1}{12}\right) \Longrightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = d \cdot \left(\frac{1}{12}\right) \Longrightarrow d = 10.$$

Logo, $10 = d = m_1 \cdot 2 = 1 + (m_2 - 1) \cdot 3 = 2 + (m_3 - 1) \cdot 4$ e então $m_1 = 5$, $m_2 = 4$ e $m_3 = 3$, o que nos leva ao candidato $S \overset{10:1}{\underset{(2,...,2),(3,3,3,1),(4,4,2)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$. Observe que este candidato foi encontrado utilizando as seguintes instruções $S(2,3) \overset{10:1}{\underset{2\dashrightarrow 4 \quad 3\dashrightarrow 3}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S(2,3,4)$.

Para o segundo caso temos

$$\frac{1}{\widetilde{p}} + \frac{1}{\widetilde{q}} = d \cdot \left(\frac{1}{12}\right) \Longrightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = d \cdot \left(\frac{1}{12}\right) \Longrightarrow d = 7,$$

que resulta em nada pois $\Pi_1 = (2, ..., 2)$ e $\Pi_3 = (4, ..., 4, 1)$ são incompatíveis com $d = 7$.

Para $X = S(2,3,5)$ temos $\chi^{\text{orb}}(X) = \dfrac{1}{30}$. Observe que não podemos ter $(\widetilde{p}, \widetilde{q}) \dashrightarrow 2$ ou $(\widetilde{p}, \widetilde{q}) \dashrightarrow 3$ ou $(\widetilde{p}, \widetilde{q}) \dashrightarrow 5$ pois em todos os casos $\widetilde{X}$ seria bom. Vamos supor $\widetilde{p} \dashrightarrow 2$ e $\widetilde{q} \dashrightarrow 3$. Assim,

$$\frac{1}{\widetilde{p}} + \frac{1}{\widetilde{q}} = d \cdot \left(\frac{1}{30}\right) \Longrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = d \cdot \left(\frac{1}{30}\right) \Longrightarrow d = 25.$$

Assim, $25 = d = 1 + (m_1 - 1) \cdot 2 = 1 + (m_2 - 1) \cdot 3 = m_3 \cdot 5$. Isto nos leva ao candidato $S \overset{25:1}{\underset{(2,...,2,1),(3,...,3,1),(5,...,5)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$. Observe que este candidato foi encontrado utilizando as seguintes instruções $S(2,3) \overset{25:1}{\underset{2\dashrightarrow 2 \quad 3\dashrightarrow 3}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S(2,3,5)$.

Agora, suponha $\widetilde{p} \dashrightarrow 2$ e $\widetilde{q} \dashrightarrow 5$. Então,

$$\frac{1}{\widetilde{p}} + \frac{1}{\widetilde{q}} = d \cdot \left(\frac{1}{30}\right) \Longrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = d \cdot \left(\frac{1}{30}\right) \Longrightarrow d = 21.$$

Então $21 = d = 1+(m_1-1)\cdot 2 = m_2\cdot 3 = 1+(m_3-1)\cdot 5$ e $m_1 = 11$, $m_2 = 7$, $m_3 = 5$. Isto nos leva ao candidato $S \overset{21:1}{\underset{(2,...,2,1),(3,...,3),(5,...,5,1)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$. Observe que este candidato foi encontrado utilizando as seguintes instruções $S(2,5) \overset{21:1}{\underset{2\dashrightarrow 2 \quad 5\dashrightarrow 5}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S(2,3,5)$.

Por último, considere $\widetilde{p} \dashrightarrow 3$ e $\widetilde{q} \dashrightarrow 5$. Logo,

$$\frac{1}{\widetilde{p}} + \frac{1}{\widetilde{q}} = d \cdot \left(\frac{1}{30}\right) \Longrightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = d \cdot \left(\frac{1}{30}\right) \Longrightarrow d = 16.$$

Deste modo, $16 = d = m_1 \cdot 2 = 1 + (m_2 - 1) \cdot 3 = 1 + (m_3 - 1) \cdot 5$ e segue que $m_1 = 8$, $m_2 = 6$ e $m_3 = 4$. Isto nos leva ao candidato $S \overset{16:1}{\underset{(2,\ldots,2),(3,\ldots,3,1),(5,5,5,1)}{\dashrightarrow}} S$ e conclui a demonstração. Observe que este candidato foi encontrado utilizando as seguintes instruções $S(3,5) \overset{16:1}{\underset{3\dashrightarrow 3 \quad 5\dashrightarrow 5}{\dashrightarrow}} S(2,3,5)$.

□

Corolário 5.7. *Os candidatos a recobrimentos ramificados entre superfícies listados em 5.1 são todos excepcionais.*

Demonstração. De fato, na demonstração da proposição 5.6 podemos observar que todos os candidatos a recobrimentos ramificados encontrados têm um candidato a recobrimento entre 2-orbifolds associado $\widetilde{X} \dashrightarrow X$ com $\widetilde{X}$ mau e X bom. Portanto, pelo lema 3.37, segue que todos eles são excepcionais.

□

Proposição 5.8. *Os candidatos a recobrimentos ramificados entre superfícies tendo candidato associado $S \dashrightarrow X$ são*

$$S \overset{p:1}{\underset{(p),(p)}{\dashrightarrow}} S \quad S \overset{2p:1}{\underset{(2,\ldots,2),(2,\ldots,2),(p,p)}{\dashrightarrow}} S \quad S \overset{12:1}{\underset{(2,\ldots,2),(3,\ldots,3),(3,\ldots,3)}{\dashrightarrow}} S$$
$$S \overset{24:1}{\underset{(2,\ldots,2),(3,\ldots,3),(4,\ldots,4)}{\dashrightarrow}} S \quad S \overset{60:1}{\underset{(2,\ldots,2),(3,\ldots,3),(5,\ldots,5)}{\dashrightarrow}} S. \tag{5.2}$$

Demonstração. Inicialmente, observe que $X = S$ nos leva a $\dfrac{\chi^{\text{orb}}(S)}{\chi^{\text{orb}}(X)} < 2$. Logo não produz um candidato relevante.

Considere $X = S(p)$, o que implica $\chi^{\text{orb}}(X) = 1 + \dfrac{1}{p}$. Então, pela relação $\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X}) = d \cdot \chi^{\text{orb}}(X)$ segue que

$$2 = d \cdot \left(1 + \frac{1}{p}\right) \Longrightarrow d = \frac{2p}{p+1} = \frac{p}{p+1} + \frac{p}{p+1} < 2.$$

Portanto, também não produz um candidato relevante.

Se $X = S(p,q)$, então devemos ter $d = m_1 \cdot p = m_2 \cdot q$. Da relação $\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X}) = d \cdot \chi^{\text{orb}}(X)$ segue

$$2 = d \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \Longrightarrow m_1 + m_2 = 2.$$

Logo, $m_1 = m_2 = 1$ e $d = p = q$, o que nos leva a $X = S(p,p)$ e ao candidato $S \overset{p:1}{\underset{(p),(p)}{\dashrightarrow}} S$.

Seja $X = S(2,2,p)$. Pela relação $\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X}) = d \cdot \chi^{\text{orb}}(X)$ temos

$$2 = d \cdot \left(\frac{1}{p}\right) \Longrightarrow d = 2p.$$

Além disso, como $2p = d = m_1 \cdot 2 = m_2 \cdot 2 = m_3 \cdot p$ segue que $m_1 = m_2 = p$ e $m_3 = 2$. Portanto, temos o seguinte candidato $S \overset{2p:1}{\underset{(2,\ldots,2),(2,\ldots,2),(p,p)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$.

Se $X = S(2,3,3)$, então

$$2 = d \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \Longrightarrow d = 12.$$

Além disso, $12 = d = m_1 \cdot 2 = m_2 \cdot 3 = m_3 \cdot 3$ o que nos leva a $m_1 = 6$, $m_2 = m_3 = 4$ e ao seguinte candidato $S \overset{12:1}{\underset{(2,\ldots,2),(3,\ldots,3),(3,\ldots,3)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$.

Seja $X = S(2,3,4)$. Assim,

$$2 = d \cdot \left(\frac{1}{12}\right) \Longrightarrow d = 24.$$

Como $24 = d = m_1 \cdot 2 = m_2 \cdot 3 = m_3 \cdot 4$, segue que $m_1 = 12$, $m_2 = 8$ e $m_3 = 6$, o que nos leva ao candidato $S \overset{24:1}{\underset{(2,\ldots,2),(3,\ldots,3),(4,\ldots,4)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$.

Por último, considere $X = S(2,3,5)$ e temos

$$2 = d \cdot \left(\frac{1}{30}\right) \Longrightarrow d = 60.$$

Deste modo, $60 = d = m_1 \cdot 2 = m_2 \cdot 3 = m_3 \cdot 5$, segue que $m_1 = 30$, $m_2 = 20$ e $m_3 = 12$, o que nos leva ao candidato $S \overset{60:1}{\underset{(2,\ldots,2),(3,\ldots,3),(5,\ldots,5)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$ e completa a demonstração.

□

Observação 5.9. As realizações geométricas de todos os candidatos a recobrimentos ramificados dados em 5.2 podem ser vistas através dos ladrilhamentos apresentados na seção 3.4.

Proposição 5.10. *Os candidatos a recobrimentos ramificados entre superfícies tendo candidato associado $S(\widetilde{p},\widetilde{p}) \dashrightarrow X$ com $\widetilde{p} > 1$ são*

$$\begin{array}{lll}
S \overset{4:1}{\underset{(2,2),(3,1),(3,1)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S & S \overset{6:1}{\underset{(2,2,1,1),(3,3),(3,3)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S & S \overset{6:1}{\underset{(2,2,2),(3,3),(4,1,1)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S \\
S \overset{8:1}{\underset{(2,\ldots,2),(3,3,1,1),(4,4)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S & S \overset{12:1}{\underset{(2,\ldots,2,1,1),(3,3,3,3),(4,4,4)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S & S \overset{12:1}{\underset{(2,\ldots,2),(3,\ldots,3),(4,4,2,2)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S \\
S \overset{12:1}{\underset{(2,\ldots,2),(3,\ldots,3),(5,5,1,1)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S & S \overset{20:1}{\underset{(2,\ldots,2),(3,\ldots,3,1,1),(5,\ldots,5)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S & S \overset{30:1}{\underset{(2,\ldots,2,1,1),(3,\ldots,3),(5,\ldots,5)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S \\
S \overset{2k+1:1}{\underset{(2,\ldots,2,1),(2,\ldots,2,1),(2k+1)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S & S \overset{2k+2:1}{\underset{(2,\ldots,2,1,1),(2,\ldots,2),(2k+2)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S &
\end{array} \tag{5.3}$$

com $k \geq 1$ arbitrário nos dois últimos ítens.

Demonstração. Observe inicialmente que $\chi^{\text{orb}}(S(\widetilde{p},\widetilde{p})) = \dfrac{2}{\widetilde{p}} \leq 1$, já que $\widetilde{p} \geq 2$.

Como antes, consideraremos cada um dos casos. Seja $X = S$. Neste caso $\chi^{\text{orb}}(X) = 2$ e, sendo assim,

$$\frac{\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X})}{\chi^{\text{orb}}(X)} = \frac{\frac{2}{\widetilde{p}}}{2} < 1.$$

Portanto, para este caso não existe candidato relevante.

Seja $X = S(p)$. Devemos ter $\widetilde{p}, \widetilde{p} \dashrightarrow p$, o que nos diz que $p = k \cdot \widetilde{p}$ para algum k. Assim,

$$\frac{\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X})}{\chi^{\text{orb}}(X)} = \frac{\frac{2}{\widetilde{p}}}{1 + \frac{1}{p}} = \frac{2k}{p} \cdot \frac{p}{p+1} = \frac{k}{p+1} + \frac{k}{p+1} < 2.$$

O que nos diz que também não há candidatos relevantes para este caso.

Suponha $X = S(p,q)$. Se $\widetilde{p}, \widetilde{p} \dashrightarrow p$, então $p = k \cdot \widetilde{p}$ para algum k e $d = 2k + (m_1 - 2) \cdot p = m_2 \cdot q$. Pela relação $\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X}) = d \cdot \chi^{\text{orb}}(X)$ temos

$$\frac{2}{\widetilde{p}} = d \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \Longrightarrow \frac{2k}{p} = \frac{2k}{p} + (m_1 - 2) + m_2 \Longrightarrow m_1 + m_2 = 2.$$

Que nos leva a $m_1 = 2$ e $m_2 = 0$, o que é absurdo. Considere $\widetilde{p} \dashrightarrow p$ e $\widetilde{p} \dashrightarrow q$, então $p = k \cdot \widetilde{p}$ para algum k e $q = h \cdot \widetilde{p}$ para algum h, donde $d = k + (m_1 - 1) \cdot p = h + (m_2 - 1) \cdot q$. Assim,

$$\frac{2}{\widetilde{p}} = d \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \Longrightarrow \frac{k}{p} + \frac{h}{q} = \frac{k}{p} + (m_1 - 1) + \frac{h}{q} + (m_2 - 1) \Longrightarrow m_1 + m_2 = 2.$$

Logo, $m_1 = m_2 = 1$. Como não podemos ter $p = \text{mmc}(k)$ ou $q = \text{mmc}(h)$, não temos nada.

Tomemos $X = S(2,2,p)$. Se $(\widetilde{p},\widetilde{p}) \dashrightarrow 2$, então temos $2 = h \cdot \widetilde{p}$ para algum h implicando que $h = 1$ e $\widetilde{p} = 2$. Pela relação $\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X}) = d \cdot \chi^{\text{orb}}(X)$ segue

$$\frac{2}{\widetilde{p}} = d \cdot \left(\frac{1}{p}\right) \Longrightarrow 1 = d \cdot \left(\frac{1}{p}\right) \Longrightarrow p = d.$$

Além disso, devemos ter $p = d = 2 + (m_1 - 2) \cdot 2 = m_2 \cdot 2 = m_3 \cdot p$. Fazendo $k = m_1 - 2$ temos $p = d = 2k + 2$, $m_1 = k + 2$, $m_2 = k + 1$ e $m_3 = 1$, o que leva ao candidato $S \underset{(2,\ldots,2,1,1),(2,\ldots,2),(2k+2)}{\overset{2k+2:1}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$. Observe que este candidato foi encontrado utilizando as seguintes instruções $S(2,2) \underset{(2,2)\dashrightarrow 2}{\overset{2k+2:1}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S(2,2,2k+2)$.

Se $\widetilde{p} \dashrightarrow 2$ e $\widetilde{p} \dashrightarrow 2$, então $2 = h \cdot \widetilde{p}$ e $2 = l \cdot \widetilde{p}$, o que implica $h = l = 1$ e $\widetilde{p} = 2$. Como antes, concluímos que $p = d$. Além disso, $p = d = 1 + (m_1 - 1) \cdot 2 = 1 + (m_2 - 1) \cdot 2 = m_3 \cdot p$. Fazendo $k = m_1 - 1 = m_2 - 1$, segue que $d = 2k + 1$, $m_1 = m_2 = k + 1$ e $m_3 = 1$ e assim temos o seguinte candidato $S \underset{(2,\ldots,2,1),(2,\ldots,2,1),(2k+1)}{\overset{2k+1:1}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$. Observe que este candidato foi encontrado utilizando as seguintes instruções $S(2,2) \underset{2\dashrightarrow 2}{\overset{2k+1:1}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} \underset{2\dashrightarrow 2}{\dashrightarrow} S(2,2,2k+1)$.

Vamos supor que $\widetilde{p} \dashrightarrow 2$ e $\widetilde{p} \dashrightarrow p$. Neste caso teríamos $\Pi_1 = (2, ..., 2, 1)$ e $\Pi_2 = (2, ..., 2)$ e d deveria ser par e ímpar ao mesmo tempo o que é absurdo.

Suponhamos então que $(\widetilde{p}, \widetilde{p}) \dashrightarrow p$, então $p = k \cdot \widetilde{p}$ e, pela relação $\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X}) = d \cdot \chi^{\text{orb}}(X)$

$$\frac{2}{\widetilde{p}} = d \cdot \left(\frac{1}{p}\right) \Longrightarrow \frac{2k}{p} = d \cdot \left(\frac{1}{p}\right) \Longrightarrow d = 2k.$$

Além disso, $2k = d = 2k + (m_3 - 2) \cdot p$ nos diz que $m_3 = 2$, o que nos leva a $\Pi_3 = (k, k)$, mas $p \neq \text{mmc}(k, k)$. Portanto, não temos nada.

Se $X = S(2, 3, 3)$, então

$$\frac{2}{\widetilde{p}} = d \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \Longrightarrow d \cdot \widetilde{p} = 12.$$

Observe que não podemos ter $\widetilde{p} \dashrightarrow 2$ e $\widetilde{p} \dashrightarrow 3$ pois, teríamos $\widetilde{p} = 2$ e $\widetilde{p} = 3$, o que é absurdo. Se $(\widetilde{p}, \widetilde{p}) \dashrightarrow 2$, então $\widetilde{p} = 2$ e $d = 6$. Segue então que $6 = d = 2 + (m_1 - 2) \cdot 2 = m_2 \cdot 3 = m_3 \cdot 3$ e isto nos leva a $m_1 = 4$, $m_2 = m_3 = 2$ e gera o candidato $S \overset{6:1}{\underset{(2,2,1,1),(3,3),(3,3)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$. Observe que este candidato foi encontrado utilizando as seguintes instruções $S(2, 2) \overset{6:1}{\underset{(2,2)\dashrightarrow 2}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S(2, 3, 3)$.

Da mesma forma, se $(\widetilde{p}, \widetilde{p}) \dashrightarrow 3$, então $\widetilde{p} = 3$ e $d = 4$, o que é impossível já que $\Pi_2 = (3, ..., 3, 1, 1)$ e $\Pi_3 = (3, ..., 3)$ são incompatíveis com $d = 4$.

Para $\widetilde{p} \dashrightarrow 3$ e $\widetilde{p} \dashrightarrow 3$ novamente $\widetilde{p} = 3$ e $d = 4$, o que nos dá $4 = d = m_1 \cdot 2 = 1 + (m_2 - 1) \cdot 3 = 1 + (m_3 - 1) \cdot 3$, donde segue $m_1 = 2$, $m_2 = m_3 = 2$, o que nos leva ao candidato $S \overset{4:1}{\underset{(2,2),(3,1),(3,1)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$. Observe que este candidato foi encontrado utilizando as seguintes instruções $S(3, 3) \overset{4:1}{\underset{3\dashrightarrow 3}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}}{}_{3\dashrightarrow 3} S(2, 3, 3)$.

Considere $X = S(2, 3, 4)$. Então

$$\frac{2}{\widetilde{p}} = d \cdot \left(\frac{1}{12}\right) \Longrightarrow d \cdot \widetilde{p} = 24.$$

Vamos supor que $(\widetilde{p}, \widetilde{p}) \dashrightarrow 2$ e assim $\widetilde{p} = 2$ e $d = 12$. Desta forma, $12 = d = 2 + (m_1 - 2) \cdot 2 = m_2 \cdot 3 = m_3 \cdot 4$, o que implica $m_1 = 7$, $m_2 = 4$ e $m_3 = 3$ que nos leva ao candidato $S \overset{12:1}{\underset{(2,...,2,1,1),(3,3,3,3),(4,4,4)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$. Observe que este candidato foi encontrado utilizando as seguintes instruções $S(2, 2) \overset{12:1}{\underset{(2,2)\dashrightarrow 2}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S(2, 3, 4)$.

Como anteriormente, não podemos ter $\widetilde{p} \dashrightarrow 2$ e $\widetilde{p} \dashrightarrow 3$ pois teríamos $\widetilde{p} = 2$ e $\widetilde{p} = 3$, o que é absurdo. Suponhamos que $\widetilde{p} \dashrightarrow 2$ e $\widetilde{p} \dashrightarrow 4$. Então $2 = k \cdot \widetilde{p}$ e $4 = h \cdot \widetilde{p}$, donde segue que $\widetilde{p} = 2$, $k = 1$, $h = 2$ e $d = 12$, o que é impossível pois $\Pi_1 = (2, ..., 2, 1)$ e $\Pi_2 = (4, ..., 4, 2)$ são incompatíveis com $d = 12$.

Se $(\widetilde{p}, \widetilde{p}) \dashrightarrow 3$, então $\widetilde{p} = 3$, $d = 8$ e segue que $8 = m_1 \cdot 2 = 2 + (m_2 - 2) \cdot 3 = m_3 \cdot 4$, o que implica $m_1 = 4$, $m_2 = 4$ e $m_3 = 2$ o que nos leva ao candidato $S \overset{8:1}{\underset{(2,2,2,2),(3,3,1,1),(4,4)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$. Observe que este candidato foi encontrado utilizando as seguintes

instruções $S(3,3) \overset{8:1}{\underset{(3,3)\dashrightarrow 3}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S(2,3,4)$.

Se $\widetilde{p} \dashrightarrow 3$ e $\widetilde{p} \dashrightarrow 4$, então $\widetilde{p} = 3$ e $\widetilde{p}$ divide 4, o que é impossível. Assim, consideremos $(\widetilde{p},\widetilde{p}) \dashrightarrow 4$ e temos dois casos a considerar: $\widetilde{p} = 2$ e $\widetilde{p} = 4$. No primeiro caso temos $d = 12$ o que nos leva a $12 = m_1 \cdot 2 = m_2 \cdot 3 = 2 \cdot 2 + (m_3 - 2) \cdot 4$, o que implica $m_1 = 6$, $m_2 = 4$, $m_3 = 4$ e gera o seguinte candidato $S \overset{12:1}{\underset{(2,\ldots,2),(3,3,3,3),(4,4,2,2)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$. Observe que este candidato foi encontrado utilizando as seguintes instruções $S(2,2) \overset{12:1}{\underset{(2,2)\dashrightarrow 4}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S(2,3,4)$.

No segundo caso, $\widetilde{p} = 4$, $d = 6$, $6 = d = m_1 \cdot 2 = m_2 \cdot 3 = 2 + (m_3 - 2) \cdot 4$ que nos fornece $m_1 = 3$, $m_2 = 2$, $m_3 = 3$ e o seguinte candidato $S \overset{6:1}{\underset{(2,2,2),(3,3),(4,1,1)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$. Observe que este candidato foi encontrado utilizando as seguintes instruções $S(4,4) \overset{6:1}{\underset{(4,4)\dashrightarrow 4}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S(2,3,4)$.

Finalmente, consideramos $X = S(2,3,5)$. Temos

$$\frac{2}{\widetilde{p}} = d \cdot \left(\frac{1}{30}\right) \Longrightarrow d \cdot \widetilde{p} = 60.$$

Iniciamos observando que os casos:

- $\widetilde{p} \dashrightarrow 2$ e $\widetilde{p} \dashrightarrow 3 \Longrightarrow \widetilde{p} = 2$ e $\widetilde{p} = 3$,
- $\widetilde{p} \dashrightarrow 2$ e $\widetilde{p} \dashrightarrow 5 \Longrightarrow \widetilde{p} = 2$ e $\widetilde{p} = 5$,
- $\widetilde{p} \dashrightarrow 3$ e $\widetilde{p} \dashrightarrow 5 \Longrightarrow \widetilde{p} = 3$ e $\widetilde{p} = 5$,

são impossíveis.

Se $(\widetilde{p},\widetilde{p}) \dashrightarrow 2$, segue que $\widetilde{p} = 2$, $d = 30$ que nos dá $30 = d = 2 + (m_1 - 2) \cdot 2 = m_2 \cdot 3 = m_3 \cdot 5$, $m_1 = 16$, $m_2 = 10$, $m_3 = 6$ e o candidato $S \overset{30:1}{\underset{(2,\ldots,2,1,1),(3,\ldots,3),(5,\ldots,5)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$. Observe que este candidato foi encontrado utilizando as seguintes instruções $S(2,2) \overset{30:1}{\underset{(2,2)\dashrightarrow 2}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S(2,3,5)$.

Se $(\widetilde{p},\widetilde{p}) \dashrightarrow 3$, segue que $\widetilde{p} = 3$, $d = 20$ e temos $20 = d = m_1 \cdot 2 = 2 + (m_2 - 2) \cdot 3 = m_3 \cdot 5$, $m_1 = 10$, $m_2 = 8$, $m_3 = 4$ e o candidato $S \overset{20:1}{\underset{(2,\ldots,2),(3,\ldots,3,1,1),(5,5,5,5)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$. Observe que este candidato foi encontrado utilizando as seguintes instruções $S(3,3) \overset{20:1}{\underset{(3,3)\dashrightarrow 3}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S(2,3,5)$.

Finalmente, se $(\widetilde{p},\widetilde{p}) \dashrightarrow 5$, segue que $\widetilde{p} = 5$, $d = 12$ que nos dá $12 = d = m_1 \cdot 2 = m_2 \cdot 3 = 2 + (m_3 - 2) \cdot 5$, $m_1 = 6$, $m_2 = 4$, $m_3 = 4$ e o candidato $S \overset{12:1}{\underset{(2,\ldots,2),(3,3,3,3),(5,5,1,1)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$, completando a prova. Observe que este candidato foi encontrado utilizando as seguintes instruções $S(5,5) \overset{12:1}{\underset{(5,5)\dashrightarrow 5}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S(2,3,5)$.

□

Proposição 5.11. *Todos os candidatos a recobrimentos ramificados entre superfícies da Proposição 5.10 são realizáveis.*

Demonstração. Para uma lista descrevendo os candidatos a recobrimentos entre orbifolds $\widetilde{X} \dashrightarrow X$ e as instruções de recobrimento associadas aos ítens em 5.5, juntamente com a isometria correspondente $\widetilde{f} : \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{S}$ induzindo a f desejada via recobrimentos

geométricos universais $\widetilde{\pi} : \mathbb{S} \longrightarrow \widetilde{X}$ e $\pi : \mathbb{S} \longrightarrow X$ fixados, sugerimos ao leitor consultar [12]. Aqui apresentaremos apenas algumas figuras que ilustram geometricamente tais realizações.

A realização de $S(3,3) \overset{\substack{4:1 \\ 3\dashrightarrow 3,\ 3\dashrightarrow 3}}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow} S(2,3,3)$ pode ser vista na figura 5.1.

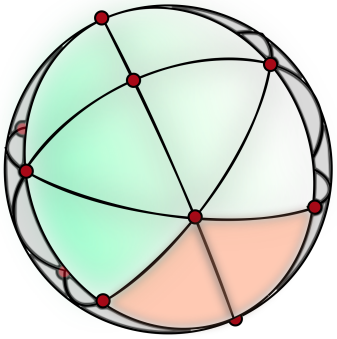


Figura 5.1: Realização geométrica do recobrimento $S(3,3) \overset{\substack{4:1 \\ 3\dashrightarrow 3,\ 3\dashrightarrow 3}}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow} S(2,3,3)$

A realização de $S(2,2) \overset{\substack{6:1 \\ (2,2)\dashrightarrow 2}}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow} S(2,3,3)$ pode ser vista na figura 5.2.

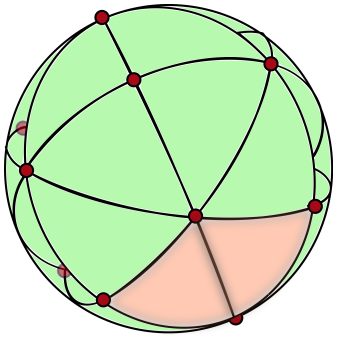


Figura 5.2: Realização geométrica do recobrimento $S(2,2) \overset{\substack{6:1 \\ (2,2)\dashrightarrow 2}}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow} S(2,3,3)$

A realização de $S(4,4) \overset{\substack{6:1 \\ (4,4)\dashrightarrow 4}}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow} S(2,3,4)$ pode ser vista na figura 5.3.

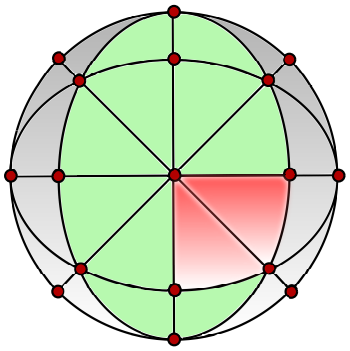


Figura 5.3: Realização geométrica do recobrimento $S(4,4) \overset{\substack{6:1 \\ (4,4)\dashrightarrow 4}}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow} S(2,3,4)$

A realização de $S(3,3) \overset{\substack{8:1 \\ (3,3)\dashrightarrow 3}}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow} S(2,3,4)$ e $\widetilde{f}$ pode ser vista na figura 5.4.

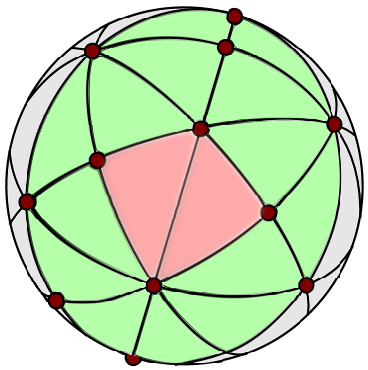


Figura 5.4: Realização geométrica do recobrimento $S(3,3) \overset{\substack{8:1 \\ (3,3)\dashrightarrow 3}}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow} S(2,3,4)$

A realização de $S(2,2) \overset{\substack{12:1 \\ (2,2)\dashrightarrow 2}}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow} S(2,3,4)$ pode ser vista na figura 5.5.

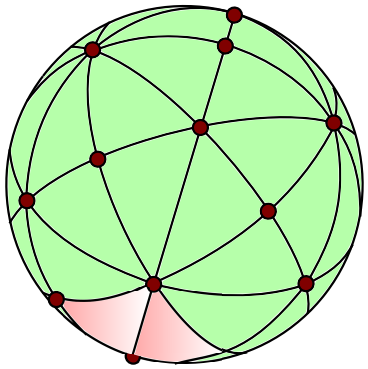


Figura 5.5: Realizações geométricas dos recobrimentos $S(2,2) \overset{\substack{12:1 \\ (2,2)\dashrightarrow 2}}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow} S(2,3,4)$ e $S(2,2) \overset{\substack{12:1 \\ (2,2)\dashrightarrow 4}}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow} S(2,3,4)$

A realização de $S(2,2) \overset{\substack{12:1 \\ (2,2)\dashrightarrow 4}}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow} S(2,3,4)$ também pode ser vista na figura 5.5.

A realização de $S(5,5) \overset{\substack{12:1 \\ (5,5)\dashrightarrow 5}}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow} S(2,3,5)$ pode ser vista na figura 5.6.

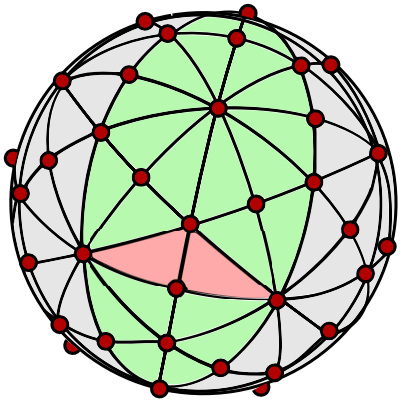


Figura 5.6: Realização geométrica do recobrimento $S(5,5) \overset{\substack{12:1 \\ (5,5)\dashrightarrow 5}}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow} S(2,3,5)$

A realização de $S(3,3) \overset{\substack{20:1 \\ (3,3)\dashrightarrow 3}}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow} S(2,3,5)$ pode ser vista na figura 5.7.

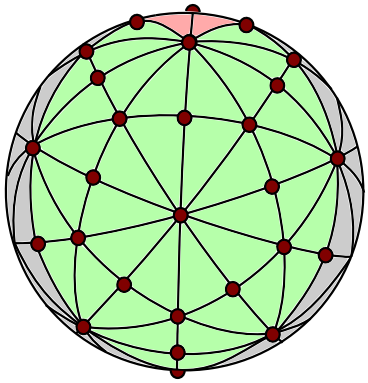


Figura 5.7: Realização geométrica do recobrimento $S(3,3) \overset{20:1}{\underset{(3,3)\dashrightarrow 3}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S(2,3,5)$

A realização de $S(2,2) \overset{30:1}{\underset{(2,2)\dashrightarrow 2}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S(2,3,5)$ pode ser vista na figura 5.8.

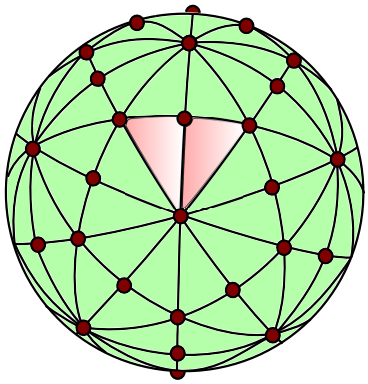


Figura 5.8: Realização geométrica do recobrimento $S(2,2) \overset{30:1}{\underset{(2,2)\dashrightarrow 2}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S(2,3,5)$

Para detalhes das realizações de

$$S(2,2) \overset{2k+1:1}{\underset{2\dashrightarrow 2,\quad 2\dashrightarrow 2}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S(2,2,2k+1)$$

e

$$S(2,2) \overset{2k+2:1}{\underset{(2,2)\dashrightarrow 2}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S(2,2,2k+2)$$

recomendamos consultar [12].

□

Proposição 5.12. *Os candidatos a recobrimentos ramificados entre superfícies tendo candidato associado* $S(2,2,\widetilde{p}) \dashrightarrow X$ *com* $\widetilde{p} > 1$ *são*

$$\begin{array}{ll} S \overset{4:1}{\underset{(2,1,1),(3,1),(4)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S & S \overset{6:1}{\underset{(2,2,1,1),(3,3),(4,2)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S \\ S \overset{6:1}{\underset{(2,2,1,1),(3,3),(5,1)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S & S \overset{10:1}{\underset{(2,\ldots,2,1,1),(3,3,3,1),(5,5)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S \\ S \overset{15:1}{\underset{(2,\ldots,2,1,1,1),(3,\ldots,3),(5,5,5)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S. & \end{array} \tag{5.4}$$

Demonstração. Observe inicialmente que $\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X}) = \dfrac{1}{\widetilde{p}}$. Além disso, $X = S$ implica que $\chi^{\text{orb}}(X) = 2$ e então

$$\frac{\chi^{\text{orb}}(S(2,2,\widetilde{p}))}{\chi^{\text{orb}}(X)} = \frac{\frac{1}{\widetilde{p}}}{2} < 1,$$

o que nos diz que não existe candidato relevante neste caso.

Da mesma forma, se $X = S(p)$, então

$$\frac{\chi^{\text{orb}}(S(2,2,\widetilde{p}))}{\chi^{\text{orb}}(X)} = \frac{\frac{1}{\widetilde{p}}}{1+\frac{1}{p}} = \frac{1}{\widetilde{p}} \cdot \frac{p}{p+1} < 1,$$

e também não temos candidatos relevantes.

Se $X = S(p,q)$ temos as seguintes possibilidades:

- $(2,2,\widetilde{p})$ ⇢ p. Então $p = 2 \cdot k = h \cdot \widetilde{p}$ para algum k, h e devemos ter $d = 2k + h + (m_1 - 3) \cdot p = m_2 \cdot q$. Da relação $\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X}) = d \cdot \chi^{\text{orb}}(X)$ segue

  $$\frac{1}{\widetilde{p}} = d \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \Longrightarrow \frac{h}{p} = \frac{2k}{p} + \frac{h}{p} + (m_1 - 3) + m_2 \Longrightarrow m_1 + m_2 = 2.$$

  Absurdo! Logo, não existe candidato relevante.

- $\widetilde{p}$ ⇢ p e $(2,2)$ ⇢ q. Então $p = k \cdot \widetilde{p}$ e $q = 2 \cdot h$, para algum k, h, assim $d = k + (m_1 - 1) \cdot p = 2h + (m_2 - 2) \cdot q$, donde segue que

  $$\frac{1}{\widetilde{p}} = d \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \Longrightarrow \frac{k}{p} = \frac{k}{p} + (m_1 - 1) + \frac{2h}{q} + (m_2 - 2) \Longrightarrow m_1 + m_2 = 2.$$

  Novamente uma contradição que nos leva a concluir que não existem candidatos relevantes.

- $(2,\widetilde{p})$ ⇢ p e 2 ⇢ q. Então $p = 2 \cdot k = l \cdot \widetilde{p}$ e $q = 2 \cdot h$, para algum k, l, h, e assim $d = k + l + (m_1 - 2) \cdot p = h + (m_2 - 1) \cdot q$. Deste modo,

  $$\frac{1}{\widetilde{p}} = d \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \Longrightarrow \frac{l}{p} = \frac{k}{p} + \frac{l}{p} + (m_1 - 2) + \frac{h}{q} + (m_2 - 1) \Longrightarrow m_1 + m_2 = 2.$$

  Absurdo! Portanto, não existe candidato relevante.

Suponha que $X = S(2,2,p)$. Temos as seguintes possibilidades:

♢ $(2,2,\widetilde{p})$ ⇢ 2.

Neste caso, $\widetilde{p} = 2$, $d = 3 + (m_1 - 3) \cdot 2 = m_2 \cdot 2$ e teríamos d par e ímpar ao mesmo tempo, o que é impossível.

♢ $(2,2,\widetilde{p})$ ⇢ p.

Então $p = 2 \cdot l = h \cdot \widetilde{p}$, para algum l, h e $d = m_1 \cdot 2 = m_2 \cdot 2 = 2l + h + (m_3 - 3) \cdot p$. Fazendo $m_1 = m_2 = k$, temos $2k = d = 2l + h + (m_3 - 3) \cdot p$ e, pela relação $\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X}) = d \cdot \chi^{\text{orb}}(X)$ segue

$$\frac{1}{\widetilde{p}} = d \cdot \left(\frac{1}{p}\right) \Longrightarrow \frac{h}{p} = \frac{2l}{p} + \frac{h}{p} + (m_3 - 3) \Longrightarrow m_3 = 2,$$

o que contradiz o fato de $m_3 \geq 3$. Portanto não existe candidato relevante.

♢ $(2,2) \dashrightarrow 2, \widetilde{p} \dashrightarrow 2$.

Como antes, temos $\widetilde{p} = 2$ e segue $d = 2 + (m_1 - 2) \cdot 2 = 1 + (m_2 - 1) \cdot 2$ e d seria par e ímpar ao mesmo tempo, o que é impossível.

♢ $(2,2) \dashrightarrow 2, \widetilde{p} \dashrightarrow p$.

Para este caso devemos ter $p = h \cdot \widetilde{p}$ para algum h, do que segue $d = 2 + (m_1 - 2) \cdot 2 = m_2 \cdot 2 = h + (m_3 - 1) \cdot p$. Fazendo $m_2 = k$ obtemos $d = 2k$, $m_1 = k + 1$ e

$$\frac{1}{\widetilde{p}} = d \cdot \left(\frac{1}{p}\right) \Longrightarrow \frac{h}{p} = \frac{h}{p} + (m_3 - 1) \Longrightarrow m_3 = 1.$$

Deste modo, teríamos $2k = d = h$ e $p \neq \text{mmc}(h)$. Portanto não existe candidato relevante.

♢ $\widetilde{p} \dashrightarrow 2, (2,2) \dashrightarrow p$.

Devemos ter $\widetilde{p} = 2$, o que implicaria $d = 1 + (m_1 - 1) \cdot 2 = m_2 \cdot 2$ e d seria par e ímpar ao mesmo tempo, o que é impossível.

♢ $(2, \widetilde{p}) \dashrightarrow 2, 2 \dashrightarrow 2$.

Novamente teríamos $\widetilde{p} = 2$ e $d = 2 + (m_1 - 2) \cdot 2 = 1 + m_2 \cdot 2$, fazendo com que d fosse par e ímpar ao mesmo tempo, o que é absurdo.

♢ $(2, \widetilde{p}) \dashrightarrow 2, 2 \dashrightarrow p$.

Neste caso temos $\widetilde{p} = 2$, $p = 2 \cdot h$ para algum h e $d = 2 + (m_1 - 2) \cdot 2 = m_2 \cdot 2 = h + (m_3 - 1) \cdot p$. Fazendo $m_2 = k$, como antes, temos $m_1 = k + 1$ e

$$\frac{1}{\widetilde{p}} = d \cdot \left(\frac{1}{p}\right) \Longrightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{p} + (m_3 - 1) \Longrightarrow m_3 = 1,$$

o que nos leva a $2k = d = h$ mas $p \neq \text{mmc}(h)$. Portanto, não existe candidato relevante.

♢ $2 \dashrightarrow 2, (2, \widetilde{p}) \dashrightarrow p$.

Se isto ocorresse deveríamos ter $\Pi_1 = (2, ..., 2, 1)$ e $\Pi_2 = (2, ..., 2)$, o que faria com que d fosse par e ímpar ao mesmo tempo. Assim, não existe candidato relevante.

$\diamondsuit$ $2 \dashrightarrow 2, 2 \dashrightarrow 2, \widetilde{p} \dashrightarrow p$.

Temos $p = h \cdot \widetilde{p}$ para algum h e então $d = 1 + (m_1 - 1) \cdot 2 = 1 + (m_2 - 1) \cdot 2 = h + (m_3 - 1) \cdot p$. Fazendo $m_1 - 1 = m_2 - 1 = k$ temos $m_1 = m_2 = k + 1$ e além disso,

$$\frac{1}{\widetilde{p}} = d \cdot \left(\frac{1}{p}\right) \Longrightarrow \frac{h}{p} = \frac{h}{p} + (m_3 - 1) \Longrightarrow m_3 = 1.$$

Desta forma não podemos ter $p = \text{mmc}(h)$. Portanto, não existe candidato relevante.

$\diamondsuit$ $2 \dashrightarrow 2, \widetilde{p} \dashrightarrow 2, 2 \dashrightarrow p$.

Devemos ter $\widetilde{p} = 2$, $p = 2 \cdot h$ para algum h e $d = 1 + (m_1 - 1) \cdot 2 = 1 + (m_2 - 1) \cdot 2 = h + (m_3 - 1) \cdot p$. Fazendo $m_1 - 1 = m_2 - 1 = k$ temos $m_1 = m_2 = k + 1$ e, como antes, $m_3 = 1$, o que não dá um candidato relevante já que $p \neq \text{mmc}(h)$.

Portanto, não existe candidato a recobrimento para $X = S(2, 2, p)$.

Seja $X = S(2, 3, 3)$. Observe inicialmente que, sendo 2 e 3 primos entre si, não podemos ter $2 = k \cdot 3$, qualquer que seja $k \in \mathbb{Z}$. Deste modo, temos os seguintes casos a considerar:

- $(2, 2, \widetilde{p}) \dashrightarrow 2$.

  Neste caso, $\widetilde{p} = 2$. Assim, pela relação $\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X}) = d \cdot \chi^{\text{orb}}(X)$ temos

  $$\frac{1}{\widetilde{p}} = d \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \Longrightarrow \frac{1}{2} = d \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \Longrightarrow d = 3.$$

  Isto nos levaria a $\Pi_1 = (1, 1, 1)$, mas $2 \neq \text{mmc}(1, 1, 1)$. Portanto, não há candidato relavante.

- $(2, 2) \dashrightarrow 2, \widetilde{p} \dashrightarrow 3$.

  Neste caso, $\widetilde{p} = 3$ e temos

  $$\frac{1}{\widetilde{p}} = d \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \Longrightarrow \frac{1}{3} = d \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \Longrightarrow d = 2,$$

  o que é impossível pois $\Pi_3 = (3, ..., 3)$ é incompatível com $d = 2$.

Portanto, não há candidatos relevantes para $X = S(2, 3, 3)$.

Consideremos então $X = S(2, 3, 4)$. Temos as seguintes possibilidades:

$\diamondsuit$ $(2, 2, \widetilde{p}) \dashrightarrow 2$.

Este caso implica que $\widetilde{p} = 2$, então

$$\frac{1}{\widetilde{p}} = d \cdot \left(\frac{1}{12}\right) \Longrightarrow \frac{1}{2} = d \cdot \left(\frac{1}{12}\right) \Longrightarrow d = 6,$$

que é incompatível com $\Pi_3 = (4, ..., 4)$.

$\diamondsuit$ $(2, 2, \widetilde{p}) \dashrightarrow 4$.

Sendo assim, temos duas situações:

1ª) $\widetilde{p} = 2$, do que segue, como antes, que $d = 6$. Desta forma, deveríamos ter $\Pi_3 = (2, 2, 2)$, mas $4 \neq \text{mmc}(2, 2, 2)$. Portanto não temos nada.

2ª) $\widetilde{p} = 4$. Assim,

$$\frac{1}{\widetilde{p}} = d \cdot \left(\frac{1}{12}\right) \Longrightarrow \frac{1}{4} = d \cdot \left(\frac{1}{12}\right) \Longrightarrow d = 3.$$

Logo, $\Pi_3 = (1, 1, 1)$ mas $4 \neq \text{mmc}(1, 1, 1)$ e novamente não temos nada.

$\diamondsuit$ $(2, 2) \dashrightarrow 2, \widetilde{p} \dashrightarrow 3$.

Neste caso temos $\widetilde{p} = 3$, do que segue

$$\frac{1}{\widetilde{p}} = d \cdot \left(\frac{1}{12}\right) \Longrightarrow \frac{1}{3} = d \cdot \left(\frac{1}{12}\right) \Longrightarrow d = 4.$$

Além disso, $4 = d = 2 + (m_1 - 2) \cdot 2 = 1 + (m_2 - 1) \cdot 3 = m_3 \cdot 4$, o que implica $m_1 = 3$, $m_2 = 2$ e $m_3 = 1$ nos fornecendo o seguinte candidato $S \overset{4:1}{\underset{(2,1,1),(3,1),(4)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$.

$\diamondsuit$ $(2, 2) \dashrightarrow 2, \widetilde{p} \dashrightarrow 4$.

Novamente devemos considerar duas situações:

1ª) $\widetilde{p} = 2$ e, como antes, que $d = 6$. Deste modo, $6 = 2 + (m_1 - 2) \cdot 2 = m_2 \cdot 3 = 2 + (m_3 - 1) \cdot 4$ e obtemos $m_1 = 4$, $m_2 = 2$ e $m_3 = 2$, donde segue o seguinte candidato $S \overset{6:1}{\underset{(2,2,1,1),(3,3),(4,2)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$.

2ª) $\widetilde{p} = 4$. Assim,

$$\frac{1}{\widetilde{p}} = d \cdot \left(\frac{1}{12}\right) \Longrightarrow \frac{1}{4} = d \cdot \left(\frac{1}{12}\right) \Longrightarrow d = 3.$$

Logo, $\Pi_3 = (1, 1, 1)$ mas $4 \neq \text{mmc}(1, 1, 1)$ e novamente não temos nada.

$\diamondsuit$ $(2, 2) \dashrightarrow 4, \widetilde{p} \dashrightarrow 3$.

Neste caso teremos $\widetilde{p} = 3$ e, como antes, $d = 4$. Sendo assim, $\Pi_3 = (2, 2)$, mas $4 \neq \text{mmc}(2, 2)$. Portanto não temos nada.

$\diamondsuit$ $\widetilde{p} \dashrightarrow 2, (2, 2) \dashrightarrow 4$.

Como antes, $\widetilde{p} = 2$ e $d = 6$, que é incompatível com $\Pi_3 = (4, ..., 4, 2, 2)$.

$\diamondsuit$ $2 \dashrightarrow 2, \widetilde{p} \dashrightarrow 3, 2 \dashrightarrow 4$.

Neste caso $\widetilde{p} = 3$ e $d = 4$, o que é incompatível com $\Pi_3 = (4, ..., 4, 2)$.

Finalmente, consideremos $X = S(2,3,5)$. Como 2 e 3 são primos entre si, e também 2 e 5 são primos entre si, temos apenas os seguintes casos a considerar:

- $(2,2,\widetilde{p}) \dashrightarrow 2$.

  Neste caso, $\widetilde{p} = 2$ e, pela relação $\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X}) = d \cdot \chi^{\text{orb}}(X)$ temos

  $$\frac{1}{\widetilde{p}} = d \cdot \left(\frac{1}{30}\right) \Longrightarrow \frac{1}{2} = d \cdot \left(\frac{1}{30}\right) \Longrightarrow d = 15.$$

  Assim, $15 = d = 3 + (m_1 - 3) \cdot 2 = m_2 \cdot 3 = m_3 \cdot 5$, o que nos leva a $m_1 = 9$, $m_2 = 5$, $m_3 = 3$ e ao seguinte candidato $S \overset{15:1}{\underset{(2,\ldots,2,1,1,1),(3,\ldots,3),(5,5,5)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$.

- $(2,2) \dashrightarrow 2, \widetilde{p} \dashrightarrow 3$.

  Neste caso, $\widetilde{p} = 3$ e temos

  $$\frac{1}{\widetilde{p}} = d \cdot \left(\frac{1}{30}\right) \Longrightarrow \frac{1}{3} = d \cdot \left(\frac{1}{30}\right) \Longrightarrow d = 10.$$

  Assim, $10 = d = 2 + (m_1 - 2) \cdot 2 = 1 + (m_2 - 1) \cdot 3 = m_3 \cdot 5$, o que nos leva a $m_1 = 6$, $m_2 = 4$, $m_3 = 2$ e ao seguinte candidato $S \overset{10:1}{\underset{(2,\ldots,2,1,1),(3,3,3,1),(5,5)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$.

- $(2,2) \dashrightarrow 2, \widetilde{p} \dashrightarrow 5$.

  Neste caso, $\widetilde{p} = 5$ e temos

  $$\frac{1}{\widetilde{p}} = d \cdot \left(\frac{1}{30}\right) \Longrightarrow \frac{1}{5} = d \cdot \left(\frac{1}{30}\right) \Longrightarrow d = 6.$$

  Assim, $6 = d = 2 + (m_1 - 2) \cdot 2 = m_2 \cdot 3 = 1 + (m_3 - 1) \cdot 5$, o que nos leva a $m_1 = 4$, $m_2 = 2$, $m_3 = 2$ e ao seguinte candidato $S \overset{6:1}{\underset{(2,2,1,1),(3,3),(5,1)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$.

□

Proposição 5.13. *Todos os candidatos a recobrimentos ramificados entre superfícies da Proposição 5.12 são realizáveis.*

Para uma demonstração da proposição 5.13 direcionamos o leitor para [12].

Proposição 5.14. *O único candidato a recobrimento ramificado entre superfícies tendo candidato associado $S(2,3,3) \dashrightarrow X$ é $S \overset{5:1}{\underset{(2,2,1),(3,1,1),(5)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$.*

Demonstração. Primeiramente, lembremos que $\chi^{\text{orb}}(S(2,3,3)) = \frac{1}{6}$.

Se $X = S$, então $\chi^{\text{orb}}(X) = 2$, o que nos leva a $\dfrac{\chi^{\text{orb}}(S(2,3,3))}{\chi^{\text{orb}}(X)} = \dfrac{1}{12} < 1$. Portanto, não existe candidato relevante.

Da mesma forma, para $X = S(p)$, temos

$$\frac{\chi^{\text{orb}}(S(2,3,3))}{\chi^{\text{orb}}(X)} = \frac{1}{12} \cdot \frac{p}{p+1} < 1,$$

e também não há candidato relevante.

Se $X = S(p,q)$, então temos as seguintes possibilidades:

- $(2,3,3) \dashrightarrow p$.

  Se isto ocorre devemos ter $p = 2k = 3h$ para algum k, h. Além disso, $d = k + 2h + (m_1 - 3) \cdot p = m_2 \cdot q$. Então, da relação $\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X}) = d \cdot \chi^{\text{orb}}(X)$, segue

  $$\frac{1}{6} = d \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \Longrightarrow \frac{1}{6} = \frac{k}{p} + \frac{2h}{p} + (m_1 - 3) + m_2 \Longrightarrow m_1 + m_2 = 2,$$

  o que é absurdo.

- $(2,3) \dashrightarrow p$ e $3 \dashrightarrow q$.

  Neste caso, teríamos $p = 2k = 3h$ e $q = 3l$ para algum k, h, l. Assim, $d = k + h + (m_1 - 2) \cdot p = l + (m_2 - 1) \cdot q$ e segue que

  $$\frac{1}{6} = d \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \Longrightarrow \frac{1}{6} = \frac{k}{p} + \frac{h}{p} + (m_1 - 2) + \frac{l}{q} + (m_2 - 1) \Longrightarrow m_1 + m_2 = 2,$$

  o que é absurdo.

- $2 \dashrightarrow p$ e $(3,3) \dashrightarrow q$.

  Nesta situação teríamos $p = 2k$ e $q = 3h$ para algum k, h. Deste modo, $d = k + (m_1 - 1) \cdot p = 2h + (m_2 - 2) \cdot q$, do que segue

  $$\frac{1}{6} = d \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \Longrightarrow \frac{1}{6} = \frac{k}{p} + (m_1 - 1) + \frac{2h}{q} + (m_2 - 2) \Longrightarrow m_1 + m_2 = 2,$$

  novamente nos leva a uma contradição.

Suponha $X = S(2,2,p)$. Como 2 e 3 são primos entre si, teremos apenas duas possibilidades:

♢ $(2,3,3) \dashrightarrow p$.

Nesta situação temos $p = 2k = 3h$ para algum k, h e $d = m_1 \cdot 2 = m_2 \cdot 2 = k + 2h + (m_3 - 3) \cdot p$. Então

$$\frac{1}{6} = d \cdot \left(\frac{1}{p}\right) \Longrightarrow \frac{1}{6} = \frac{k}{p} + \frac{2h}{p} + (m_3 - 3) \Longrightarrow m_3 = 2,$$

o que é absurdo.

$\diamondsuit$ $2 \dashrightarrow 2$ e $(3,3) \dashrightarrow p$.

Se isto ocorre, então $d = 1 + (m_1 - 1) \cdot 2 = m_2 \cdot 2$ e d seria par e ímpar ao mesmo tempo, o que é impossível.

Considere $X = S(2,3,3)$. Neste caso teríamos $\dfrac{\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X})}{\chi^{\text{orb}}(X)} = 1$. Logo, não existe candidato relevante.

Se $X = S(2,3,4)$ então temos as seguintes possibilidades:

- $2 \dashrightarrow 2$ e $(3,3) \dashrightarrow 3$.

  Nesta situação teríamos $d = 1 + (m_1 - 1) \cdot 2 = m_3 \cdot 4$ o que é impossível pois d seria par e ímpar ao mesmo tempo.

- $(3,3) \dashrightarrow 3$ e $2 \dashrightarrow 4$.

  Neste caso deveríamos ter

$$\frac{1}{6} = d \cdot \left(\frac{1}{12}\right) \Longrightarrow d = 2.$$

  Assim, como $2 = d = m_1 \cdot 2 = 2 + (m_2 - 2) \cdot 3 = 2 + (m_3 - 1) \cdot 4$ teríamos $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ e $m_3 = 1$, o que é impossível pois $3 \neq \text{mmc}(1,1)$ e $4 \neq \text{mmc}(2)$. Por isso também não temos candidato relevante.

Finalmente, vamos considerar $X = S(2,3,5)$. Assim,

$$\frac{1}{6} = d \cdot \left(\frac{1}{30}\right) \Longrightarrow d = 5.$$

Além disso, a única possibilidade é $2 \dashrightarrow 2$ e $(3,3) \dashrightarrow 3$. Desta forma, temos $5 = d = 1 + (m_1 - 1) \cdot 2 = 2 + (m_2 - 2) \cdot 3 = m_3 \cdot 5$ que nos leva a $m_1 = 3$, $m_2 = 3$ e $m_3 = 1$ e ao seguinte candidato $S \overset{5:1}{\underset{(2,2,1),(3,1,1),(5)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$, concluindo a demonstração.

□

Proposição 5.15. *O candidato a recobrimento ramificado entre superfícies da Proposição 5.14 é realizável.*

Para demonstração deste fato recomendamos ao leitor consultar [12].

Proposição 5.16. *Não existem candidatos a recobrimentos ramificados entre superfícies tendo candidato associado da forma $S(2,3,4) \dashrightarrow X$ ou $S(2,3,5) \dashrightarrow X$.*

Demonstração. Vamos demonstrar cada caso de modo separado.

Considere $\boxed{\widetilde{X} = S(2,3,4)}$. Lembremos que $\chi^{\text{orb}}(S(2,3,4)) = \dfrac{1}{12}$.

Se $X = S$, então $\dfrac{\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X})}{\chi^{\text{orb}}(X)} = \dfrac{1}{24} < 1$. Portanto, não há candidato relevante.

Seja $X = S(p)$. Assim

$$\frac{\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X})}{\chi^{\text{orb}}(X)} = \frac{1}{12} \cdot \frac{p}{p+1} < 1.$$

Logo, não existe candidato relevante.

Considere $X = S(p,q)$. Temos que considerar as seguintes situações:

- $(2,3,4)$ --→ p.

  Neste caso temos $p = 2k = 3h = 4l$ para algum k, h, l. Assim, $d = k+h+l+(m_1-3)\cdot p = m_2 \cdot q$. Da relação $\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X}) = d \cdot \chi^{\text{orb}}(X)$ segue que

  $$\frac{1}{12} = d \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \Longrightarrow \frac{1}{12} = \frac{k}{p} + \frac{h}{p} + \frac{l}{p} + (m_1 - 3) + m_2 \Longrightarrow m_1 + m_2 = 2,$$

  o que é absurdo.

- $(2,3)$ --→ p e 4 --→ q.

  Se isto ocorre então $p = 2k = 3h$ para algum k, h e $q = 4l$ para algum l. Desta forma, $d = k + h + (m_1 - 2)\cdot p = l + (m_2 - 1)\cdot q$. Logo,

  $$\frac{1}{12} = d \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \Longrightarrow \frac{1}{12} = \frac{k}{p} + \frac{h}{p} + (m_1 - 2) + \frac{l}{q} + (m_2 - 1) \Longrightarrow m_1 + m_2 = 2,$$

  que é uma contradição.

- $(2,4)$ --→ p e 3 --→ q.

  Esta possibilidade nos diz que $p = 2k = 4h$ para algum k, h e $q = 3l$ para algum l e temos novamente $d = k+h+(m_1-2)\cdot p = l+(m_2-1)\cdot q$ implicando $m_1+m_2 = 2$, o que é impossível.

- $(3,4)$ --→ p e 2 --→ q.

  Neste caso $p = 3k = 4h$ para algum k, h e $q = 2l$ para algum l. Como antes, $d = k + h + (m_1 - 2)\cdot p = l + (m_2 - 1)\cdot q$ que nos leva à contradição de que $m_1 + m_2 = 2$.

Seja $X = S(2,2,p)$. Temos as seguintes possibilidades:

♢ $(2,3,4)$ --→ p.

Se isto ocorre devemos ter $p = 2k = 3k = 4l$ para algum k, l, h, do que segue $d = m_1 \cdot 2 = m_2 \cdot 2 = k + h + l + (m_3 - 3)\cdot p$. Pela relação $\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X}) = d \cdot \chi^{\text{orb}}(X)$ temos

$$\frac{1}{12} = d \cdot \left(\frac{1}{p}\right) \Longrightarrow \frac{1}{12} = \frac{k}{p} + \frac{h}{p} + \frac{l}{p} + (m_3 - 3) \Longrightarrow m_3 = 2,$$

o que é absurdo.

$\diamondsuit$ $2 \dashrightarrow 2$ e $(3,4) \dashrightarrow p$.

Neste caso teríamos $d = 1 + (m_1 - 1) \cdot 2 = m_2 \cdot 2$, o que é impossível pois, caso contrário, d seria par e ímpar ao mesmo tempo.

Observe que $X = S(2,3,3)$ não pode ocorrer pois, neste caso, teríamos uma das seguintes possibilidades:

1ª) $4 \dashrightarrow 2$, que é impossível pois, caso contrário, teríamos $2 = k \cdot 4$ para algum $k \in \mathbb{Z}$.

2ª) $4 \dashrightarrow 3$, que é impossível pois, caso contrário, teríamos $3 = k \cdot 4$ para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Se $X = S(2,3,4)$, então $\dfrac{\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X})}{\chi^{\text{orb}}(X)} = 1$ e não temos candidato relevante.

Para finalizar, observe que $X = S(2,3,5)$ também não pode ocorrer pois, neste caso, teríamos uma das seguintes possibilidades:

1ª) $4 \dashrightarrow 2$, que é impossível pois, caso contrário, teríamos $2 = k \cdot 4$ para algum $k \in \mathbb{Z}$.

2ª) $4 \dashrightarrow 3$, que é impossível pois, caso contrário, teríamos $3 = k \cdot 4$ para algum $k \in \mathbb{Z}$.

2ª) $4 \dashrightarrow 5$, que é impossível pois, caso contrário, teríamos $5 = k \cdot 4$ para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Considere agora $\boxed{\widetilde{X} = S(2,3,5)}$. Recordemos que $\chi^{\text{orb}}(S(2,3,5)) = \dfrac{1}{30}$.

Se $X = S$ então $\dfrac{\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X})}{\chi^{\text{orb}}(X)} = \dfrac{1}{60} < 1$, o que implica que não existe candidato relevante.

Da mesma forma, se $X = S(p)$, então

$$\frac{\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X})}{\chi^{\text{orb}}(X)} = \frac{1}{30} \cdot \frac{p}{p+1} < 1.$$

Portanto não há candidato relevante.

Suponha $X = S(p,q)$. Temos as seguintes possibilidades:

- $(2,3,5) \dashrightarrow p$.

  Neste caso teríamos $p = 2k = 3h = 5l$ para algum k, h, l. Assim, $d = k + h + l + (m_1 - 3) \cdot p = m_2 \cdot q$ e, pela relação $\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X}) = d \cdot \chi^{\text{orb}}(X)$, temos

  $$\frac{1}{30} = d \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \Longrightarrow \frac{1}{30} = \frac{k}{p} + \frac{h}{p} + \frac{l}{p} + (m_1 - 3) + m_2 \Longrightarrow m_1 + m_2 = 2,$$

  o que é absurdo.

- $(2,3) \dashrightarrow p$ e $5 \dashrightarrow q$.

  Esta situação nos diz que $p = 2k = 3h$ para algum k, h e $q = 5l$ para algum l. Desta forma, $d = k + h + (m_1 - 2) \cdot p = l + (m_2 - 1) \cdot q$ e segue que

  $$\frac{1}{30} = d \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \Longrightarrow \frac{1}{30} = \frac{k}{p} + \frac{h}{p} + (m_1 - 2) + \frac{l}{q} + (m_2 - 1) \Longrightarrow m_1 + m_2 = 2,$$

o que é uma contradição.

- $(2,5) \dashrightarrow p$ e $3 \dashrightarrow q$.

  Neste caso teríamos $p = 2k = 5h$ para algum k, h, $q = 3l$ para algum l, $d = k+h+(m_1-2)\cdot p = l+(m_2-1)\cdot q$ e, como antes, $m_1+m_2 = 2$, o que é impossível.

- $(3,5) \dashrightarrow p$ e $2 \dashrightarrow q$.

  Esta situação nos leva a $p = 3k = 5h$ para algum k, h, $q = 2l$ para algum l, $d = k + h + (m_1 - 2) \cdot p = l + (m_2 - 1) \cdot q$ e, novamente, $m_1 + m_2 = 2$, o que é impossível.

Se $X = S(2,2,p)$, então temos as seguintes possibilidades:

$\diamondsuit$ $(2,3,5) \dashrightarrow p$.

Neste caso teríamos $p = 2k = 3h = 5l$ para algum k, h, l, $d = m_1 \cdot 2 = m_2 \cdot 2 = k + h + l + (m_3 - 3) \cdot p$ e então

$$\frac{1}{30} = d \cdot \left(\frac{1}{p}\right) \Longrightarrow \frac{1}{30} = \frac{k}{p} + \frac{h}{p} + \frac{l}{p} + (m_3 - 3) \Longrightarrow m_3 = 2,$$

o que é absurdo.

$\diamondsuit$ $2 \dashrightarrow 2$ e $(3,5) \dashrightarrow p$.

Se isto ocorrese, então teríamos $\Pi_1 = (2, ..., 2, 1)$ e $\Pi_2 = (2, ..., 2)$, o que é impossível pois d seria par e ímpar ao mesmo tempo.

Não podemos ter $X = S(2,3,3)$ pois, neste caso uma das duas possibilidades abaixo deveria acontecer:

- $5 \dashrightarrow 2$, o que é impossível pois $2 \neq 5k, \forall k \in \mathbb{Z}$.

- $5 \dashrightarrow 3$, o que é impossível pois $3 \neq 5k, \forall k \in \mathbb{Z}$.

Da mesma forma não podemos ter $X = S(2,3,4)$ pois também $4 \neq 5k, \forall k \in \mathbb{Z}$.

Por último, se $X = S(2,3,5)$, então $\dfrac{\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X})}{\chi^{\text{orb}}(X)} = 1$ e não temos candidato relevante. Desta forma concluímos a demonstração.

□

Os resultados desta seção reunidos nos fornecem exatamente o resultado enunciado no Teorema 5.4. Na próxima seção trabalharemos o caso euclidiano.

5.3 O Caso Euclidiano

Nosso objetivo nesta seção é investigar a realizabilidade de candidatos a recobrimentos ramificados entre superfícies tendo candidatos a recobrimentos entre orbifolds associados $\widetilde{X} \dashrightarrow X$ com $\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X}) = \chi^{\text{orb}}(X) = 0$. Isto significa, como visto no capítulo 3, que $\widetilde{X}$ e X devem pertencer à lista

$$T, \quad S(2,4,4), \quad S(2,3,6) \quad S(3,3,3), \quad S(2,2,2,2),$$

onde T é o toro.

Além disso, como as ordens dos pontos de cone de $\widetilde{X}$ devem dividir as ordens dos pontos de cone de X, segue que as únicas possibilidades de candidatos a recobrimentos para o caso euclidiano são:

$$\begin{aligned}
&T \dashrightarrow T, \qquad T \dashrightarrow S(2,4,4), \qquad T \dashrightarrow S(2,3,6), \qquad T \dashrightarrow S(3,3,3),\\
&T \dashrightarrow S(2,2,2,2), \qquad S(2,4,4) \dashrightarrow S(2,4,4), \qquad S(2,3,6) \dashrightarrow S(2,3,6),\\
&S(3,3,3) \dashrightarrow S(3,3,3), \quad S(3,3,3) \dashrightarrow S(2,3,6), \quad S(2,2,2,2) \dashrightarrow S(2,2,2,2),\\
&S(2,2,2,2) \dashrightarrow S(2,4,4), \qquad S(2,2,2,2) \dashrightarrow S(2,3,6),
\end{aligned}$$

que analisaremos usando Geometria Euclidiana. A saber:

- Fixaremos sobre X uma estrutura euclidiana dada por algum recobrimento geométrico $\pi : \mathbb{E} \longrightarrow X$;
- Assumiremos que $\widetilde{X} \overset{d:1}{\dashrightarrow} X$ é realizado por alguma aplicação f, usaremos a proposição 5.1 para deduzir que existe uma aplicação afim correspondente $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ e analisaremos $\widetilde{f}$ para mostrar que d deve satisfazer certas condições;
- Empregaremos os cálculos do ítem anterior para mostrar que se d satisfizer as condições, então $\widetilde{f}$, e portanto f, existirão.

Ferramentas Geométricas Gerais

Nossa análise dos candidatos a recobrimentos descritos acima, depende de alguns fatos que usaremos repetidamente. O primeiro é a exata determinação dos levantamentos dos pontos de cone, que descreveremos agora. Para qualquer um de nossos $X's$ euclidianos (excetuando-se o toro), com a estrutura $\pi : \mathbb{E} \longrightarrow X = \mathbb{E}/\Gamma$ fixada no capítulo 3 seção 3.4, e qualquer vértice $\widetilde{V}^{(p)}$ da região fundamental para Γ descrito, definimos $V^p = \pi(\widetilde{V}^p)$, assim sua ordem de cone é p. Então $\pi^{-1}(V^{(p)})$ será algum conjunto $\left\{\widetilde{V}_j^{(p)}\right\} \subset \mathbb{E}$, que identificamos com $\mathbb{C}$, com j variando em um conjunto de índices adequado. As listas exatas dos levantamentos são as seguintes:

$$
\begin{aligned}
S(2,4,4): &\quad (\textbf{veja a figura } 5.9)\\
\widetilde{A}^{(2)}_{a,b} &= a+ib \quad a,b\in\mathbb{Z}, a\not\equiv b(\text{mod } 2)\\
\widetilde{B}^{(4)}_{a,b} &= a+ib \quad a,b\in\mathbb{Z}, a\equiv b\equiv 0(\text{mod } 2)\\
\widetilde{C}^{(4)}_{a,b} &= a+ib \quad a,b\in\mathbb{Z}, a\equiv b\equiv 1(\text{mod } 2);
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

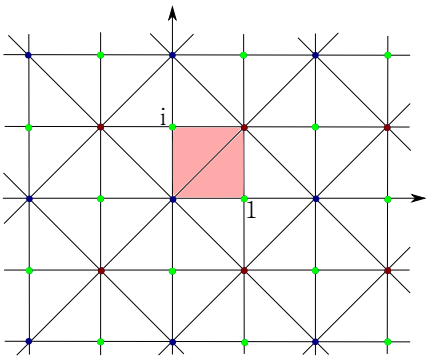


Figura 5.9: Ladrilhamento de $\mathbb{E}$ induzida pela estrutura geométrica fixada sobre $S(2,4,4)$.

De acordo com a descrição anterior, na figura 5.9, pontos verdes representam $\widetilde{A}^{(2)}_{a,b}$, pontos azuis representam $\widetilde{B}^{(4)}_{a,b}$ e pontos vermelhos representam $\widetilde{C}^{(4)}_{a,b}$.

$$
\begin{aligned}
S(2,3,6): &\quad \textbf{com } \omega=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(\textbf{veja a figura } 5.10)\\
\widetilde{A}^{(2)}_{a,b} &= \frac{1}{2}(a+\omega b) \quad a,b\in\mathbb{Z}, \textbf{não ambos pares}, \quad a-b\equiv 1(\text{mod } 3)\\
\widetilde{B}^{(3)}_{a,b} &= a+\omega b \quad a,b\in\mathbb{Z}, a-b\not\equiv 2(\text{mod } 3)\\
\widetilde{C}^{(6)}_{a,b} &= a+\omega b \quad a,b\in\mathbb{Z}, a-b\equiv 2(\text{mod } 3);
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

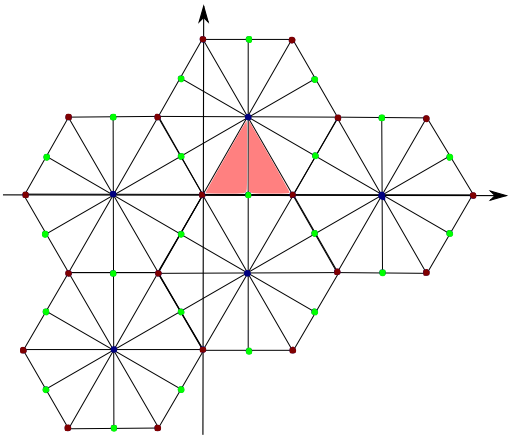


Figura 5.10: Ladrilhamento de $\mathbb{E}$ induzida pela estrutura geométrica fixada sobre $S(2,3,6)$.

De acordo com a descrição anterior, na figura 5.10, pontos verdes representam $\widetilde{A}^{(2)}_{a,b}$, pontos azuis representam $\widetilde{B}^{(3)}_{a,b}$ e pontos vermelhos representam $\widetilde{C}^{(6)}_{a,b}$.

$$\begin{aligned} S(3,3,3): \quad & \textbf{com} \quad \omega = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} (\textbf{veja a figura } 5.11) \\ \widetilde{A}^{(3)}_{a,b} &= a+\omega b \quad a,b \in \mathbb{Z}, a-b \equiv 0 (\text{mod } 3) \\ \widetilde{B}^{(3)}_{a,b} &= a+\omega b \quad a,b \in \mathbb{Z}, a-b \equiv 1 (\text{mod } 3) \\ \widetilde{C}^{(3)}_{a,b} &= a+\omega b \quad a,b \in \mathbb{Z}, a-b \equiv 2 (\text{mod } 3); \end{aligned} \tag{5.7}$$

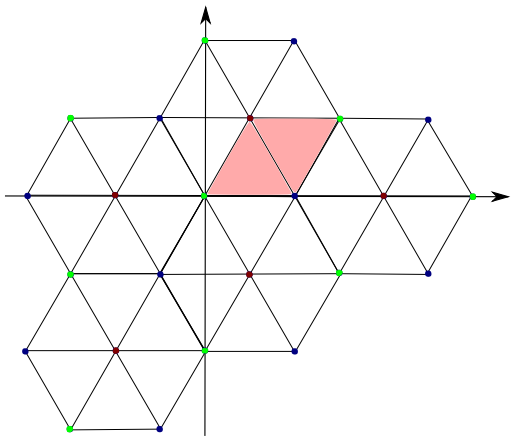


Figura 5.11: Ladrilhamento de $\mathbb{E}$ induzida pela estrutura geométrica fixada sobre $S(3,3,3)$.

De acordo com a descrição anterior, na figura 5.10, pontos verdes representam $\widetilde{A}^{(3)}_{a,b}$, pontos azuis representam $\widetilde{B}^{(3)}_{a,b}$ e pontos vermelhos representam $\widetilde{C}^{(3)}_{a,b}$.

$$\begin{aligned} S(2,2,2,2): \quad & (\textbf{veja a figura } 5.12) \\ \widetilde{A}^{(2)}_{a,b} &= a+ib \quad a,b \in \mathbb{Z}, a \equiv b \equiv 0 (\text{mod } 2) \\ \widetilde{B}^{(2)}_{a,b} &= a+ib \quad a,b \in \mathbb{Z}, a \equiv 1, b \equiv 0 (\text{mod } 2) \\ \widetilde{C}^{(2)}_{a,b} &= a+ib \quad a,b \in \mathbb{Z}, a \equiv b \equiv 1 (\text{mod } 2) \\ \widetilde{D}^{(2)}_{a,b} &= a+ib \quad a,b \in \mathbb{Z}, a \equiv 0, b \equiv 1 (\text{mod } 2); \end{aligned} \tag{5.8}$$

De acordo com a descrição anterior, na figura 5.12, pontos verdes representam $\widetilde{A}^{(2)}_{a,b}$, pontos azuis representam $\widetilde{B}^{(2)}_{a,b}$, pontos vermelhos representam $\widetilde{C}^{(2)}_{a,b}$ e pontos amarelos representam $\widetilde{D}^{(2)}_{a,b}$.

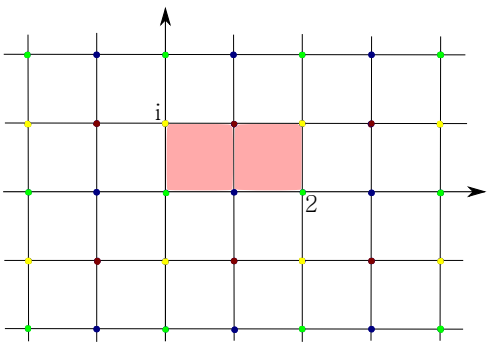


Figura 5.12: Ladrilhamento de $\mathbb{E}$ induzida pela estrutura geométrica fixada sobre $S(2,2,2,2)$.

Será muito importante também que tenhamos as simetrias de nossos $X's$ euclidianos. Mais precisamente usaremos os seguintes fatos:

- Existe uma simetria de $S(2,4,4)$ comutando $B^{(4)}$ e $C^{(4)}$;
- Toda permutação de $\left\{A^{(3)}, B^{(3)}, C^{(3)}\right\}$ é induzida por uma simetria de $S(3,3,3)$;
- Toda permutação de $\left\{A^{(2)}, B^{(2)}, C^{(2)}, D^{(2)}\right\}$ é induzida por uma simetria de $S(2,2,2,2)$.

A seguir apresentamos outra ferramenta que usaremos frequentemente.

Se $\Gamma < \mathrm{Isom}^+(\mathbb{E})$ define uma estrutura euclidiana sobre um 2-orbifold $X = \mathbb{E}/\Gamma$ então Γ tem um subgrupo maximal livre de torção, um reticulado $\Lambda(\Gamma)$. Para $u \in \mathbb{C}$, denote τ_u a translação $z \longmapsto z + u$. Então os reticulados para os grupos que fixamos são como segue:

$$\Lambda_{(2,4,4)} = \langle \tau_2, \tau_{2i} \rangle, \qquad \Lambda^{s,t}_{(2,2,2,2)} = \left\langle \tau_{2is}, \tau_{2\left(\frac{1}{s}+it\right)} \right\rangle,$$
$$\Lambda_{(2,3,6)} = \Lambda_{(3,3,3)} = \left\langle \tau_{i\sqrt{3}}, \tau_{\frac{3+i\sqrt{3}}{2}} \right\rangle.$$

Além disso ocorre o seguinte:

Lema 5.17. *Sejam $\widetilde{\Gamma}, \Gamma < \mathrm{Isom}^+(\mathbb{E})$ definindo orbifolds euclidianos $\widetilde{X} = \mathbb{E}/\widetilde{\Gamma}$ e $X = \mathbb{E}/\Gamma$. Suponha que $\Lambda(\widetilde{\Gamma}) = \langle \tau_{\widetilde{u}_1}, \tau_{\widetilde{u}_2} \rangle$ e $\Lambda(\Gamma) = \langle \tau_{u_1}, \tau_{u_2} \rangle$. Seja $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ dada por $\widetilde{f}(z) = \lambda \cdot z + \mu$ tendo um recobrimento entre orbifolds associado $\widetilde{X} \longrightarrow X$. Então $\lambda \cdot \widetilde{u}_1$ e $\lambda \cdot \widetilde{u}_2$ são combinações lineares inteiras de u_1 e u_2.*

Demonstração. De fato, a aplicação $\widetilde{f}$ induz um homeomorfismo $\widetilde{f}_* : \widetilde{\Gamma} \longrightarrow \Gamma$ dada por $\widetilde{f}_*(\tau_u) = \tau_{\lambda \cdot u}$ que leva $\Lambda(\widetilde{\Gamma})$ em $\Lambda(\Gamma)$, e a conclusão segue.

□

Realizações Geométricas e Exceções

Nosso próximo objetivo é reconhecer quais são os candidatos a recobrimentos ramificados associados a cada um dos possíveis recobrimentos entre orbifolds apresentados acima, e descrever quais são realizáveis e quais são excepcionais.

Teorema 5.18. *Os candidatos a recobrimentos ramificados entre superfícies tendo candidato associado $T \dashrightarrow X$ são*

$$T \overset{k:1}{\dashrightarrow} T, \quad T \underset{(2,\ldots,2),(2,\ldots,2),(2,\ldots,2),(2,\ldots,2)}{\overset{2k:1}{\dashrightarrow}} S, \quad T \underset{(3,\ldots,3),(3,\ldots,3),(3,\ldots,3)}{\overset{3k:1}{\dashrightarrow}} S,$$
$$T \underset{(2,\ldots,2),(4,\ldots,4),(4,\ldots,4)}{\overset{4k:1}{\dashrightarrow}} S \quad e \quad T \underset{(2,\ldots,2),(3,\ldots,3),(6,\ldots,6)}{\overset{6k:1}{\dashrightarrow}} S,$$

com $k \geq 1$, e todos são realizáveis.

Demonstração. A primeira afirmação e a realizabilidade de qualquer $T \overset{k:1}{\dashrightarrow} T$ são fáceis. Para qualquer $X \neq T$ seja $X = \mathbb{E}/\Gamma$ e identifique T com $\mathbb{E}/\Lambda(\Gamma)$. Como $\Lambda(\Gamma) < \Gamma$ temos um recobrimento entre orbifolds associado $T \longrightarrow X$, que realiza o $T \dashrightarrow X$ relevante no caso especial $k = 1$. A conclusão segue tomando composições.

□

Teorema 5.19. *Os candidatos a recobrimentos ramificados entre superfícies tendo candidato associado $S(2,4,4) \overset{d:1}{\dashrightarrow} S(2,4,4)$ são*

$$S \underset{(2,\ldots,2,1),(4,\ldots,4,1),(4,\ldots,4,1)}{\overset{4k+1:1}{\dashrightarrow}} S, \quad S \underset{(2,\ldots,2),(4,\ldots,4,2),(4,\ldots,4,1,1)}{\overset{4k+2:1}{\dashrightarrow}} S \quad e \quad S \underset{(2,\ldots,2),(4,\ldots,4),(4,\ldots,4,2,1,1)}{\overset{4k+4:1}{\dashrightarrow}} S,$$

para $k \geq 1$, e eles são realizáveis se, e somente se, respectivamente:

- *$d = x^2 + y^2$ para algum $x, y \in \mathbb{N}$ de paridades diferentes;*
- *$d = 2(x^2 + y^2)$ para algum $x, y \in \mathbb{N}$ de paridades diferentes;*
- *$d = 4(x^2 + y^2)$ para algum $x, y \in \mathbb{N}$ não ambos zeros;*

Demonstração. Para um candidato da forma $S(2,4,4) \overset{d:1}{\dashrightarrow} S(2,4,4)$ existem as seguintes possibilidades:

- $2 \dashrightarrow 2, \quad 4 \dashrightarrow 4, \quad 4 \dashrightarrow 4$;

  Neste caso temos $\Pi_1 = (\underbrace{2,\ldots,2}_{h \text{ vezes}}, 1)$, $\Pi_2 = (\underbrace{4,\ldots,4}_{k \text{ vezes}}, 1)$ e $\Pi_3 = (\underbrace{4,\ldots,4}_{k \text{ vezes}}, 1)$. Assim, $m_1 = h + 1$, $m_2 = m_3 = k + 1$ e $d = 2h + 1 = 4k + 1$ para algum $h, k \in \mathbb{Z}$, donde segue que $h = 2k$. Além disso,

  $$\ell(\Pi) = m_1 + m_2 + m_3 = (2k+1) + (k+1) + (k+1) = (4k+1) + 2 = d + 2,$$

  e portanto, a versão simplificada da fórmula de Riemann-Hurwitz 2.2 é satisfeita. Deste modo, obtemos o candidato $S \underset{(2,\ldots,2,1),(4,\ldots,4,1),(4,\ldots,4,1)}{\overset{4k+1:1}{\dashrightarrow}} S$.

- $2 \dashrightarrow 2, \quad (4,4) \dashrightarrow 4$;

  Neste caso teríamos $\Pi_1 = (2,...,2,1)$, $\Pi_2 = (4,...,4,1,1)$ e $\Pi_3 = (4,...,4)$. Logo, d deveria ser par e ímpar simultaneamente, o que é absurdo. Portanto, não existe candidato relevante nesta situação.

- $2 \dashrightarrow 4, \quad (4,4) \dashrightarrow 4$;

  Neste caso temos $\Pi_1 = (\underbrace{2,...,2}_{h \text{ vezes}})$, $\Pi_2 = (\underbrace{4,...,4}_{k \text{ vezes}},2)$ e $\Pi_3 = (\underbrace{4,...,4}_{k \text{ vezes}},1,1)$. Assim, $m_1 = h$, $m_2 = k+1$, $m_3 = k+2$ e $d = 2h = 4k+2$ para algum $h,k \in \mathbb{Z}$, o que nos diz que $h = 2k+1$. Além disso,

  $$\ell(\Pi) = m_1 + m_2 + m_3 = (2k+1) + (k+1) + (k+2) = (4k+2) + 2 = d + 2,$$

  e portanto, a versão simplificada da fórmula de Riemann-Hurwitz 2.2 é satisfeita. Deste modo, obtemos o candidato $S \overset{4k+2:1}{\underset{(2,...,2),(4,...,4,2),(4,...,4,1,1)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$.

- $(2,4) \dashrightarrow 4, \quad 4 \dashrightarrow 4$;

  Neste caso teríamos $\Pi_1 = (2,...,2)$, $\Pi_2 = (4,...,4,2,1)$ e $\Pi_3 = (4,...,4,1)$. Portanto, d seria par e ímpar ao mesmo tempo, o que é uma contradição. Assim, não existe candidato relevante nesta situação.

- $(2,4,4) \dashrightarrow 4$.

  Neste caso temos $\Pi_1 = (\underbrace{2,...,2}_{h \text{ vezes}})$, $\Pi_2 = (\underbrace{4,...,4}_{l \text{ vezes}})$ e $\Pi_3 = (\underbrace{4,...,4}_{k \text{ vezes}},2,1,1)$. Logo, $m_1 = h$, $m_2 = l$, $m_3 = k+3$ e $d = 2h = 4l = 4k+4$ para algum $h,l,k \in \mathbb{Z}$, o que nos diz que $h = 2k+2$ e $l = k+1$. Além disso,

  $$\ell(\Pi) = m_1 + m_2 + m_3 = (2k+2) + (k+1) + (k+3) = (4k+4) + 2 = d + 2,$$

  e portanto, a versão simplificada da fórmula de Riemann-Hurwitz 2.2 é satisfeita. Deste modo, obtemos o candidato $S \overset{4k+4:1}{\underset{(2,...,2),(4,...,4),(4,...,4,2,1,1)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$.

Isto conclui a primeira parte do teorema.

Para a segunda parte, suponha que exista uma realização $f : S(2,4,4) \xrightarrow{d:1} S(2,4,4)$ de um dos três candidatos a recobrimentos relevantes. A proposição 5.1 implica que existe um recobrimento geométrico universal $\widetilde{\pi} : \mathbb{E} \longrightarrow S(2,4,4)$ e uma aplicação afim $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ com $\pi \circ \widetilde{f} = f \circ \widetilde{\pi}$. Por outro lado, a estrutura euclidiana de $S(2,4,4)$ é única a menos de escala, deste modo, $\widetilde{\pi} = \pi$.

Se $\widetilde{f}(z) = \lambda \cdot z + \mu$, como $\Lambda_{(2,4,4)} = \langle \tau_2, \tau_{2i} \rangle$, o lema 5.17 implica que $\lambda = n + im$ para algum $n,m \in \mathbb{Z}$, donde, pela proposição 5.2, segue que $d = |\lambda|^2 = n^2 + m^2$.

Empregando a notação definida em 5.5 para os levantamentos de $S(2,4,4)$, e observando que para todos os candidatos podemos assumir, pela simetria de $S(2,4,4)$, que

$f\left(B^{(4)}\right) = B^{(4)}$, segue que $\widetilde{f}\left(\widetilde{B}^{(4)}_{0,0}\right) = \widetilde{B}^{(4)}_{0,0}$, então $\mu = 0$. Prosseguimos separadamente para cada um dos três candidatos.

Para $S \xrightarrow[(2,\ldots,2,1),(4,\ldots,4,1),(4,\ldots,4,1)]{4k+1:1} S$ temos $f\left(A^{(2)}\right) = A^{(2)}$, assim $\widetilde{f}\left(\widetilde{A}^{(2)}_{1,0}\right) = \lambda = n + im$ é algum $\widetilde{A}^{(2)}_{*}$. Portanto, pela forma que foram definidos os $\widetilde{A}^{(2)}_{a,b}$, m e n têm paridades diferentes, e podemos fazer $x = |n|$ e $y = |m|$ ficando com $d = x^2 + y^2$ para $x, y \in \mathbb{N}$ de paridades diferentes.

Reciprocamente, se $d = x^2 + y^2$ para $x, y \in \mathbb{N}$ de paridades diferentes, definimos $\widetilde{f}(z) = (x + iy) \cdot z$. Então,

$$\widetilde{f}\left(\widetilde{A}^{(2)}_{1,0}\right) = \widetilde{A}^{(2)}_{x,y}, \qquad \widetilde{f}\left(\widetilde{B}^{(4)}_{0,0}\right) = \widetilde{B}^{(4)}_{0,0}, \qquad \widetilde{f}\left(\widetilde{C}^{(4)}_{1,1}\right) = (x - y) + i(x + y) = \widetilde{C}^{(4)}_{x-y,x+y},$$

onde a última igualdade segue do fato que $x - y \equiv x + y \equiv 1 (\text{mod } 2)$. Segue facilmente que $\widetilde{f}$ induz uma realização do candidato.

Para ilustrar este caso uma descrição da aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo uma realização de $S \xrightarrow[(2,2,1),(4,1),(4,1)]{5:1} S$ pode ser vista na figura 5.13.

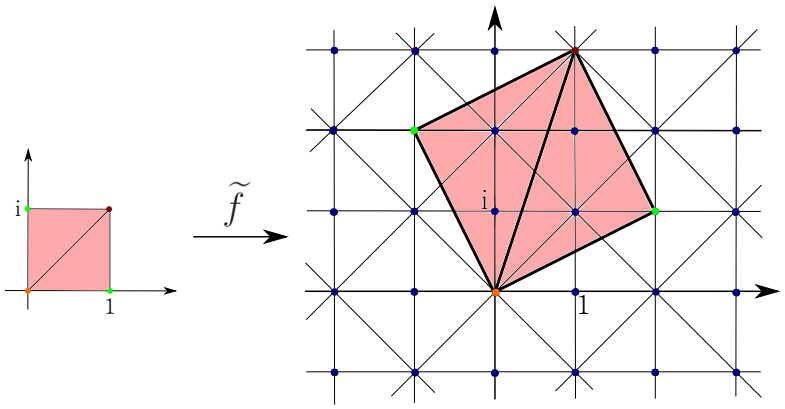


Figura 5.13: Uma aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo um recobrimento de grau 5 de $S(2, 4, 4)$ sobre ele mesmo.

Para $S \xrightarrow[(2,\ldots,2),(4,\ldots,4,2),(4,\ldots,4,1,1)]{4k+2:1} S$ temos $f\left(A^{(2)}\right) = C^{(4)}$, assim $\widetilde{f}\left(\widetilde{A}^{(2)}_{1,0}\right) = \lambda = n + im$ é algum $\widetilde{C}^{(4)}_{*}$, o que, pela definição dos $\widetilde{C}^{(4)}_{a,b}$, nos diz que n e m são ímpares.

Fazendo $x = \dfrac{1}{2}|n + m|$ e $y = \dfrac{1}{2}|n - m|$ vemos que $x, y \in \mathbb{N}$ têm paridades diferentes e $d = n^2 + m^2 = 2(x^2 + y^2)$.

Reciprocamente, se $d = 2(x^2 + y^2)$ com x, y de paridades diferentes, então definimos $\widetilde{f}(z) = ((x + y) + i(x - y)) \cdot z$. Deste modo,

$$\widetilde{f}\left(\widetilde{A}^{(2)}_{1,0}\right) = \widetilde{C}^{(4)}_{x+y,x-y}, \qquad \widetilde{f}\left(\widetilde{B}^{(4)}_{0,0}\right) = \widetilde{B}^{(4)}_{0,0}, \qquad \widetilde{f}\left(\widetilde{C}^{(4)}_{1,1}\right) = \widetilde{B}^{(4)}_{2y,2x},$$

para os quais é fácil ver que $\widetilde{f}$ induz uma realização do candidato.

Para ilustrar este caso uma descrição da aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo uma realização de $S \xrightarrow[(2,\ldots,2),(4,4,2),(4,4,1,1)]{10:1} S$ pode ser vista na figura 5.14.

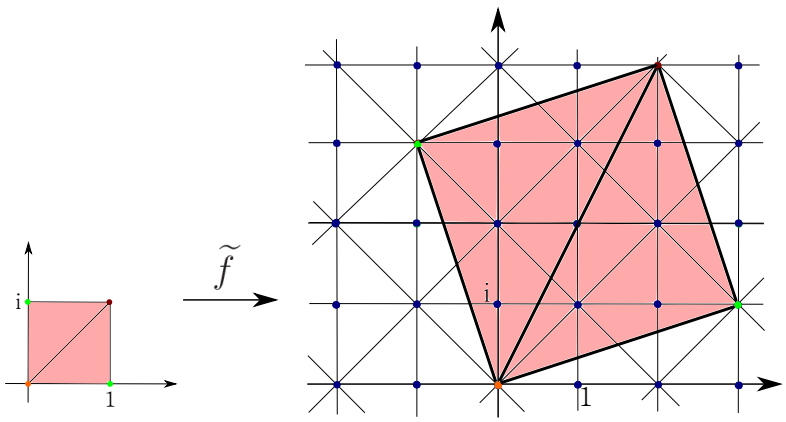


Figura 5.14: Uma aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo um recobrimento de grau 10 de $S(2,4,4)$ sobre ele mesmo.

Para $S \overset{4k+4:1}{\underset{(2,\ldots,2),(4,\ldots,4),(4,\ldots,4,2,1,1)}{\dashrightarrow}} S$ temos $f\left(A^{(2)}\right) = B^{(4)}$ assim $\widetilde{f}\left(\widetilde{A}^{(2)}_{1,0}\right) = \lambda = n + im$ é algum $\widetilde{B}^{(4)}_{*}$, assim, pelo modo como foram definidos os $\widetilde{B}^{(4)}_{a,b}$, segue que n e m são pares.

Fazendo $x = \dfrac{1}{2}|n|$ e $y = \dfrac{1}{2}|m|$ vemos que $d = n^2 + m^2 = 4(x^2 + y^2)$ para $x, y \in \mathbb{N}$.

Reciprocamente, se $d = 4(x^2 + y^2)$ para $x, y \in \mathbb{N}$, definimos $\widetilde{f}(z) = (2x + 2iy) \cdot z$ então

$$\widetilde{f}\left(\widetilde{A}^{(2)}_{1,0}\right) = \widetilde{B}^{(4)}_{2y,2x}, \qquad \widetilde{f}\left(\widetilde{B}^{(4)}_{0,0}\right) = \widetilde{B}^{(4)}_{0,0}, \qquad \widetilde{f}\left(\widetilde{C}^{(4)}_{1,1}\right) = \widetilde{B}^{(4)}_{2(x-y),2(x+y)}$$

portanto $\widetilde{f}$ induz uma realização do candidato.

Para ilustrar este caso uma descrição da aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo uma realização de $S \overset{8:1}{\underset{(2,\ldots,2),(4,\ldots,4),(4,2,1,1)}{\dashrightarrow}} S$ pode ser vista na figura 5.15.

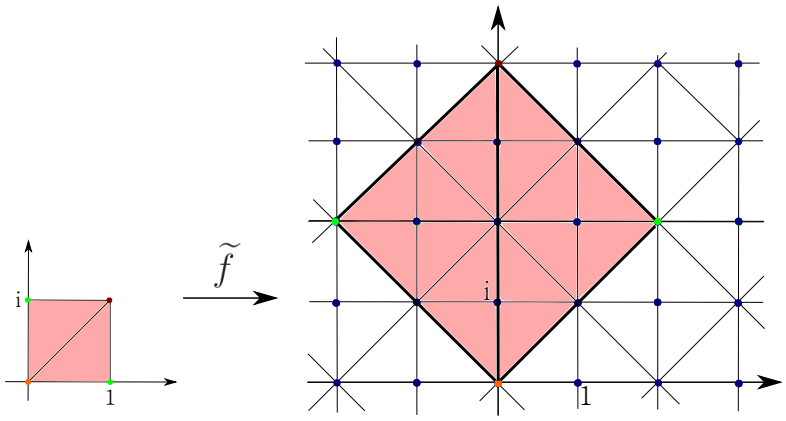


Figura 5.15: Uma aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo um recobrimento de grau 8 de $S(2,4,4)$ sobre ele mesmo.

□

Observação 5.20. Neste ponto é importante ressaltar um aspecto da demonstração acima. Após assumirmos que algum candidato de grau d, $S(2,4,4) \dashrightarrow S(2,4,4)$ é realizado por alguma aplicação, usamos apenas "dois terços" das instruções de ramificação para mostrar

que d tem a forma apropriada. O mesmo fenômeno ocorrerá em todas as próximas provas, exceto a do Teorema 5.24. Entretanto, observe que para checar que uma $\widetilde{f}$ definida inicialmente de um grau d com a forma apropriada induz uma realização do candidato correspondente, temos de checar as três condições.

Teorema 5.21. *Os candidatos a recobrimentos ramificados entre superfícies tendo candidato associado* $S(2,3,6) \overset{d:1}{\dashrightarrow} S(2,3,6)$ *são*

$$S \overset{6k+1:1}{\underset{(2,\ldots,2,1),(3,\ldots,3,1),(6,\ldots,6,1)}{\dashrightarrow}} S, \qquad S \overset{6k+3:1}{\underset{(2,\ldots,2,1),(3,\ldots,3),(6,\ldots,6,2,1)}{\dashrightarrow}} S,$$

$$S \overset{6k+4:1}{\underset{(2,\ldots,2),(3,\ldots,3,1),(6,\ldots,6,3,1)}{\dashrightarrow}} S \quad e \quad S \overset{6k+6:1}{\underset{(2,\ldots,2),(3,\ldots,3),(6,\ldots,6,3,2,1)}{\dashrightarrow}} S,$$

com $k \geq 1$*, e eles são realizáveis se, e somente se, respectivamente:*

- $d = x^2 + xy + y^2$ *com* $x, y \in \mathbb{N}$ *não ambos pares e* $x \not\equiv y (\text{mod } 3)$*;*
- $d = 3(x^2 + 3xy + 3y^2)$ *com* $x, y \in \mathbb{N}$ *não ambos pares;*
- $d = 12(x^2 + 3xy + 3y^2) + 16$ *com* $x, y \in \mathbb{N}$*;*
- $d = 12(x^2 + 3xy + 3y^2)$ *com* $x, y \in \mathbb{N}$*.*

Demonstração. Para um candidato a recobrimento entre orbifolds da forma $S(2,3,6) \dashrightarrow S(2,3,6)$ temos as seguintes possibilidades:

- $2 \dashrightarrow 2, \quad 3 \dashrightarrow 3, \quad 6 \dashrightarrow 6;$

  Neste caso temos $\Pi_1 = (\underbrace{2,\ldots,2}_{h \text{ vezes}}, 1)$, $\Pi_2 = (\underbrace{3,\ldots,3}_{l \text{ vezes}}, 1)$ e $\Pi_3 = (\underbrace{6,\ldots,6}_{k \text{ vezes}}, 1)$. Assim, $m_1 = h+1$, $m_2 = l+1$, $m_3 = k+1$ e $d = 2h+1 = 3l+1 = 6k+1$ para algum $h, l, k \in \mathbb{Z}$, o que nos diz que $h = 3k$ e $l = 2k$. Além disso,

  $$\ell(\Pi) = m_1 + m_2 + m_3 = (3k+1) + (2k+1) + (k+1) = (6k+1) + 2 = d + 2,$$

  e portanto, a versão simplificada da fórmula de Riemann-Hurwitz 2.2 é satisfeita. Deste modo, obtemos o candidato $S \overset{6k+1:1}{\underset{(2,\ldots,2,1),(3,\ldots,3,1),(6,\ldots,6,1)}{\dashrightarrow}} S$.

- $2 \dashrightarrow 2, \quad (3,6) \dashrightarrow 6;$

  Neste caso temos $\Pi_1 = (\underbrace{2,\ldots,2}_{h \text{ vezes}}, 1)$, $\Pi_2 = (\underbrace{3,\ldots,3}_{l \text{ vezes}})$ e $\Pi_3 = (\underbrace{6,\ldots,6}_{k \text{ vezes}}, 2, 1)$. Assim, $m_1 = h+1$, $m_2 = l$, $m_3 = k+2$ e $d = 2h+1 = 3l = 6k+3$ para algum $h, l, k \in \mathbb{Z}$, o que nos diz que $h = 3k+1$ e $l = 2k+1$. Além disso,

  $$\ell(\Pi) = m_1 + m_2 + m_3 = (3k+2) + (2k+1) + (k+2) = (6k+3) + 2 = d + 2,$$

  e portanto, a versão simplificada da fórmula de Riemann-Hurwitz 2.2 é satisfeita. Deste modo, obtemos o candidato $S \overset{6k+3:1}{\underset{(2,\ldots,2,1),(3,\ldots,3),(6,\ldots,6,2,1)}{\dashrightarrow}} S$.

- $3 \dashrightarrow 3, \quad (2,6) \dashrightarrow 6$;

  Neste caso temos $\Pi_1 = (\underbrace{2,...,2}_{h \text{ vezes}})$, $\Pi_2 = (\underbrace{3,...,3}_{l \text{ vezes}},1)$ e $\Pi_3 = (\underbrace{6,...,6}_{k \text{ vezes}},3,1)$. Assim, $m_1 = h$, $m_2 = l+1$, $m_3 = k+2$ e $d = 2h = 3l+1 = 6k+4$ para algum $h,l,k \in \mathbb{Z}$, o que nos diz que $h = 3k+2$ e $l = 2k+1$. Além disso,

  $$\ell(\Pi) = m_1 + m_2 + m_3 = (3k+2) + (2k+2) + (k+2) = (6k+4) + 2 = d + 2,$$

  e portanto, a versão simplificada da fórmula de Riemann-Hurwitz 2.2 é satisfeita. Deste modo, obtemos o candidato $S \overset{6k+4:1}{\underset{(2,...,2),(3,...,3,1),(6,...,6,3,1)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$.

- $(2,3,6) \dashrightarrow 6$.

  Neste caso temos $\Pi_1 = (\underbrace{2,...,2}_{h \text{ vezes}})$, $\Pi_2 = (\underbrace{3,...,3}_{l \text{ vezes}})$ e $\Pi_3 = (\underbrace{6,...,6}_{k \text{ vezes}},3,2,1)$. Assim, $m_1 = h$, $m_2 = l$, $m_3 = k+3$ e $d = 2h = 3l = 6k+6$ para algum $h,l,k \in \mathbb{Z}$, o que nos diz que $h = 3k+3$ e $l = 2k+2$. Além disso,

  $$\ell(\Pi) = m_1 + m_2 + m_3 = (3k+3) + (2k+2) + (k+3) = (6k+6) + 2 = d + 2,$$

  e portanto, a versão simplificada da fórmula de Riemann-Hurwitz 2.2 é satisfeita. Deste modo, obtemos o candidato $S \overset{6k+6:1}{\underset{(2,...,2),(3,...,3),(6,...,6,3,2,1)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$.

Isto conclui a primeira parte.

Para a segunda parte procedemos como na demonstração do teorema anterior. Consideramos o recobrimento universal $\pi : \mathbb{E} \longrightarrow S(2,3,6)$ que fixamos no capítulo 3 seção 3.4. Assumiremos que uma aplicação $f : S(2,3,6) \xrightarrow{d:1} S(2,3,6)$ realizando algum candidato a recobrimento existe e, usando a proposição 5.1, encontraremos $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ dada por $\widetilde{f}(z) = \lambda \cdot z + \mu$ tal que $\pi \circ \widetilde{f} = f \circ \pi$ (Aqui estamos usando o fato de que a estrutura euclidiana de $S(2,3,6)$ é única a menos de reescala). Além disso, devemos mostrar que $d = |\lambda|^2$ (pela proposição 5.2) tem a forma apropriada. Utilizando essencialmente os mesmos cálculos devemos provar também a recíproca. Usaremos sempre a notação fixada em 5.6. Em particular, $\omega = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

Primeiramente, observe que como $\Lambda_{(2,3,6)} = \left\langle \tau_{i\sqrt{3}}, \tau_{\frac{3+i\sqrt{3}}{2}} \right\rangle$, pelo lema 5.17, temos

$$\lambda \cdot i\sqrt{3} = n \cdot i\sqrt{3} + m \cdot \frac{3+i\sqrt{3}}{2}$$

para algum $n,m \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$\lambda = n + \frac{m}{2} - i\sqrt{3}\frac{m}{2} = (n+m) - \omega m.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d = |\lambda|^2 &= \left(n + \frac{m}{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{3}\frac{m}{2}\right)^2 = n^2 + nm + \frac{m^2}{4} + 3\frac{m^2}{4} \\ &= n^2 + nm + m^2. \end{aligned}$$

Aplicando novamente o lema 5.17 temos

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \frac{3 + i\sqrt{3}}{2} &= L \cdot i\sqrt{3} + K \cdot \frac{3 + i\sqrt{3}}{2} \\ \Longrightarrow \lambda &= \frac{2L \cdot i\sqrt{3}(3 + i\sqrt{3})}{12} + K \\ &= \frac{L \cdot i\sqrt{3}}{2} - \frac{L}{2} + K. \end{aligned}$$

Usando que $\lambda = n + \frac{m}{2} - i\sqrt{3}\frac{m}{2}$ obtemos $L = -m$ e $K = n$. Portanto o lema 5.17 não nos fornece uma nova condição.

Agora analisamos nossos quatro candidatos separadamente.

Para o candidato $S \xrightarrow[(2,\ldots,2,1),(3,\ldots,3,1),(6,\ldots,6,1)]{6k+1:1} S$ temos

$$f\left(A^{(2)}\right) = A^{(2)}, \qquad f\left(B^{(3)}\right) = B^{(3)}, \qquad f\left(C^{(6)}\right) = C^{(6)}$$

e podemos assumir $\widetilde{f}\left(\widetilde{B}^{(3)}_{0,0}\right) = \widetilde{B}^{(3)}_{0,0}$, assim $\mu = 0$ e $\widetilde{f}\left(\widetilde{A}^{(2)}_{1,0}\right) = \lambda = (n+m) - \omega m = \widetilde{A}^{(2)}_{a,b}$ para algum $a, b \in \mathbb{Z}$ não ambos pares com $a - b \equiv 1 (\text{mod } 3)$. Como $a = n + m$ e $b = -m$, segue que $n + 2m \equiv 1 (\text{mod } 3)$ e então m e n não são ambos pares. Além disso, $(n - m) + 3m = n + 2m \equiv 1 (\text{mod } 3)$. Portanto, $n - m \equiv 1 (\text{mod } 3)$.

Se $n, m \geq 0$ ou $n, m \leq 0$ tomamos $x = |n|$ e $y = |m|$ obtendo $d = x^2 + xy + y^2$ com $x, y \in \mathbb{N}$ não ambos pares e $x \not\equiv y (\text{mod } 3)$. Caso contrário teríamos $n > 0 > m$, a menos de permutação. Então devemos considerar dois casos:

- Se $n \geq -m$ escolhemos $x = n + m \in \mathbb{N}$ e $y = -m \in \mathbb{N}$. Assim,

  $$x^2 + xy + y^2 = (n+m)^2 + (n+m) \cdot (-m) + (-m)^2 = n^2 + nm + m^2 = d,$$

  para $x, y \in \mathbb{N}$, não ambos pares e $x \not\equiv y (\text{mod } 3)$.

- Se $n < -m$ tomamos $x = n \in \mathbb{N}$ e $y = -n - m \in \mathbb{N}$. Então,

  $$x^2 + xy + y^2 = n^2 + n \cdot (-n - m) + (-n - m)^2 = n^2 + nm + m^2 = d,$$

  novamente para $x, y \in \mathbb{N}$ não ambos pares e $x \not\equiv y (\text{mod } 3)$ pois, caso contrário, teríamos $x - y \equiv 0 (\text{mod } 3) \Longrightarrow 2n + m \equiv 0 (\text{mod } 3)$ e, como $n + 2m \equiv 1 (\text{mod } 3)$, resultaria $3(n + m) \equiv 1 (\text{mod } 3)$, o que é uma contradição.

Reciprocamente, assuma $d = x^2+xy+y^2$ com $x, y \in \mathbb{N}$ não ambos pares e $x \not\equiv y (\mathrm{mod}\ 3)$. A menos de mudança de sinal para ambos x e y, podemos supor que $x - y \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$ e definir $\widetilde{f}(z) = ((x+y) - \omega y) \cdot z$.

Desta forma, $\widetilde{f}\left(\widetilde{B}^{(3)}_{0,0}\right) = \widetilde{B}^{(3)}_{0,0}$ e, como $x + 2y = (x-y) + 3y \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$, temos $\widetilde{f}\left(\widetilde{A}^{(2)}_{1,0}\right) = ((x+y) - \omega y) \cdot \frac{1}{2} = \widetilde{A}^{(2)}_{x+y,-y}$. Agora, observe que

$$\omega^2 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{i\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} = \frac{i\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \omega - 1.$$

Então,

$$\widetilde{f}\left(\widetilde{C}^{(6)}_{0,1}\right) = (x + y - \omega y) \cdot \omega = \omega x + \omega y - \omega^2 y = \omega x + \omega y - (\omega - 1)y = y + \omega x = \widetilde{C}^{(6)}_{y,x},$$

onde a última igualdade segue do fato que $y - x = -(x-y) \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$. Isto implica que $\widetilde{f}$ induz uma realização do primeiro candidato.

Para ilustrar este caso uma descrição da aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo uma realização de $S \xrightarrow[(2,2,2,1),(3,3,1),(6,1)]{7:1} S$ pode ser vista na figura 5.16.

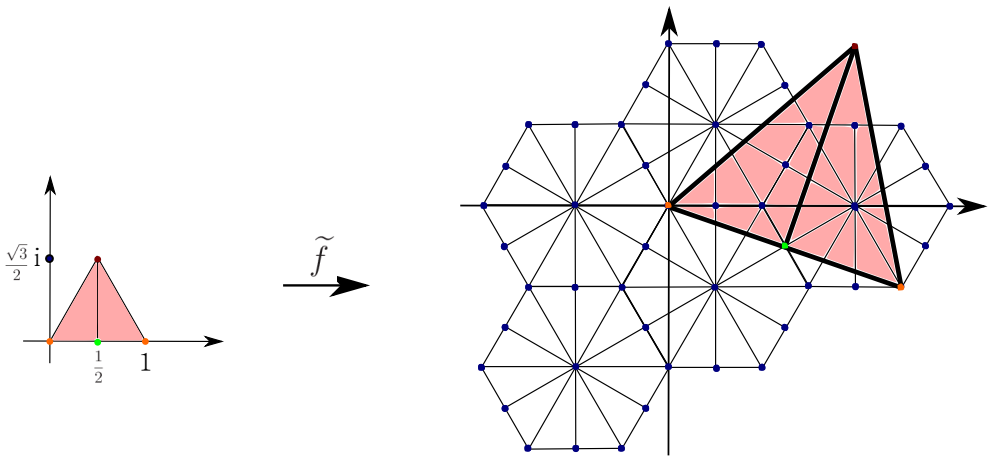


Figura 5.16: Uma aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo um recobrimento de grau 7 de $S(2,3,6)$ sobre ele mesmo.

Para o candidato $S \xrightarrow[(2,\ldots,2,1),(3,\ldots,3),(6,\ldots,6,2,1)]{6k+3:1} S$, como

$$f\left(A^{(2)}\right) = A^{(2)}, \qquad f\left(B^{(3)}\right) = C^{(6)}, \qquad f\left(C^{(6)}\right) = C^{(6)}$$

podemos assumir $\widetilde{f}\left(\widetilde{B}^{(3)}_{0,0}\right) = \widetilde{C}^{(6)}_{0,1}$, a saber $\mu = \omega$. Além disso,

$$\widetilde{f}\left(\widetilde{A}^{(2)}_{1,0}\right) = \frac{1}{2}\lambda + \omega = \frac{1}{2}((n+m) - \omega m) + \omega = \frac{1}{2}\left((n+m) + \omega(2-m)\right) = \widetilde{A}^{(2)}_{a,b}$$

para algum $a, b \in \mathbb{Z}$ não ambos pares com $a - b \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$. Como $a = n + m$ e $b = 2 - m$ segue que $n + 2m - 2 = a - b \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$ e então n e m não são ambos pares

e $n \equiv m (\text{mod } 3)$.

Tomando $x = n$ e $y = \dfrac{m-n}{3}$ temos

$$3(x^2 + 3xy + 3y^2) = 3\left(n^2 + n(m-n) + \frac{(m-n)^2}{3}\right) = n^2 + nm + m^2 = d,$$

para $x, y \in \mathbb{Z}$ não ambos pares. Novamente pode-se reduzir ao caso $x, y \in \mathbb{N}$.

Reciprocamente, assuma que $d = 3(x^2 + 3xy + 3y^2)$ para $x, y \in \mathbb{N}$ não ambos pares, $n = x$, $m = x + 3y$ e defina

$$\widetilde{f}(z) = ((n+m) - \omega m) \cdot z + \omega.$$

Então, pelos cálculos acima, $\widetilde{f}\left(\widetilde{A}^{(2)}_{1,0}\right)$ é algum $\widetilde{A}^{(2)}_{*}$ enquanto

$$\widetilde{f}\left(\widetilde{C}^{(6)}_{0,1}\right) = \widetilde{f}(\omega) = (n+m)\omega + (1-\omega)m + \omega = (x+3y) + \omega(x+1),$$

onde novamente usamos a identidade $\omega^2 = \omega - 1$. Além disso, o que fizemos acima nos diz que $\widetilde{f}\left(\widetilde{C}^{(6)}_{0,1}\right)$ é algum $\widetilde{C}^{(6)}_{*}$ pois $(x+3y) - (x+1) \equiv 2 (\text{mod } 3)$. Segue que $\widetilde{f}$ induz uma realização do candidato.

Para ilustrar este caso uma descrição da aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo uma realização de $S \overset{9:1}{\underset{(2,2,2,2,1),(3,3,3),(6,2,1)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$ pode ser vista na figura 5.17.

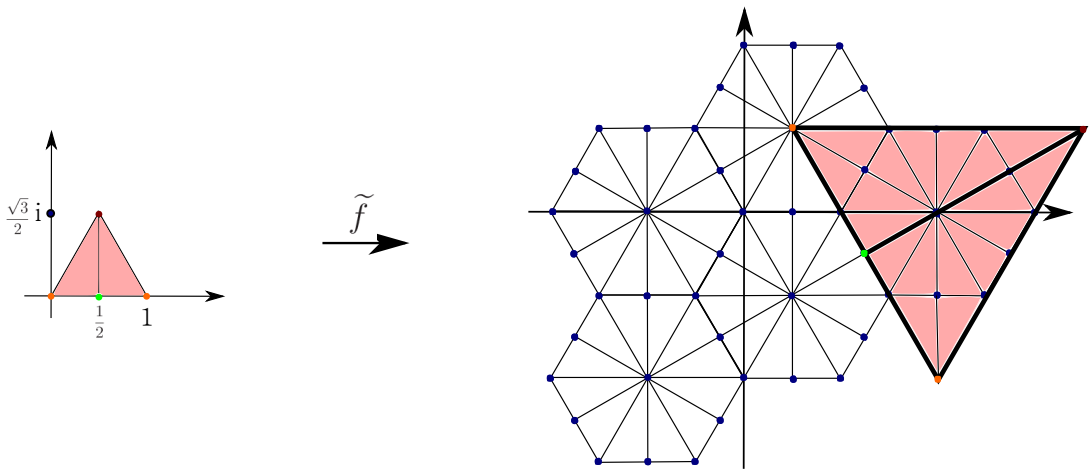


Figura 5.17: Uma aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo um recobrimento de grau 9 de $S(2,3,6)$ sobre ele mesmo.

Para o candidato $S \overset{6k+4:1}{\underset{(2,\ldots,2),(3,\ldots,3,1),(6,\ldots,6,3,1)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$ temos

$$f\left(A^{(2)}\right) = C^{(6)}, \qquad f\left(B^{(3)}\right) = B^{(3)}, \qquad f\left(C^{(6)}\right) = C^{(6)}$$

assim podemos tomar $\mu = 0$ e $\widetilde{f}\left(\widetilde{A}^{(2)}_{1,0}\right) = C^{(6)}_{a,b}$ para algum $a, b \in \mathbb{Z}$ com $a - b \equiv 2 (\text{ mod } 3)$.

Como $a = \dfrac{n+m}{2}$ e $b = -\dfrac{m}{2}$ temos que m e n são pares e $n - m \equiv 1 (\text{mod } 3)$.

Em [12], considera-se $x = \dfrac{n+4}{2}$, $y = \dfrac{m-n-8}{6}$ e então afirma-se que $d = 12(x^2 + 3xy + 3y^2) + 16$ para $x, y \in \mathbb{Z}$, o que pode ser mostrado para $x, y \in \mathbb{N}$. Apesar disso, não fomos capazes de mostrar a igualdade descrita já que $12(x^2 + 3xy + 3y^2) + 16 \neq n^2 + nm + m^2 = d$, para x, y escolhidos dessa forma.

Também em [12] a recíproca é provada supondo $d = 12(x^2 + 3xy + 3y^2) + 16$ com $x, y \in \mathbb{N}$, definindo $n = 2(x-2)$, $m = 2(x+3y+2)$ e $\widetilde{f}(z) = ((n+m) - \omega m) \cdot z$. Então, é afirmado que $\widetilde{f}\left(\widetilde{B}^{(3)}_{0,0}\right) = \widetilde{B}^{(3)}_{0,0}$, $\widetilde{f}\left(\widetilde{A}^{(2)}_{1,0}\right)$ é algum $\widetilde{C}^{(6)}_{*}$, enquanto

$$\widetilde{f}\left(\widetilde{C}^{(6)}_{0,1}\right) = \widetilde{f}(\omega) = 2(x+3y+2) + \omega \cdot 2(x-2)$$

é algum $\widetilde{C}^{(6)}_{*}$ pois $2(x+3y+2) - 2(x-2) \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$, assim $\widetilde{f}$ induz uma realização do candidato.

Testamos um caso particular considerando $x = 1$ e $y = 0$ e obtivemos uma descrição da aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo uma realização de $S \overset{28:1}{\underset{(2,\ldots,2),(3,\ldots,3,1),(6,\ldots,6,3,1)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$ que pode ser vista na figura 5.18. Sendo assim, embora o resultado pareça ser verdadeiro as escolhas para x e y não provam a igualdade $d = 12(x^2 + 3xy + 3y^2) + 16$.

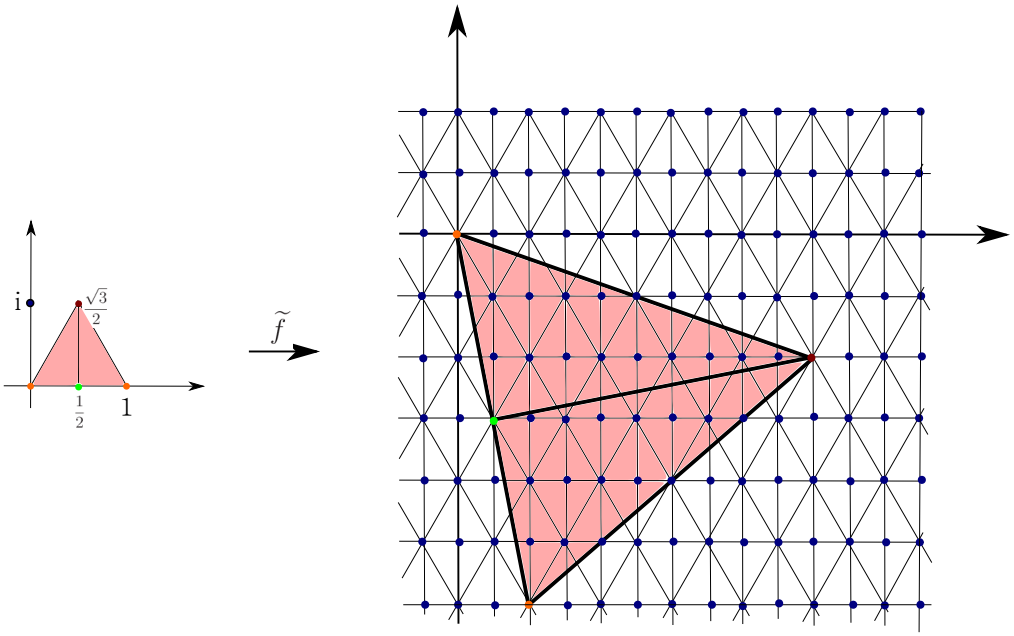


Figura 5.18: Uma aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo um recobrimento de grau 28 de $S(2,3,6)$ sobre ele mesmo.

Para o candidato $S \overset{6k+6:1}{\underset{(2,\ldots,2),(3,\ldots,3),(6,\ldots,6,3,2,1)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$ temos

$$f\left(A^{(2)}\right) = C^{(6)}, \qquad f\left(B^{(3)}\right) = C^{(6)}, \qquad f\left(C^{(6)}\right) = C^{(6)},$$

então podemos assumir que $\widetilde{f}\left(\widetilde{B}^{(3)}_{0,0}\right) = \widetilde{C}^{(6)}_{0,1}$, o que nos leva a $\mu = \omega$. Além disso, $\widetilde{f}\left(\widetilde{A}^{(2)}_{1,0}\right) = C^{(6)}_{a,b}$ para algum $a, b \in \mathbb{Z}$ com $a - b \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$. Como $a = \dfrac{n+m}{2}$ e

$b = \dfrac{2-m}{2}$ deduzimos que n e m são ambos pares e $n \equiv m (\text{mod } 3)$.

Tomando $x = \dfrac{n}{2}$ e $y = \dfrac{m-n}{6}$

$$12(x^2+3xy+3y^2) = 12\left[\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{m-n}{6}\right) + 3\left(\frac{m-n}{6}\right)^2\right] = m^2+nm+n^2 = d$$

para $x, y \in \mathbb{Z}$ e novamente podemos reduzir a $x, y \in \mathbb{N}$.

Reciprocamente, suponha $d = 12(x^2+3xy+3y^2)$ para $x, y \in \mathbb{N}$, sejam $n = 2x$, $m = 2(x+3y)$ e defina $\widetilde{f}(z) = ((n+m) - \omega m) \cdot z + \omega$. Então

$$\widetilde{f}\left(\widetilde{B}^{(3)}_{0,0}\right) = \omega = C^{(6)}_{0,1}$$

e $\widetilde{f}\left(\widetilde{A}^{(2)}_{1,0}\right)$ é algum $\widetilde{C}^{(6)}_{*}$ pelos cálculos acima, enquanto

$$\widetilde{f}\left(\widetilde{C}^{(6)}_{0,1}\right) = \widetilde{f}(\omega) = (2x+3y) + (2x+1)\omega$$

que é algum $\widetilde{C}^{(6)}_{*}$ pois $(2x+3y) - (2x+1) \equiv 2 (\text{mod } 3)$, assim $\widetilde{f}$ induz uma realização do candidato.

Para ilustrar este caso uma descrição da aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo uma realização de $S \overset{12:1}{\underset{(2,\ldots,2),(3,\ldots,3),(6,\ldots,6,3,2,1)}{\dashrightarrow\!\!\dashrightarrow\!\!\dashrightarrow\!\!\dashrightarrow}} S$ pode ser vista na figura 5.19.

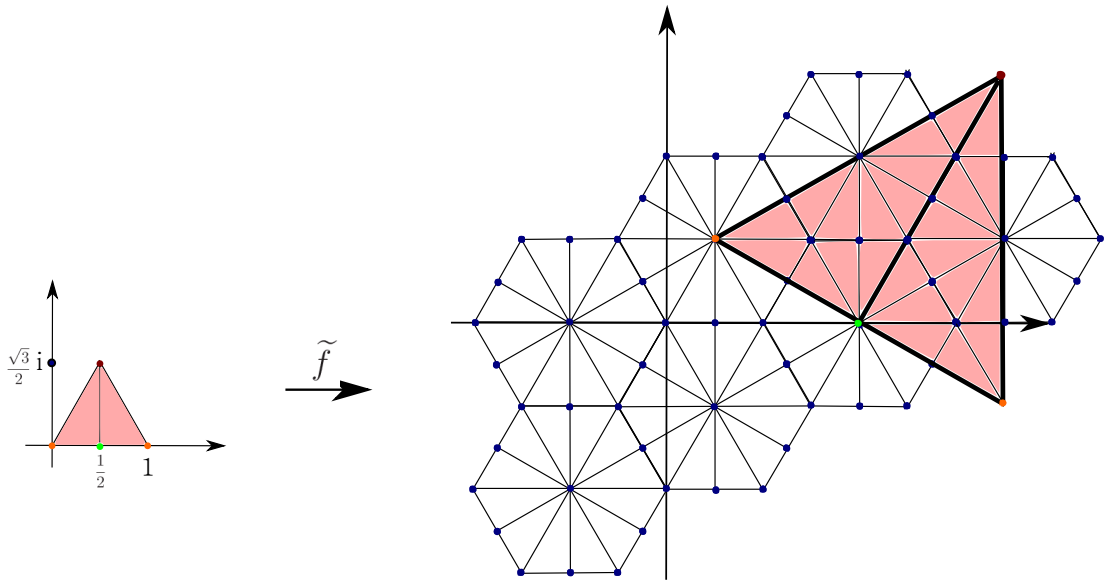


Figura 5.19: Uma aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo um recobrimento de grau 12 de $S(2,3,6)$ sobre ele mesmo.

□

Teorema 5.22. *Os candidatos a recobrimentos ramificados entre superfícies tendo candidato associado* $S(3,3,3) \overset{d:1}{\dashrightarrow} S(3,3,3)$ *são*

$$S \overset{3k+1:1}{\underset{(3,\ldots,3,1),(3,\ldots,3,1),(3,\ldots,3,1)}{\dashrightarrow}} S \qquad S \overset{3k+3:1}{\underset{(3,\ldots,3),(3,\ldots,3),(3,\ldots,3,1,1,1)}{\dashrightarrow}} S$$

com $k \geq 1$*, e eles são realizáveis se, e somente se, respectivamente:*

- $d = x^2 + xy + y^2$ *com* $x, y \in \mathbb{N}$ *e* $x \not\equiv y (\mathrm{mod}\ 3)$*;*
- $d = 3(x^2 + 3xy + 3y^2)$ *com* $x, y \in \mathbb{N}$*.*

Demonstração. Para um candidato a recobrimento entre orbifolds da forma $S(3,3,3) \overset{d:1}{\dashrightarrow} S(3,3,3)$ temos as seguintes possibilidades:

- $3 \dashrightarrow 3, \qquad 3 \dashrightarrow 3, \qquad 3 \dashrightarrow 3;$

  Neste caso temos $\Pi_1 = \Pi_2 = \Pi_3 = (\underbrace{3, \ldots, 3}_{k \text{ vezes}}, 1)$. Assim, $m_1 = m_2 = m_3 = k+1$ e $d = 3k+1$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Logo,

  $$\ell(\Pi) = m_1 + m_2 + m_3 = (k+1) + (k+1) + (k+1) = (3k+1) + 2 = d + 2,$$

  e portanto, a versão simplificada da fórmula de Riemann-Hurwitz 2.2 é satisfeita. Deste modo, obtemos o candidato $S \overset{3k+1:1}{\underset{(3,\ldots,3,1),(3,\ldots,3,1),(3,\ldots,3,1)}{\dashrightarrow}} S$.

- $(3,3) \dashrightarrow 3, \qquad 3 \dashrightarrow 3;$

  Neste caso teríamos $\Pi_1 = (3, \ldots, 3)$, $\Pi_2 = (3, \ldots, 3, 1)$ e $\Pi_3 = (3, \ldots, 3, 1, 1)$. Logo, $d \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3)$, $d \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$ e $d \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$ simultaneamente, o que é absurdo. Portanto, não existe candidato relevante nesta situação.

- $(3,3,3) \dashrightarrow 3.$

  Neste caso temos $\Pi_1 = \Pi_2 = (\underbrace{3, \ldots, 3}_{h \text{ vezes}})$ e $\Pi_3 = (\underbrace{3, \ldots, 3}_{k \text{ vezes}}, 1, 1, 1)$. Assim, $m_1 = m_2 = h$, $m_3 = k+3$ e $d = 3h = 3k+3$ para algum $h, k \in \mathbb{Z}$, o que nos diz que $h = k+1$. Além disso,

  $$\ell(\Pi) = m_1 + m_2 + m_3 = (k+1) + (k+1) + (k+3) = (3k+3) + 2 = d + 2,$$

  e portanto, a versão simplificada da fórmula de Riemann-Hurwitz 2.2 é satisfeita. Deste modo, obtemos o candidato $S \overset{3k+3:1}{\underset{(3,\ldots,3),(3,\ldots,3),(3,\ldots,3,1,1,1)}{\dashrightarrow}} S$.

Isto prova a primeira parte.

Para a segunda parte, como antes, suponha que exista uma realização $f : S(3,3,3) \overset{d:1}{\longrightarrow} S(3,3,3)$ de um dos dois candidatos a recobrimentos relevantes. A proposição 5.1 implica que existe um recobrimento geométrico universal $\widetilde{\pi} : \mathbb{E} \longrightarrow S(3,3,3)$ e uma aplicação afim

$\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ com $\pi \circ \widetilde{f} = f \circ \widetilde{\pi}$. Também neste caso a estrutura euclidiana de $S(3,3,3)$ é única a menos de escala e então consideramos $\widetilde{\pi} = \pi$. Aqui usamos a notação de 5.7.

Se $\widetilde{f}(z) = \lambda \cdot z + \mu$ realiza um candidato, então, como na prova anterior, o lema 5.17 implica que $\lambda = (n+m) - \omega m$ para $n, m \in \mathbb{Z}$, e $d = n^2 + nm + m^2$. Além disso, pela simetria de $S(3,3,3)$ podemos assumir $f\left(A^{(3)}\right) = A^{(3)}$, de onde $\widetilde{f}\left(\widetilde{A}^{(3)}_{0,0}\right) = \widetilde{A}^{(3)}_{0,0}$, e temos $\mu = 0$.

Para o candidato $S \overset{3k+1:1}{\underset{(3,\ldots,3,1),(3,\ldots,3,1),(3,\ldots,3,1)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$, a menos de simetria, temos $f\left(B^{(3)}\right) = B^{(3)}$ de onde $\widetilde{f}\left(\widetilde{B}^{(3)}_{1,0}\right) = \lambda$ é algum $\widetilde{B}^{(3)}_{a,b}$ com $a - b \equiv 1 (\text{mod } 3)$, portanto, $m - n \equiv 1 (\text{mod } 3)$. Exatamente como na prova anterior deduzimos que $d = x^2 + xy + y^2$ com $x, y \in \mathbb{N}$ e $x \not\equiv y (\text{mod } 3)$.

A recíproca também é provada como no teorema anterior. Trocando sinais se necessário, assumimos $x - y \equiv 1 (\text{mod } 3)$, fazemos $\widetilde{f}(z) = ((x+y) - \omega y) \cdot z$ e notamos que $\widetilde{f}\left(\widetilde{C}^{(3)}_{0,1}\right) = \widetilde{f}(\omega) = y + \omega x$ é $\widetilde{C}^{(6)}_{y,x}$ pois $y - x \equiv 2 (\text{mod } 3)$.

Para ilustrar este caso uma descrição da aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo uma realização de $S \overset{4:1}{\underset{(3,1),(3,1),(3,1)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$ pode ser vista na figura 5.20.

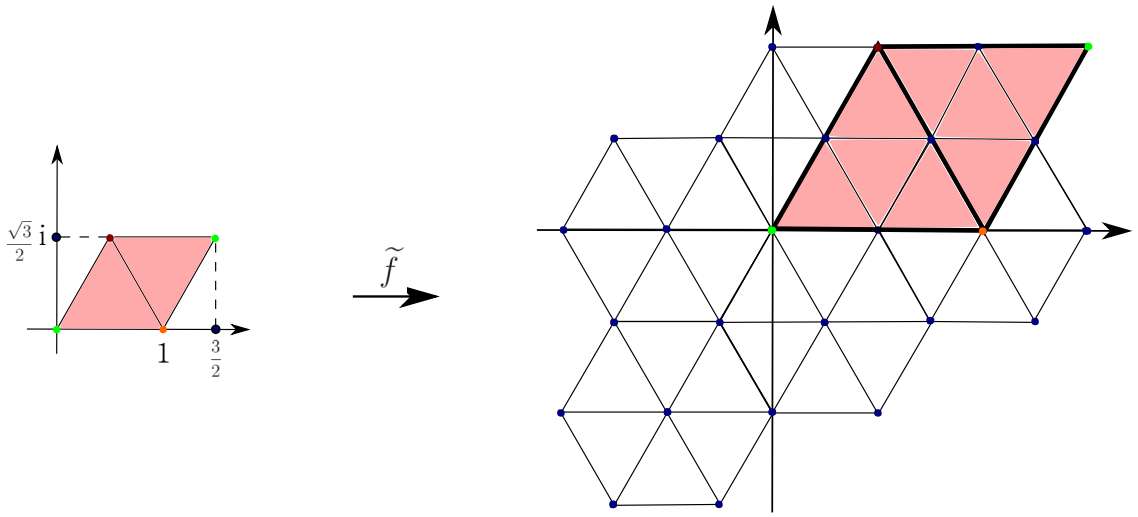


Figura 5.20: Uma aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo um recobrimento de grau 4 de $S(3,3,3)$ sobre ele mesmo.

Para o candidato $S \overset{3k+3:1}{\underset{(3,\ldots,3),(3,\ldots,3),(3,\ldots,3,1,1,1)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$ temos $f\left(B^{(3)}\right) = A^{(3)}$, de onde $\widetilde{f}\left(\widetilde{B}^{(3)}_{1,0}\right) = \lambda$ é algum $\widetilde{A}^{(3)}_{*}$, o que implica que $n \equiv m (\text{mod } 3)$. Fazendo $x = n$ e $y = \dfrac{m-n}{3}$ vemos que $x, y \in \mathbb{Z}$ e $d = 3(x^2 + 3xy + 3y^2)$. Assim como no teorema anterior deduzimos que $d = 3(x^2 + 3xy + 3y^2)$ para $x, y \in \mathbb{N}$.

A recíproca também é provada como antes.

Para ilustrar este caso uma descrição da aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo uma realização de $S \overset{9:1}{\underset{(3,3,3),(3,3,3),(3,3,1,1,1)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$ pode ser vista na figura 5.21.

□

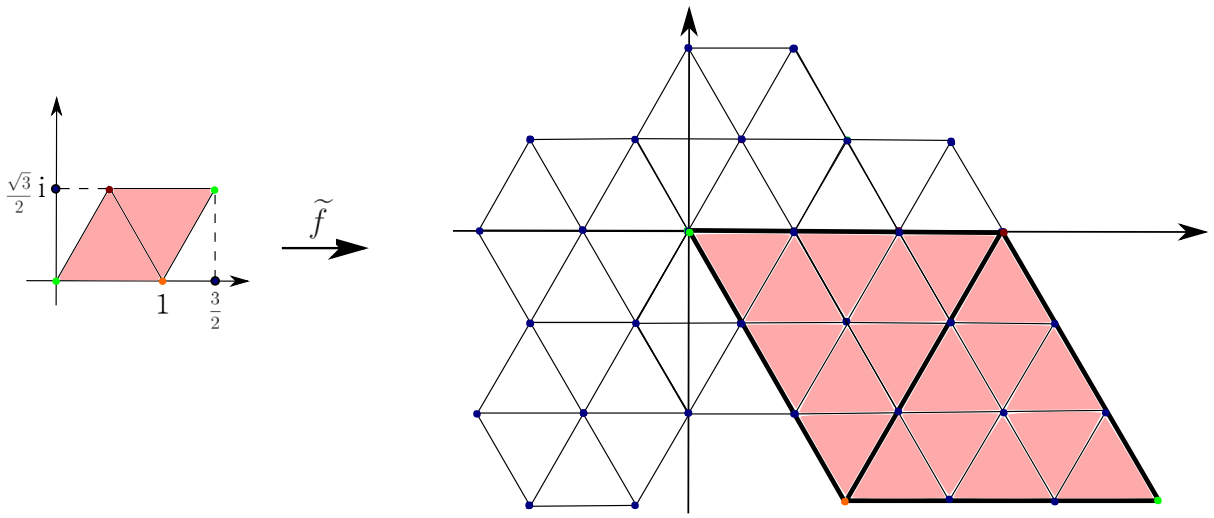


Figura 5.21: Uma aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo um recobrimento de grau 9 de $S(3,3,3)$ sobre ele mesmo.

Teorema 5.23. *Os candidatos a recobrimentos ramificados entre superfícies induzindo algum* $S(2,2,2,2) \overset{d:1}{\dashrightarrow} S(2,2,2,2)$ *são*

$$S \overset{2k+1:1}{\underset{(2,\ldots,2,1),(2,\ldots,2,1),(2,\ldots,2,1),(2,\ldots,2,1)}{\dashrightarrow\cdots\dashrightarrow}} S$$

$$S \overset{2k+2:1}{\underset{(2,\ldots,2,1,1),(2,\ldots,2,1,1),(2,\ldots,2),(2,\ldots,2)}{\dashrightarrow\cdots\dashrightarrow}} S$$

$$S \overset{2k+4:1}{\underset{(2,\ldots,2,1,1,1,1),(2,\ldots,2),(2,\ldots,2),(2,\ldots,2)}{\dashrightarrow\cdots\dashrightarrow}} S$$

com $k \geq 1$. *Os dois primeiros sempre são realizáveis, o último é se, e somente se,* d *é um múltiplo de 4.*

Demonstração. Para um candidato a recobrimento entre orbifolds da forma $S(2,2,2,2) \overset{d:1}{\dashrightarrow} S(2,2,2,2)$ temos as seguintes possibilidades:

- $2 \dashrightarrow 2, \quad 2 \dashrightarrow 2, \quad 2 \dashrightarrow 2, \quad 2 \dashrightarrow 2;$

  Neste caso temos $\Pi_1 = \Pi_2 = \Pi_3 = \Pi_4 = (\underbrace{2,\ldots,2}_{k \text{ vezes}},1)$. Assim, $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = k+1$ e $d = 2k+1$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Logo,

  $$\chi(\widetilde{\Sigma}) - \ell(\Pi) = 2 - (m_1+m_2+m_3+m_4) = -4k-2 = (2k+1)\cdot(2-4) = d\cdot(\chi(\Sigma)-n),$$

  e portanto, a fórmula de Riemann-Hurwitz 2.1 é satisfeita. Deste modo, obtemos o candidato $S \overset{2k+1:1}{\underset{(2,\ldots,2,1),(2,\ldots,2,1),(2,\ldots,2,1),(2,\ldots,2,1)}{\dashrightarrow\cdots\dashrightarrow}} S$.

- $(2,2) \dashrightarrow 2, \quad 2 \dashrightarrow 2, \quad 2 \dashrightarrow 2;$

  Neste caso teríamos $\Pi_1 = (2,\ldots,2)$, $\Pi_2 = \Pi_3 = (2,\ldots,2,1)$ e $\Pi_4 = (2,\ldots,2,1,1)$. Assim, d seria par e ímpar ao mesmo tempo. Contradição! Portanto, não existe candidatos neste caso.

- $(2,2) \dashrightarrow 2, \quad (2,2) \dashrightarrow 2;$

  Neste caso temos $\Pi_1 = \Pi_2 = (\underbrace{2,...,2}_{k \text{ vezes}}, 1, 1)$ e $\Pi_3 = \Pi_4 = (\underbrace{2,...,2}_{h \text{ vezes}})$. Assim, $m_1 = m_2 = k+2$, $m_3 = m_4 = h$ e $d = 2k+2 = 2h$ para algum $h, k \in \mathbb{Z}$. Então, $h = k+1$ e temos

  $$\chi(\widetilde{\Sigma}) - \ell(\Pi) = 2 - (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) = -4k - 4 = (2k+2)\cdot(2-4) = d\cdot(\chi(\Sigma) - n),$$

  e portanto, a fórmula de Riemann-Hurwitz 2.1 é satisfeita. Deste modo, obtemos o candidato $S \overset{2k+2:1}{\underset{(2,...,2,1,1),(2,...,2,1,1),(2,...,2),(2,...,2)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$.

- $(2,2,2) \dashrightarrow 2, \quad 2 \dashrightarrow 2;$

  Neste caso teríamos $\Pi_1 = (2,...,2,1,1,1)$, $\Pi_2 = (2,...,2,1)$ e $\Pi_3 = \Pi_4 = (2,...,2)$ e então d seria par e ímpar ao mesmo tempo, o que é absurdo. Portanto não existe candidato neste caso.

- $(2,2,2,2) \dashrightarrow 2.$

  Neste caso temos $\Pi_1 = (\underbrace{2,...,2}_{k \text{ vezes}}, 1, 1, 1, 1)$ e $\Pi_2 = \Pi_3 = \Pi_4 = (\underbrace{2,...,2}_{h \text{ vezes}})$. Então, $m_1 = k+4$, $m_2 = m_3 = m_4 = h$ e $d = 2k+4 = 2h$ para algum $h, k \in \mathbb{Z}$, que nos leva a $h = k+2$. Logo,

  $$\chi(\widetilde{\Sigma}) - \ell(\Pi) = 2 - (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) = -4k - 8 = (2k+4)\cdot(2-4) = d\cdot(\chi(\Sigma) - n),$$

  e portanto, a fórmula de Riemann-Hurwitz 2.1 é satisfeita. Deste modo, obtemos o candidato $S \overset{2k+4:1}{\underset{(2,...,2,1,1,1,1),(2,...,2),(2,...,2),(2,...,2)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$.

Isto conclui a primeira parte.

A segunda parte provaremos como de costume, exceto que devemos lidar com a flexibilidade de $S(2,2,2,2)$. Neste ponto, vamos assumir que exista uma aplicação $f : S(2,2,2,2) \xrightarrow{d:1} S(2,2,2,2)$ realizando algum candidato e colocaremos sobre a imagem $S(2,2,2,2)$ a estrutura π definida por $\Gamma^{1,1}_{(2,2,2,2)}$. Assim, pela proposição 5.1, existe uma estrutura $\widetilde{\pi}$ sobre o domínio também com área 2, e $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$, tal que $\widetilde{f}(z) = \lambda \cdot z + \mu$ com $\pi \circ \widetilde{f} = f \circ \widetilde{\pi}$ e $d = |\lambda|^2$. Então $\widetilde{\pi}$ está definido para algum $\Gamma^{s,t}_{(2,2,2,2)}$.

Primeiramente, observe que pela simetria de $S(2,2,2,2)$ podemos assumir $\mu = 0$. Então aplicamos o lema 5.17. Como

$$\Lambda^{1,1}_{(2,2,2,2)} = \langle \tau_2, \tau_{2i} \rangle, \qquad \left\langle \tau_{2is}, \tau_{2\left(\frac{1}{s}+it\right)} \right\rangle$$

existem $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\begin{cases} \lambda \cdot is = n + im \\ \lambda \cdot \left(\frac{1}{s} + it\right) = p + iq \end{cases} \tag{5.9}$$

Deste modo, todos os parâmetros relevantes podem ser determinadas explicitamente em termos de n, m, p, q, a saber, pela da primeira equação obtemos $\lambda = \frac{1}{s}(m - in)$.

Substituindo na segunda equação temos

$$\frac{1}{s^2}(m - in) + \frac{it}{s}(m - in) = p + iq.$$

Da igualdade entre números complexos segue que

$$\begin{cases} \frac{m}{s^2} + \frac{tn}{s} = p \\ \\ \frac{-n}{s^2} + \frac{tm}{s} = q \end{cases}$$

Neste sistema, multiplicando a primeira equação por m, a segunda por $-n$ e somando as duas equações encontramos $s = \sqrt{\frac{n^2 + m^2}{pm - qn}}$. Além disso a primeira equação também nos fornece $t = \frac{sp}{n} - \frac{m}{ns}$

Em particular,

$$d = |\lambda|^2 = \frac{n^2 + m^2}{s^2} = pm - qn.$$

Observe ainda que o sistema 5.9 nos fornece também as imagens dos levantamentos dos pontos de cone.

Para o candidato $S \xrightarrow[(2,\ldots,2,1),(2,\ldots,2,1),(2,\ldots,2,1),(2,\ldots,2,1)]{2k+1:1} S$, como $d = 2k + 1$, temos duas possibilidades:

- $k \geq 1$ é par;

  Se k for par, então existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $k = 2a$. Portanto, $d = 2k + 1 = 4a + 1$, com $a \geq 1$.

- $k \geq 1$ é ímpar;

  Se k for ímpar, então existe $b \in \mathbb{N}$ tal que $k = 2b + 1$. Assim, $d = 2k + 1 = 4b + 3 = 4(b + 1) - 1$. Fazendo $a = b + 1$ segue que $d = 4a - 1$ com $a \geq 1$.

Logo, $d = 4a \pm 1$ para algum $a \geq 1$. Dividiremos em dois casos:

$\diamondsuit$ $d = 4a + 1$;

Neste caso, como $d = pm - qn$, faremos $p = m = 1$, $q = -2$ e $n = 2a$. Então,

$$\lambda = \sqrt{\frac{4a+1}{4a^2+1}}\cdot(1-2ai), \qquad s = \sqrt{\frac{4a^2+1}{4a+1}}, \qquad t = \sqrt{\frac{4a^2+1}{4a^2(4a+1)}} - \sqrt{\frac{4a+1}{4a^2(4a^2+1)}}.$$

Assim, vemos que a aplicação correspondente $\widetilde{f}$ induz uma realização do candidato pois

$$\widetilde{f}\left(\widetilde{A}^{(2)}\right) = \widetilde{A}^{(2)}_{0,0} \qquad \widetilde{f}\left(\widetilde{B}^{(2)}\right) = \widetilde{B}^{(2)}_{1,-2}$$
$$\widetilde{f}\left(\widetilde{C}^{(2)}\right) = \widetilde{C}^{(2)}_{2a+1,-1} \quad \widetilde{f}\left(\widetilde{D}^{(2)}\right) = \widetilde{D}^{(2)}_{2a,1}.$$

Para ilustrar este caso uma descrição da aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo uma realização de $S \xrightarrow[(2,2,1),(2,2,1),(2,2,1),(2,2,1)]{5:1} S$ pode ser vista na figura 5.22.

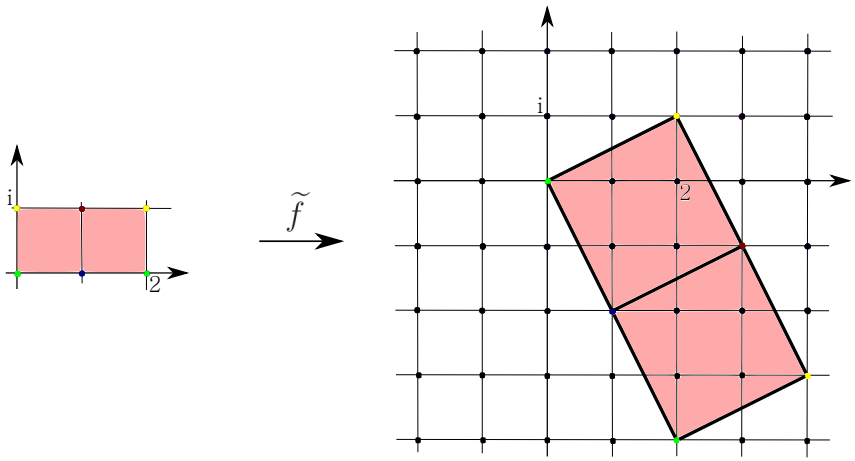


Figura 5.22: Uma aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo um recobrimento de grau 5 de $S(2,2,2,2)$ sobre ele mesmo.

♢ $d = 4a - 1$.

Novamente, como $d = pm - qn$, faremos $n = 2a$, $m = 1$, $p = -1$ e $q = -2$. Então,

$$\lambda = \sqrt{\frac{4a-1}{4a^2+1}}\cdot(1-2ai), \qquad s = \sqrt{\frac{4a^2+1}{4a-1}}, \qquad t = -\sqrt{\frac{4a^2+1}{4a^2(4a-1)}} - \sqrt{\frac{4a-1}{4a^2(4a^2+1)}}.$$

Como antes, a aplicação correspondente $\widetilde{f}$ induz uma realização do candidato pois

$$\widetilde{f}\left(\widetilde{A}^{(2)}\right) = \widetilde{A}^{(2)}_{0,0} \qquad \widetilde{f}\left(\widetilde{B}^{(2)}\right) = \widetilde{B}^{(2)}_{-1,-2}$$
$$\widetilde{f}\left(\widetilde{C}^{(2)}\right) = \widetilde{C}^{(2)}_{2a-1,-1} \quad \widetilde{f}\left(\widetilde{D}^{(2)}\right) = \widetilde{D}^{(2)}_{2a,1}.$$

Para ilustrar este caso uma descrição da aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo uma realização de $S \xrightarrow[(2,1),(2,1),(2,1),(2,1)]{3:1} S$ pode ser vista na figura 5.23.

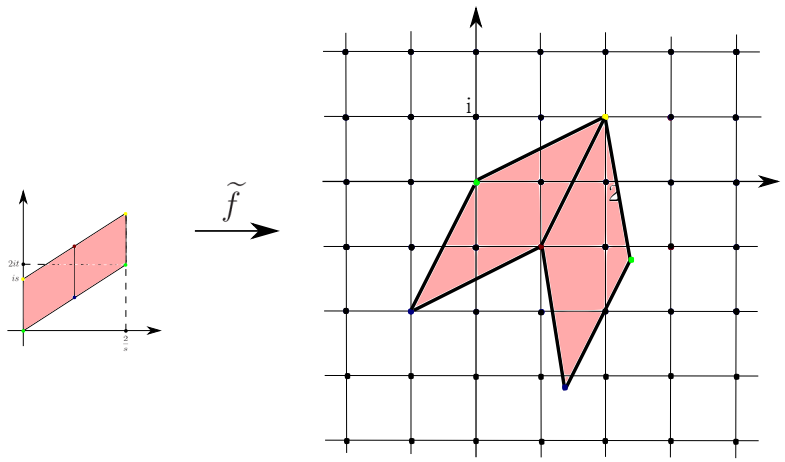


Figura 5.23: Uma aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo um recobrimento de grau 3 de $S(2,2,2,2)$ sobre ele mesmo.

Para o candidato $S \overset{2k+2:1}{\underset{(2,\ldots,2,1,1),(2,\ldots,2,1,1),(2,\ldots,2),(2,\ldots,2)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$, como $d = 2k+2$, temos duas possibilidades:

- $k \geq 1$ é par;

  Se k for par, então existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $k = 2a$. Portanto, $d = 2k+2 = 4a+2$, com $a \geq 1$.

- $k \geq 1$ é ímpar;

  Se k for ímpar, então existe $b \in \mathbb{N}$ tal que $k = 2b+1$. Assim, $d = 2k+2 = 4b+4 = 4(b+1)$. Fazendo $a = b+1$ segue que $d = 4a$ com $a \geq 1$.

Assim, dividimos em dois casos

$\diamondsuit$ $d = 4a+2$;

Neste caso, como $d = pm - qn$, faremos $n = 2a$, $m = 2$, $p = 1$ e $q = -2$. Então,

$$\lambda = \sqrt{\frac{2a+1}{2(a^2+1)}}\cdot(2-2ai), \qquad s = \sqrt{\frac{2(a^2+1)}{2a+1}}, \qquad t = \sqrt{\frac{2(a^2+1)}{4a^2(2a+1)}} - \sqrt{\frac{a+1}{a^2(a^2+1)}}.$$

Assim, vemos que a aplicação correspondente $\widetilde{f}$ induz uma realização do candidato pois

$$\widetilde{f}\left(\widetilde{A}^{(2)}\right) = \widetilde{A}^{(2)}_{0,0} \qquad \widetilde{f}\left(\widetilde{B}^{(2)}\right) = \widetilde{B}^{(2)}_{1,-2}$$
$$\widetilde{f}\left(\widetilde{C}^{(2)}\right) = \widetilde{B}^{(2)}_{2a+1,0} \quad \widetilde{f}\left(\widetilde{D}^{(2)}\right) = \widetilde{A}^{(2)}_{2a,2}.$$

Para ilustrar este caso uma descrição da aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo uma realização de $S \overset{6:1}{\underset{(2,2,1,1),(2,2,1,1),(2,2,2),(2,2,2)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$ pode ser vista na figura 5.24.

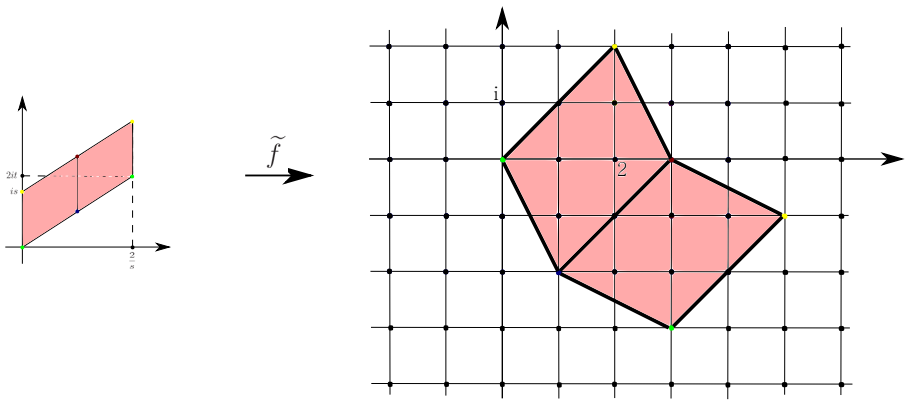


Figura 5.24: Uma aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo um recobrimento de grau 6 de $S(2,2,2,2)$ sobre ele mesmo.

♢ $d = 4a$.

Novamente, como $d = pm - qn$, faremos $n = 2a$, $m = 0$, $p = 1$, $q = -2$. Então,

$$\lambda = -2\sqrt{a}i, \qquad s = \sqrt{a}, \qquad t = \frac{\sqrt{a}}{2a}.$$

Como antes, a aplicação correspondente $\widetilde{f}$ induz uma realização do candidato pois

$$\begin{aligned} \widetilde{f}\left(\widetilde{A}^{(2)}\right) &= \widetilde{A}^{(2)}_{0,0} & \widetilde{f}\left(\widetilde{B}^{(2)}\right) &= \widetilde{B}^{(2)}_{1,-2} \\ \widetilde{f}\left(\widetilde{C}^{(2)}\right) &= \widetilde{B}^{(2)}_{2a+1,-2} & \widetilde{f}\left(\widetilde{D}^{(2)}\right) &= \widetilde{A}^{(2)}_{2a,0}. \end{aligned}$$

Para ilustrar este caso uma descrição da aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo uma realização de $S \overset{4:1}{\underset{(2,1,1),(2,1,1),(2,2),(2,2)}{\dashrightarrow}} S$ pode ser vista na figura 5.25.

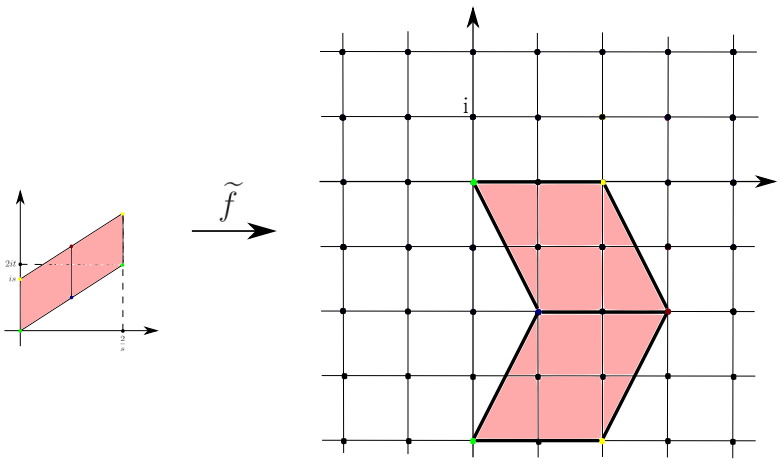


Figura 5.25: Uma aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo um recobrimento de grau 4 de $S(2,2,2,2)$ sobre ele mesmo.

Para o candidato $S \overset{2k+4:1}{\underset{(2,\ldots,2,1,1,1,1),(2,\ldots,2),(2,\ldots,2),(2,\ldots,2)}{\dashrightarrow}} S$, cada levantamento de um ponto de cone tem algum $\widetilde{A}_*^{(2)}$ como sua imagem, portanto m, n, p, q devem ser todos pares. Como $d = pm - qn$, segue que d é um múltiplo de 4, como dito no enunciado.

Reciprocamente, se $d = 4a$ para $a > 1$ fazemos $n = m = q = 2$, $p = 2(a+1)$. Então,

$$\lambda = \sqrt{2a} \cdot (1 - i), \qquad s = \frac{\sqrt{2a}}{a}, \qquad t = \frac{\sqrt{2a}}{a}(a+1) - \frac{\sqrt{2a}}{2}.$$

Assim, vemos que a aplicação correspondente $\widetilde{f}$ induz uma realização do candidato pois

$$\begin{aligned} \widetilde{f}\left(\widetilde{A}^{(2)}\right) &= \widetilde{A}^{(2)}_{0,0} & \widetilde{f}\left(\widetilde{B}^{(2)}\right) &= \widetilde{A}^{(2)}_{2(a+1),2} \\ \widetilde{f}\left(\widetilde{C}^{(2)}\right) &= \widetilde{A}^{(2)}_{2(a+2),4} & \widetilde{f}\left(\widetilde{D}^{(2)}\right) &= \widetilde{A}^{(2)}_{2,2}. \end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração.

Para ilustrar este caso uma descrição da aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo uma realização de $S \overset{8:1}{\underset{(2,2,1,1,1,1),(2,2,2,2),(2,2,2,2),(2,2,2,2)}{\dashrightarrow}} S$ pode ser vista na figura 5.26.

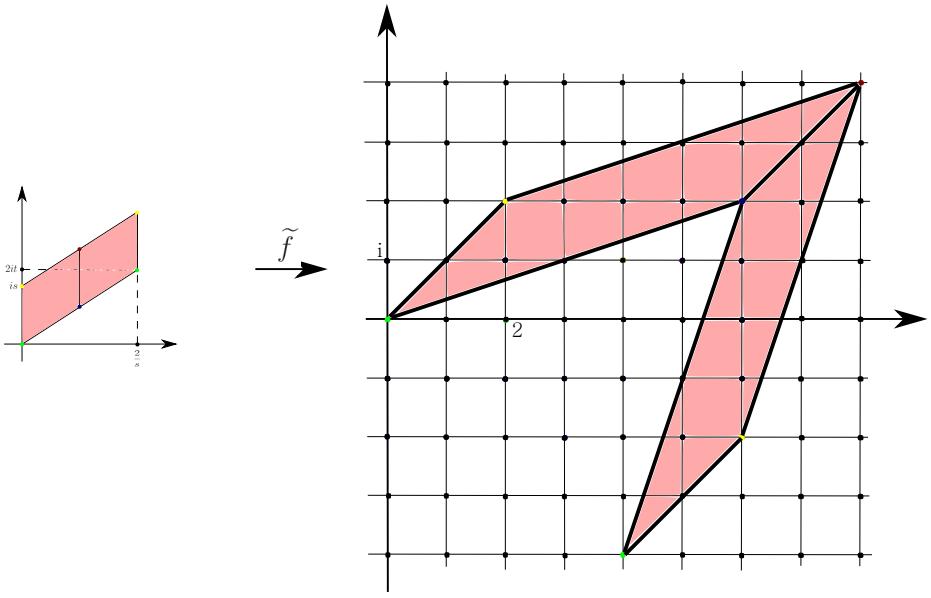


Figura 5.26: Uma aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo um recobrimento de grau 8 de $S(2,2,2,2)$ sobre ele mesmo.

□

Teorema 5.24. *Os candidatos a recobrimentos ramificados entre superfícies tendo candidato associado* $S(3,3,3) \overset{d:1}{\dashrightarrow} S(2,3,6)$ *são*

$$S \overset{6k:1}{\underset{(2,\ldots,2),(3,\ldots,3,1,1,1),(6,\ldots,6)}{\dashrightarrow}} S \qquad S \overset{6k+2:1}{\underset{(2,\ldots,2),(3,\ldots,3,1,1),(6,\ldots,6,2)}{\dashrightarrow}} S$$

$$S \overset{6k+4:1}{\underset{(2,\ldots,2),(3,\ldots,3,1),(6,\ldots,6,2,2)}{\dashrightarrow}} S \qquad S \overset{6k+6:1}{\underset{(2,\ldots,2),(3,\ldots,3),(6,\ldots,6,2,2,2)}{\dashrightarrow}} S$$

com $k \geq 1$, e eles são realizáveis, respectivamente:

- *se, e somente se $d = 6(x^2 + 3xy + 3y^2)$ para $x, y \in \mathbb{N}$;*
- *se, e somente se $d = 2(x^2 + xy + y^2)$ para $x, y \in \mathbb{N}$ e $x \not\equiv y (\text{mod } 3)$;*
- *nunca;*
- *se, e somente se $d = 6(x^2 + 3xy + 3y^2)$ para $x, y \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Para um candidato a recobrimento entre orbifolds da forma $S(3,3,3) \overset{d:1}{\dashrightarrow} S(2,3,6)$ temos as seguintes possibilidades:

- $(3,3,3) \dashrightarrow 3$;

  Neste caso temos $\Pi_1 = (\underbrace{2,...,2}_{h \text{ vezes}})$, $\Pi_2 = (\underbrace{3,...,3}_{l \text{ vezes}},1,1,1)$ e $\Pi_3 = (\underbrace{6,...,6}_{k \text{ vezes}})$. Assim, $m_1 = h$, $m_2 = l + 3$, $m_3 = k$ e $d = 2h = 3l + 3 = 6k$ para algum $h, l, k \in \mathbb{Z}$. Então, $h = 3k$, $l = 2k - 1$ e

  $$\ell(\Pi) = m_1 + m_2 + m_3 = 3k + (2k + 2) + k = 6k + 2 = d + 2,$$

  e portanto, a versão simplificada da fórmula de Riemann-Hurwitz 2.2 é satisfeita. Deste modo, obtemos o candidato $S \overset{6k:1}{\underset{(2,...,2),(3,...,3,1,1,1),(6,...,6)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$.

- $(3,3) \dashrightarrow 3, \qquad 3 \dashrightarrow 6$;

  Neste caso temos $\Pi_1 = (\underbrace{2,...,2}_{h \text{ vezes}})$, $\Pi_2 = (\underbrace{3,...,3}_{l \text{ vezes}},1,1)$ e $\Pi_3 = (\underbrace{6,...,6}_{k \text{ vezes}},2)$. Assim, $m_1 = h$, $m_2 = l + 2$, $m_3 = k + 1$ e $d = 2h = 3l + 2 = 6k + 2$ para algum $h, l, k \in \mathbb{Z}$. Então, $h = 3k + 1$, $l = 2k$ e

  $$\ell(\Pi) = m_1 + m_2 + m_3 = (3k + 1) + (2k + 2) + (k + 1) = (6k + 2) + 2 = d + 2,$$

  e portanto, a versão simplificada da fórmula de Riemann-Hurwitz 2.2 é satisfeita. Deste modo, obtemos o candidato $S \overset{6k+2:1}{\underset{(2,...,2),(3,...,3,1,1),(6,...,6,2)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$.

- $3 \dashrightarrow 3, \qquad (3,3) \dashrightarrow 6$;

  Neste caso temos $\Pi_1 = (\underbrace{2,...,2}_{h \text{ vezes}})$, $\Pi_2 = (\underbrace{3,...,3}_{l \text{ vezes}},1)$ e $\Pi_3 = (\underbrace{6,...,6}_{k \text{ vezes}},2,2)$. Assim, $m_1 = h$, $m_2 = l + 1$, $m_3 = k + 2$ e $d = 2h = 3l + 1 = 6k + 4$ para algum $h, l, k \in \mathbb{Z}$, o que nos diz que $h = 3k + 2$ e $l = 2k + 1$. Além disso,

  $$\ell(\Pi) = m_1 + m_2 + m_3 = (3k + 2) + (2k + 2) + (k + 2) = (6k + 4) + 2 = d + 2,$$

  e portanto, a versão simplificada da fórmula de Riemann-Hurwitz 2.2 é satisfeita. Deste modo, obtemos o candidato $S \overset{6k+4:1}{\underset{(2,...,2),(3,...,3,1),(6,...,6,2,2)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$.

- $(3,3,3) \dashrightarrow 6$.

  Neste caso temos $\Pi_1 = (\underbrace{2,...,2}_{h\ vezes})$, $\Pi_2 = (\underbrace{3,...,3}_{l\ vezes})$ e $\Pi_3 = (\underbrace{6,...,6}_{k\ vezes},2,2,2)$. Assim, $m_1 = h$, $m_2 = l$, $m_3 = k+3$ e $d = 2h = 3l = 6k+6$ para algum $h,l,k \in \mathbb{Z}$, o que nos diz que $h = 3k+3$ e $l = 2k+2$. Além disso,

  $$\ell(\Pi) = m_1 + m_2 + m_3 = (3k+3) + (2k+2) + (k+3) = (6k+6) + 2 = d + 2,$$

  e portanto, a versão simplificada da fórmula de Riemann-Hurwitz 2.2 é satisfeita. Deste modo, obtemos o candidato $S \overset{6k+6:1}{\underset{(2,...,2),(3,...,3),(6,...,6,2,2,2)}{\dashrightarrow}} S$.

Isto conclui a primeira parte.

Para a segunda parte procedemos como acima, com a diferença que agora a estrutura euclidiana $\widetilde{\pi}$ sobre $S(3,3,3)$ não será aquela que fixamos acima, pois sua área seria $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ao invés de $\frac{\sqrt{3}}{2}$, assim devemos aplicar um fator reescalante de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sobre o triângulo $\Delta(3,3,3)$. Desta forma, os reticulados para os quais podemos aplicar o lema 5.17 são

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \Lambda_{(3,3,3)} = \left\langle \tau_{i\sqrt{\frac{3}{2}}}, \tau_{\frac{3+i\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} \right\rangle, \qquad \Lambda_{(2,3,6)} = \left\langle \tau_{i\sqrt{3}}, \tau_{\frac{3+i\sqrt{3}}{2}} \right\rangle.$$

Como na prova do teorema 5.21 (exceto pelo novo fator) deduzimos que

$$\lambda = \sqrt{2} \cdot ((n+m) - \omega m), \qquad d = |\lambda|^2 = 2(n^2 + nm + m^2).$$

Portanto, $\widetilde{f}$ aplica os levantamentos dos pontos de cone de $S(3,3,3)$ em

$$\widetilde{f}(0) = \mu, \quad \widetilde{f}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (n+m) - \omega m + \mu, \quad \widetilde{f}\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}}\right) = m + n\omega + \mu,$$

onde a última igualdade é válida aplicando a identidade $\omega^2 = \omega - 1$ vista anteriormente.

Para o candidato $S \overset{6k:1}{\underset{(2,...,2),(3,...,3,1,1,1),(6,...,6)}{\dashrightarrow}} S$ todos esses pontos deveriam ser algum $\widetilde{B}^{(3)}_*$ de 5.6, então podemos assumir $\mu = 0$ e

$$n + 2m = n + m - (-m) \not\equiv 2 (\text{mod } 3), \quad m - n \not\equiv 2 (\text{mod } 3) \Longrightarrow n \equiv m (\text{mod } 3).$$

Fazendo $x = n$ e $y = \dfrac{m-n}{3}$ vemos que

$$6(x^2 + 3xy + 3y^2) = 6\left[n^2 + 3n\left(\frac{m-n}{3}\right) + 3\left(\frac{m-n}{3}\right)^2\right] = 2(n^2 + nm + m^2) = d,$$

para $x, y \in \mathbb{Z}$ e como acima podemos reduzir para $x, y \in \mathbb{N}$. Então d tem a forma apropriada.

Reciprocamente, se $d = 6(x^2 + 3xy + 3y^2)$ fazemos $n = x$, $m = x + 3y$ e definimos

$$\widetilde{f}(z) = \sqrt{2} \cdot ((n + m) - \omega m) \cdot z.$$

Logo,

$$\widetilde{f}(0) = 0, \quad \widetilde{f}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (n + m) - \omega m, \quad \widetilde{f}\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}}\right) = m + n\omega,$$

e, como $(n+m)-(-m) \equiv 0(\text{ mod } 3)$ e $m-n \equiv 0(\text{ mod } 3)$, vemos que a $\widetilde{f}$ correspondente realiza o candidato.

Para ilustrar este caso uma descrição da aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo uma realização de $S \overset{6:1}{\underset{(2,2,2),(3,1,1,1),(6)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$ pode ser vista na figura 5.27.

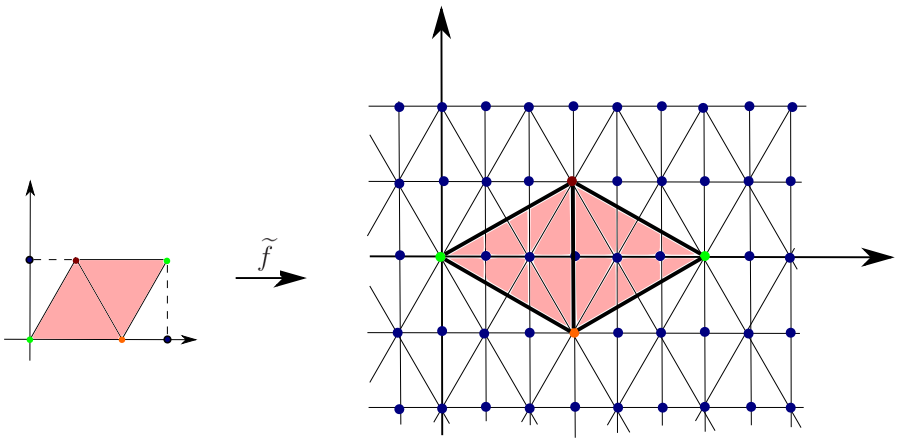


Figura 5.27: Uma aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo um recobrimento de grau 6 de $S(3, 3, 3)$ sobre $S(2, 3, 6)$.

Para o candidato $S \overset{6k+2:1}{\underset{(2,\ldots,2),(3,\ldots,3,1,1),(6,\ldots,6,2)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$ novamente $\mu = 0$ e, pela simetria de $S(3, 3, 3)$, podemos assumir que $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ é aplicado em algum $\widetilde{C}_*^{(6)}$, a saber, $n-m \equiv 2(\text{ mod } 3)$, donde $n \not\equiv m(\text{mod } 3)$. Portanto $d = 2(x^2 + xy + y^2)$ para algum $x, y \in \mathbb{Z}$ com $x \not\equiv y(\text{mod } 3)$, e mais uma vez podemos restringir a $x, y \in \mathbb{N}$, então d tem a forma prescrita.

Reciprocamente, se $d = 2(x^2+xy+y^2)$ para $x, y \in \mathbb{N}$ e $x \not\equiv y(\text{ mod } 3)$, fazemos $n = x$, $m = y$ e definimos

$$\widetilde{f}(z) = \sqrt{2} \cdot ((n + m) - \omega m) \cdot z.$$

Logo,

$$\widetilde{f}(0) = 0, \quad \widetilde{f}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (n + m) - \omega m, \quad \widetilde{f}\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}}\right) = m + n\omega,$$

e, considerando $(n + m) - (-m) \not\equiv 2(\text{mod } 3)$ e $m - n \equiv 2(\text{mod } 3)$ (a menos de permutação), vemos que a $\widetilde{f}$ correspondente realiza o candidato.

Para ilustrar este caso uma descrição da aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo uma realização de $S \overset{8:1}{\underset{(2,2,2,2),(3,3,1,1),(6,2)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$ pode ser vista na figura 5.28.

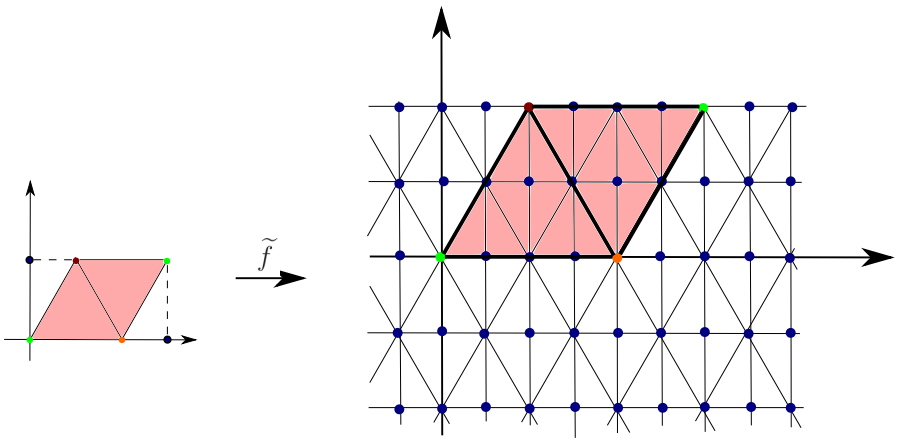


Figura 5.28: Uma aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo um recobrimento de grau 8 de $S(3,3,3)$ sobre $S(2,3,6)$.

Para o candidato $S \overset{6k+4:1}{\underset{(2,\ldots,2),(3,\ldots,3,1),(6,\ldots,6,2,2)}{\dashrightarrow}} S$ poderíamos supor novemente que $\omega = 0$. Desta forma, teríamos $n + 2m = (n + m) - (-m) \equiv 2(\text{mod } 3)$ e $m - n \equiv 2(\text{mod } 3)$, o que é absurdo pois, neste caso teríamos $3m = (n + 2m) + (m - n) \equiv 1(\text{mod } 3)$. Portanto este candidato nunca é realizável.

Para o candidato $S \overset{6k+6:1}{\underset{(2,\ldots,2),(3,\ldots,3),(6,\ldots,6,2,2,2)}{\dashrightarrow}} S$ podemos supor $\mu = \omega$, e

$$\begin{array}{l} (n+m) - (1-m) \equiv 2(\text{mod } 3) \\ m - (n+1) \equiv 2(\text{mod } 3) \end{array} \Longrightarrow n \equiv m(\text{mod } 3)$$

e concluímos como para o primeiro candidato.

Para ilustrar este caso uma descrição da aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo uma realização de $S \overset{18:1}{\underset{(2,\ldots,2),(3,\ldots,3),(6,6,2,2,2)}{\dashrightarrow}} S$ pode ser vista na figura 5.29.

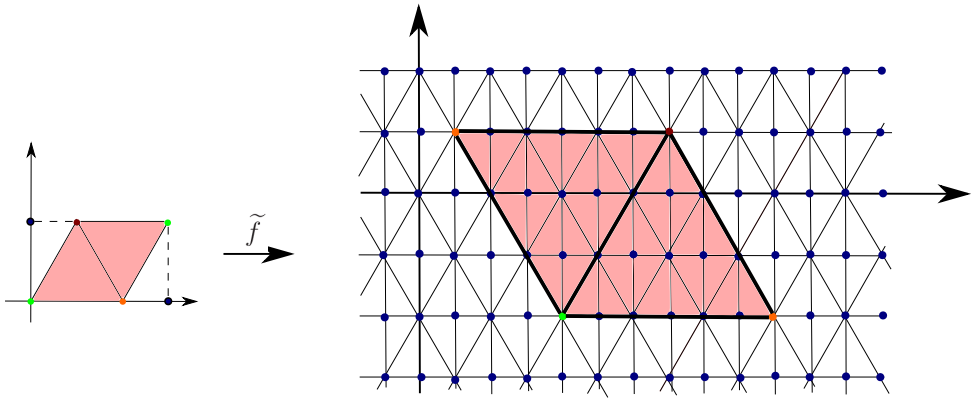


Figura 5.29: Uma aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo um recobrimento de grau 18 de $S(3,3,3)$ sobre $S(2,3,6)$.

□

Teorema 5.25. *Os candidatos a recobrimentos ramificados entre superfícies tendo candidato associado* $S(2,2,2,2) \overset{d:1}{\dashrightarrow} S(2,4,4)$ *são*

$$S \overset{4k+4:1}{\underset{(2,\ldots,2,1,1,1,1),(4,\ldots,4),(4,\ldots,4)}{\dashrightarrow}} S \qquad S \overset{4k+4:1}{\underset{(2,\ldots,2,1,1),(4,\ldots,4,2,2),(4,\ldots,4)}{\dashrightarrow}} S$$

$$S \overset{4k+2:1}{\underset{(2,\ldots,2,1,1),(4,\ldots,4,2),(4,\ldots,4,2)}{\dashrightarrow}} S \qquad S \overset{4k+4:1}{\underset{(2,\ldots,2),(4,\ldots,4,2,2),(4,\ldots,4,2,2)}{\dashrightarrow}} S$$

$$S \overset{4k+6:1}{\underset{(2,\ldots,2),(4,\ldots,4,2,2,2),(4,\ldots,4,2)}{\dashrightarrow}} S \qquad S \overset{4k+8:1}{\underset{(2,\ldots,2),(4,\ldots,4,2,2,2,2),(4,\ldots,4)}{\dashrightarrow}} S$$

com $k \geq 1$. *Os quatro primeiros sempre são realizáveis, o quinto nunca é e o último é se, e somente se,* d *é um múltiplo de 8.*

Demonstração. Para um candidato a recobrimento entre orbifolds da forma $S(2,2,2,2) \overset{d:1}{\dashrightarrow} S(2,4,4)$ temos as seguintes possibilidades:

- $(2,2,2,2) \dashrightarrow 2$;

  Neste caso temos $\Pi_1 = (\underbrace{2,\ldots,2}_{h \text{ vezes}},1,1,1,1)$ e $\Pi_2 = \Pi_3 = (\underbrace{4,\ldots,4}_{l \text{ vezes}})$. Assim, $m_1 = h+4$, $m_2 = m_3 = l$ e $d = 2h+4 = 4l$ para algum $h,l \in \mathbb{Z}$, donde concluímos que h deve ser par, ou seja, $h = 2k$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Logo, $d = 4k+4$ e $l = k+1$ e segue que

  $$\ell(\Pi) = m_1 + m_2 + m_3 = (2k+4) + (k+1) + (k+1) = (4k+4) + 2 = d + 2,$$

  e portanto, a versão simplificada da fórmula de Riemann-Hurwitz 2.2 é satisfeita. Deste modo, obtemos o candidato $S \overset{4k+4:1}{\underset{(2,\ldots,2,1,1,1,1),(4,\ldots,4),(4,\ldots,4)}{\dashrightarrow}} S$.

- $(2,2,2) \dashrightarrow 2, \quad 2 \dashrightarrow 4$;

  Neste caso teríamos $\Pi_1 = (2,\ldots,2,1,1,1)$, $\Pi_2 = (4,\ldots,4,2)$ e $\Pi_3 = (4,\ldots,4)$. Assim, d seria par e ímpar ao mesmo tempo. Contradição! Portanto, não existe candidatos neste caso.

- $(2,2) \dashrightarrow 2, \quad (2,2) \dashrightarrow 4$;

  Neste caso temos $\Pi_1 = (\underbrace{2,\ldots,2}_{h \text{ vezes}},1,1)$, $\Pi_2 = (\underbrace{4,\ldots,4}_{k \text{ vezes}},2,2)$ e $\Pi_3 = (\underbrace{4,\ldots,4}_{l \text{ vezes}})$. Assim, $m_1 = h+2$, $m_2 = k+2$, $m_3 = l$ e $d = 2h+2 = 4k+4 = 4l$ para algum $h,k \in \mathbb{Z}$. Logo, $h = 2k+1$, $l = k+1$ e temos

  $$\ell(\Pi) = m_1 + m_2 + m_3 = (2k+3) + (k+2) + (k+1) = (4k+4) + 2 = d + 2,$$

  e portanto, a versão simplificada da fórmula de Riemann-Hurwitz 2.2 é satisfeita. Deste modo, obtemos o candidato $S \overset{4k+4:1}{\underset{(2,\ldots,2,1,1),(4,\ldots,4,2,2),(4,\ldots,4)}{\dashrightarrow}} S$.

- $(2,2) \dashrightarrow 2, \quad 2 \dashrightarrow 4, \quad 2 \dashrightarrow 4$;

Neste caso temos $\Pi_1 = (\underbrace{2,...,2}_{h\ vezes},1,1)$ e $\Pi_2 = \Pi_3 = (\underbrace{4,...,4}_{k\ vezes},2)$. Assim, $m_1 = h+2$, $m_2 = m_3 = k+1$ e $d = 2h+2 = 4k+2$ para algum $h,k \in \mathbb{Z}$. Então, $h = 2k$ e segue que

$$\ell(\Pi) = m_1 + m_2 + m_3 = (2k+2) + (k+1) + (k+1) = (4k+2) + 2 = d + 2,$$

e portanto, a versão simplificada da fórmula de Riemann-Hurwitz 2.2 é satisfeita. Deste modo, obtemos o candidato $S \overset{4k+2:1}{\underset{(2,...,2,1,1),(4,...,4,2),(4,...,4,2)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$.

- $2 \dashrightarrow 2, \quad (2,2,2) \dashrightarrow 4$;

  Neste caso teríamos $\Pi_1 = (2,...,2,1)$, $\Pi_2 = (4,...,4,2,2,2)$ e $\Pi_3 = (4,...,4)$. Assim, d seria par e ímpar ao mesmo tempo, o que é absurdo. Portanto, não existe candidatos neste caso.

- $2 \dashrightarrow 2, \quad (2,2) \dashrightarrow 4, \quad 2 \dashrightarrow 4$;

  Neste caso teríamos $\Pi_1 = (2,...,2,1)$, $\Pi_2 = (4,...,4,2,2)$ e $\Pi_3 = (4,...,4,2)$. Assim, d seria par e ímpar ao mesmo tempo. Portanto, não existe candidatos neste caso.

- $(2,2) \dashrightarrow 4, \quad (2,2) \dashrightarrow 4$;

  Neste caso temos $\Pi_1 = (\underbrace{2,...,2}_{h\ vezes})$ e $\Pi_2 = \Pi_3 = (\underbrace{4,...,4}_{k\ vezes},2,2)$. Assim, $m_1 = h$, $m_2 = m_3 = k+2$ e $d = 2h = 4k+4$ para algum $h,k \in \mathbb{Z}$. Então, $h = 2k+2$ e segue que

  $$\ell(\Pi) = m_1 + m_2 + m_3 = (2k+2) + (k+2) + (k+2) = (4k+4) + 2 = d + 2,$$

  e portanto, a versão simplificada da fórmula de Riemann-Hurwitz 2.2 é satisfeita. Deste modo, obtemos o candidato $S \overset{4k+4:1}{\underset{(2,...,2),(4,...,4,2,2),(4,...,4,2,2)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$.

- $(2,2,2) \dashrightarrow 4, \quad 2 \dashrightarrow 4$;

  Neste caso temos $\Pi_1 = (\underbrace{2,...,2}_{h\ vezes})$, $\Pi_2 = (\underbrace{4,...,4}_{k\ vezes},2,2,2)$ e $\Pi_3 = (\underbrace{4,...,4}_{l\ vezes},2)$. Assim, $m_1 = h$, $m_2 = k+3$, $m_3 = l+1$ e $d = 2h = 4k+6 = 4l+2$ para algum $h,k,l \in \mathbb{Z}$. Então, $h = 2k+3$, $l = k+1$ e segue que

  $$\ell(\Pi) = m_1 + m_2 + m_3 = (2k+3) + (k+3) + (k+2) = (4k+6) + 2 = d + 2,$$

  e portanto, a versão simplificada da fórmula de Riemann-Hurwitz 2.2 é satisfeita. Deste modo, obtemos o candidato $S \overset{4k+6:1}{\underset{(2,...,2),(4,...,4,2,2,2),(4,...,4,2)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$.

- $(2,2,2,2) \dashrightarrow 4$.

Neste caso temos $\Pi_1 = (\underbrace{2,...,2}_{h\ vezes})$, $\Pi_2 = (\underbrace{4,...,4}_{k\ vezes},2,2,2,2)$ e $\Pi_3 = (\underbrace{4,...,4}_{l\ vezes})$. Assim, $m_1 = h$, $m_2 = k+4$, $m_3 = l$ e $d = 2h = 4k+8 = 4l$ para algum $h,k,l \in \mathbb{Z}$. Então, $h = 2k+4$, $l = k+2$ e segue que

$$\ell(\Pi) = m_1 + m_2 + m_3 = (2k+4) + (k+4) + (k+2) = (4k+8) + 2 = d + 2,$$

e portanto, a versão simplificada da fórmula de Riemann-Hurwitz 2.2 é satisfeita. Deste modo, obtemos o candidato $S \overset{4k+8:1}{\underset{(2,...,2),(4,...,4,2,2,2,2),(4,...,4)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$.

Isto conclui a primeira parte.

Para a segunda parte, como a área da estrutura que escolhemos sobre $S(2,4,4)$ é 1, sobre $S(2,2,2,2)$ teremos uma estrutura gerada pelas rotações de ângulo π em torno dos pontos

$$0, \quad \frac{1}{2s} + it, \quad \frac{1}{2s} + i(s+t), \quad is$$

com $s,t \in \mathbb{R}$ e $s > 0$. Desta forma, os reticulados para os quais devemos aplicar o lema 5.17 são $\left\langle \tau_{2is}, \tau_{\frac{1}{s}+2it} \right\rangle$ e $\Lambda_{(2,4,4)} = \langle \tau_2, \tau_{2i} \rangle$, então

$$\begin{cases} \lambda \cdot is = n + im \\ \lambda \cdot \left(\frac{1}{s} + 2it\right) = 2(p + iq) \end{cases}$$

para algum $n,m,p,q \in \mathbb{Z}$. Donde, resolvendo de modo semelhante ao utilizado no teorema 5.23, segue que

$$s = \sqrt{\frac{n^2+m^2}{2(pm-qn)}}, \qquad t = \frac{sp}{n} - \frac{m}{2ns}, \qquad \lambda = \frac{m-in}{s}.$$

Além disso, $d = 2(pm-qn)$ e as imagens dos levantamentos dos pontos de cone de $S(2,2,2,2)$ são

$$\widetilde{f}(0) = \mu, \qquad \widetilde{f}\left(\frac{1}{2s} + it\right) = p + iq + \mu,$$
$$\widetilde{f}(is) = n + im + \mu \qquad \widetilde{f}\left(\frac{1}{2s} + i(s+t)\right) = (p+n) + i(q+m) + \mu.$$

Para o candidato $S \overset{4k+4:1}{\underset{(2,...,2,1,1,1,1),(4,...,4),(4,...,4)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$ podemos escolher $\mu = 1$, $n = m = k+1$, $p = 1$ e $q = -1$ para ver que ele é realizável.

Para ilustrar este caso uma descrição da aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo uma realização de $S \overset{8:1}{\underset{(2,2,1,1,1,1),(4,4),(4,4)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$ pode ser vista na figura 5.30.

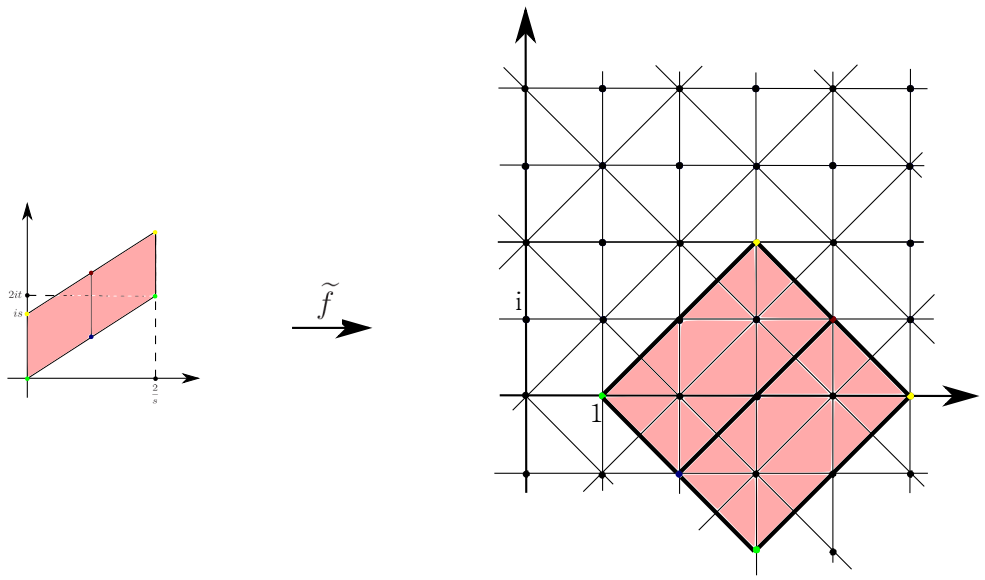


Figura 5.30: Uma aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo um recobrimento de grau 8 de $S(2,2,2,2)$ sobre $S(2,4,4)$.

Para o candidato $S \overset{4k+4:1}{\underset{(2,\ldots,2,1,1),(4,\ldots,4,2,2),(4,\ldots,4)}{\dashrightarrow}} S$ podemos escolher $\mu = 0$, $n = k$, $m = k+1$, $p = 2$ e $q = 0$ para ver que ele é realizável.

Para ilustrar este caso uma descrição da aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo uma realização de $S \overset{8:1}{\underset{(2,2,2,1,1),(4,2,2),(4,4)}{\dashrightarrow}} S$ pode ser vista na figura 5.31.

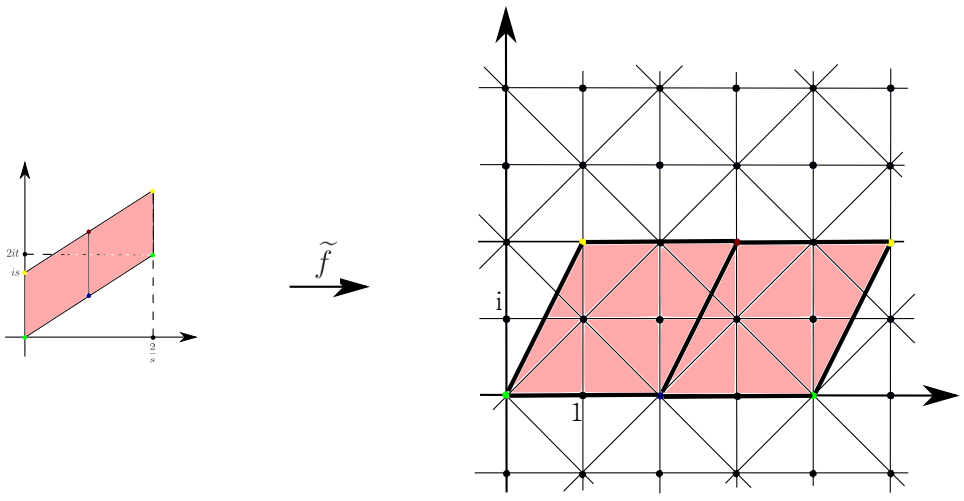


Figura 5.31: Uma aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo um recobrimento de grau 8 de $S(2,2,2,2)$ sobre $S(2,4,4)$.

Para o candidato $S \overset{4k+2:1}{\underset{(2,\ldots,2,1,1),(4,\ldots,4,2),(4,\ldots,4,2)}{\dashrightarrow}} S$ podemos escolher $\mu = 0$, $n = k$, $m = k+1$, $p = 1$ e $q = -1$ para ver que ele é realizável.

Para ilustrar este caso uma descrição da aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo uma realização de $S \overset{6:1}{\underset{(2,2,1,1),(4,2),(4,2)}{\dashrightarrow}} S$ pode ser vista na figura 5.32.

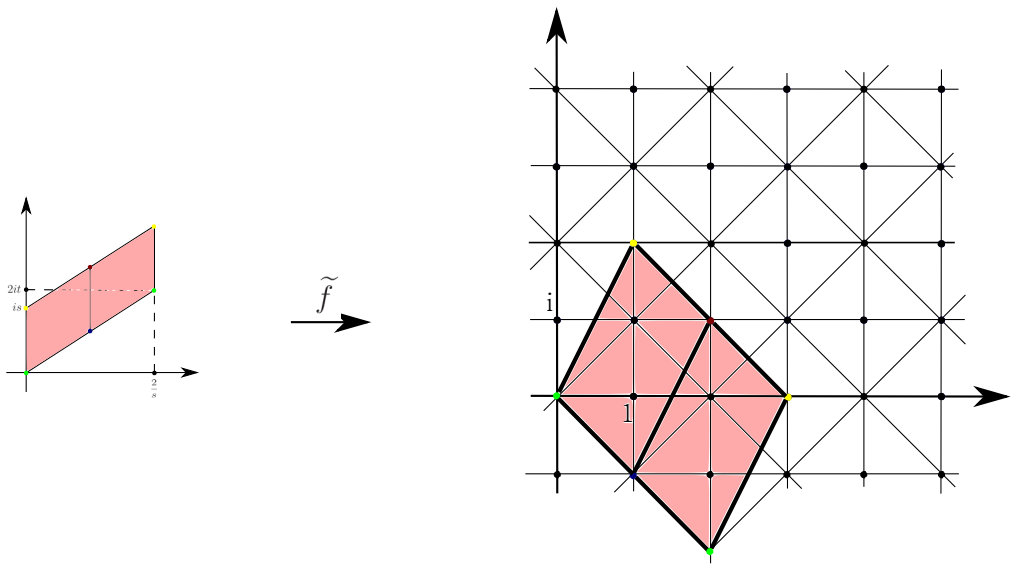


Figura 5.32: Uma aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo um recobrimento de grau 6 de $S(2,2,2,2)$ sobre $S(2,4,4)$.

Para o candidato $S \overset{4k+4:1}{\underset{(2,\ldots,2),(4,\ldots,4,2,2),(4,\ldots,4,2,2)}{\dashrightarrow}} S$ podemos escolher $\mu = 0$, $n = k+1$, $m = k+1$, $p = 1$ e $q = -1$ para ver que ele é realizável.

Para ilustrar este caso uma descrição da aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo uma realização de $S \overset{8:1}{\underset{(2,2,2,2),(4,2,2),(4,2,2)}{\dashrightarrow}} S$ pode ser vista na figura 5.33.

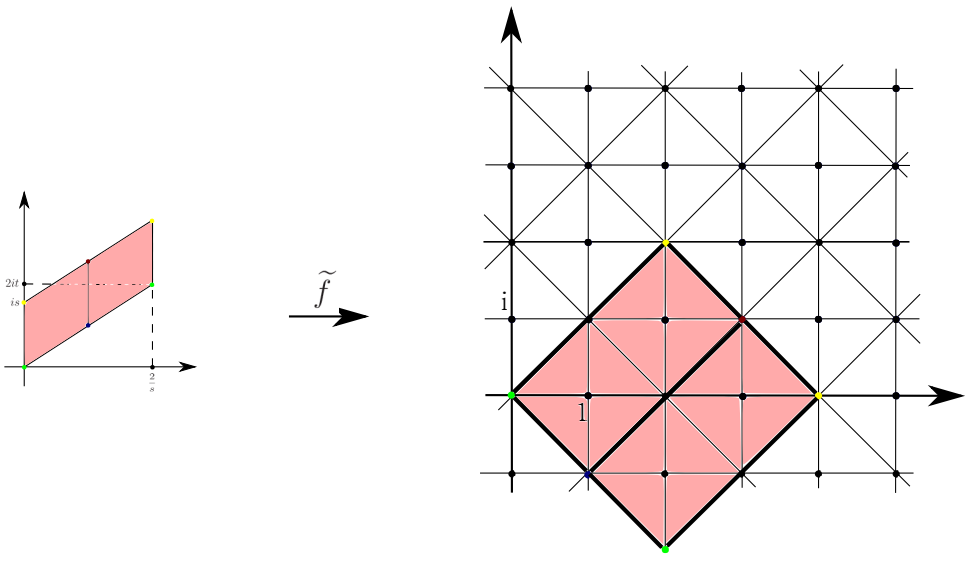


Figura 5.33: Uma aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo um recobrimento de grau 8 de $S(2,2,2,2)$ sobre $S(2,4,4)$.

O candidato $S \overset{4k+6:1}{\underset{(2,\ldots,2),(4,\ldots,4,2,2,2),(4,\ldots,4,2)}{\dashrightarrow}} S$ é sempre excepcional pois podemos supor $\mu = 0$ e assim ele teria que ter dois dos pares

$$(p,q), \qquad (n,m), \qquad (p+n, q+n)$$

consistindo de números pares e o terceiro consistindo de números ímpares o que é impossível.

Para o candidato $S \overset{4k+8:1}{\underset{(2,\ldots,2),(4,\ldots,4,2,2,2,2),(4,\ldots,4)}{\dashrightarrow}} S$ temos que p, q, n, m devem ser todos pares, assim, $d = 2(pm - qn)$ é um múltiplo de 8.

Reciprocamente, se $d = 8h$ podemos realizar o candidato com $\mu = n = q = 0$, $m = 2$ e $p = 2h$.

Para ilustrar este caso uma descrição da aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo uma realização de $S \overset{16:1}{\underset{(2,\ldots,2),(4,4,2,2,2,2),(4,4,4,4)}{\dashrightarrow}} S$ pode ser vista na figura 5.34.

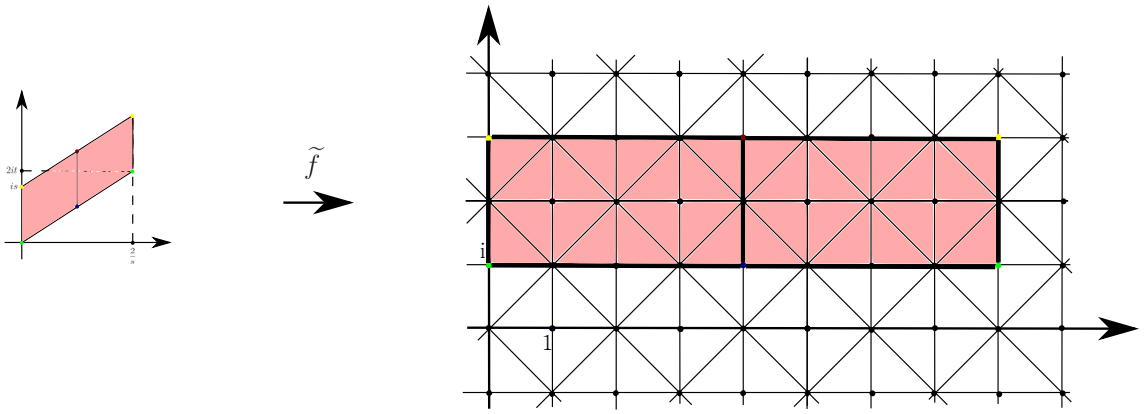


Figura 5.34: Uma aplicação $\widetilde{f} : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ induzindo um recobrimento de grau 16 de $S(2,2,2,2)$ sobre $S(2,4,4)$.

□

Teorema 5.26. *Os candidatos a recobrimentos ramificados entre superfícies tendo candidato associado* $S(2,2,2,2) \overset{d:1}{\dashrightarrow} S(2,3,6)$ *são*

$$S \overset{6k:1}{\underset{(2,\ldots,2,1,1,1,1),(3,\ldots,3),(6,\ldots,6)}{\dashrightarrow}} S \qquad S \overset{6k+3:1}{\underset{(2,\ldots,2,1,1,1),(3,\ldots,3),(6,\ldots,6,3)}{\dashrightarrow}} S$$

$$S \overset{6k+6:1}{\underset{(2,\ldots,2,1,1),(3,\ldots,3),(6,\ldots,6,3,3)}{\dashrightarrow}} S \qquad S \overset{6k+9:1}{\underset{(2,\ldots,2,1),(3,\ldots,3),(6,\ldots,6,3,3,3)}{\dashrightarrow}} S$$

$$S \overset{6k+12:1}{\underset{(2,\ldots,2),(3,\ldots,3),(6,\ldots,6,3,3,3,3)}{\dashrightarrow}} S$$

para $k \geq 1$. *Os três primeiros sempre são realizáveis, o quarto nunca é e o último é se, e somente se,* d *é um múltiplo de 12.*

Demonstração. Para um candidato a recobrimento entre orbifolds da forma $S(2,2,2,2) \overset{d:1}{\dashrightarrow} S(2,3,6)$ temos as seguintes possibilidades:

- $(2,2,2,2) \dashrightarrow 2$;

  Neste caso temos $\Pi_1 = (\underbrace{2,\ldots,2}_{h \text{ vezes}}, 1,1,1,1)$, $\Pi_2 = (\underbrace{3,\ldots,3}_{l \text{ vezes}})$ e $\Pi_3 = (\underbrace{6,\ldots,6}_{k \text{ vezes}})$. Assim, $m_1 = h+4$, $m_2 = l$, $m_3 = k$ e $d = 2h+4 = 3l = 6k$ para algum $h, l, k \in \mathbb{Z}$, donde

concluímos que $h = 3k - 2$, $l = 2k$ e segue que

$$\ell(\Pi) = m_1 + m_2 + m_3 = (3k + 2) + 2k + k = 6k + 2 = d + 2,$$

e portanto, a versão simplificada da fórmula de Riemann-Hurwitz 2.2 é satisfeita. Deste modo, obtemos o candidato $S \overset{6k:1}{\underset{(2,\ldots,2,1,1,1,1),(3,\ldots,3),(6,\ldots,6)}{\dashrightarrow}} S$.

- $(2, 2, 2) \dashrightarrow 2, \quad 2 \dashrightarrow 6$;

  Neste caso temos $\Pi_1 = (\underbrace{2, \ldots, 2}_{h \text{ vezes}}, 1, 1, 1)$, $\Pi_2 = (\underbrace{3, \ldots, 3}_{l \text{ vezes}})$ e $\Pi_3 = (\underbrace{6, \ldots, 6}_{k \text{ vezes}}, 3)$. Assim, $m_1 = h + 3$, $m_2 = l$, $m_3 = k + 1$ e $d = 2h + 3 = 3l = 6k + 3$ para algum $h, l, k \in \mathbb{Z}$, donde concluímos que $h = 3k$, $l = 2k + 1$ e segue que

  $$\ell(\Pi) = m_1 + m_2 + m_3 = (3k + 3) + (2k + 1) + (k + 1) = (6k + 3) + 2 = d + 2,$$

  e portanto, a versão simplificada da fórmula de Riemann-Hurwitz 2.2 é satisfeita. Deste modo, obtemos o candidato $S \overset{6k+3:1}{\underset{(2,\ldots,2,1,1,1),(3,\ldots,3),(6,\ldots,6,3)}{\dashrightarrow}} S$.

- $(2, 2) \dashrightarrow 2, \quad (2, 2) \dashrightarrow 6$;

  Neste caso temos $\Pi_1 = (\underbrace{2, \ldots, 2}_{h \text{ vezes}}, 1, 1)$, $\Pi_2 = (\underbrace{3, \ldots, 3}_{l \text{ vezes}})$ e $\Pi_3 = (\underbrace{6, \ldots, 6}_{k \text{ vezes}}, 3, 3)$. Assim, $m_1 = h + 2$, $m_2 = l$, $m_3 = k + 2$ e $d = 2h + 2 = 3l = 6k + 6$ para algum $h, l, k \in \mathbb{Z}$, donde concluímos que $h = 3k + 2$, $l = 2k + 2$ e segue que

  $$\ell(\Pi) = m_1 + m_2 + m_3 = (3k + 4) + (2k + 2) + (k + 2) = (6k + 6) + 2 = d + 2,$$

  e portanto, a versão simplificada da fórmula de Riemann-Hurwitz 2.2 é satisfeita. Deste modo, obtemos o candidato $S \overset{6k+6:1}{\underset{(2,\ldots,2,1,1),(3,\ldots,3),(6,\ldots,6,3,3)}{\dashrightarrow}} S$.

- $2 \dashrightarrow 2, \quad (2, 2, 2) \dashrightarrow 6$;

  Neste caso temos $\Pi_1 = (\underbrace{2, \ldots, 2}_{h \text{ vezes}}, 1)$, $\Pi_2 = (\underbrace{3, \ldots, 3}_{l \text{ vezes}})$ e $\Pi_3 = (\underbrace{6, \ldots, 6}_{k \text{ vezes}}, 3, 3, 3)$. Assim, $m_1 = h + 1$, $m_2 = l$, $m_3 = k + 3$ e $d = 2h + 1 = 3l = 6k + 9$ para algum $h, l, k \in \mathbb{Z}$, donde concluímos que $h = 3k + 4$, $l = 2k + 3$ e segue que

  $$\ell(\Pi) = m_1 + m_2 + m_3 = (3k + 5) + (2k + 3) + (k + 3) = (6k + 9) + 2 = d + 2,$$

  e portanto, a versão simplificada da fórmula de Riemann-Hurwitz 2.2 é satisfeita. Deste modo, obtemos o candidato $S \overset{6k+9:1}{\underset{(2,\ldots,2,1),(3,\ldots,3),(6,\ldots,6,3,3,3)}{\dashrightarrow}} S$.

- $(2, 2, 2, 2) \dashrightarrow 6$.

Neste caso temos $\Pi_1 = (\underbrace{2,...,2}_{h\ vezes})$, $\Pi_2 = (\underbrace{3,...,3}_{l\ vezes})$ e $\Pi_3 = (\underbrace{6,...,6}_{k\ vezes}, 3, 3, 3, 3)$. Assim, $m_1 = h$, $m_2 = l$, $m_3 = k + 4$ e $d = 2h = 3l = 6k + 12$ para algum $h, l, k \in \mathbb{Z}$, donde concluímos que $h = 3k + 6$, $l = 2k + 4$ e segue que

$$\ell(\Pi) = m_1 + m_2 + m_3 = (3k + 6) + (2k + 4) + (k + 4) = (6k + 12) + 2 = d + 2,$$

e portanto, a versão simplificada da fórmula de Riemann-Hurwitz 2.2 é satisfeita. Deste modo, obtemos o candidato $S \overset{6k+12:1}{\underset{(2,...,2),(3,...,3),(6,...,6,3,3,3,3)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$.

Isto conclui a primeira parte.

Para a segunda parte, como a área de $S(2,3,6)$ é $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$, sobre $S(2,2,2,2)$ teremos uma estrutura gerada pelas rotações de ângulo π em torno dos pontos

$$0, \qquad \frac{\sqrt{3}}{8s} + it, \qquad \frac{\sqrt{3}}{8s} + i(s+t), \qquad is$$

e aplicamos o lema 5.17 para $\left\langle \tau_{2is}, \tau_{\frac{\sqrt{3}}{8s}+2it} \right\rangle$ e $\Lambda_{(2,3,6)} = \left\langle \tau_{i\sqrt{3}}, \tau_{\frac{3+i\sqrt{3}}{2}} \right\rangle$, assim, para algum $n, m, p, q \in \mathbb{Z}$ temos

$$\begin{cases} \lambda \cdot 2is = ni\sqrt{3} + m\dfrac{3+i\sqrt{3}}{2} \\ \lambda \cdot \left(\dfrac{\sqrt{3}}{8s} + 2it \right) = pi\sqrt{3} + q\dfrac{3+i\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

então, após alguns cálculos

$$s = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n^2+nm+m^2}{qn-pm}}, \qquad t = \frac{qs}{m} - \frac{m+2n}{8ms},$$
$$\lambda = \frac{\sqrt{3}(m+2n) - 3im}{4s} = \frac{\sqrt{3}}{2s} \cdot ((n+m) - \omega m)$$

e $d = |\lambda|^2 = 3(qn - pm)$.

Além disso as seguintes relações nos levam a determinar prontamente as imagens sobre $\widetilde{f}$ dos levantamentos dos pontos de cone de $S(2,2,2,2)$:

$$\lambda \cdot is = \frac{1}{2}\left((m-n) + (m+2n)\omega\right),$$
$$\lambda \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{8s} + it \right) = \frac{1}{2}\left((q-p) + (q+2p)\omega\right).$$

Para o candidato $S \overset{6k:1}{\underset{(2,...,2,1,1,1,1),(3,...,3),(6,...,6)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$ escolhemos $\mu = \dfrac{1}{2}$, $p = q = 2$, $n = k + 1$ e $m = 1$. A correspondente $\widetilde{f}$ induz uma realização já que $d = 6k = 3(qn - pm)$ e as

imagens dos pontos de cone são

$$\frac{1}{2}(1+0\omega), \qquad \frac{1}{2}\left((m-n+1)+(m+2n)\omega\right),$$
$$\frac{1}{2}\left((q-p+1)+(q+2p)\omega\right), \qquad \frac{1}{2}\left((m+q-n-p+1)+(m+q+2n+2p)\omega\right)$$

os quais têm a forma $\frac{1}{2}(a+b\omega)$ com a e b não ambos pares e $a-b \equiv 1(\text{mod } 3)$. Deste modo eles são iguais a $\widetilde{A}_*^{(2)}$.

Para o candidato $S \overset{6k+3:1}{\underset{(2,\ldots,2,1,1,1),(3,\ldots,3),(6,\ldots,6,3)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$ escolhemos $\mu = \frac{1}{2}$, $n=2$, $m=1$ e

$$q = k, p = -1 \quad \text{se} \quad k \equiv 1(\text{mod } 2), \qquad q = k+1, p = 1 \quad \text{se} \quad k \equiv 0(\text{mod } 2).$$

Então $d = 6k+3 = 3(qn-pm)$ e as imagens dos pontos de cone são como antes, mas agora os três primeiros são algum $\widetilde{A}_*^{(2)}$, enquanto o último tem a forma $a+b\omega$ com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $a-b \equiv 2(\text{ mod } 3)$, então é algum $\widetilde{C}_*^{(6)}$ e, deste modo, $\widetilde{f}$ induz uma realização do candidato.

Para o candidato $S \overset{6k+6:1}{\underset{(2,\ldots,2,1,1),(3,\ldots,3),(6,\ldots,6,3,3)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$ escolhemos $\mu = \frac{1}{2}$, $m = q = 2$ e

$$n = k, p = -1 \quad \text{se} \quad k \equiv 0(\text{mod } 2), \qquad n = k+1, p = 1 \quad \text{se} \quad k \equiv 1(\text{mod } 2).$$

Então $d = 6k+6 = 3(qn-pm)$ e agora as duas primeiras imagens são algum $\widetilde{A}_*^{(2)}$ e as duas últimas são algum $\widetilde{C}_*^{(6)}$, assim $\widetilde{f}$ induz uma realização do candidato.

Para o candidato $S \overset{6k+9:1}{\underset{(2,\ldots,2,1),(3,\ldots,3),(6,\ldots,6,3,3,3)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$ podemos supor mais uma vez $\mu = \frac{1}{2}$. Como as imagens dos três últimos pontos de cone devem ser algum $\widetilde{C}^{(6)}*$ deduzimos que $m, q, m+q$ seriam pares e assim $n, p, n+p$ seriam ímpares, o que é impossível.

Para o candidato $S \overset{6k+12:1}{\underset{(2,\ldots,2),(3,\ldots,3),(6,\ldots,6,3,3,3,3)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$, podemos supor $\mu = \omega$. Então as imagens dos pontos de cone são

$$1+0\omega, \qquad \frac{1}{2}\left((m-n)+(m+2n+2)\omega\right),$$
$$\frac{1}{2}\left((q-p)+(q+2p+2)\omega\right), \qquad \frac{1}{2}\left((m+q-n-p)+(m+q+2n+2p+2)\omega\right)$$

e eles todos devem ser algum $\widetilde{C}_*^{(6)}$, assim n, m, p, q seriam todos pares. Portanto $d = 3(qn-pm)$ é um múltiplo de 12. Reciprocamente, se $d = 12h+12$ realizamos o candidato com a escolha $q = 2h$, $n = m = 2$ e $p = -2$.

□

Observação 5.27. Devemos ressaltar uma importante interpretação geométrica dos resultados expostos neste capítulo e no próximo. Seja $\widetilde{\Sigma} \dashrightarrow \Sigma$ um candidato a recobrimento ramificado entre superfícies com candidato a recobrimento entre 2-orbifolds associado $\widetilde{X} \dashrightarrow X$, e suponha que $\widetilde{X}$ e X são geométricos. Então temos identificações $\widetilde{X} = \mathbb{X}/\widetilde{\Gamma}$ e $X = \mathbb{X}/\Gamma$, onde $\mathbb{X}$ é uma das geometrias modelo $\mathbb{S}$, $\mathbb{E}$ ou $\mathbb{H}$ (o mesmo para

$\widetilde{X}$ e X), e $\widetilde{\Gamma}, \Gamma$ são grupos co-compactos discretos de isometrias de $\mathbb{X}$. Uma realização do recobrimento corresponde então a uma identificação de $\widetilde{\Gamma}$ com um subgrupo de Γ. Nossos resultados nos casos esférico, euclidiano e hiperbólico dão portanto uma classificação das inclusões, respectivamente, entre subgrupos finitos de $SO(3)$, entre grupos cristalográficos 2-dimensionais e entre subgrupos co-compactos discretos de $PSL(2;\mathbb{R})$ com não mais do que três órbitas singulares.

Congruências e Densidade

Finalizamos este capítulo esclarecendo as razões pelas quais os resultados apresentados nesta seção contribuem para a confiabilidade da conjectura do grau primo. A saber, reenunciamos alguns deles nos seguintes teoremas:

Teorema 5.28. *Suponha $d = 4k+1$ para $k \in \mathbb{N}$. Então*

$$S \xrightarrow{d:1} S \quad (\underbrace{2,\ldots,2}_{2k},1),(\underbrace{4,\ldots,4}_{k},1),(\underbrace{4,\ldots,4}_{k},1)$$

é um candidato a recobrimento ramificado entre superfícies, e é realizável se, e somente se, d pode ser expressado como x^2+y^2 para algum $x, y \in \mathbb{N}$.

Teorema 5.29. *Suponha $d = 6k+1$ para $k \in \mathbb{N}$. Então*

$$S \xrightarrow{d:1} S \quad (\underbrace{2,\ldots,2}_{3k},1),(\underbrace{3,\ldots,3}_{2k},1),(\underbrace{6,\ldots,6}_{k},1)$$

é um candidato a recobrimento ramificado entre superfícies, e é realizável se, e somente se, d pode ser expressado como x^2+xy+y^2 para algum $x, y \in \mathbb{N}$.

Teorema 5.30. *Suponha $d = 3k+1$ para $k \in \mathbb{N}$. Então*

$$S \xrightarrow{d:1} S \quad (\underbrace{3,\ldots,3}_{k},1),(\underbrace{3,\ldots,3}_{k},1),(\underbrace{3,\ldots,3}_{k},1)$$

é um candidato a recobrimento ramificado entre superfícies, e é realizável se, e somente se, d pode ser expressado como x^2+xy+y^2 para algum $x, y \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, da Teoria dos Números sabemos que são válidos os seguintes resultados:

Proposição 5.31. ***(Fermat):*** *Um número primo da forma $4k+1$ sempre pode ser expressado como x^2+y^2 para $x, y \in \mathbb{N}$.*

A demonstração deste fato pode ser encontrada em [10] página 141.

Proposição 5.32. ***(Gauss):*** *Um número primo da forma $6k+1$ (ou equivalentemente $3k+1$) sempre pode ser expressado como x^2+xy+y^2 para $x, y \in \mathbb{N}$*

Proposição 5.33. *Os inteiros que podem ser expressados como x^2+y^2 ou como x^2+xy+y^2 com $x, y \in \mathbb{N}$ têm densidade assintoticamente zero em $\mathbb{N}$.*

Recordemos o que significa dizer que um conjunto tem densidade assintoticamente zero. Considere um conjunto $A \subset \mathbb{N}$ e defina uma sequência A_n de subconjuntos de A tais que $x \in A_n$ se, e somente se, $x \leq n$. Definimos uma sequência numérica $\{y_n\}$ dada por

$$y_n = \frac{\#A_n}{n},$$

onde $\#A$ é a cardinalidade de A_n. Assim, dizemos que A têm *densidade assintoticamente zero* em $\mathbb{N}$ se $\lim_{n\longrightarrow\infty} y_n = 0$.

Esta última proposição nos diz que um candidato a recobrimento em qualquer de nossos três enunciados é *"excepcional com probabilidade 1"*, embora seja realizável quando o seu grau é primo.

De fato, temos:

$$\begin{aligned}
&\left\{d \in \mathbb{N} : d = x^2 + y^2, x, y \in \mathbb{N}, \quad x \not\equiv y (\text{mod } 2)\right\} = \left\{d \in \mathbb{N} : d \equiv 1 (\text{mod } 4), d = x^2 + y^2, x, y \in \mathbb{N}\right\}, \\
&\left\{d \in \mathbb{N} : d = x^2 + xy + y^2, x, y \in \mathbb{N}, \text{ não ambos pares } \quad x \not\equiv y (\text{mod } 3)\right\} \\
&\qquad = \left\{d \in \mathbb{N} : d \equiv 1 (\text{mod } 6), d = x^2 + xy + y^2, x, y \in \mathbb{N}\right\}, \\
&\left\{d \in \mathbb{N} : d = x^2 + xy + y^2, x, y \in \mathbb{N}, \quad x \not\equiv y (\text{mod } 3)\right\} \\
&\qquad = \left\{d \in \mathbb{N} : d \equiv 1 (\text{mod } 3), d = x^2 + xy + y^2, x, y \in \mathbb{N}\right\}.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n} \cdot \#\left\{d \in \mathbb{N} : d \leq n, d = x^2 + y^2, x, y \in \mathbb{N}\right\} = 0, \\
\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n} \cdot \#\left\{d \in \mathbb{N} : d \leq n, d = x^2 + xy + y^2, x, y \in \mathbb{N}\right\} = 0.
\end{aligned}$$

Com isto, concluímos que, embora os graus realizáveis nas formas descritas acima tenham densidade assintoticamente zero, nenhuma excepcionalidade ocorre para d primo, o que contribui para a confiabilidade da Conjectura do Grau Primo.

Capítulo 6

Recobrimentos Orbifolds com $\chi^{\text{orb}} < 0$

O objetivo deste capítulo é estabelecer, da melhor maneira possível, uma investigação do problema de realizabilidade para recobrimentos ramificados no caso em que o recobrimento entre orbifolds associado é hiperbólico. Nossa análise ficará restrita à família de recobrimentos de S^2 sobre S^2 com três pontos de ramificação. Mais precisamente, estratificamos essa imensa família com relação ao número de pontos singulares na esfera de recobrimento. Chamamos $\{C_n\}$, para $n \geq 3$, o estrato de todos os recobrimentos da forma

$$S(\alpha_1, ..., \alpha_n) \dashrightarrow S(p, q, r).$$

Este capítulo contém a análise do primeiro estrato C_3 e comentários acerca dos resultados obtidos para o segundo estrato C_4 em [12].

Após um longo trabalho de enumeração dos candidatos a recobrimentos, provaremos a realizabilidade e excepcionalidade usando principalmente *dessins d'enfant* de Grothendieck, já explorada em [15] e brevemente revisada no capítulo 4.

6.1 2-Orbifolds Triangulares Hiperbólicos

O estrato C_3 envolve apenas 2-orbifolds hiperbólicos rígidos. De fato, sabe-se que um 2-orbifold hiperbólico é rígido se, e somente se, ele é *triangular*, a saber, se está baseado sobre a esfera e tem precisamente três pontos de cone. Nesta seção mostraremos que apenas uns poucos candidatos a recobrimentos ramificados entre superfícies têm candidatos a recobrimento associado entre 2-orbifolds triangulares hiperbólicos. O próximo teorema nos diz exatamente quais são estes candidatos.

Teorema 6.1. *Os candidatos a recobrimentos ramificados entre superfícies tendo candidato a recobrimento associado entre 2-orbifolds triangulares hiperbólicos são*

precisamente:

$$S \xrightarrow[(5,1),(4,1,1),(2,2,2)]{6:1} S \qquad S \xrightarrow[(5,1,1,1),(4,4),(2,\ldots,2)]{8:1} S \qquad S \xrightarrow[(7,1),(3,3,1,1),(2,\ldots,2)]{8:1} S$$

$$S \xrightarrow[(7,1,1),(3,3,3),(2,\ldots,2,1)]{9:1} S \qquad S \xrightarrow[(8,1,1),(3,3,3,1),(2,\ldots,2)]{10:1} S \qquad S \xrightarrow[(8,2,1,1),(3,\ldots,3),(2,\ldots,2)]{12:1} S$$

$$S \xrightarrow[(9,1,1,1),(3,\ldots,3),(2,\ldots,2)]{12:1} S \qquad S \xrightarrow[(7,7,1,1),(3,\ldots,3,1),(2,\ldots,2)]{16:1} S \qquad S \xrightarrow[(7,7,7,1,1,1),(3,\ldots,3),(2,\ldots,2)]{24:1} S.$$

Demonstração. Nossa argumentação será organizada em três passos:

(I) Análise dos candidatos a recobrimentos entre superfícies relevantes com grau $d \leq 11$;

(II) Restrições nas bases dos candidatos a recobrimentos associados para $d \geq 12$;

(III) Mais conclusões sobre recobrimentos e conclusão para $d \geq 12$.

Passo (I): Se Π é uma partição de um inteiro d, denotamos por $\ell(\Pi)$ seu comprimento (como antes), e por $c(\Pi)$ o número de entradas de Π que são diferentes de $\text{mmc}(\Pi)$. Temos que um candidato a recobrimento ramificado entre 2-orbifolds triangulares (independentemente da geometria), é um candidato a recobrimento ramificado entre superfícies de grau $d \geq 2$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- O número de pontos de ramificação é 3;
- Se as partições de d são Π_1, Π_2, Π_3, então $c(\Pi_1) + c(\Pi_2) + c(\Pi_3) = 3$.

Para listar todos os candidatos a recobrimentos para um dado d faremos o seguinte:

- Listaremos todas as partições Π de d com $c(\Pi) \leq 3$;
- Encontraremos todas as ternas possíveis (Π_1, Π_2, Π_3) de partições com $\ell(\Pi_1) + \ell(\Pi_2) + \ell(\Pi_3) = d + 2$ (isto segue da fórmula de Riemann-Hurwitz simplificada 2.2) e $c(\Pi_1) + c(\Pi_2) + c(\Pi_3) = 3$.

Considere $d = 2$. A única partição Π de 2 com $c(\Pi) \leq 3$ é $\Pi = (2)$, onde $\ell(\Pi) = 1$ e $c(\Pi) = 0$. Desta forma temos $\ell(\Pi_1) + \ell(\Pi_2) + \ell(\Pi_3) \neq d + 2$ e $c(\Pi_1) + c(\Pi_2) + c(\Pi_3) = 0$. Portanto, para $d = 2$, não existe candidato relevante tendo associado um candidato a recobrimento ramificado entre 2-orbifolds triangulares.

Do mesmo modo, para $d = 3$, as partições Π de 3 com $c(\Pi) \leq 3$ são aquelas descritas na Tabela 6.1, com os valores correspondentes de ℓ e c.

Π	(3)	$(2,1)$
ℓ	1	2
c	0	1

Tabela 6.1: As partições Π de 3 com $c(\Pi) \leq 3$

Neste caso, não é possível encontrar uma terna de partições satisfazendo $\ell(\Pi_1) + \ell(\Pi_2) + \ell(\Pi_3) = 5$ e $c(\Pi_1) + c(\Pi_2) + c(\Pi_3) = 3$. Portanto, para $d = 3$, também não existe candidato relevante tendo associado um candidato a recobrimento ramificado entre 2-orbifolds triangulares.

Seja $d = 4$. As partições Π de 4 com $c(\Pi) \leq 3$ são aquelas descritas na Tabela 6.2, com os valores correspondentes de ℓ e c.

Π	(4)	$(3,1)$	$(2,2)$	$(2,1,1)$
ℓ	1	2	2	3
c	0	1	0	2

Tabela 6.2: As partições Π de 4 com $c(\Pi) \leq 3$

As ternas de tais partições satisfazendo $\ell(\Pi_1) + \ell(\Pi_2) + \ell(\Pi_3) = 6$ e $c(\Pi_1) + c(\Pi_2) + c(\Pi_3) = 3$ são mostrados na Tabela 6.3, juntamente com o candidato a recobrimento orbifold associado e seu tipo geométrico.

Π_1, Π_2, Π_3			*Recobrimento Associado*	*Geometria*
$(2,1,1)$	$(3,1)$	(4)	$S(2,2,3) \dashrightarrow S(2,3,4)$	$\mathbb{S}$
$(3,1)$	$(3,1)$	$(3,1)$	$S(3,3,3) \dashrightarrow S(3,3,3)$	$\mathbb{E}$

Tabela 6.3: Ternas de partições de 4 com candidatos associados entre orbifolds triangulares

Portanto, para $d = 4$ não existe candidato a recobrimento tendo candidato 2-orbifold associado sendo hiperbólico.

Seja $d = 5$. As partições Π de 5 com $c(\Pi) \leq 3$ são aquelas descritas na Tabela 6.4, com os valores correspondentes de ℓ e c.

Π	(5)	$(4,1)$	$(3,2)$	$(3,1,1)$	$(2,2,1)$	$(2,1,1,1)$
ℓ	1	2	2	3	3	4
c	0	1	2	2	1	3

Tabela 6.4: As partições Π de 5 com $c(\Pi) \leq 3$

As ternas de tais partições satisfazendo $\ell(\Pi_1) + \ell(\Pi_2) + \ell(\Pi_3) = 7$ e $c(\Pi_1) + c(\Pi_2) + c(\Pi_3) = 3$ são mostrados na Tabela 6.5, juntamente com o candidato a recobrimento orbifold associado e seu tipo geométrico.

Π_1	Π_2	Π_3	*Recobrimento Associado*	*Geometria*
$(2,2,1)$	$(3,1,1)$	(5)	$S(2,3,3) \dashrightarrow S(2,3,5)$	$\mathbb{S}$
$(2,2,1)$	$(4,1)$	$(4,1)$	$S(2,4,4) \dashrightarrow S(2,4,4)$	$\mathbb{E}$

Tabela 6.5: Ternas de partições de 5 com candidatos associados entre orbifolds triangulares

Portanto, para $d = 5$ não existe candidato a recobrimento tendo candidato 2-orbifold associado sendo hiperbólico.

Seja $d = 6$. As partições Π de 6 com $c(\Pi) \leq 3$ são aquelas descritas na Tabela 6.6, com os valores correspondentes de ℓ e c.

Π	(6)	$(5,1)$	$(4,2)$	$(4,1,1)$	$(3,3)$
ℓ	1	2	2	3	2
c	0	1	1	2	0
Π	$(3,2,1)$	$(3,1,1,1)$	$(2,2,2)$	$(2,2,1,1)$	
ℓ	3	4	3	4	
c	3	3	0	2	

Tabela 6.6: As partições Π de 6 com $c(\Pi) \leq 3$

As ternas de tais partições satisfazendo $\ell(\Pi_1) + \ell(\Pi_2) + \ell(\Pi_3) = 8$ e $c(\Pi_1) + c(\Pi_2) + c(\Pi_3) = 3$ são mostrados na Tabela 6.7, juntamente com o candidato a recobrimento orbifold associado e seu tipo geométrico.

Π_1	Π_2	Π_3	*Recobrimento Associado*	*Geometria*
$(2,2,1,1)$	$(3,3)$	$(4,2)$	$S(2,2,2) \dashrightarrow S(2,3,4)$	$\mathbb{S}$
$(2,2,1,1)$	$(3,3)$	$(5,1)$	$S(2,2,5) \dashrightarrow S(2,3,5)$	$\mathbb{S}$
$(2,2,2)$	$(3,1,1,1)$	(6)	$S(3,3,3) \dashrightarrow S(2,3,6)$	$\mathbb{E}$
$(2,2,2)$	$(3,3)$	$(3,2,1)$	$S(2,3,6) \dashrightarrow S(2,3,6)$	$\mathbb{E}$
$(2,2,2)$	$(4,2)$	$(4,1,1)$	$S(2,4,4) \dashrightarrow S(2,4,4)$	$\mathbb{E}$
$(2,2,2)$	$(4,1,1)$	$(5,1)$	$S(4,4,5) \dashrightarrow S(2,4,5)$	$\mathbb{H}$
$(3,3)$	$(3,3)$	$(3,1,1,1)$	$S(3,3,3) \dashrightarrow S(3,3,3)$	$\mathbb{E}$

Tabela 6.7: Ternas de partições de 6 com candidatos associados entre orbifolds triangulares

Portanto, para $d = 6$ existe um único candidato a recobrimento tendo candidato 2-orbifold associado sendo hiperbólico. A saber, $S \overset{6:1}{\underset{(5,1),(4,1,1),(2,2,2)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$.

Seja $d = 7$. As partições Π de 7 com $c(\Pi) \leq 3$ são aquelas descritas na Tabela 6.8, com os valores correspondentes de ℓ e c.

Π	(7)	$(6,1)$	$(5,2)$	$(5,1,1)$	$(4,3)$
ℓ	1	2	2	3	2
c	0	1	2	2	2
Π	$(4,2,1)$	$(4,1,1,1)$	$(3,3,1)$	$(2,2,2,1)$	$(2,2,1,1,1)$
ℓ	3	4	3	4	5
c	2	3	1	1	3

Tabela 6.8: As partições Π de 7 com $c(\Pi) \leq 3$

As ternas de tais partições satisfazendo $\ell(\Pi_1) + \ell(\Pi_2) + \ell(\Pi_3) = 9$ e $c(\Pi_1) + c(\Pi_2) + c(\Pi_3) = 3$ são mostrados na Tabela 6.9, juntamente com o candidato a recobrimento orbifold associado e seu tipo geométrico.

Π_1, Π_2, Π_3			*Recobrimento Associado*	*Geometria*
$(2,2,2,1)$	$(3,3,1)$	$(6,1)$	$S(2,3,6) \dashrightarrow S(2,3,6)$	$\mathbb{E}$
$(3,3,1)$	$(3,3,1)$	$(3,3,1)$	$S(3,3,3) \dashrightarrow S(3,3,3)$	$\mathbb{E}$

Tabela 6.9: Ternas de partições de 7 com candidatos associados entre orbifolds triangulares

Portanto, para $d = 7$ não existe candidato a recobrimento tendo candidato 2-orbifold associado sendo hiperbólico.

Para o caso $d = 8$, as partições Π de 8 com $c(\Pi) \leq 3$ são aquelas descritas na Tabela 6.10, com os valores correspondentes de ℓ e c.

Π	(8)	$(7,1)$	$(6,2)$	$(6,1,1)$	$(5,3)$
ℓ	1	2	2	3	2
c	0	1	1	2	2
Π	$(5,2,1)$	$(5,1,1,1)$	$(4,4)$	$(4,3,1)$	$(4,2,2)$
ℓ	3	4	2	3	3
c	3	3	0	3	2
Π	$(4,2,1,1)$	$(3,3,2)$	$(3,3,1,1)$	$(2,2,2,2)$	$(2,2,2,1,1)$
ℓ	4	3	4	4	5
c	3	3	2	0	2

Tabela 6.10: As partições Π de 8 com $c(\Pi) \leq 3$

As ternas de tais partições satisfazendo $\ell(\Pi_1) + \ell(\Pi_2) + \ell(\Pi_3) = 10$ e $c(\Pi_1) + c(\Pi_2) + c(\Pi_3) = 3$ são mostrados na Tabela 6.11, juntamente com o candidato a recobrimento orbifold associado e seu tipo geométrico.

Π_1, Π_2, Π_3			*Recobrimento Associado*	*Geometria*
$(2,2,2,2)$	$(4,4)$	$(4,2,1,1)$	$S(2,4,4) \dashrightarrow S(2,4,4)$	$\mathbb{E}$
$(2,2,2,2)$	$(4,4)$	$(5,1,1,1)$	$S(5,5,5) \dashrightarrow S(2,4,5)$	$\mathbb{H}$
$(2,2,2,2)$	$(3,3,1,1)$	$(6,2)$	$S(3,3,3) \dashrightarrow S(2,3,6)$	$\mathbb{E}$
$(2,2,2,2)$	$(3,3,1,1)$	$(7,1)$	$S(3,3,7) \dashrightarrow S(2,3,7)$	$\mathbb{H}$

Tabela 6.11: Ternas de partições de 8 com candidatos associados entre orbifolds triangulares

Portanto, para $d = 8$ existem dois candidatos a recobrimento tendo candidato 2-orbifold associado sendo hiperbólico. A saber, $S \overset{8:1}{\underset{(5,1,1,1),(4,4),(2,2,2,2)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$ e $S \overset{8:1}{\underset{(7,1),(3,3,1,1),(2,2,2,2)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$.

Para o caso $d = 9$, as partições Π de 9 com $c(\Pi) \leq 3$ são aquelas descritas na Tabela 6.12, com os valores correspondentes de ℓ e c.

Π	(9)	$(8,1)$	$(7,2)$	$(7,1,1)$	$(6,3)$
ℓ	1	2	2	3	2
c	0	1	2	2	1
Π	$(6,2,1)$	$(6,1,1,1)$	$(5,4)$	$(5,3,1)$	$(5,2,2)$
ℓ	3	4	2	3	3
c	2	3	2	3	3
Π	$(4,4,1)$	$(4,3,2)$	$(4,2,2,1)$	$(3,3,3)$	$(3,3,1,1,1)$
ℓ	3	3	4	3	5
c	1	3	3	0	3
Π	$(2,2,2,2,1)$	$(2,2,2,1,1,1)$			
ℓ	5	6			
c	1	3			

Tabela 6.12: As partições Π de 9 com $c(\Pi) \leq 3$

As ternas de tais partições satisfazendo $\ell(\Pi_1) + \ell(\Pi_2) + \ell(\Pi_3) = 11$ e $c(\Pi_1) + c(\Pi_2) + c(\Pi_3) = 3$ são mostrados na Tabela 6.13, juntamente com o candidato a recobrimento orbifold associado e seu tipo geométrico.

Π_1, Π_2, Π_3			*Recobrimento Associado*	*Geometria*
$(2,2,2,2,1)$	$(3,3,3)$	$(6,2,1)$	$S(2,3,6) \dashrightarrow S(2,3,6)$	$\mathbb{E}$
$(2,2,2,2,1)$	$(3,3,3)$	$(7,1,1)$	$S(2,7,7) \dashrightarrow S(2,3,7)$	$\mathbb{H}$
$(2,2,2,2,1)$	$(4,4,1)$	$(4,4,1)$	$S(2,4,4) \dashrightarrow S(2,4,4)$	$\mathbb{E}$
$(3,3,1,1,1)$	$(3,3,3)$	$(3,3,3)$	$S(3,3,3) \dashrightarrow S(3,3,3)$	$\mathbb{E}$

Tabela 6.13: Ternas de partições de 9 com candidatos associados entre orbifolds triangulares

Portanto, para $d = 9$ existe um único candidato a recobrimento tendo candidato 2-orbifold associado sendo hiperbólico. A saber, $S \overset{9:1}{\underset{(7,1,1),(3,3,3),(2,2,2,2,1)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$.

Para o caso $d = 10$, as partições Π de 10 com $c(\Pi) \leq 3$ são aquelas descritas na Tabela 6.14, com os valores correspondentes de ℓ e c.

Π	(10)	$(9,1)$	$(8,2)$	$(8,1,1)$	$(7,3)$
ℓ	1	2	2	3	2
c	0	1	1	2	2
Π	$(7,2,1)$	$(7,1,1,1)$	$(6,4)$	$(6,3,1)$	$(6,2,2)$
ℓ	3	4	2	3	3
c	3	3	2	2	2
Π	$(5,5)$	$(5,4,1)$	$(5,3,2)$	$(4,4,2)$	$(4,4,1,1)$
ℓ	2	3	3	3	4
c	0	3	3	1	2
Π	$(4,2,2,2)$	$(3,3,3,1)$	$(2,2,2,2,2)$	$(2,2,2,2,1,1)$	
ℓ	4	4	5	6	
c	3	1	0	2	

Tabela 6.14: As partições Π de 10 com $c(\Pi) \leq 3$

As ternas de tais partições satisfazendo $\ell(\Pi_1) + \ell(\Pi_2) + \ell(\Pi_3) = 12$ e $c(\Pi_1) + c(\Pi_2) + c(\Pi_3) = 3$ são mostrados na Tabela 6.15, juntamente com o candidato a recobrimento orbifold associado e seu tipo geométrico.

Π_1, Π_2, Π_3			*Recobrimento Associado*	*Geometria*
$(2,2,2,2,1,1)$	$(3,3,3,1)$	$(5,5)$	$S(2,2,3) \dashrightarrow S(2,3,5)$	$\mathbb{S}$
$(2,2,2,2,2)$	$(3,3,3,1)$	$(6,2,2)$	$S(3,3,3) \dashrightarrow S(2,3,6)$	$\mathbb{E}$
$(2,2,2,2,2)$	$(3,3,3,1)$	$(6,3,1)$	$S(2,3,6) \dashrightarrow S(2,3,6)$	$\mathbb{E}$
$(2,2,2,2,2)$	$(3,3,3,1)$	$(8,1,1)$	$S(3,8,8) \dashrightarrow S(2,3,8)$	$\mathbb{H}$
$(2,2,2,2,2)$	$(4,4,1,1)$	$(4,4,2)$	$S(2,4,4) \dashrightarrow S(2,4,4)$	$\mathbb{E}$
$(3,3,3,1)$	$(3,3,3,1)$	$(3,3,3,1)$	$S(3,3,3) \dashrightarrow S(3,3,3)$	$\mathbb{E}$

Tabela 6.15: Ternas de partições de 10 com candidatos associados entre orbifolds triangulares

Portanto, para $d = 10$ existe um único candidato a recobrimento tendo candidato 2-orbifold associado sendo hiperbólico. A saber, $S \overset{10:1}{\underset{(8,1,1),(3,3,3,1),(2,2,2,2,2)}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$.

Para o caso $d = 11$, as partições Π de 11 com $c(\Pi) \leq 3$ são aquelas descritas na Tabela 6.16, com os valores correspondentes de ℓ e c.

Π	(11)	(10, 1)	(9, 2)	(9, 1, 1)	(8, 3)	(8, 2, 1)
ℓ	1	2	2	3	2	3
c	0	1	2	2	2	2
Π	(8, 1, 1, 1)	(7, 4)	(7, 3, 1)	(7, 2, 2)	(6, 5)	(6, 4, 1)
ℓ	4	2	3	3	2	3
c	3	2	3	3	2	3
Π	(6, 3, 2)	(6, 3, 1, 1)	(5, 5, 1)	(5, 4, 2)	(5, 3, 3)	(4, 4, 3)
ℓ	3	4	3	3	3	3
c	2	3	1	3	3	3
Π	(4, 4, 2, 1)	(4, 4, 1, 1, 1)	(3, 3, 3, 1, 1)	(2, 2, 2, 2, 2, 1)	(2, 2, 2, 2, 1, 1, 1)	
ℓ	4	5	5	6	7	
c	2	3	2	1	3	

Tabela 6.16: As partições Π de 11 com $c(\Pi) \leq 3$

Neste caso, não é possível encontrar uma terna de partições satisfazendo $\ell(\Pi_1) + \ell(\Pi_2) + \ell(\Pi_3) = 13$ e $c(\Pi_1) + c(\Pi_2) + c(\Pi_3) = 3$. Portanto, para $d = 11$, também não existe candidato relevante tendo associado um candidato a recobrimento ramificado entre 2-orbifolds triangulares.

Isto conclui o *Passo (I)*.

Passo (II): Denotemos por $\widetilde{X} \overset{d:1}{\dashrightarrow} X$ um candidato a recobrimento entre orbifolds triangulares hiperbólicos $\widetilde{X} = S(\alpha, \beta, \gamma)$ e $X = S(p, q, r)$ com $d \geq 12$.

Observe que

$$0 < -\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X}) = 1 - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) < 1$$

Por outro lado, temos que $\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X}) = d \cdot \chi^{\text{orb}}(X)$. Assim,

$$0 < -d \cdot \chi^{\text{orb}}(X) < 1 \Longrightarrow 0 < -\chi^{\text{orb}}(X) < \frac{1}{d} \leq \frac{1}{12}.$$

Deste modo,

$$0 < -\chi^{\text{orb}}(X) = 1 - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right) < \frac{1}{12},$$

donde segue,

$$\frac{11}{12} < \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right) < 1. \tag{6.1}$$

Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $p \leq q \leq r$. Nosso objetivo é restringir ao máximo os valores de p, q e r.

Se $p \geq 3$ então, $r > 3$, caso contrário teríamos $p = q = r = 3$, o que nos levaria a

$$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right) = 1,$$

contrariando a inequação 6.1. Mas, se $r > 3$, então teríamos

$$\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right) \leq \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) = \frac{11}{12},$$

o que novamente contraria a inequação 6.1. Portanto, segue que $p = 2$.

Observe que $q \geq 3$. De fato, se $q = 2$, então

$$\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right) > 1,$$

o que é absurdo pela inequação 6.1.

Vamos supor então $q = 3$ e dividir em alguns casos:

- $3 \leq r \leq 6$;

  Neste caso teríamos

  $$\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right) \geq \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right) = 1,$$

  o que contradiz a inequação 6.1.

- $7 \leq r \leq 11$;

  Neste caso,

  $$\frac{11}{12} < \frac{61}{66} = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{11}\right) \leq \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right) \leq \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}\right) = \frac{41}{42} < 1,$$

  e portanto tais valores de r são condizentes com a inequação 6.1.

- $r \geq 12$.

  Neste caso,

  $$\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right) \leq \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\right) = \frac{11}{12},$$

  contradizendo a inequação 6.1.

Agora, vamos supor que $q = 4$. Observe que se $r = 4$, então

$$\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) = 1,$$

o que não pode ocorrer de acordo com a inequação 6.1. Se $r = 5$, então

$$\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) = \frac{19}{20}$$

e portanto satisfaz a inequação 6.1. Suponha então $r > 5$. Assim,

$$\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right) \leq \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right) = \frac{11}{12},$$

contradizendo mais uma vez à inequação 6.1.

Finalmente, suponha que $q > 4$. Neste caso, $r \geq 5$ e segue que

$$\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right) = \frac{9}{10} < \frac{11}{12},$$

e portanto não satisfaz a inequação 6.1.

Resumindo, para que $\widetilde{X} \overset{d:1}{\dashrightarrow} X$ seja um candidato a recobrimento entre orbifolds triangulares hiperbólicos $\widetilde{X} = S(\alpha,\beta,\gamma)$ e $X = S(p,q,r)$ com $d \geq 12$, os valores p, q e r devem satisfazer a inequação 6.1. Por outro lado, mostramos que desigualdade 6.1 é satisfeita apenas para $p = 2$, $q = 3$, $7 \leq r \leq 11$ e para $p = 2$, $q = 4$, $r = 5$.

Passo (III): Se $\widetilde{X} \dashrightarrow X$ é um candidato a recobrimento entre 2-orbifolds triangulares hiperbólicos $\widetilde{X} = S(\alpha,\beta,\gamma)$ e $X = S(p,q,r)$, então as seguintes condições devem acontecer:

(a) Cada um dos α,β,γ deve ser um divisor de algum elemento de $\{p,q,r\}$;

(b) $\dfrac{\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X})}{\chi^{\text{orb}}(X)}$ deve ser um inteiro d;

(c) Existem três partições de d tais que o candidato a recobrimento entre orbifolds associado é $\widetilde{X} \dashrightarrow X$.

Impondo sucessivamente essas condições condições para os 6 orbifolds X vindos do *Passo (II)* e restringindo para $d \geq 12$ encontramos os quatro últimos ítens no enunciado.

De fato, considere $\boxed{X = S(2,3,7)}$. Observe que $\chi^{\text{orb}}(X) = \chi^{\text{orb}}(S(2,3,7)) = -\dfrac{1}{42}$.

Neste caso, os $\widetilde{X}$'s hiperbólicos relevantes de acordo com (a), excluindo o próprio X, são

$$S(2,7,7) \quad S(3,3,7) \quad S(3,7,7) \quad S(7,7,7)$$

Além disso,

$$\chi^{\text{orb}}(S(2,7,7)) = -\frac{3}{14}, \quad \chi^{\text{orb}}(S(3,3,7)) = -\frac{4}{21},$$
$$\chi^{\text{orb}}(S(3,7,7)) = -\frac{8}{21}, \quad \chi^{\text{orb}}(S(7,7,7)) = -\frac{4}{7}.$$

Logo,

$$\frac{\chi^{\text{orb}}(S(2,7,7))}{\chi^{\text{orb}}(S(2,3,7))} = 9, \quad \frac{\chi^{\text{orb}}(S(3,3,7))}{\chi^{\text{orb}}(S(2,3,7))} = 8,$$
$$\frac{\chi^{\text{orb}}(S(3,7,7))}{\chi^{\text{orb}}(S(2,3,7))} = 16, \quad \frac{\chi^{\text{orb}}(S(7,7,7))}{\chi^{\text{orb}}(S(2,3,7))} = 24,$$

e então $d = \dfrac{\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X})}{\chi^{\text{orb}}(X)}$, em todos os casos, é um inteiro e (b) não é um problema. Entretanto, em dois dos casos $d \leq 11$ e já trabalhamos esses casos no *Passo (I)*. Deste modo, nos resta trabalhar os seguintes casos

- $S(3,7,7) \overset{16:1}{\dashrightarrow} S(2,3,7)$;

  Neste caso, devemos ter $3 \dashrightarrow 3$ e $(7,7) \dashrightarrow 7$. Isto nos fornece as partições $\Pi_1 = (2,...,2)$, $\Pi_2 = (3,...,3,1)$ e $\Pi_3 = (7,7,1,1)$ que dá origem ao seguinte candidato $S \underset{(7,7,1,1),(3,...,3,1),(2,...,2)}{\overset{16:1}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$.

- $S(7,7,7) \overset{24:1}{\dashrightarrow} S(2,3,7)$.

  Neste caso devemos ter $(7,7,7) \dashrightarrow 7$. Isto nos fornece as partições $\Pi_1 = (2,...,2)$, $\Pi_2 = (3,...,3)$ e $\Pi_3 = (7,7,7,1,1,1)$ que dá origem ao seguinte candidato $S \underset{(7,7,7,1,1,1),(3,...,3),(2,...,2)}{\overset{24:1}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$.

Seja $\boxed{X = S(2,3,8)}$. Observe que $\chi^{\text{orb}}(X) = \chi^{\text{orb}}(S(2,3,8)) = -\dfrac{1}{24}$.

Neste caso, os $\widetilde{X}$'s hiperbólicos relevantes de acordo com (a), excluindo o próprio X, são

$$S(2,4,8) \quad S(2,8,8) \quad S(3,3,4) \quad S(3,3,8) \quad S(3,4,4) \quad S(3,4,8)$$
$$S(3,8,8) \quad S(4,4,4) \quad S(4,4,8) \quad S(4,8,8) \quad S(8,8,8)$$

Além disso,

$$\chi^{\text{orb}}(S(2,4,8)) = -\frac{1}{8}, \qquad \chi^{\text{orb}}(S(2,8,8)) = -\frac{1}{4},$$
$$\chi^{\text{orb}}(S(3,3,4)) = -\frac{1}{12}, \qquad \chi^{\text{orb}}(S(3,3,8)) = -\frac{5}{24},$$
$$\chi^{\text{orb}}(S(3,4,4)) = -\frac{1}{6}, \qquad \chi^{\text{orb}}(S(3,4,8)) = -\frac{7}{24},$$
$$\chi^{\text{orb}}(S(3,8,8)) = -\frac{5}{12}, \qquad \chi^{\text{orb}}(S(4,4,4)) = -\frac{1}{4},$$
$$\chi^{\text{orb}}(S(4,4,8)) = -\frac{3}{8} \qquad \chi^{\text{orb}}(S(4,8,8)) = -\frac{1}{2},$$
$$\chi^{\text{orb}}(S(8,8,8)) = -\frac{5}{8}.$$

Logo,

$$\frac{\chi^{\text{orb}}(S(2,4,8))}{\chi^{\text{orb}}(S(2,3,8))} = 3, \qquad \frac{\chi^{\text{orb}}(S(2,8,8))}{\chi^{\text{orb}}(S(2,3,8))} = 6,$$
$$\frac{\chi^{\text{orb}}(S(3,3,4))}{\chi^{\text{orb}}(S(2,3,8))} = 2, \qquad \frac{\chi^{\text{orb}}(S(3,3,8))}{\chi^{\text{orb}}(S(2,3,8))} = 5,$$
$$\frac{\chi^{\text{orb}}(S(3,4,4))}{\chi^{\text{orb}}(S(2,3,8))} = 4, \qquad \frac{\chi^{\text{orb}}(S(3,4,8))}{\chi^{\text{orb}}(S(2,3,8))} = 7,$$
$$\frac{\chi^{\text{orb}}(S(3,8,8))}{\chi^{\text{orb}}(S(2,3,8))} = 10, \qquad \frac{\chi^{\text{orb}}(S(4,4,4))}{\chi^{\text{orb}}(S(2,3,8))} = 6,$$
$$\frac{\chi^{\text{orb}}(S(4,4,8))}{\chi^{\text{orb}}(S(2,3,8))} = 9, \qquad \frac{\chi^{\text{orb}}(S(4,8,8))}{\chi^{\text{orb}}(S(2,3,8))} = 12,$$
$$\frac{\chi^{\text{orb}}(S(8,8,8))}{\chi^{\text{orb}}(S(2,3,8))} = 15,$$

e então $d = \dfrac{\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X})}{\chi^{\text{orb}}(X)}$, em todos os casos, é um inteiro e (b) não é um problema. Entretanto, na maioria dos casos $d \leq 11$ e já trabalhamos esses casos no *Passo (I)*. Deste modo, nos resta trabalhar os seguintes casos

- $S(4,8,8) \overset{12:1}{\dashrightarrow} S(2,3,8)$;

  Neste caso, devemos ter $(4,8,8) \dashrightarrow 8$. Isto nos fornece as partições $\Pi_1 = (2,...,2)$, $\Pi_2 = (3,...,3)$ e $\Pi_3 = (8,2,1,1)$ que dá origem ao seguinte candidato $S \underset{(8,2,1,1),(3,...,3),(2,...,2)}{\overset{12:1}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$.

- $S(8,8,8) \overset{15:1}{\dashrightarrow} S(2,3,8)$.

  Neste caso deveríamos ter $(8,8,8) \dashrightarrow 8$. Isto nos forneceria a partição $\Pi_1 = (2,...,2)$, que é incompatível com $d = 15$.

Seja $\boxed{X = S(2,3,9)}$. Observe que $\chi^{\text{orb}}(X) = \chi^{\text{orb}}(S(2,3,9)) = -\dfrac{1}{18}$.

Neste caso, os $\widetilde{X}$'s hiperbólicos relevantes de acordo com (a), excluindo o próprio X, são

$$S(2,9,9) \quad S(3,3,9) \quad S(3,9,9) \quad S(9,9,9).$$

Além disso,

$$\chi^{\text{orb}}(S(2,9,9)) = -\frac{5}{18}, \qquad \chi^{\text{orb}}(S(3,3,9)) = -\frac{2}{9},$$
$$\chi^{\text{orb}}(S(3,9,9)) = -\frac{4}{9}, \qquad \chi^{\text{orb}}(S(9,9,9)) = -\frac{2}{3}.$$

Assim,

$$\frac{\chi^{\text{orb}}(S(2,9,9))}{\chi^{\text{orb}}(S(2,3,9))} = 5, \qquad \frac{\chi^{\text{orb}}(S(3,3,9))}{\chi^{\text{orb}}(S(2,3,9))} = 4,$$
$$\frac{\chi^{\text{orb}}(S(3,9,9))}{\chi^{\text{orb}}(S(2,3,9))} = 8, \qquad \frac{\chi^{\text{orb}}(S(9,9,9))}{\chi^{\text{orb}}(S(2,3,9))} = 12,$$

e então $d = \dfrac{\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X})}{\chi^{\text{orb}}(X)}$, em todos os casos, é um inteiro e (b) não é um problema. Descartando os casos $d \leq 11$ (já trabalhados no *Passo (I)*), resta trabalhar apenas o caso

- $S(9,9,9) \overset{12:1}{\dashrightarrow} S(2,3,9)$.

  Desta forma, devemos ter $(9,9,9) \dashrightarrow 9$, o que nos leva às partições $\Pi_1 = (2,...,2)$, $\Pi_2 = (3,3,3,3)$ e $\Pi_3 = (9,1,1,1)$, que por sua vez dão origem ao candidato $S \underset{(9,1,1,1),(3,3,3,3),(2,...,2)}{\overset{12:1}{\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow\dashrightarrow}} S$.

Seja $\boxed{X = S(2,3,10)}$. Observe que $\chi^{\text{orb}}(X) = \chi^{\text{orb}}(S(2,3,10)) = -\dfrac{1}{15}$.

Neste caso, os $\widetilde{X}$'s hiperbólicos relevantes de acordo com (a), excluindo o próprio X, são

$$S(2,5,5) \quad S(2,5,10) \quad S(2,10,10) \quad S(3,3,5) \quad S(3,3,10) \quad S(3,5,5)$$
$$S(3,5,10) \quad S(3,10,10) \quad S(5,5,5) \quad S(5,5,10) \quad S(5,10,10) \quad S(10,10,10).$$

Temos ainda que

$$\chi^{\text{orb}}(S(2,5,5)) = -\frac{1}{10}, \qquad \chi^{\text{orb}}(S(2,5,10)) = -\frac{1}{5},$$
$$\chi^{\text{orb}}(S(2,10,10)) = -\frac{3}{10}, \qquad \chi^{\text{orb}}(S(3,3,5)) = -\frac{2}{15},$$
$$\chi^{\text{orb}}(S(3,3,10)) = -\frac{7}{30}, \qquad \chi^{\text{orb}}(S(3,5,5)) = -\frac{4}{15},$$
$$\chi^{\text{orb}}(S(3,5,10)) = -\frac{11}{30}, \qquad \chi^{\text{orb}}(S(3,10,10)) = -\frac{7}{15},$$
$$\chi^{\text{orb}}(S(5,5,5)) = -\frac{2}{5}, \qquad \chi^{\text{orb}}(S(5,5,10)) = -\frac{1}{2},$$
$$\chi^{\text{orb}}(S(5,10,10)) = -\frac{3}{5}, \qquad \chi^{\text{orb}}(S(10,10,10)) = -\frac{7}{10}.$$

Logo,

$$\frac{\chi^{\text{orb}}(S(2,5,5))}{\chi^{\text{orb}}(S(2,3,10))} = \frac{3}{2}, \qquad \frac{\chi^{\text{orb}}(S(2,5,10))}{\chi^{\text{orb}}(S(2,3,10))} = 3,$$
$$\frac{\chi^{\text{orb}}(S(2,10,10))}{\chi^{\text{orb}}(S(2,3,10))} = \frac{9}{2}, \qquad \frac{\chi^{\text{orb}}(S(3,3,5))}{\chi^{\text{orb}}(S(2,3,10))} = 2,$$
$$\frac{\chi^{\text{orb}}(S(3,3,10))}{\chi^{\text{orb}}(S(2,3,10))} = \frac{7}{2}, \qquad \frac{\chi^{\text{orb}}(S(3,5,5))}{\chi^{\text{orb}}(S(2,3,10))} = 4,$$
$$\frac{\chi^{\text{orb}}(S(3,5,10))}{\chi^{\text{orb}}(S(2,3,10))} = \frac{11}{2}, \qquad \frac{\chi^{\text{orb}}(S(3,10,10))}{\chi^{\text{orb}}(S(2,3,10))} = 7,$$
$$\frac{\chi^{\text{orb}}(S(5,5,5))}{\chi^{\text{orb}}(S(2,3,10))} = 6, \qquad \frac{\chi^{\text{orb}}(S(5,5,10))}{\chi^{\text{orb}}(S(2,3,10))} = \frac{15}{2},$$
$$\frac{\chi^{\text{orb}}(S(5,10,10))}{\chi^{\text{orb}}(S(2,3,10))} = 9, \qquad \frac{\chi^{\text{orb}}(S(10,10,10))}{\chi^{\text{orb}}(S(2,3,10))} = \frac{21}{2}.$$

Observe que os casos em que $d = \dfrac{\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X})}{\chi^{\text{orb}}(X)}$ não é um inteiro, por (b), devem ser descartados. Além disso, em todos os outros casos tem-se $d \leq 11$ e estes já foram trabalhados no *Passo (I)*. Portanto, para $X = S(2,3,10)$ nenhum candidato é acrescentado.

Seja $\boxed{X = S(2,3,11)}$. Observe que $\chi^{\text{orb}}(X) = \chi^{\text{orb}}(S(2,3,11)) = -\dfrac{5}{66}$.

Neste caso, os $\widetilde{X}$'s hiperbólicos relevantes de acordo com (a), excluindo o próprio X, são

$$S(2,11,11) \quad S(3,3,11) \quad S(3,11,11) \quad S(11,11,11).$$

Além disso,

$$\chi^{\text{orb}}(S(2,11,11)) = -\frac{7}{22}, \qquad \chi^{\text{orb}}(S(3,3,11)) = -\frac{8}{33},$$
$$\chi^{\text{orb}}(S(3,11,11)) = -\frac{16}{33}, \quad \chi^{\text{orb}}(S(11,11,11)) = -\frac{8}{11}.$$

Assim,

$$\frac{\chi^{\text{orb}}(S(2,11,11))}{\chi^{\text{orb}}(S(2,3,11))} = \frac{21}{5}, \qquad \frac{\chi^{\text{orb}}(S(3,3,11))}{\chi^{\text{orb}}(S(2,3,11))} = \frac{16}{5},$$
$$\frac{\chi^{\text{orb}}(S(3,11,11))}{\chi^{\text{orb}}(S(2,3,11))} = \frac{32}{5}, \quad \frac{\chi^{\text{orb}}(S(11,11,11))}{\chi^{\text{orb}}(S(2,3,11))} = \frac{48}{5}.$$

Portanto, em todos os casos tem-se que $d = \dfrac{\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X})}{\chi^{\text{orb}}(X)}$ não é um inteiro e, por (b), devem ser descartados. Deste modo, $X = S(2,3,11)$ não nos fornece candidatos.

Finalmente, seja $\boxed{X = S(2,4,5)}$. Observe que $\chi^{\text{orb}}(X) = \chi^{\text{orb}}(S(2,4,5)) = -\dfrac{1}{20}$.

Neste caso, os $\widetilde{X}$'s hiperbólicos relevantes de acordo com (a), excluindo o próprio X,

são

$$S(2,5,5) \quad S(4,4,4) \quad S(4,4,5) \quad S(4,5,5), \quad S(5,5,5).$$

Além disso,

$$\chi^{\text{orb}}(S(2,5,5)) = -\frac{1}{10}, \qquad \chi^{\text{orb}}(S(4,4,4)) = -\frac{1}{4},$$
$$\chi^{\text{orb}}(S(4,4,5)) = -\frac{6}{20}, \qquad \chi^{\text{orb}}(S(4,5,5)) = -\frac{7}{20},$$
$$\chi^{\text{orb}}(S(5,5,5)) = -\frac{2}{5}.$$

Deste modo,

$$\frac{\chi^{\text{orb}}(S(2,5,5))}{\chi^{\text{orb}}(S(2,4,5))} = 2, \qquad \frac{\chi^{\text{orb}}(S(4,4,4))}{\chi^{\text{orb}}(S(2,4,5))} = 5,$$
$$\frac{\chi^{\text{orb}}(S(4,4,5))}{\chi^{\text{orb}}(S(2,4,5))} = 6, \qquad \frac{\chi^{\text{orb}}(S(4,5,5))}{\chi^{\text{orb}}(S(2,4,5))} = 7,$$
$$\frac{\chi^{\text{orb}}(S(5,5,5))}{\chi^{\text{orb}}(S(2,4,5))} = 8,$$

e então $d = \dfrac{\chi^{\text{orb}}(\widetilde{X})}{\chi^{\text{orb}}(X)}$, em todos os casos, é um inteiro e (b) não é um problema. No entanto, em todos casos $d \leq 11$ e já trabalhamos esses casos no *Passo (I)*. Portanto, $X = S(2,4,5)$ não nos fornece novos candidatos.

Isto conclui o *Passo (III)* e a demonstração.

□

Para os candidatos a recobrimento do teorema 6.1, uma abordagem geométrica como as realizadas no capítulo 5 não é igualmente necessária, pois, a realizabilidade pode ser totalmente analisada usando uma técnica completamente diferente, a saber, os *dessins d'enfant* de Grothendieck, revisados no Capítulo 4. De fato, mostraremos o seguinte:

Proposição 6.2. *Dentre os candidatos a recobrimento do Teorema 6.1,*

$S \xrightarrow[(5,1),(4,1,1),(2,2,2)]{6:1} S$, $S \xrightarrow[(7,1),(3,3,1,1),(2,\ldots,2)]{8:1} S$, $S \xrightarrow[(7,1,1),(3,3,3),(2,\ldots,2,1)]{9:1} S$,

$S \xrightarrow[(8,1,1),(3,3,3,1),(2,\ldots,2)]{10:1} S$, $S \xrightarrow[(8,2,1,1),(3,\ldots,3),(2,\ldots,2)]{12:1} S$, $S \xrightarrow[(9,1,1,1),(3,\ldots,3),(2,\ldots,2)]{12:1} S$,

$S \xrightarrow[(7,7,7,1,1,1),(3,\ldots,3),(2,\ldots,2)]{24:1} S$,

são realizáveis, enquanto

$$S \xrightarrow[(5,1,1,1),(4,4),(2,\ldots,2)]{8:1} S \quad e \quad S \xrightarrow[(7,7,1,1),(3,\ldots,3,1),(2,\ldots,2)]{16:1} S$$

são excepcionais.

Demonstração. O *dessin d'enfant* provando a realizabilidade de $S \overset{6:1}{\underset{(5,1),(4,1,1),(2,2,2)}{\dashrightarrow}} S$ pode ser visto na figura 6.1.

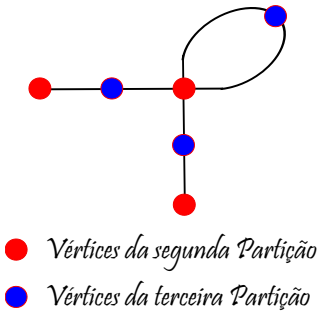


Figura 6.1: Realizabilidade de $S \overset{6:1}{\underset{(5,1),(4,1,1),(2,2,2)}{\dashrightarrow}} S$.

O *dessin d'enfant* representado na figura 6.2 prova a realizabilidade de $S \overset{8:1}{\underset{(7,1),(3,3,1,1),(2,\ldots,2)}{\dashrightarrow}} S$.

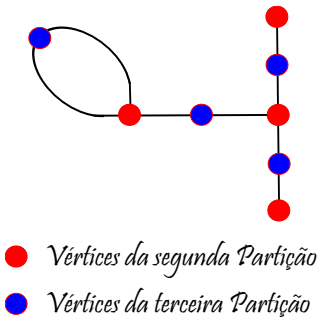


Figura 6.2: Realizabilidade de $S \overset{8:1}{\underset{(7,1),(3,3,1,1),(2,\ldots,2)}{\dashrightarrow}} S$.

A realizabilidade de $S \overset{9:1}{\underset{(7,1,1),(3,3,3),(2,\ldots,2,1)}{\dashrightarrow}} S$ é provada através do *dessin d'enfant* da figura 6.3.

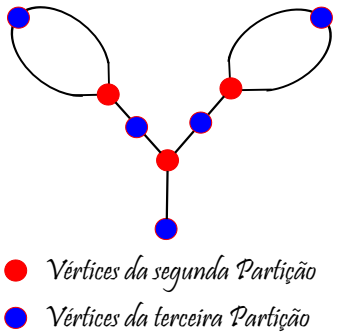


Figura 6.3: Realizabilidade de $S \overset{9:1}{\underset{(7,1,1),(3,3,3),(2,\ldots,2,1)}{\dashrightarrow}} S$.

O *dessin d'enfant* provando a realizabilidade de $S \overset{10:1}{\underset{(8,1,1),(3,3,3,1),(2,\ldots,2)}{\dashrightarrow}} S$ pode ser visto na figura 6.4.

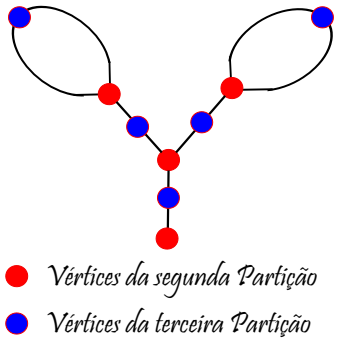


Figura 6.4: Realizabilidade de $S \xrightarrow[(8,1,1),(3,3,3,1),(2,\ldots,2)]{10:1} S$.

O *dessin d'enfant* representado na figura 6.5 prova a realizabilidade de $S \xrightarrow[(8,2,1,1),(3,\ldots,3),(2,\ldots,2)]{12:1} S$.

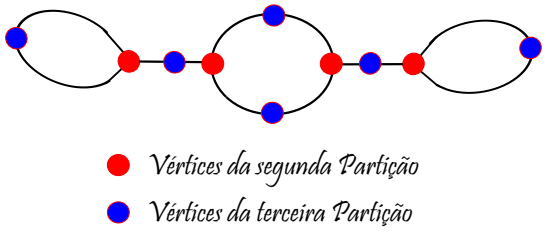


Figura 6.5: Realizabilidade de $S \xrightarrow[(8,2,1,1),(3,\ldots,3),(2,\ldots,2)]{12:1} S$.

A realizabilidade de $S \xrightarrow[(9,1,1,1),(3,\ldots,3),(2,\ldots,2)]{12:1} S$ é provada através do *dessin d'enfant* da figura 6.6.

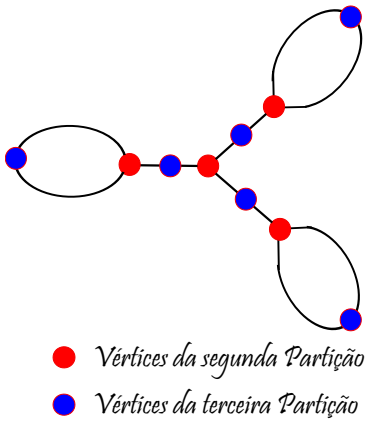


Figura 6.6: Realizabilidade de $S \xrightarrow[(9,1,1,1),(3,\ldots,3),(2,\ldots,2)]{12:1} S$.

O *dessin d'enfant* provando a realizabilidade de $S \xrightarrow[(7,7,7,1,1,1),(3,\ldots,3),(2,\ldots,2)]{24:1} S$ pode ser visto na figura 6.7.

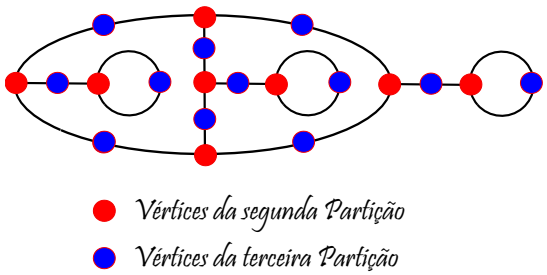


Figura 6.7: Realizabilidade de $S \xrightarrow[(7,7,7,1,1,1),(3,\ldots,3),(2,\ldots,2)]{24:1} S$.

Para provar a excepcionalidade de $S \xrightarrow[(5,1,1,1),(4,4),(2,\ldots,2)]{8:1} S$, observe que um *dessin d'enfant* relativo às partições $(4,4)$ e $(2,2,2,2)$ com pelo menos duas regiões complementares de comprimento 1 deve ser como mostrado na figura 6.8, assim a terceira partição é $(4,2,1,1)$ e não $(5,1,1,1)$.

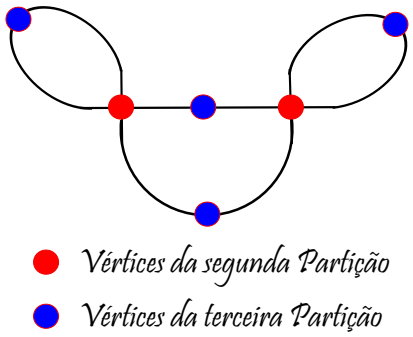


Figura 6.8: Excepcionalidade de $S \xrightarrow[(5,1,1,1),(4,4),(2,\ldots,2)]{8:1} S$.

Para provar a excepcionalidade de $S \xrightarrow[(7,7,1,1),(3,\ldots,3,1),(2,\ldots,2)]{16:1} S$ observamos que um dessin realizando-o deveria conter duas regiões de comprimento 1, portanto deveria ter a forma descrita na figura 6.9, onde novamente os vértices vermelhos representam pontos da segunda partição e os vértices azuis representam pontos da terceira partição.

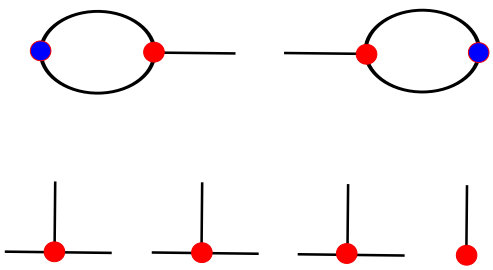


Figura 6.9: Um *dessin d'enfant* realizando $S \xrightarrow[(7,7,1,1),(3,\ldots,3,1),(2,\ldots,2)]{16:1} S$ deveria ter esta forma. Observe que alguns pontos da terceira partição foram omitidos.

Note que não podemos unir as duas regiões de comprimento 1 diretamente pois, neste caso, perderíamos a conexidade. Também não podemos unir as duas regiões através do vértice 1-valente. Deste modo, ou eles irão no mesmo vértice 3-valente como na imagem

à esquerda na figura 6.10 ou em diferentes vértices 3-valentes como na imagem à direita na figura 6.10.

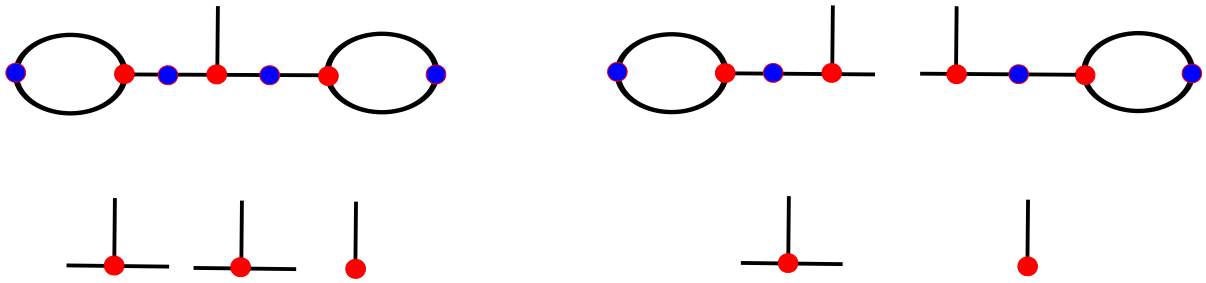


Figura 6.10: Tentativas de construir um *dessin d'enfant* realizando $S \xrightarrow[(7,7,1,1),(3,\ldots,3,1),(2,\ldots,2)]{16:1} S$.

O caso apresentado na imagem à esquerda na figura 6.10 é impossível porque existe uma região de comprimento 7 que teria comprimento maior do que 7 no *dessin* completo.

No caso apresentado na imagem à direita na figura 6.10, examinamos onde cada uma das arestas poderiam ir, dando os casos apresentados nas figuras 6.11 e 6.12, sempre redesenhando de um modo conveniente.

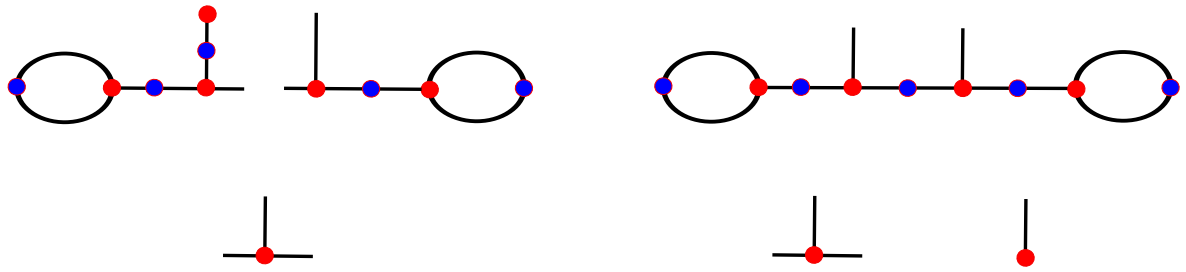


Figura 6.11: Casos impossíveis devido às grandes regiões.

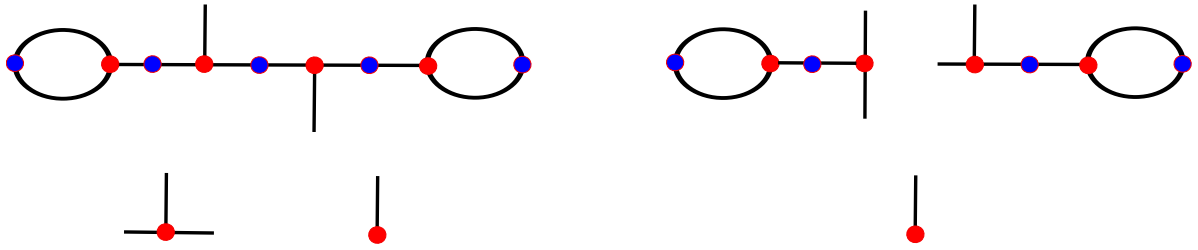


Figura 6.12: Tentativas de construir um *dessin d'enfant* realizando $S \xrightarrow[(7,7,1,1),(3,\ldots,3,1),(2,\ldots,2)]{16:1} S$.

Os casos apresentados na figura 6.11 são impossíveis por causa das grandes regiões.

Nos casos apresentados na figura 6.12 examinamos onde as cada aresta poderia ir de modo a não criar regiões de comprimento 5 ou maiores do que 7, e vemos que em ambos os casos existe apenas uma possibilidade, a saber, aquelas descritas na figura 6.13.

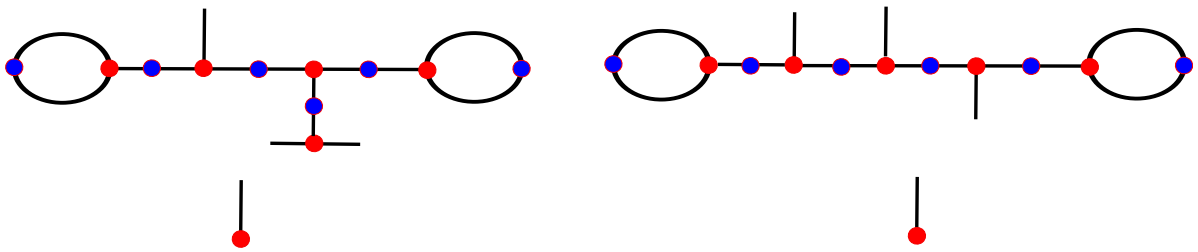


Figura 6.13: Tentativas de construir um *dessin d'enfant* realizando $S \overset{16:1}{\underset{(7,7,1,1),(3,\ldots,3,1),(2,\ldots,2)}{\dashrightarrow}} S$.

Em ambos os casos, por causa da região de comrimento 6, duas arestas deveriam ir em um mesmo vértice 3-valente, mas não há mais do que duas arestas livres disponíveis, assim novamente não podemos completar o *dessin* de modo a realizar $S \overset{16:1}{\underset{(7,7,1,1),(3,\ldots,3,1),(2,\ldots,2)}{\dashrightarrow}} S$.

A prova está completa.

□

Como uma conclusão notamos que o Teorema 6.1 e a Proposição 6.2 estão muito longe de fornecer uma análise completa de ralizabilidade e excepcionalidade de um candidato a recobrimento com candidato entre orbifolds associado do tipo hiperbólico, porque muito frequentemente os orbifolds envolvidos não são triangulares. Por exemplo, o candidato a recobrimento ramificado entre superfícies $S \overset{10:1}{\underset{(4,4,2),(4,2,2,2),(6,1,1,1,1)}{\dashrightarrow}} S$ considerado na primeira coluna da Tabela 2 em [20] é excepcional, e o candidato entre orbifolds associado $S(6,6,6,6,2,2,2,2) \dashrightarrow S(4,4,6)$ é hiperbólico mas não é triangular.

Em [12] encontramos também um estudo detalhado do estrato C_4, a saber, considera-se

$$S(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \longrightarrow S(p,q,r).$$

A técnica lá utilizada é análoga a empregada para o estrato C_3. Dentre os principais resultados destaca-se o seguinte:

Teorema 6.3. *Existem 141 candidatos a recobrimentos ramificados entre superfícies tendo um candidato a recobrimento entre 2-orbifolds associado $\widetilde{X} \dashrightarrow X$ com $\widetilde{X}$ sendo a esfera com quatro pontos de cone e X sendo um orbifold triangular hiperbólico. Dentre eles, existem 29 excepcionais e nenhum caso ocorre em graus primos.*

Referências Bibliográficas

[1] Almaraz, S. de M.; *Geometrias de Thurston e Fibrados de Seifert*, Dissertação de Mestrado, PUC, Rio de Janeiro, 2003.

[2] Edmonds, A. L.; Kulkarni, R. S.; Stong, R. E.; *Realizability of branched coverings of surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 282 (1984), 773-790.

[3] Ezell, C. L.; *Branch point structure of covering maps onto nonorientable surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 243, (1978), 122-133.

[4] Grothendieck, A.; *Esquisse d'un programme*,(1984). In: "Geometric Galois Action" (L. Schneps, P. Lochak eds.), 1: "Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme", London Math. Soc. Lecture Notes Series, Cambridge Univ. Press Vol. 242, (1997), 5-48.

[5] Guerreiro, J. L.; *Orbifolds and Wallpaper Patterns*, Instituto Superior Técnico, 2009.

[6] Husemoller, D. H.; *Ramified coverings of Riemann surfaces*, Duke Math. J. 29 (1962), 167-174.

[7] Lima, E. L.; *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, 4ª ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[8] Lopes, I. C. da S.; *Grupos Cristalográficos e Orbifolds Euclidianos Bidimensionais*, Tese de Mestrado, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto - Portugal, 2004.

[9] Manfio, F.; *Geometria*, ICMC - USP, 2013.
URL: `http://www2.icmc.usp.br/~manfio/Geometria`, consultado em 09/07/2013.

[10] Martinez, F. B.; et al. *Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*; 2 ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

[11] Massey, W. S., *Algebraic Topology: an Introduction*; Harbrace College Mathematics Series, New York: Harcourt, Brace & World, Inc., 1967.

[12] Pascali, M. A.; Petronio, C.; *Branched Covers between Surfaces*, Tese de Doutorado, Università di Roma, Roma - Itália, 2009.

[13] Pascali, M. A.; Petronio, C.; *Surface Branched Covers and Geometric 2-Orbifolds*, Transactions of the American Mathematical Society Volume 361, Number 11, November 2009, Pages 5885 - 5920 Artigo publicado eletronicamente em 17 de Junho de 2009.

[14] Pascali, M. A.; Petronio, C.; *Surface Branched Covers and Geometric 2-Orbifolds*, disponível em http://arxiv.org/pdf/0709.2026.pdf consultado em 30/04/2014.

[15] Pervova, E.; Petronio, C.; *On the existence of branched coverings between surfaces with prescribed branch data, I*, Algebraic & Geometric Topology 6, 2006, páginas: 1957 - 1985.

[16] Pervova, E.; Petronio, C.; *Realizability and exceptionality of candidate surface branched covers: methods and results*, Universitá di Bologna, 2008.

[17] Satake, I.; *On a generalization of the notion of manifold*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 42 (1956), 359-363.

[18] Scott, P.; *The geometry of 3-manifolds*, Bull. London Math. Soc., 15, 1983.

[19] Thurston, W. P.; *Three-Dimensional Geometry and Topology*, vol.1, Princeton University Press, Versão Eletrônica 2002, consultado em 09/09/2012.

[20] Zheng, H.; *Realizability of branched coverings of* S^2, Topol. Appl. 153 (2006), 2123-2134.