UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CLASSES DE REIDEMEISTER PARA COINCIDÊNCIAS ENTRE SECÇÕES DE UM FIBRADO

Thales Fernando Vilamaior Paiva

São Carlos-SP
Março de 2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CLASSES DE REIDEMEISTER PARA COINCIDÊNCIAS ENTRE SECÇÕES DE UM FIBRADO

Thales Fernando Vilamaior Paiva
Orientador: *Prof. Dr. Dirceu Penteado*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

São Carlos-SP
Março de 2014

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

P149cr

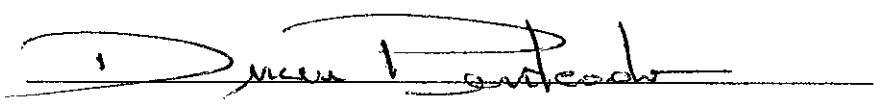
Paiva, Thales Fernando Vilamaior.
Classes de Reidemeister para coincidências entre secções de um fibrado / Thales Fernando Vilamaior Paiva. -- São Carlos : UFSCar, 2014.
53 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2014.

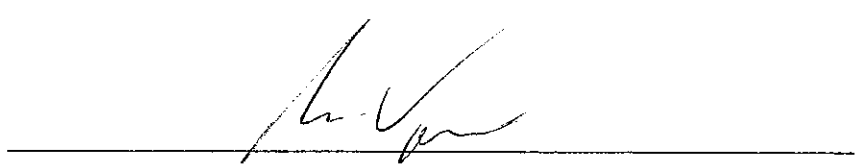
1. Topologia algébrica. 2. Classes de Reidemeister. 3. Coincidência. 4. Secções de fibrados. I. Título.

CDD: 514.2 (20ª)

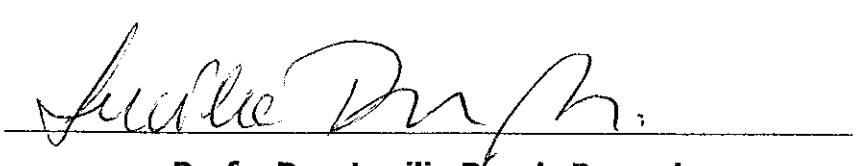
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Dirceu Penteado
DM- UFSCar



Prof. Dr. Daniel Vendrúscolo
DM- UFSCar



Profa. Dra. Lucilia Daruiz Borsari
IME-USP

À minha família e amigos, ofereço.

[...] por garantia, devo dizer que ele é um cachorro. Mas não precisa ter medo. Ele é muito bonzinho - e além disso é mais compreensivo que muitas pessoas. Ele pelo menos não fica aparentando ser mais inteligente do que realmente é.

Justein Gaarder, em *O mundo de Sofia*.

Agradecimentos

À minha família, pelo apoio, amor e compreensão que foram fundamentais para que eu concluísse mais essa etapa, especialmente aos meus pais Rosana e Bernardino, meus avós Raul e Tais, minha irmã Thais e minha noiva Laurelis, aos quais dedico este trabalho.

Ao professor Dirceu Penteado, pela paciência e dedicação ao longo desses dois anos, e por compartilhar um pouco do seu conhecimento comigo.

Aos meus amigos do DM, pelo suporte nos momentos difíceis e alegrias a cada etapa vencida. Valeu Alisson Darós, Carolina Lupifierio, Danilo de Jesus, Éderson Dutra, Fernanda Scabio, Francisco Caramello, Igor Ferra, Marlon Fonseca, Osmar Souza e Renan Medrado. E também aos professores Humberto L. Talpo, Pedro L. Q. Pergher e Rafael F. Barostichi, por proporcionarem ótimas aulas que certamente servirão de inspiração durante a carreira docente.

À Tallyta Ananda por me confiar sua vaga na república Búfalo Bill, na qual passei agradáveis meses.

Aos amigos e professores do departamento de matemática da UFMS, Adriana Wagner, Elias T. Galante, João B. Garcia e Leandro B. de Lima pelo incentivo durante e após a graduação, e aos queridos amigos matemáticos Augusto César, Emilly Oliveira, Fernando Batista, Ismara Belmonte, Jéssyca Matos, Renan Mezabarba e Uenderson Matos pelo carinho.

Aos amigos não matemáticos Éder Xavier, Felipe Navarro, Marcos Weis, Marcus Rodrigues e Tiago Vedovato pela amizade mantida mesmo a distância.

À professora Irene M. Craveiro, pelo incentivo desde o início da graduação.

Ao amigo Balbino Farias, pelas ótimas conversas e importantes ensinamentos bíblicos.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

E por fim, porém o mais importante, agradeço a Deus, meu suporte em todos os momentos, e a quem devo a oportunidade de comemorar mais essa etapa concluída.

Resumo

Nesse trabalho estudamos a teoria das classes de Reidemeister para coincidências entre duas secções $s, f : B \to E$ de um fibrado $q : E \to B$, tanto o seu tratamento algébrico, por meio da ação de Reidemeister, quanto o tratamento geométrico, fornecido pela teoria dos espaços de recobrimento e classes de conjugação de levantamentos.

A existência de secção em uma fibração implica na existência da sequência exata curta nos grupos fundamentais dos espaços

$$1 \longrightarrow \pi_1(F_0, e_0) \xrightarrow{i_\sharp} \pi_1(E, e_0) \underset{s_\sharp}{\overset{f_\sharp}{\rightleftarrows}} \pi_1(B, b_0) \longrightarrow 1 \ ,$$

onde F_0 denota a fibra sobre o ponto b_0, que por sua vez permite escrever o grupo $\pi_1(E, e_0)$ como o produto semidireto $\pi_1(F_0, e_0) \rtimes \pi_1(B, b_0)$, via o isomorfismo induzido por s ou por f.

Ao colocarmos o problema do ponto fixo para uma aplicação $g : X \to X$ nesse contexto, geramos as secções s_g e s_Δ, dadas por $s_g(x) = (x, g(x))$ e $s_\Delta(x) = (x, x)$, e notamos que o número de Reidemeister $r(Id, g)$ não é refletido pelo número de Reidemeister $r(s_\Delta, s_g)$, ainda que as classes de coincidência sejam as mesmas. Para que ocorra a igualdade devemos considerar o número de Reidemeister $r(s_\Delta, s_g; \pi_1(F_0, e_0))$, o qual introduzimos no capítulo 2.

O exemplo do ponto fixo motivou a consideração do problema da coincidência entre duas secções arbitrarias s e f de q, e mostramos que o número de Reidemeister $r(s, f; \pi_1(F_0, e_0))$ é um limitante para o número de classes de coincidência entre s e f.

Ao fazermos a interpretação das classes de Reidemeister para coincidências por meio dos levantamentos das secções com relação aos recobrimentos universais, é fundamental exibir levantamentos particulares das secções, o que só foi possível mediante a construção de recobrimentos a partir de um subgrupo do grupo fundamental, detalhamos tal construção no capítulo 1.

Abstract

In this work we study the theory of Reidemeister coincidence classes for coincidences between two sections $s, f : B \to E$ of a fiber bundle $q : E \to B$, both the algebraic treatment by the Reidemeister action and the geometric treatment given by the theory of covering spaces and conjugacy classes of liftings.

The existence of a section of a fibration implies the existence of a short exact sequence on the fundamental groups of the spaces

$$1 \longrightarrow \pi_1(F_0, e_0) \xrightarrow{i_\sharp} \pi_1(E, e_0) \underset{s_\sharp}{\overset{f_\sharp}{\rightleftarrows}} \pi_1(B, b_0) \longrightarrow 1 \ ,$$

where F_0 denote the fiber over the point b_0, which turns out writing the group $\pi_1(E, e_0)$ as the semidirect product $\pi_1(F_0, e_0) \rtimes \pi_1(B, b_0)$ via the isomorphism given by s or given by f.

By placing the fixed point problem for a mapping $g : X \to X$ in this context we generate the sections s_g and s_Δ given by $s_g(x) = (x, g(x))$ and $s_\Delta(x) = (x, x)$, and we noted that the Reidemeister number $r(Id, g)$ is not reflected by the Reidemeister number $r(s_\Delta, s_g)$ although the coincidence classes are the same. And for this equality occurs we must consider the Reidemeister number $r(s_\Delta, s_g; \pi_1(F_0, e_0))$ which we introduce in the chapter 2.

The fixed point example motivated the consideration of the coincidence problem between two arbitrary sections s and f of q and we show that the Reidemeister number $r(s_\Delta, s_g; \pi_1(F_0, e_0))$ is a bound for the number of coincidence classes between s and f.

And by making the interpretation of the Reidemeister coincidence classes by the lifting of the sections with relation of universal covering spaces, its fundamental to show particular liftings of the sections, which is possible by the construction of covering spaces from a subgroup of the fundamental group, and we detail that construction in the chapter 1.

Sumário

Convenções e Notações **1**

Introdução **3**

1 PRELIMINARES **6**

1.1 Fibrações e Fibrados 6

1.2 Espaços de Recobrimento e Translações de Recobrimento 13

1.3 Construção de Recobrimentos a Partir de um Subgrupo e Existência de Recobrimentos Universais 19

2 CLASSES DE COINCIDÊNCIA E CLASSES DE REIDEMEISTER **24**

2.1 Classes de Coincidência 24

2.2 Classes de Reidemeister 26

2.3 Classes de Reidemeister para Coincidências entre Secções de um Fibrado - Caso Fibrado Trivial 29

2.4 Classes de Reidemeister Para Coincidências Entre Secções de um Fibrado - Caso Geral 34

3 CLASSES DE REIDEMEISTER VIA RECOBRIMENTOS **37**

3.1 Classes de Reidemeister via Recobrimentos Universais 37

3.2 Invariância Homotópica 43

3.3 Classes de Reidemeister via Recobrimentos para Coincidências Entre Secções de um Fibrado 45

A Ação de Grupos **48**

Bibliografia **50**

CONVENÇÕES E NOTAÇÕES

Durante este texto, a palavra *espaço* significará *espaço topológico*, a palavra *aplicação* significará automaticamente que tal função é contínua. Deixamos o termo *função* apenas para os casos em que a continuidade não for especificada. Se $A \subseteq X$, os símbolos $i, j : A \hookrightarrow X$ denotarão as funções *inclusão*.

Dadas duas funções $f, g : X \to Y$, usaremos o símbolo $\Gamma(f, g)$ para denotar o *conjunto das coincidências entre f e g*, isto é, $\Gamma(f, g) = \{x \in X \,;\, f(x) = g(x)\}$. Sendo $Fix(h) \subseteq X$ o *conjunto dos pontos fixos* de uma função $h : X \to X$, podemos escrever $Fix(h) = \Gamma(Id_X, h)$, onde o símbolo Id_X denota a *função identidade* em X. As vezes omitiremos o índice X em Id_X, quando ficar claro em qual espaço estamos considerando a identidade.

Seguindo a notação clássica, $\pi_1(X, x_0)$ denotará o *grupo fundamental* do espaço X com ponto base x_0, e similarmente $\pi_n(X, x_0)$ serão os *grupos de homotopia* de X. Se $\varphi : I \to X$ é um laço, com $\varphi(0) = \varphi(1) = x_0$, o símbolo $[\varphi]$ denota a *classe* de φ no grupo fundamental de (X, x_0), sendo o símbolo I usado para denotar o intervalo fechado $[0, 1]$. A operação de *concatenação de caminhos* será indicada por "$*$", isto é, dados dois caminhos $\lambda, \mu : I \to X$, com $\lambda(1) = \mu(0)$, a concatenação $\lambda * \mu$ é um novo caminho em X, definido por

$$\lambda * \mu(t) = \begin{cases} \lambda(2t) & \text{se} \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \mu(2t-1) & \text{se} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} .$$

O caminho $\lambda^{-1} : I \to X$ é definido como $\lambda^{-1}(t) = \lambda(1 - t)$, para todo $t \in I$, deixando claro que este símbolo não indica a função inversa de λ, caso esta exista. Por convenção, ao dizermos que $\beta : I \to X$ é um caminho entre x e y, então $\beta(0) = x$ e $\beta(1) = y$. Fixado um ponto $x \in X$, sempre que escrevermos $\overline{x} : I \to X$ este denotará o *caminho constante* $\overline{x}(t) = x$, para todo $t \in I$.

Sendo $p : (X, x) \to (Y, y)$ uma aplicação, denotamos por $p_\sharp : \pi_n(X, x) \to \pi_n(Y, y)$ suas *induzidas nos grupos de homotopia*. Precisamente, $p_\sharp = \{(p_\sharp)_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, ou seja, p induz em cada

nível n um homomorfismo $\pi_n(X,x) \to \pi_n(Y,y)$, denotaremos simplesmente $(p_\sharp)_1 = p_\sharp$, para a induzida no grupo fundamental. O elemento neutro $[\overline{x}_0]$ em $\pi_1(X,x_0)$ frequentemente será indicado por 1. Dadas duas aplicações $f,g : X \to Y$, se H for uma homotopia entre elas, denotamos $H : f \cong g$ para indicar isto.

Dados X e Y espaços, o símbolo Y^X indicará o *espaço de todas as aplicações* $f : X \to Y$, munido da topologia compactamente gerada, e indicaremos por $ev_i : X^I \to X$ as funções *evaluação*, para cada $i \in I$, isto é, dado o caminho $\alpha \in X^I$, define-se $ev_i(\alpha) = \alpha(i) \in X$. Observando que as funções ev_i são contínuas, quando Y^X é tomado com a topologia compactamente gerada.

Dadas $f,g : X \to Y$ e A um subconjunto de X, denotamos por $f \cong g$ rel A para indicar que existe uma homotopia entre f e g, relativa ao subconjunto A, chamada *homotopia relativa a* A, isto é, existe $H : X \times I \to Y$, com $H : f \cong g$ e $H(a,t) = f(a) = g(a)$, para todo par $(a,t) \in A \times I$. Denotando por $\partial I = \{0,1\}$ ao bordo do intervalo I, dados dois caminhos $\varphi, \psi : I \to X$, escrevemos $\varphi \cong \psi$ rel ∂I para indicar que tais caminhos são homotópicos relativamente a $\{0,1\}$.

Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ forem duas aplicações, de modo que a composta $g \circ f$ esteja definida, iremos denotar na maioria das vezes tal composta simplesmente por gf. Assim, se $\lambda : I \to X$ for um caminho em X, então o caminho $f \circ \lambda : I \to Y$ será denotado simplesmente por $f(\lambda)$ ou $f\lambda$. Desta forma, dado outro caminho $\mu : I \to X$, teremos $f \circ (\lambda * \mu) = f(\lambda * \mu) = f\lambda * f\mu$, por exemplo.

Sendo G um grupo e H um subgrupo de G, denotamos por $H \lhd G$ para indicar que H é um *subgrupo normal* de G. A união disjunta de conjuntos será denotada por $\sqcup$. Assim, por exemplo, se $\{S_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ é uma família disjunta, isto é, $S_\alpha \cap S_\beta = \emptyset$, para quaisquer dois índices $\alpha, \beta \in \Lambda$, então a união $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$ será indicada por $\bigsqcup_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$.

Sejam $\mathfrak{C}$ uma categoria e $\mathcal{C} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{D}$ um morfismo em $\mathfrak{C}$. Se φ é uma *equivalência* em $\mathfrak{C}$, denotaremos $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$. Assim, se $\mathfrak{C}$ é a categoria dos espaços topológico, então φ é um homeomorfismo e denotamos $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$ para indicar que tais espaços (objetos) são homeomorfos. Analogamente denotamos $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$ para o isomorfismo, se o contexto for o de $R-$módulos ou grupos.

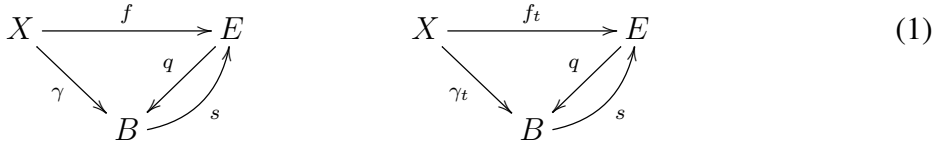
Sendo $q : E \to B$ uma *fibração*, para cada ponto $b_i \in B$ denotamos $F_{b_i} = q^{-1}(b_i)$ a *fibra* sobre b_i, ou simplesmente F_i. E quando q possui uma *secção* s, isto é, $qs = Id_B$, denotamos por ϕ_s ao isomorfismo $\pi_1(E,e_i) \cong \pi_1(F_i,e_i) \rtimes \pi_1(B,b_i)$ induzido pela secção s, sendo $e_i = s(b_i)$.

INTRODUÇÃO

Sejam $q : E \to B$ um fibrado com base B compacta e $s : B \to E$ uma secção de q, isto é, $q \circ s = Id_B$, e considere os seguintes problemas:

Problema 1 - Dadas $f : X \to E$ e $\gamma : X \to B$ aplicações tais que $q \circ f = \gamma$ mas não necessariamente $s \circ \gamma = f$, como decidir se existem homotopias $H_1 : f \cong f'$ e $H_2 : \gamma \cong \gamma'$ tais que $\Gamma\left(s \circ \gamma', f'\right) = \emptyset$?

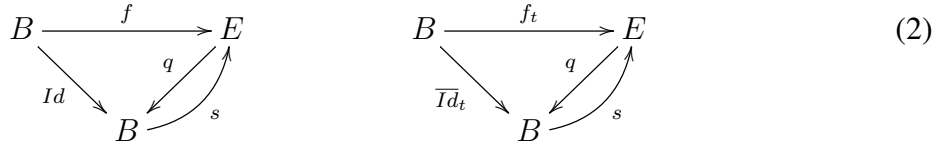
O problema em questão pode ser expresso por meio dos seguintes diagramas em (1), em que o segundo esboça as homotopias permitidas. E note que $\Gamma(s \circ \gamma, f) = f^{-1}\left(s(B)\right)$



(1)

Problema 2 - Dada $f : B \to E$ outra secção de q, como decidir se existe uma homotopia $H : f \cong f'$ tal que $\Gamma(s, f') = \emptyset$, de forma que f' ainda seja uma secção de q?

Representamos tal problema pelos diagramas dispostos em (2), em que o segundo esboça as homotopias permitidas. Note que neste caso temos a seguinte simetria $\Gamma(s, f) = f^{-1}\left(s(B)\right) = s^{-1}\left(f(B)\right)$.



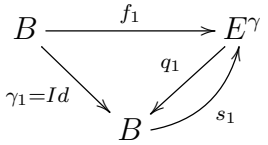
(2)

Aqui $\overline{Id}$ denota a homotopia constante, isto é, $\overline{Id}(b, t) = b$, para todo $t \in I$ de forma que f_t é ainda uma secção de q em qualquer estágio t da homotopia H.

Observe que se respondermos o problema 2 para todos os tipos de entrada (f, Id_B) e todo fibrado $q : E \to B$, então respondemos também ao problema 1.

De fato, basta tomar a nova fibração $q_1 : E^\gamma \to X = B$, restrição da projeção na primeira coordenada, em que $E^\gamma = \{(b, e) \in B \times E \,;\, \gamma(b) = q(e)\}$ é o *pullback de* γ *por* q, considerar $f_1 = (Id_B, f) : B \to E^\gamma$, $\gamma_1 = Id_B$ e $s_1 = (Id_B, s \circ \gamma) : B \to E^\gamma$.

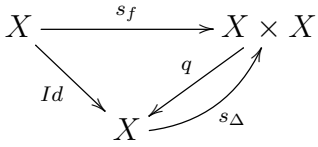
Desta forma s_1 e f_1 serão secções de q_1, e ainda $\Gamma(s_1, f_1) = \{b \in B \,;(b, f(b)) = (b, s\circ\gamma)\} = \Gamma(s \circ \gamma, f)$, ou seja, responder ao problema 2 representado pelo diagrama em (3) abaixo fornece uma resposta ao problema 1 associado às aplicações f, γ e s.



(3)

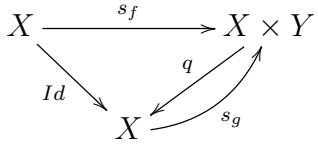
A seguir daremos alguns exemplos típicos de situações que podem ser colocadas, ou reduzidas, ao problema 2, mostrado ainda mais sua relevância em um contexto geral.

Problema do ponto fixo - Dada $f : X \to X$ uma aplicação, considere o fibrado $q : X \times X \to X$ a projeção na primeira coordenada, e observe que definido as secções $s_\Delta, s_f : X \to X \times X$, $s_\Delta(x) = (x, x)$ e $s_f(x) = (x, f(x))$, teremos $\Gamma(s_\Delta, s_f) = \{x \in X \,;\, (x, f(x)) = (x, x)\} = \{x \in X \,;\, f(x) = x\} = Fix(f)$.



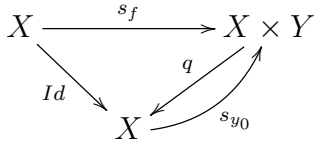
(4)

Problema da coincidência - Dadas $f, g : X \to Y$ duas aplicações, considere $q : X \times Y \to X$ a projeção na primeira coordenada, e defina as secções $s_f, s_g : X \to X \times Y$ por $s_f(x) = (x, f(x))$ e $s_g(x) = (x, g(x))$. Assim teremos $\Gamma(f, g) = \Gamma(s_f, s_g) = s_f^{-1}(s_g(X)) = s_g^{-1}(s_f(X))$. Observe que o problema do ponto fixo é um caso particular do problema da coincidência, quando $X = Y$ e $g = Id_X$. Como caso particular do problema da coincidência destaca-se ainda o caso em que $X = Y$.



(5)

Problema da raiz - Sejam $f : X \to Y$ uma aplicação, $y_0 \in Y$, $q : X \times Y \to X$ a projeção na primeira coordenada, $s_f, s_{y_0} : X \to X \times Y$ aplicações dadas por $s_f(x) = (x, f(x))$ e $s_{y_0}(x) = (x, y_0)$. Note que s_f e s_{y_0} são secções de q, além disso $\Gamma(s_f, s_{y_0}) = \{x \in X \,;\, (x, f(x)) = (x, y_0)\} = f^{-1}(y_0)$.



(6)

Ao definirmos o conceito de classes de coincidência, boa parte da teoria ocupa-se em obter um limitante para o número de classes, e consequentemente para o número de classes essenciais, mediante à definição de um índice, conhecido como número de Nielsen. Neste contexto estudaremos a teoria das classes de coincidência de Reidemeister, pois esta fornece um limitante natural para o número de classes de coincidência, em função das aplicações consideradas.

O que pretendemos com este trabalho é tratar sobre a teoria das classes de coincidência de Reidemeister sob este novo ponto de vista, isto é, no contexto do problema 2, abordando a teoria para coincidência entre secções s e f de um fibrado q, observamos que neste caso o número de Reidemeister pode ser reduzido ao considerarmos alguns conceitos algébricos proveniente da fibração q, da qual as aplicações em questão são secções.

No capítulo 1 apresentamos os resultados a respeito de fibrações e espaços de recobrimento que utilizamos no decorrer do texto. Destacam-se neste capítulo os resultados referentes à existência da sequência exata longa de fibração e as sequências exatas curtas provenientes da existência de uma secção, o que fornece um isomorfismo entre o grupo fundamental do espaço total com o produto semidireto do grupo induzido pela fibra com o grupo fundamental da base e os resultados referentes à construção de recobrimentos a partir de um subgrupo do grupo fundamental.

No capítulo 2 introduziremos os conceitos de classes de coincidência e classes de Reidemeister e apresentamos também algumas propriedades algébricas a respeito das classes de Reidemeister que fazemos uso durante o texto. Na seção 2.3 trataremos do problema de coincidência entre duas secções do fibrado trivial e mostraremos como este caso motiva a abordagem do caso geral, feito na seção 2.4, em que consideramos o problema de coincidência entre duas secções de um fibrado arbitrário.

A teoria das classes de Reidemeister, como é encontrada na literatura, é feita na maioria das vezes sob dois pontos de vista distintos. O primeiro é de forma algébrica, por meio da ação de Reidemeister, o segundo de forma mais geométrica, que é feito considerando levantamentos das aplicações com relação aos recobrimentos universais dos espaços envolvidos. No capítulo 3 faremos a abordagem via espaços de recobrimentos, sendo as seções 3.1 e 3.2 dedicadas as contruções e resultados adaptados das referências citadas, em seguida, na seção 3.4, mostramos como adaptar a teoria para o caso em que as aplicações em questão são secções de um fibrado arbitrário.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Este capítulo tem por objetivo estabelecer os pré requisitos necessários para os tópicos que faremos nos capítulos seguintes. Porém ressaltamos que utilizaremos livremente resultados referentes à topologia geral e tópicos básicos de teoria da homotopia, tais como o grupo fundamental de um espaço topológico e homotopias relativas, sendo este capítulo destinado a forncecer os resultados sobre fibrações e espaços de recobrimento. O texto foi adaptado principalmente do que é exposto em [19], capítulo 1 e [3] capítulo 6, para a primeira seção, e por [13] e [15], capítulos 10 e 2 respectivamente, para a segunda e terceira.

1.1 Fibrações e Fibrados

Definição 1.1.1. Sejam E e B espaços. Dizemos que uma aplicação $p : E \to B$ possui a *propriedade do levantamento de homotopia* (P.L.H.) com respeito ao espaço Y quando dadas $f : Y \to E$ e $F : Y \times I \to B$ tais que $F(y, 0) = pf(y)$, para todo $y \in Y$, existir uma aplicação $\widetilde{F} : Y \times I \to E$ de forma que $p\widetilde{F}(y, t) = F(y, t)$ e $\widetilde{F}(y, 0) = f(y)$, para quaisquer $y \in Y$ e $t \in I$.

Tal situação, ou problema de levantamento, para $p : E \to B$ com respeito ao espaço Y, pode ser representado pelo diagrama comutativo abaixo, em que a seta pontilhada simboliza uma solução $\widetilde{F}$ para este problema.

$$\begin{array}{ccc} Y \times 0 & \xrightarrow{\widetilde{f}} & E \\ {\scriptstyle j}\downarrow & \overset{\widetilde{F}}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Y \times I & \xrightarrow[F]{} & B \end{array} \tag{1.1}$$

Definição 1.1.2. Uma aplicação $p : E \to B$ é dita ser uma *fibração* quando possui a P.L.H. com respeito a qualquer espaço Y. Neste caso, E é dito *espaço total,* B a *base* e para cada $b \in B$, $p^{-1}(b) = F_b$ é chamado *fibra* sobre b.

Exemplo 1.1.1. A projeção na primeira coordenada $p_1 : B \times F \to B$, $p_1(b, c) = b$, é uma fibração. De fato, considere o problema simbolizado pelo diagrama comutativo abaixo,

$$\begin{array}{ccc} Y \times 0 & \xrightarrow{\widetilde{g}} & B \times F \\ {\scriptstyle j}\downarrow & \overset{\widetilde{G}}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle p_1} \\ Y \times I & \xrightarrow[G]{} & B \end{array} \tag{1.2}$$

sendo Y um espaço arbitrário e $p_1(\widetilde{g}(y, 0)) = G(y, 0)$. Defina $\widetilde{G} : Y \times I \to B \times F$ por $\widetilde{G}(y, t) = (G(y, t), \widetilde{g}_2(y, 0))$, sendo $\widetilde{g}(y, 0) = (\widetilde{g}_1(y, 0), \widetilde{g}_2(y, 0))$. Assim teremos $p_1 \circ \widetilde{G}(y, t) = p_1 (G(y, t), g_2(y, 0)) = G(y, t)$, e $\widetilde{G}(y, 0) = (G(y, 0), \widetilde{g}_2(y, 0)) = (p_1 \circ \widetilde{g}(y, 0), \widetilde{g}_2(y, 0)) = (\widetilde{g}_1(y, 0), \widetilde{g}_2(y, 0)) = \widetilde{g}(y, 0)$.

Definição 1.1.3. Seja $p : E \to B$ uma aplicação e defina o subconjunto $I^p = \{(e, \alpha) \in E \times B^I \mid p(e) = \alpha(0)\}$. Uma *conexão* para p é uma aplicação $\lambda_p : I^p \to E^I$ tal que $\lambda_p(e, \alpha)(0) = e$ e $p\lambda_p(e, \alpha) = \alpha$, para quaisquer $(e, \alpha) \in I^p$. Isto é, o diagrama abaixo é comutativo,

$$\begin{array}{ccccc} I^p & & \xrightarrow{\quad p_2 \quad} & & \\ & {\scriptstyle \lambda_p}\searrow & & & \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & E^I & \xrightarrow{\rho} & B^I \\ & & \downarrow{\scriptstyle ev_0} & & \downarrow{\scriptstyle ev_0} \\ & & E & \xrightarrow{p} & B \end{array} \tag{1.3}$$

sendo $\rho(\gamma) = p\gamma$, para todo caminho $\gamma \in E^I$, ev_0 é a evaluação no zero, $ev_0(\alpha) = \alpha(0)$, e p_i são as respectivas projeções na $i-$ésima coordenada.

Proposição 1.1.1. *Uma aplicação $p : E \to B$ é uma fibração se, e somente se, possui uma conexão λ_p.*

Demonstração. Página 30 de [19]. □

Definição 1.1.4. Sejam $p : E \to B$ uma fibração e $f : X \to B$ uma aplicação. Chamamos de *pullback* de f por p ao subconjunto $E^f = \{(x, e) \in X \times E; f(x) = p(e)\} \subseteq X \times E$.

Proposição 1.1.2. *Sejam $p : E \to B$ uma fibração, $f : X \to B$ uma aplicação e E^f o pullback de f por p. Então a restrição a E^f da projeção na primeira coordenada $q_1 : E^f \to X$ é uma fibração.*

Demonstração. Página 37 de [19]. □

Definição 1.1.5. Sejam A e G grupos e $\alpha : G \to Aut(A)$ um homomorfismo, em que $Aut(A)$ denota o grupo dos automorfismos de A. No conjunto $A \times G$ defina a seguinte operação:

$$\begin{array}{ccc} (A \times G) \times (A \times G) & \to & A \times G \\ (a, g) \rtimes_\alpha (b, h) & \mapsto & (a[\alpha(g)(b)], gh) \end{array} \tag{1.4}$$

e note que com esta operação $A \times G$ é um grupo, chamado *produto semidireto* de A por G, com respeito ao homomorfismo α. As vezes omitimos o índice α no símbolo $\rtimes_\alpha$ quando este estiver subentendido no contexto.

Observação 1.1.1. Note que se $\alpha(g) = Id_A$, para todo $g \in G$, então a operação $\rtimes_\alpha$ em $A \times G$ torna-se a "multiplicação" coordenada a coordenada usual, isto é, neste caso $A \rtimes_\alpha G$ é o produto direto de A por G.

Proposição 1.1.3. *Sejam $\widetilde{G}$ um grupo e G, A subgrupos de $\widetilde{G}$, com $A \lhd \widetilde{G}$. Suponha que $\widetilde{G} = AG$ e $A \cap G = \{e\}$. Então $\widetilde{G}$ é isomorfo ao produto semidireto de A por G.*

Demonstração. Defina o homomorfismo $\alpha : G \to Aut(A)$ por $\alpha(g)(a) = gag^{-1}$, que está bem definido em razão da normalidade de A. Defina a função $\Psi : A \rtimes_\alpha G \to \widetilde{G}$, $\Psi(a, g) = ag$, a qual afirmamos ser um homomorfismo. De fato, sejam $(a, g), (b, h) \in A \rtimes_\alpha G$, e note que

$$\Psi\left((a, g) \rtimes_\alpha (h, b)\right) = \Psi\left(agbg^{-1}, gh\right) = agbg^{-1}gh = agbh = \Psi(a, g)\Psi(b, h).$$

Se $\Psi(g, a) = ga = e$, então $g = a^{-1}$ e $a = g^{-1}$, portanto $a, g \in G \cap A = \{e\}$, e segue que Ψ é injetor. Claramente Ψ é sobrejetor, pois $\widetilde{G} = AG$, dessa forma $\widetilde{G} \cong A \rtimes_\alpha G$. □

Definição 1.1.6. Seja $1 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} \widetilde{G} \xrightarrow{\beta} G \longrightarrow 1$ uma sequência exata curta de grupos. Dizemos que tal sequência *cinde* quando existe um homomorfismo (i.e., uma secção algébrica) $\gamma : G \to \widetilde{G}$ tal que $\beta\gamma = Id_G$.

$$1 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} \widetilde{G} \underset{\gamma}{\overset{\beta}{\rightleftarrows}} G \longrightarrow 1 \tag{1.5}$$

Corolário 1.1.1. *Se a sequência exata curta $1 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} \widetilde{G} \xrightarrow{\beta} G \longrightarrow 1$ cinde, então $\widetilde{G}$ é isomorfo ao produto semidireto de A por G.*

Demonstração. Pela exatidão da sequência o homomorfimo α é injetor, e então $A \cong Im(\alpha)$. Por hipótese existe um homomorfismo $\gamma : G \to \widetilde{G}$ tal que $\beta\gamma = Id_G$, logo γ é injetor, e assim $G \cong Im(\gamma)$.

Suponha $\widetilde{g} \in Im(\alpha) \cap Im(\gamma)$. Então $\widetilde{g} = \alpha(a)$ e $\widetilde{g} = \gamma(g)$, para certos $a \in A$ e $g \in G$. Logo

$$\widetilde{g} = \gamma(g) \Rightarrow \beta(\widetilde{g}) = \beta\gamma(g) = g \Rightarrow \beta(\alpha(a)) = g \Rightarrow g = e \Rightarrow \widetilde{g} = e,$$

pois $Im(\alpha) = \ker(\beta)$. Portanto $Im(\alpha) \cap Im(\gamma) = \{e\}$.

Dado qualquer $\widetilde{g} \in \widetilde{G}$, tem-se $\beta\gamma(\beta(\widetilde{g})) = \beta(\widetilde{g})$, então $[\gamma\beta(\widetilde{g}^{-1})]\,\widetilde{g} = \widetilde{g}^{-1}\widetilde{g} = e \Rightarrow [\gamma\beta(\widetilde{g}^{-1})]\,\widetilde{g} \in \ker(\beta) = Im(\alpha)$. Por isso podemos encontrar $a \in A$ tal que $\alpha(a) = [\gamma\beta(\widetilde{g}^{-1})]\,\widetilde{g}$, e então $\widetilde{g} = \gamma(\beta(\widetilde{g}))\alpha(a)$, isto é, $\widetilde{G} = Im(\gamma)Im(\alpha)$. Portanto, da proposição (1.1.3), temos $G \cong Im(\gamma) \rtimes Im(\alpha)$, o que prova o corolário. □

Observação 1.1.2. Se na situação do corolário anterior os grupos envolvidos forem abelianos, então $\widetilde{G} \cong G \oplus A$, pois neste caso $G \rtimes A = G \oplus A$.

Teorema 1.1.1. *Sejam $q : E \to B$ uma fibração, $b_0 \in B$ e $e_0 \in E$ tais que $e_0 \in q^{-1}(b_0) = F_{b_0}$ com E e B conexos por caminhos. Existe uma sequência de homomorfismos $\Delta = \{\Delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (chamados homomorfismos conectantes) tais que a sequência longa abaixo é exata, sendo $i : F_{b_0} \hookrightarrow E$ a inclusão.*

$$\cdots \longrightarrow \pi_2(F_{b_0}, e_0) \xrightarrow{i_\sharp} \pi_2(E, e_0) \xrightarrow{q_\sharp} \pi_2(B, b_0) \xrightarrow{\Delta_2} \pi_1(F_{b_0}, e_0) \xrightarrow{i_\sharp} \pi_1(E, e_0) \xrightarrow{q_\sharp} \pi_1(B, b_0) \longrightarrow \pi_0(F_{b_0}, e_0) \longrightarrow 1$$

Demonstração. Veja a página 358 de [13]. □

Corolário 1.1.2. *Seja $q : E \to B$ uma fibração e suponha que exista uma secção $s : B \to E$ (isto é, $qs = Id_B$). Então, sendo $b_0 \in B$ e $e_0 = s(b_0) \in E$ pontos base e $F_{b_0} = q^{-1}(b_0)$, para cada inteiro $n \geq 2$ temos a sequência exata curta*

$$0 \longrightarrow \pi_n(F_{b_0}, e_0) \xrightarrow{i_\sharp} \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{q_\sharp} \pi_n(B, b_0) \longrightarrow 0 \quad , \tag{1.6}$$

com $\pi_n(E, e_0) \cong \pi_n(F_{b_0}, e_0) \oplus \pi_n(B, b_0)$. Para $n = 1$ temos a sequência exata curta

$$1 \longrightarrow \pi_1(F_{b_0}, e_0) \xrightarrow{i_\sharp} \pi_1(E, e_0) \xrightarrow{q_\sharp} \pi_1(B, b_0) \longrightarrow 1 \quad , \tag{1.7}$$

com $\pi_1(E, e_0) \cong \pi_1(F_{b_0}, e_0) \rtimes \pi_1(B, b_0)$.

Demonstração. O fato de $qs = Id_B$ implica em $q_\sharp s_\sharp = (qs)_\sharp = Id_\sharp$, logo $q_\sharp$ é sobrejetor. Portanto as sequências (1.6) e (1.7) são exatas curtas. A injetividade de $i_\sharp$ implica em $\pi_n(F_{b_0}, e_0) \cong Im(i_\sharp)$, e pela exatião da sequência $Im(i_\sharp) = \ker(q_\sharp)$, logo $Im(i_\sharp)$ é um subgrupo normal de $\pi_1(E, e_0)$, e segue do corolário (1.1.1) que $\pi_1(E, e_0) \cong \pi_1(F_{b_0}, e_0) \rtimes \pi_1(B, b_0)$.

Os isomorfismos $\pi_n(E, e_0) \cong \pi_n(F_{b_0}, e_0) \oplus \pi_n(B, b_0)$ seguem pelo fato de que os grupos $\pi_n(\cdot, \cdot)$ são abelianos, para todo $n \geq 2$. □

Observação 1.1.3. No caso do corolário anterior, podemos explicitar a operação em $\pi_1(F_{b_0}, e_0) \times$

$\pi_1(B, b_0)$ induzida pela secção s, que é dada por

$$([\alpha_1], [\beta_1]) \rtimes ([\alpha_2], [\beta_2]) = \left([\alpha_1][s(\beta_1)][\alpha_2][s(\beta_1^{-1})], [\beta_1][\beta_2]\right), \tag{1.8}$$

e o isomorfismo $\phi_s : \pi_1(E, e_0) \to \pi_1(F_{b_0}, e_0) \rtimes \pi_1(B, b_0)$, também induzido por s, é expresso por $\phi_s[\alpha] = ([\alpha][(s \circ q)(\alpha^{-1})], [q(\alpha)])$.

Definição 1.1.7. Sejam X um espaço com a topologia compactamente gerada[1] e $A \subseteq X$ um subespaço. Dizemos que (X, A) é um *par NDR*[2] quando existem aplicações $u : X \to I$ e $h : X \times I \to X$ tais que

(i) $A = u^{-1}(0)$;

(ii) $h(-, 0) = Id_X$;

(iii) $h(a, t) = a$, para todo $t \in I$ e $a \in A$;

(iv) $h(x, 1) \in A$, para todo $x \in X$ tal que $u(x) < 1$.

O par (X, A) é chamado simplesmente por *DR* se valem $(i), (ii), (iii)$ e ao invés de (iv) tivermos

(iv)' $h(x, 1) \in A$, para todo $x \in X$.

Exemplo 1.1.2. Note que se X é um espaço contrátil, então o par $(X, \{x\})$ é um par NDR, para qualquer $x \in X$. Em particular $(\mathbb{R}^n, \{x\})$ é um par NDR, para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$. Mais geralmente, se X é um CW-complexo[3], e $A \subseteq X$ um subcomplexo, então (X, A) é um par NDR. Uma demonstração para esse fato pode ser encontrada na página 58 de [14].

Observação 1.1.4. Note que se (X, A) é um par NDR, então A é um subconjunto fechado G_δ (ou seja, uma união enumerável de subconjunos abertos) de X. Também, A é retrato da vizinhança $U = \{x \in X \,;\, u(x) < 1\}$, e portanto é retrato de vizinhança de X. Sendo assim, se X é um espaço[4] ENR, então $\{X, \{x\}\}$ é um par NDR, para qualquer $x \in X$.

Proposição 1.1.4. *Se (X, A) é um par NDR, então $X \times 0 \cup A \times I$ é um retrato de $X \times I$.*

Demonstração. Por (X, A) ser um par NDR, existem as aplicações u e h, como na definição (1.1.7). Assim, defina a função $R : X \times I \to X \times 0 \cup A \times I$ por

$$R(x,t) = \begin{cases} (x,t), & \text{se } x \in A \text{ ou } t = 0; \\ (h(x,1), t - u(x)), & \text{se } t \geq u(x) \text{ e } t > 0; \\ \left(h\left(x, \frac{t}{u(x)}\right), 0\right), & \text{se } u(x) \geq t \text{ e } u(x) > 0. \end{cases}.$$

[1] Considerações básicas a respeito desta topologia podem ser encontradas em [5], a partir da página 247, em que o autor se refere a tais espaços pelo nome de $k-$*espaços* ($k-$spaces). Resultados mais elaborados podem ser encontrados em [17] e [19].

[2] Sigla de *neighborhood deformation retract*.

[3] Ver seção 2.7 de [14].

[4] Veja a página 81 de [4].

Como R é uma aplicação bem definida e uma retração, segue o resultado. □

Observação 1.1.5. A recíproca da proposição (1.1.4) também é válida, bem como outras propriedades importantes com relação a retratos e extensões de homotopias para pares NDR, e considerações detalhadas a respeito destes fatos podem ser encontradas em [17].

Definição 1.1.8. Considerando o problema de levantamento de homotopia simbolizado pelo diagrama (1.1), por definição sabemos que este possui solução para todo espaço Y sempre que p for uma fibração. Porém, dado um subespaço $A \subseteq Y$ podemos nos perguntar quando a homotopia em questão pode ser estendida, no sentido do diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccc} Y \times 0 \cup A \times I & \longrightarrow & E \\ \downarrow & \overset{L}{\nearrow} & \downarrow p \\ Y \times I & \longrightarrow & B \end{array} \tag{1.9}$$

E tal situação é chamada de *problema de extensão de homotopia* (P.E.H.).

Proposição 1.1.5. *Seja $p : E \to B$ uma fibração. Se (Y, A) é um par NDR, então o P.E.H. simbolizado pelo diagrama (1.9) possui solução L.*

Demonstração. Veja a página 35 de [19]. □

Corolário 1.1.3. *Sejam $q : E \to B$ uma fibração, $b_0 \in B$, $f, s : B \to E$ secções de q e $e_0 = s(b_0) \neq f(b_0)$. Se o par $(B, \{b_0\})$ for um par NDR e $F_0 = q^{-1}(b_0)$ for conexo por caminhos, então existe uma aplicação f', homotópica a f, que é ainda uma secção de q, e satisfazendo $f'(b_0) = e_0$.*

Demonstração. Seja $\gamma : I \to F_0$ um caminho entre $f(b_0)$ e e_0 e observe o diagrama abaixo,

$$\begin{array}{ccc} B \times 0 \cup b_0 \times I & \xrightarrow{(f \cup \gamma)} & E \\ \downarrow & \overset{L}{\nearrow} & \downarrow q \\ B \times I & \xrightarrow[\overline{I}]{} & B \end{array} \tag{1.10}$$

em que $(f \cup \gamma)(b, 0) = f(b)$, $(f \cup \gamma)(b_0, t) = \gamma(t)$ para $t \neq 0$, e $\overline{I}(b, t) = b$, para todo $(b, t) \in B \times I$. Em particular $f \cup \gamma(b, 1) = \gamma(1) = e_0$, e note que como $qf = Id_B$, o diagrama acima é comutativo.

Portanto existe a solução L, pois q é uma fibração e o par $(B, \{b_o\})$ é NDR, com $qL = \overline{I}$. Por conseguinte $qL(b, 1) = Id_B$, com $L(b_0, 1) = (f \cup \gamma)(1) = e_0$, isto é, $f' = L(-, 1)$ é uma nova secção de q com $f'(b_0) = e_0$. □

Definição 1.1.9. Dados X um espaço com ponto base x_0, diremos que o par (X, x_0) é *não degenerado* quando o par $(X, \{x_0\})$ for NDR.

Observação 1.1.6. Supondo dadas as aplicações $f, g : X \to Y$, com Y conexo por caminhos, e que o par (X, x_0) é não degenerado, note que podemos supor $x_0 \in \Gamma(f, g') = \{x \in X; f(x) = g(x)\}$, para g' alguma homotopia de g.

De fato, como pela proposição (1.1.4) $X \times 0 \cup x_0 \times I$ é um retrato de $X \times I$, considere $\gamma : I \to Y$ um caminho entre $g(x_0)$ e $f(x_0)$, defina a aplicação $(g \cup \gamma) : X \times 0 \cup x_0 \times I \to Y$ por $(g \cup \gamma)(x, 0) = g(x)$ e $(g \cup \gamma)(x_0, t) = \gamma(t)$ e note que o problema de extensão simbolizado pelo diagrama abaixo possiu solução H,

$$\begin{array}{ccc} X \times 0 \cup x_0 \times I & \xrightarrow{(g \cup \gamma)} & Y \\ \downarrow & \nearrow_{H} & \\ X \times I & & \end{array} \tag{1.11}$$

sendo H uma homotopia de g, em que $H_0 = H(-, 0) = g$ e $H_1 = H(-, 1) = g'$, com $g'(x_0) = H(x_0, 1) = (g \cup \gamma)(x_0, 1) = \gamma(1) = f(x_0)$, isto é, $x_0 \in \Gamma(f, g')$.

Veremos na seção (3.2) que o invariante algébrico que iremos considerar não depende da classe de homotopia da aplicação, o que nos permite assumir a existência de tal ponto de coincidência.

Definição 1.1.10. Sejam B um espaço conexo e $b_0 \in B$ um ponto base. Uma aplicação $p : E \to B$ chama-se um *fibrado* com *fibra* F_0 se satisfaz as seguintes condições:

(i) $p^{-1}(b_0) = F_0$;

(ii) $p : E \to B$ é sobrejetora;

(iii) Para cada ponto $x \in B$, existem uma vizinhança aberta U_x de x em B e um homeomorfismo $\Psi_{U_x} : p^{-1}(U_x) \to U_x \times F_0$, tal que o diagrama abaixo torna-se comutativo.

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_x) & \xrightarrow{\Psi_{U_x}} & U_x \times F_0 \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p_1} \\ U_x & = & U_x \end{array} \tag{1.12}$$

Exemplo 1.1.3. A projeção na primeira coordenada $p_1 : E \times F \to E$ é um fibrado, chamado *fibrado trivial,* com fibra F. Considerando $\mathcal{M}$ a faixa de Möbius, vista como o quociente $I \times I/\sim$ sendo $\sim$ a relação de equivalência que identifica os pontos $(0, t)$ com $(1, 1 - t)$, e S^1 obtida por meio do quociente $I/\dot{\sim}$, considerando que $\dot{\sim}$ identifica os pontos $(0, 0)$ e $(0, 1)$, defina $p : \mathcal{M} \to S^1$ por $p[s, t] = [s]$. Então p é um fibrado com fibra I.

Definição 1.1.11. Um espaço X é dito *paracompacto* quando toda cobertura aberta de X possui um refinamento localmente finito. Por exemplo, todo espaço compacto é paracompacto, de forma que os espaços paracompactos *generalizam* os espaços compactos.

Teorema 1.1.2. *Se $p : E \to B$ é um fibrado, cuja base B é um espaço paracompacto, então p é uma fibração.*

Demonstração. Veja a seção 2.7 de [15], corolário 14. □

1.2 Espaços de Recobrimento e Translações de Recobrimento

Definição 1.2.1. Sejam $\widetilde{X}$ e X espaços e $p : \widetilde{X} \to X$ uma aplicação. Um subconjunto aberto $U \subseteq X$ é *igualmente recoberto* por p quando $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i\in\Lambda} S_i$, em que $\{S_i\}_{i\in\Lambda}$ é uma família disjunta de subconjuntos abertos de $\widetilde{X}$, com $p|S_i : S_i \to U$ um homeomorfismo para cada $i \in \Lambda$. Cada S_i é dito uma *folha* sobre U. Quando um subconjunto U é igualmente recoberto por p dizemos que U é $p-$*admissível*, ou simplesmente admissível, quando não houver ambiguidades com relação a aplicação p considerada.

Definição 1.2.2. Um *espaço de recobrimento* para um espaço X, ou simplesmente um *recobrimento*, é um par $(\widetilde{X}; p)$, sendo $\widetilde{X}$ um espaço conexo por caminhos e $p : \widetilde{X} \to X$ uma aplicação, chamada *projeção de recobrimento*, tal que para cada $x \in X$, existe uma vizinhança aberta U_x de x em X que é igualmente recoberta por p.

Observação 1.2.1. Note que se $(\widetilde{X}; p)$ é um espaço de recobrimento de X, então $p : \widetilde{X} \to X$ é sobrejetora e por isso X será também um espaço conexo por caminhos. Ainda, p é uma aplicação aberta, como mostra [13] na página 274.

Convenção 1.2.1. As vezes diremos somente que um dado espaço $\widetilde{X}$ é um recobrimento de X, quando a projeção de recobrimento $p : \widetilde{X} \to X$ estiver clara no contexto, ou sua omissão não causar confusões. Portanto frases como *o recobrimento $\widetilde{X}$ de X* serão usadas livremente no decorrer do texto.

Lema 1.2.1. *Sejam $(\tilde{X}, p)$ um espaço de recobrimento de X, Y um espaço conexo e $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ uma aplicação. Fixado $\tilde{x}_0$ na fibra $p^{-1}(x_0)$, existe no máximo uma aplicação $\tilde{f} : (Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$.*

Demonstração. Página 276 de [13]. □

Definição 1.2.3. Dados X, Y e Z espaços, e duas aplicações $\phi : X \to Y$, $\gamma : Z \to Y$, um *levantamento* de γ relativamente a ϕ é uma aplicação $\widetilde{\gamma} : Z \to X$ de forma que o diagrama abaixo torna-se comutativo.

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \overset{\widetilde{\gamma}}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\ Z & \xrightarrow[\gamma]{} & Y \end{array} \tag{1.13}$$

Teorema 1.2.1. *Toda projeção de recobrimento é uma fibração.*

Demonstração. Pode ser encontrada na página 67 de [15] e também na página 277 de [13]. □

Observação 1.2.2. Em suma, o teorema anterior afirma que, se $(\widetilde{X}, p)$ é um espaço de recobrimento de X, Y é um espaço qualquer e $j, \widetilde{f}, F$ são aplicações expressas no diagrama (1.14), taid que $F(y,0) = p\widetilde{f}(y)$, para todo $y \in Y$, então a solução $\widetilde{F}$ existe.

$$\begin{array}{ccc} Y \times 0 & \xrightarrow{\widetilde{f}} & \widetilde{X} \\ {\scriptstyle j}\downarrow & \overset{\widetilde{F}}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Y \times I & \xrightarrow[F]{} & X \end{array} \tag{1.14}$$

Observe que se o espaço Y for conexo, então a aplicação $\widetilde{F}$ é única, em virtude do lema (1.2.1). Dizemos neste caso que p possui a propriedade do levantamento único de homotopias (o que não é satisfeito no caso de uma fibração qualquer).

Corolário 1.2.1. *Se $(\widetilde{X}; p)$ é um espaço de recobrimento de X, todo caminho $f : (I,0) \to (X, x_0)$ possui um único levantamento $\widetilde{f} : (I,0) \to (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ com relação a p, para $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$.*

Observação 1.2.3. O corolário acima traduz-se dizendo que toda projeção de recobrimento possui a propriedade do levantamento único de caminhos, em que a unicidade se refere ao ponto inicial $\widetilde{f}(0)$ do caminho, que uma vez escolhido, faz com que o levantamento $\widetilde{f}$ seja o único com esta propriedade.

Corolário 1.2.2. *Considere $(\tilde{X}; p)$ espaço de recobrimento de X. Sejam $x_0, x_1 \in X$ e $f, g : I \to X$ caminhos entre x_0 e x_1, com $\tilde{x}_0$ na fibra sobre x_0.*

- ***(i)*** *Se $F : I \times I \to X$ é uma homotopia relativa $F : f \cong g$ rel ∂I, então existe uma única função contínua $\widetilde{F} : I \times I \to \widetilde{X}$ tal que $p \circ \widetilde{F} \equiv F$ e $\widetilde{F}(0,0) = \widetilde{x}_0$.*
- ***(ii)*** *Se $\widetilde{f}$ e $\widetilde{g}$ são levantamentos de f e g, respectivamente, com $\widetilde{f}(0) = \widetilde{x}_0 = \tilde{g}(0)$, então $\widetilde{f}(1) = \widetilde{g}(1)$ e $\widetilde{F} : \widetilde{f} \cong \widetilde{g}$ rel ∂I.*

Demonstração.

(i) Segue do teorema anterior e da unicidade do levantamento para $Y = I$.

(ii) Sendo $\widetilde{F}$ dada pelo ítem i, defina $\widetilde{F}_0 : I \to \widetilde{X}$ por $\widetilde{F}_0(t) = \widetilde{F}(t,0)$, e note que pela unicidade do levantamento (para domínio conexo) temos $\widetilde{F}_0 = \widetilde{f}$, pois $p\widetilde{F}_0 = f$ e $\widetilde{F}_0(0) = \widetilde{F}(0,0) = \widetilde{x}_0 = \widetilde{f}(0)$.

Observe agora que a restrição $\widetilde{F}|\{0\} \times I \to \widetilde{X}$, $\widetilde{F}(0,t)$, $t \in I$, é um caminho em $\widetilde{X}$. E se $\overline{x_0} : I \to X$ é o caminho constante em x_0, e $\widetilde{\overline{x}_0} : I \to \widetilde{X}$ o único levantamento de $\overline{x_0}$ tal que $\widetilde{\overline{x}}_0(0) = \widetilde{x}_0$, teremos $\widetilde{\overline{x}}_0(0) = \widetilde{F}(0,0) = \widetilde{x}_0$ e $p\widetilde{F}(0,t) = F(0,t) = x_0$, pois $F : f \cong g$ rel $\{0,1\}$. Isto é, $\widetilde{F}|\{0\} \times I = \widetilde{\overline{x}}_0$, portanto $\widetilde{F}|\{0\} \times I$ é o caminho constante em

$\widetilde{x}_0$. De forma semelhante, considere o caminho $\widetilde{F}|\{1\} \times I$ em $\widetilde{X}$, e note que este é o caminho constante em $\widetilde{f}(1)$.

Defina $\widetilde{F}_1 : I \to \widetilde{X}$ por $\widetilde{F}_1(t) = \widetilde{F}(t, 1)$, e observe que $p\widetilde{f}_1(t) = p\widetilde{F}(t, 1) = F(t, 1) = g(t)$, para todo $t \in I$, e $\widetilde{F}_1(0) = \widetilde{F}(0, 1) = \widetilde{x}_0$, portanto $\widetilde{F}_1 = \widetilde{g}$, pela unicidade do levantamento. Assim segue que $\widetilde{g}(1) = \widetilde{F}_1(1) = \widetilde{F}(1, 1) = \widetilde{f}(1)$ e $\widetilde{F} : \widetilde{f} \cong \widetilde{g}$ rel $\{0, 1\}$. □

A partir daqui usaremos notações e terminologias fixadas no apêndice A.

Proposição 1.2.1. *Sejam $(\tilde{X}; p)$ um espaço de recobrimento de X. Para cada $x_0 \in X$, a fibra $Y = p^{-1}(x_0)$ é um $\pi_1(X, x_0)-$conjunto transitivo. Ainda, para $\widetilde{x}_0 \in Y$, o estabilizador de $\widetilde{x}_0$ é o subgrupo $p_\sharp\pi_1\left(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0\right)$.*

Demonstração. Basta definir a ação $Y \times \pi_1(X, x_0) \to Y$ por $(\widetilde{x}, [\alpha]) \mapsto \widetilde{\alpha}_{\widetilde{x}}(1)$ (que está bem definida graças ao corolário (1.2.2)), de forma que $\widetilde{\alpha}_{\widetilde{x}} : I \to \widetilde{X}$ denota o único levantamento de α começando no ponto $\widetilde{x}$. E para ver que esta ação é transitiva, fixe $\widetilde{x}_1 \in Y$ e tome $\widetilde{x} \in Y$ qualquer. Tomando $\widetilde{\lambda}$ um caminho entre $\widetilde{x}_1$ e $\widetilde{x}$, temos $[p(\widetilde{\lambda})] \in \pi_1(X, x_0)$, com $(\widetilde{x}_1, [p(\widetilde{\lambda})]) \mapsto \widetilde{\lambda}(1) = \widetilde{x}$.

Provaremos agora que $\pi_1(X, x_0)_{\widetilde{x}_0} = p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$. Supondo $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)_{\widetilde{x}_0}$, então $\widetilde{x}[\alpha] = \widetilde{x}_0 = \widetilde{\alpha}_{\widetilde{x}_0}(1)$, logo $[\widetilde{\alpha}_{\widetilde{x}_0}] \in \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$. Como $[\alpha] = [p\widetilde{\alpha}_{\widetilde{x}_0}] \in p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$, temos $\pi_1(X, x_0)_{\widetilde{x}_0} \subseteq p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$.

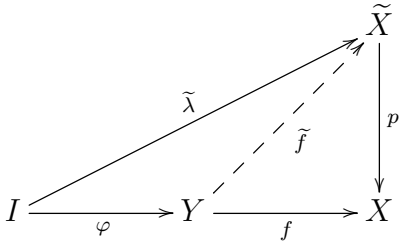
Por outro lado, supondo $[\alpha] = [p\widetilde{\alpha}_1]$, para algum $[\widetilde{\alpha}_1] \in \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$, então necessariamente $\widetilde{\alpha}_1 = \widetilde{\alpha}_{\widetilde{x}_0}$, consequentemente $\widetilde{\alpha}_1(1) = \widetilde{\alpha}_{\widetilde{x}_0}(1) = \widetilde{x}_0$, isto é, $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)_{\widetilde{x}_0}$. □

Teorema 1.2.2. *Sejam Y um espaço conexo e localmente conexo por caminhos, $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ uma aplicação e $(\tilde{X}; p)$ um espaço de recobrimento de X. Então existe uma única aplicação $\tilde{f} : (Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, sendo $\tilde{x}_0 \in p^{-1}x_0$, levantamento de f se, e somente se, $f_\sharp(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$.*

Demonstração. Assumindo que $\widetilde{f}$ exista, a unicidade segue da conexidade de Y. E verifica-se facilmente a condição $f_\sharp\pi_1(Y, y_0) = p_\sharp \circ \widetilde{f}_\sharp\pi_1(Y, y_0) \subseteq p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$.

Supondo agora que $f_\sharp\pi_1(Y, y_0) \subseteq p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$, vamos construir o levantamento $\widetilde{f}$.

Fixe $y \in Y$ e seja $\varphi : I \to Y$ um caminho entre y_0 e y. Denotando por λ a composição $f\varphi$, seja $\widetilde{\lambda} : I \to \widetilde{X}$ o único levantamento de λ tal que $\widetilde{\lambda}(0) = \widetilde{x}_0$. Defina então $\widetilde{f}(y) = \widetilde{\lambda}(1)$, e note que desta forma teremos $p \circ \widetilde{f}(y) = p\widetilde{\lambda}(1) = f\varphi(1) = f(y)$, para cada y fixado inicialmente.



(1.15)

Afirmamos que $\widetilde{f}$ está bem definida. De fato, considere $\varphi_1 : I \to Y$ outro caminho entre y_0 e y. Então $[\varphi * \varphi_1^{-1}] \in \pi_1(Y, y_0)$, e $f_\sharp[\varphi * \varphi_1^{-1}] = [f(\varphi * \varphi_1^{-1})] \in \pi_1(X, x_0)$, ainda, como (pela

hipótese) $[f(\varphi * \varphi_1^{-1})] = f_\sharp[\varphi * \varphi_1^{-1}] \in f_\sharp\pi_1(Y, y_0) \subseteq p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$, existe $[\widetilde{\psi}] \in \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ tal que $[f(\varphi * \varphi_1^{-1})] = [p(\widetilde{\psi})]$.

Logo $[f(\varphi * \varphi_1^{-1}) * p(\widetilde{\lambda}_1)] = [p(\widetilde{\psi}) * p(\widetilde{\lambda}_1] \Rightarrow [f(\varphi)] = [p(\widetilde{\psi} * \widetilde{\lambda}_1)]$, isto é, $f(\varphi) \cong p(\widetilde{\psi} * \widetilde{\lambda}_1)$ rel$\{0,1\}$, então $\widetilde{\lambda} \cong \widetilde{\psi} * \widetilde{\lambda}_1$ rel $\{0,1\}$, e pelo corolário (1.2.2) $\widetilde{\lambda}(1) = \widetilde{\psi} * \widetilde{\lambda}(1) = \widetilde{\lambda}(1)$. Portanto $\widetilde{f}$ está bem definida. O teorema está demonstrado ao provarmos que $\widetilde{f}$ assim definida é contínua, o que faremos a seguir.

Sejam $y \in Y$, $\tilde{x} = \tilde{f}(y)$ e $\tilde{U}_1$ uma vizinhança de $\tilde{x}$. Queremos encontrar um aberto V, vizinhança de y tal que $\tilde{f}(V) \subseteq \tilde{U}_1$. Para tanto, considere $x = p(\widetilde{x}) \in X$, U vizinhança admissível de x e S a folha sobre U que contém $\widetilde{x}$. Note que podemos assumir que $\widetilde{U}_1 \subseteq S$, pois caso isso não ocorra, substitua $\widetilde{U}_1$ por $\widetilde{U}_1 \cap S$.

Como p é uma aplicação aberta, $U_1 = p(\widetilde{U}_1) \subseteq X$ é um aberto que contém x, e $U_1 \subseteq U$, pois $\widetilde{U}_1 \subseteq S$. Da continuidade de f tome a vizinhança aberta $f^{-1}(U_1)$ de y em Y. E sendo $V \subseteq Y$ um aberto conexo por caminhos, com $y \in V$ e $V \subseteq f^{-1}(U_1)$, afirmamos que $\widetilde{f}(V) \subseteq \widetilde{U}_1$, sendo $\widetilde{f}$ contínua.

Tome $h : I \to Y$ um caminho entre y_0 e y, e $\widetilde{\lambda}$ o levantamento de $f \circ h$ tal que $\widetilde{\lambda}(0) = \widetilde{x}_0$. Se $v \in V$, existe um caminho $h_2 : I \to V$ entre y e v. Assim $h_2(I) \subseteq V \subseteq f^{-1}(U_1)$, então $f \circ h_2(I) \subseteq U_1$. Considere $\widetilde{\mu} : I \to \widetilde{X}$ o levantamento de $f \circ h_2$ tal que $\widetilde{\mu}(0) = \widetilde{x}$. Como $U_1 \subseteq U$ e U é um aberto admissível, então $\widetilde{\mu} = (p|S)^{-1} \circ (f \circ h_2)$, portanto $\widetilde{\mu}(1) \in S \cap \widetilde{U}_1 = \widetilde{U}_1$. Como $\tilde{\lambda}(1) = \tilde{x} = \tilde{\mu}(0)$, podemos fazer $\widetilde{\lambda} * \widetilde{\mu}$. Note que $p \circ (\widetilde{\lambda} * \widetilde{\mu}) = (p \circ \widetilde{\lambda}) * (p \circ \widetilde{\mu}) = (f \circ h) * (f \circ h_2)$, sendo $h * h_2$ um caminho entre y_0 e v. Ainda, $(\widetilde{\lambda} * \widetilde{\mu})(0) = \widetilde{\lambda}(0) = \tilde{x}_0$. Portanto $\tilde{f}(v) = (\tilde{\lambda} * \tilde{\mu})(1) = \tilde{\mu}(1) \in \tilde{U}_1$, o que prova a afirmação. □

Teorema 1.2.3. *Sejam X um espaço conexo, localmente conexo por caminhos, $(\widetilde{X}; p)$ e $(\widetilde{Y}; q)$ espaços de recobrimento de X. Tome $x_0 \in X$, $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{X}$ e $\widetilde{y}_0 \in \widetilde{Y}$ tais que $p(\widetilde{x}_0) = x_0 = q(\widetilde{y}_0)$. Se $q_\sharp\pi_1(\widetilde{Y}, \widetilde{y}_0) \subseteq p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$, então existe uma única aplicação $h : (\widetilde{Y}, \widetilde{y}_0) \to (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ tal que $ph = q$. Ainda, o par $(\widetilde{Y}; h)$ é um espaço de recobrimento de $\widetilde{X}$.*

Demonstração. Como $q_\sharp\pi_1(\widetilde{Y}, \widetilde{y}_0) \subseteq p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$, segue do teorema (1.2.2) que existe uma única função h como no diagrama abaixo, tal que $ph = q$.

$$\begin{array}{ccc} (\widetilde{Y}, \widetilde{y}_0) & \overset{h}{\dashrightarrow} & (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \\ & {\scriptstyle q}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p} & \\ & (X, x_0) & \end{array} \tag{1.16}$$

Provemos agora que $(\widetilde{Y}; h)$ é um recobrimento de $\widetilde{X}$. Sejam $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$, $x = p(\widetilde{x}) \in X$, U_p vizinhança $p-$admissível de x e U_q vizinhança $q-$admissível de x. Então $U_p \cap U_q$ é uma vizinhança aberta de x, e existe um berto conexo por caminhos $U \subseteq U_p \cap U_q$, vizinhança de x, que é igualmente recoberto[5] por p e q.

[5] Se U é igualmente recoberto por p, e $V \subseteq U$, então V também é igualmente recoberto por p.

Sejam $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{j\in J} S_j$, considerando $S_j \subseteq \widetilde{X}$ as folhas sobre U e $S = S_{j_0}$ a folha que contém $\widetilde{x}$. Como $\widetilde{Y}$ é conexo por caminhos e h é sobrejetora, basta mostrar que S é igualmente recoberto por h.

Com efeito, seja $q^{-1}(U) = \bigsqcup_{k\in K} Z_k$, sendo $Z_k \subseteq \widetilde{Y}$ as folhas sobre U, isto é, $q|Z_k : Z_k \to U$ são homeomorfismos. Então cada Z_k é conexo por caminhos, e $ph(Z_k) = q(Z_k) = U$. Assim $h(Z_k) \subseteq p^{-1}(U) = \bigsqcup_{j\in J} S_j$. Como $h(Z_k)$ são conexos por caminhos, existem apenas as possibilidades $h(Z_k) \subseteq S$ ou $h(Z_k) \cap S = \emptyset$. Portanto $h^{-1}(S)$ é a união disjunta das folhas Z_k, tais que $h(Z_k) \subseteq S$. E se $h(Z_k) \subseteq S$, o diagrama baixo é comutativo,

$$\begin{array}{ccc} Z_k & \xrightarrow{h|Z_k} & S \\ & {\scriptstyle q|Z_k}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p|S} & \\ & U & \end{array} \tag{1.17}$$

e como $q|Z_k$ e $p|S$ são homeomorfismos, então $h|Z_k$ é um homeomorfismo. □

Definição 1.2.4. Dado $(\widetilde{X}; p)$ um espaço de recobrimento de X, chamamos de *translação de recobrimento* (de $\widetilde{X}$) a todo homeomorfismo $T : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ que satisfaz $pT = p$. Denotamos por $Cov(\widetilde{X}/X)$ ao conjunto de todas as translações de recobrimento de $\widetilde{X}$.

Observação 1.2.4. Observe que $Cov(\widetilde{X}/X)$ é um grupo quando munido da operação de composição de funções. Tal grupo age naturalmente em $\widetilde{X}$ por meio da ação $Cov(\widetilde{X}/X) \times \widetilde{X} \to \widetilde{X}$, $(T, \widetilde{x}) \mapsto T(\widetilde{x})$, isto é, $\widetilde{X}$ é um $Cov(\widetilde{X}/X)-$conjunto.

Definição 1.2.5. Dizemos que um recobrimento $(\widetilde{X}; p)$ de X é *regular* quando $p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ é um subgrupo normal de $\pi_1(X, x_0)$, sendo $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$.

Proposição 1.2.2. *Sejam X um espaço conexo, localmente conexo por caminhos e $x_0 \in X$. Um recobrimento $(\widetilde{X}; p)$ de X é regular se, e somente se, $Y = p^{-1}(x_0)$ é um $Cov(\widetilde{X}/X)-$conjunto transitivo.*

Demonstração. Página 289 de [13]. □

Proposição 1.2.3. *Seja $(\widetilde{X}; p)$ um recobrimento de X. Dada $T \in Cov(\widetilde{X}/X)$, se $T \neq Id$ então T não possui pontos fixos. Mais ainda, se existe $T_1 \in Cov(\widetilde{X}/X)$ tal que $T(\widetilde{x}) = T_1(\widetilde{x})$, para algum $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$, então $T = T_1$.*

Demonstração. Suponha que exista $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ tal que $T(\tilde{x}) = \widetilde{x}$, e seja $x = p(\widetilde{x}) \in X$. Como $pT = p$ e $pId = p$, então os diagramas abaixo comutam.

$$\begin{array}{ccc} (\widetilde{X}, \widetilde{x}) & \xrightarrow{T} & (\widetilde{X}, \tilde{x}) \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p} & \\ & (X, x) & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (\widetilde{X}, \widetilde{x}) & \xrightarrow{Id} & (\widetilde{X}, \widetilde{x}) \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p} & \\ & (X, x) & \end{array} \tag{1.18}$$

Mas como a função T é a única (pelo teorema (1.2.3)) que torna o diagrama acima comutativo, deve-se ter $h = Id$.

Supondo que $T(\widetilde{x}) = T_1(\widetilde{x})$, note que $T_1^{-1} \circ T \in Cov(\widetilde{X}/X)$ e $T_1^{-1} \circ T(\widetilde{x}) = \widetilde{x}$, portanto segue da primeira parte da demonstração que $T = T_1$. □

Lema 1.2.2. *Sejam $(\widetilde{X}; p)$ um recobrimento de X, $x_0 \in X$. Dados $\widetilde{x}_0, \widetilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$, existe $T \in Cov(\widetilde{X}/X)$ tal que $T(\widetilde{x}_0) = \widetilde{x}_1$ se, e somente se, existe $\varphi \in Aut_{\pi_1(X,x_0)}(p^{-1}(x_0))$ com $\varphi(\widetilde{x}_0) = \widetilde{x}_1$.*

Demonstração. Página 292 de [13]. □

Teorema 1.2.4. *Suponha X conexo e localmente conexo por caminhos, $(\widetilde{X}; p)$ um recobrimento de X e $x_0 \in X$. Existe um isomorfismo $Cov(\widetilde{X}/X) \cong Aut_{\pi_1(X,x_0)}(p^{-1}(x_0))$.*

Demonstração. Considere a função $\mathcal{A}$ que a cada translação T associa sua restrição $T|Y$, sendo $Y = p^{-1}(x_0)$. É imediato que $T(Y) = Y$, pois as fibras dos recobrimentos são subconjuntos discretos, então $T|Y : Y \to Y$ é uma bijeção, e denotaremos $T|Y = \varphi_T$.

Afirmamos que $\varphi_T \in Aut_{\pi_1(X,x_0)}(Y)$. Para demonstrar isto, considere $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ e $\widetilde{x} \in Y$. Por definição, temos $\varphi_T([\alpha]\widetilde{x}) = \varphi_T(\widetilde{\alpha}_{\widetilde{x}}(1))$, por outro lado, $[\alpha]\varphi_T(\widetilde{x}) = \widetilde{\alpha}_{T(\widetilde{x})}(1)$. Mas note que $\varphi_T(\widetilde{\alpha}_{\widetilde{x}}(0)) = \varphi_T(\widetilde{x}) = T(\widetilde{x})$, e $\widetilde{\alpha}_{T(\widetilde{x})}(0) = T(\widetilde{x})$, portanto tais levantamentos coincidem, e em particular $\varphi_T([\alpha]\widetilde{x}) = [\alpha]\varphi_T(\widetilde{x})$.

Mostramos então que $\mathcal{A} : Cov(\widetilde{X}/X) \to Aut_{\pi_1(X,x_0)}(Y)$ é uma função bem definida. Provaremos agora que $\mathcal{A}$ é um isomorfismo. É claro que $\mathcal{A}$ é um homomorfismo, e da proposição (1.2.3) $\mathcal{A}$ é também injetora.

Sejam $\varphi \in Aut_{\pi_1(X,x_0)}(Y)$ e $\widetilde{x} \in Y$. Pelo lema (1.2.2), existe $T \in Cov(\widetilde{X}/X)$ tal que $\varphi(\widetilde{x}) = T(\widetilde{x})$. Como Y é um $\pi_1(X, x_0)-$conjunto transitivo, dado $\widetilde{x}_1 \in Y$ existe $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ com $\widetilde{x}_1 = [\alpha]\widetilde{x}$. Assim, $T(\widetilde{x}_1) = T([\alpha]\widetilde{x}) = [\alpha]T(\widetilde{x}) = [\alpha]\varphi(\widetilde{x}) = \varphi([\alpha]\widetilde{x}) = \varphi(\widetilde{x}_1)$. Portanto $T|Y = \varphi$, isto é, $\mathcal{A}(T) = \varphi$ e $\mathcal{A}$ é também sobrejetora. □

Corolário 1.2.3. *Sejam X um espaço conexo e localmente conexo por caminhos e $(\widetilde{X}; p)$ um recobrimento de X. Então, para $x_0 \in X$ e $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, tem-se*

$$Cov(\widetilde{X}/X) \cong N_{\pi_1(X,x_0)}\left(p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)\right) \Big/ p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0). \tag{1.19}$$

Demonstração. Da proposição (1.2.1), $Y = p^{-1}(x_0)$ é um $\pi_1(X, x_0)$ conjunto transitivo e $G_{\widetilde{x}_0} = p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$. Logo, da proposição (A.0.2), tem-se um isomorfismo

$$Aut_{\pi_1(X,x_0)}(Y) \cong N_{\pi_1(X,x_0)}\left(p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)\right) / p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0). \tag{1.20}$$

E o resultado segue do teorema (1.2.4). □

Observação 1.2.5. Observe que se $(\widetilde{X}; p)$ for um recobrimento regular de X, então o resultado do corolário (1.2.3) reduz-se ao isomorfismo $Cov(\widetilde{X}/X) \cong \pi_1(X, x_0)/p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$.

Mais ainda, se $\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \cong \{1\}$, então existe um isomorfismo que a cada elemento β em $\pi_1(X, x_0)$ associa uma única translação de recobrimento $T = T_\beta \in Cov(\widetilde{X}/X)$

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \to & Cov(\widetilde{X}/X) \\ \beta & \mapsto & T_\beta \end{array} . \tag{1.21}$$

1.3 Construção de Recobrimentos a Partir de um Subgrupo e Existência de Recobrimentos Universais

Definição 1.3.1. Dizemos que um espaço de recobrimento $(\widetilde{X}; p)$ de X é *universal* quando $\widetilde{X}$ é um espaço simplesmente conexo.

Observação 1.3.1. Note que $(\widetilde{X}; p)$ ser um recobrimento universal de X é equivalente a $p_\sharp\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \cong \{1\}$, com $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, pois $p_\sharp$ é uma aplicação injetora[6].

A seguir faremos a construção de um espaço de recobrimento $\widetilde{X}$ de X a partir de um subgrupo do grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$, e tal construção dará condições suficientes e necessárias para que um espaço possua recobrimento universal.

Definição 1.3.2. Sejam X um espaço com ponto base $x_0 \in X$ e defina o conjunto $P(x_0) = \{(y, \alpha)\ ;\ \alpha$ é um caminho em X com $\alpha(0) = x_0$ e $\alpha(1) = y\}$. E fixado um subgrupo $G \subseteq \pi_1(X, x_0)$, defina no conjunto $P(x_0)$ a seguinte relação entre seus elementos:

$$(y_1, \alpha_1) \sim_G (y_2, \alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} (i) & y_1 = y_2 \\ (ii) & [\alpha_1 * \alpha_2^{-1}] \in G \end{cases} \tag{1.22}$$

Observe que a relação $\sim_G$ é de equivalência no conjunto $P(x_0)$, e denotaremos a classe de equivalência de um elemento $(y, \alpha) \in P(x_0)$ por $\langle y, \alpha\rangle_G$ ou simplesmente $\langle y, \alpha\rangle$, e por $\widetilde{X}(G)$ ao conjunto quociente de $P(x_0)$ pela relação $\sim_G$.

Definição 1.3.3. Dados $\langle y, \alpha\rangle \in \widetilde{X}(G)$ e U uma vizinhança aberta de y em X, introduzimos a seguinte notação:

$$U\left(\langle y, \alpha\rangle\right) = \{\langle \lambda(1), \alpha * \lambda\rangle\ ;\ \lambda(0) = y \text{ e } \lambda(I) \subseteq U\} \subseteq \widetilde{X}(G). \tag{1.23}$$

Nessas condições o caminho $\alpha * \lambda : I \to U$ é chamado de *continuação de* α *em* U.

Definição 1.3.4. Defina a função $p_G : \widetilde{X}(G) \to X$ por $p_G\langle y, \alpha\rangle = y$, que nada mais é do que a

[6] Veja o teorema 10.7 da página 279 de [13].

passagem ao quociente da restrição da aplicação $ev_1 : X^I \to E$ ao subconjunto[7] $P(x_0)$.

$$\begin{array}{ccc} (P(x_0), \overline{x}_0) & \xrightarrow{ev_1} & (X, x_0) \\ \downarrow{\scriptstyle \varpi} & \nearrow_{p_G} & \\ \left(\widetilde{X}(G), \langle x_0, \overline{x}_0\rangle\right) & & \end{array} \tag{1.24}$$

Proposição 1.3.1. *A família dos subconjuntos $U(\langle y, \alpha\rangle)$ define a base de uma topologia em $\widetilde{X}(G)$, segundo a qual p_G, definida em (1.3.4), é contínua e sobrejetora.*

Demonstração. Página 296 de [13]. □

Proposição 1.3.2. *Todo caminho $\varphi \in P(x_0)$ possui um (único) levantamento $\widetilde{\varphi} : I \to \widetilde{X}(G)$, tal que $\widetilde{\varphi}(0) = \langle x_0, \overline{x}_0\rangle$ e $\widetilde{\varphi}(1) = \langle \varphi(1), \varphi\rangle$.*

Demonstração. Para cada $t \in I$, defina o caminho $\varphi_t : I \to X$ por $\varphi_t(s) = \varphi(ts)$. Note que $\varphi_0 = \overline{x}_0$ e $\varphi_1 = \varphi$, sendo cada φ_t um caminho entre x_0 e $\varphi(t)$.

Fazendo $\widetilde{\varphi}(t) = \langle \varphi_t(1), \varphi_t\rangle$, para cada $t \in I$, note que $p_G \circ \widetilde{\varphi}(t) = \varphi_t(1) = \varphi(t)$, e em particular, $\widetilde{\varphi}(0) = \langle x_0, \overline{x}_0\rangle$ e $\widetilde{\varphi}(1) = \langle \varphi(1), \varphi\rangle$. A demonstração está completa notando que $\widetilde{\varphi}$ assim definida é contínua, e portanto um levantamento de φ. □

Corolário 1.3.1. *O espaço $\widetilde{X}(G)$ é conexo por caminhos.*

Demonstração. Segue imediatamente da proposição anterior. □

Definição 1.3.5. Um espaço X é dito *semilocalmente 1-conexo* se cada $x \in X$ possui uma vizinhança aberta $U \subseteq X$ tal que o homomorfismo induzido pela inclusão $i_\sharp : \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ é trivial. Ou equivalentemente, se todo laço $\psi_x : I \to U$ em x é homotópico ao laço constante $\overline{x}$, quando visto como um laço $\psi_x : I \to X$ em X, isto é, é homotópico ao laço constante em X.

Teorema 1.3.1. *Seja $G \subseteq \pi_1(X, x_0)$ um subgrupo, e suponha X conexo, localmente conexo por caminhos e semilocalmente 1-conexo. Então $(\widetilde{X}(G); p_G)$ é um espaço de recobrimento de X e $(\widetilde{p}_G)_\sharp\, \pi_1\left(\widetilde{X}(G), \langle x_0, \overline{x}_0\rangle\right) = G$.*

Demonstração. Sejam $e \in X$ e $W \subseteq X$ uma vizinhança aberta de e, tal que $i_\sharp : \pi_1(W, e) \to \pi_1(X, e)$ é o homomorfismo trivial. Tome $U \subseteq W$ vizinhança aberta de e e conexa por caminhos.

Denotando p_G simplesmente por p, tome $\langle e, \alpha\rangle \in p^{-1}(e)$. Afirmamos que $p|U(\langle e, \alpha\rangle) : U(\langle e, \alpha\rangle) \to U$ é um homomorfismo.

Dado $x \in U$, seja $\lambda : I \to U$ um caminho entre e e x. Logo $\langle x, \alpha * \lambda\rangle \in U(\langle e, \alpha\rangle)$, e $p\langle x, \alpha * \lambda\rangle = x$, ou seja, $p|U(\langle e, \alpha\rangle)$ é sobrejetora.

[7] Tal inclusão é na verdade um abuso de linguagem, uma vez que os elementos em X^I não são escritos na forma de pares ordenados (x, α), onde $\alpha : I \to X$ é um caminho com $\alpha(1) = x$.

A restrição $p|U(\langle e,\alpha\rangle)$ é uma injeção. De fato, sejam $\langle y,\alpha*\lambda\rangle, \langle z,\alpha*\mu\rangle \in U(\langle e,\alpha\rangle)$ e suponha que $p\langle y,\alpha*\lambda\rangle = p\langle z,\alpha*\mu\rangle$, isto é, $y=z$. então $[\lambda*\mu^{-1}] \in \pi_1(U,e)$, e portanto $\lambda*\mu^{-1} \cong \overline{e}$ em X. Logo, $\alpha*\lambda\mu^{-1}*\alpha^{-1} \cong \overline{e}_0$ em X, desta forma $[\alpha*\lambda*(\alpha*\mu)^{-1}] = [\overline{e}_0] \in G$, então $\langle y,\alpha*\lambda\rangle = \langle z,\alpha*\mu\rangle$.

Observe agora que $p|U(\langle e,\alpha\rangle)$ é uma aplicação aberta, pois todo aberto em $\widetilde{X}(G)$ é escrito como reunião de abertos básicos da forma $U(\langle e,\alpha\rangle)$, sendo a restrição de p uma aplicação sobrejetora. Portanto provamos que $p|U(\langle e,\alpha\rangle)$ é um homeomorfismo.

Para finalizar a demostração de que $\left(\widetilde{X}(G);p_G\right)$ é um recobrimento de X, provaremos que

$$p^{-1}(U) = \bigsqcup_{e\in U} U(\langle e,\alpha_e\rangle), \tag{1.25}$$

em que $\alpha_e : I \to X$ é um caminho com $\alpha_e(0)=x_0$ e $\alpha_e(1)=e$.

É óbvio que $\bigsqcup_{e\in U} U(\langle e,\alpha_e\rangle) \subseteq p^{-1}(U)$. Reciprocamente, tome $\langle y,\gamma\rangle$ em $p^{-1}(U)$, isto é, $y\in U$ e γ é um caminho em X entre e_0 e y. Considere $\lambda : I \to U$ um caminho entre y e $e\in U$. Desta forma, $\gamma*\lambda : I \to X$ é uma continuação de γ em U. Podemos então considerar $\langle e,\gamma*\lambda\rangle \in p^{-1}(e)$, e note que, como $(\gamma*\lambda)*\lambda^{-1}$ é uma continuação de $\gamma*\lambda$ em U, temos

$$\langle y,\gamma\rangle = \langle y,\gamma*\lambda*\lambda^{-1}\rangle \in U(\langle e,\gamma*\lambda\rangle) \subseteq \bigsqcup_{e\in U} U(\langle e,\alpha_e\rangle). \tag{1.26}$$

Portanto a igualdadade em (1.25) se verifica.

Mostraremos agora que $(p_G)_\sharp\pi_1\left(\widetilde{X}(G),\langle x_0,\overline{x}_0\rangle\right) = G$. Para isso, tome $[\alpha]\in\pi_1(X,x_0)$ e seja $\widetilde{\alpha} : I \to \widetilde{X}(G)$ o único levantamento de α tal que $\widetilde{\alpha}(0) = \langle x_0,\overline{x}_0\rangle$. Pela proposição (1.3.2), sabemos que $\widetilde{\alpha}(t) = \langle \alpha_t(1),\alpha_t\rangle$. Assim segue que

$$\begin{aligned}
[\alpha] \in (p_G)_\sharp\pi_1\left(\widetilde{X}(G),\langle x_0,\overline{x}_0\rangle\right) &\Leftrightarrow [\widetilde{\alpha}] \in \pi_1\left(\widetilde{X}(G),\langle x_0,\overline{x}_0\rangle\right)\\
&\Leftrightarrow \widetilde{\alpha}(1) = \widetilde{\alpha}(0)\\
&\Leftrightarrow \langle \alpha(1),\alpha\rangle = \langle x_0,\overline{x}_0\rangle\\
&\Leftrightarrow \alpha(1)=x_0 \text{ e } [\alpha*\overline{x}_0^{-1}] = [\alpha] \in \pi_1(X,x_0)
\end{aligned}$$

□

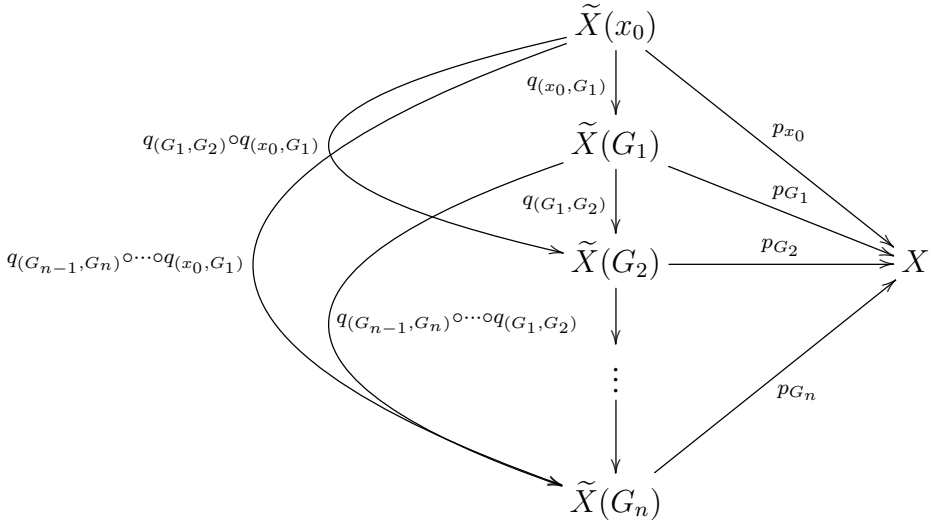
Observação 1.3.2. Sendo X um espaço conexo, localmente conexo por caminhos e semilocalmente 1-conexo, o teorema (1.3.1) garante que X possui um recobrimento universal. De fato, para cada $x_0\in X$ fixado, tome o subgrupo trivial $\{[\overline{x}_0]\} \subseteq \pi_1(X,x_0)$ e faça a construção do espaço $\widetilde{X}\left([\overline{x}_0]\right)$, que por simplicidade de notação escreveremos $\widetilde{X}(x_0)$, e a projeção de recobrimento $p_{[\overline{x}_0]}$será indicada por p_{x_0}.

Note que a recíproca também é válida, ou seja, sendo X conexo e localmente conexo por caminhos, se X possui um recobrimento universal, então X é semilocalmente 1-conexo. Pois sendo $\widetilde{X}$ um recobrimento universal de X, dado $x\in X$ sejam U_x vizinhança admissível e S_x

uma folha sobre U_x que contém $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$. Então, como $\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}) \cong \{1\}$, da comutatividade do diagrama abaixo segue que $i_\sharp$ é o homomorfismo trivial.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S_x, \widetilde{x}) & \xrightarrow{j_\sharp} & \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}) \\ \downarrow{\scriptstyle (p|S_x)} & & \downarrow{\scriptstyle p_\sharp} \\ \pi_1(U_x, x) & \xrightarrow{i_\sharp} & \pi_1(X, x) \end{array} \tag{1.27}$$

Observação 1.3.3. Suponha X um espaço conexo, localmente conexo por caminhos e semi-localmente 1-conexo. Dada qualquer cadeia crescente de subgrupos $\{1\} \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \cdots \subseteq G_n \subseteq \pi_1(X, x_0)$, podemos construir o diagrama comutativo (1.28), sendo cada aplicação $p_{x_0}, p_{G_1}, \cdots, p_{G_n}$ projeções de recobrimento dadas pelo teorema (1.3.1), e cada aplicação $q_{(x_0,G_1)}, \cdots, q_{(G_{n-1},G_n)}$ existe e é também uma projeção de recobrimento, em virtude do teorema (1.2.3). Também em decorrência do teorema (1.2.3), cada composição $q_{(G_1,G_2)} \circ q_{(x_0,G_1)}, \cdots, q_{(G_{n-1},G_n)} \circ \cdots \circ q_{(x_0,G_1)}$ e $q_{(G_{i-1},G_i)} \circ q_{(G_{j-1},G_j)}$, $i = j + 1$, é ainda uma projeção de recobrimento.



(1.28)

Observação 1.3.4. Considerando o recobrimento universal $\widetilde{X}(x_0)$, sabemos pela observação (1.2.5) que $Cov(\widetilde{X}(x_0)/X) \cong \pi_1(X, x_0)$, isto é, dada $\beta \in \pi_1(X, x_0)$, existe uma única translação de recobrimento associada, que denotamos por T_α, via um isomorfismo $\beta \overset{(\dagger)}{\longmapsto} T_\beta$.

Como sabemos, neste caso a translação T_β restrita a fibra $p_{x_0}^{-1}(x_0)$ é uma aplicação $\pi_1(X, x_0)-$equivariante, e via o isomorfismo $(\dagger)$ e a demonstração do teorema (1.2.4), temos

$$T_\beta \langle x_0, \overline{x}_0 \rangle_{x_0} = \langle x_0, \overline{x}_0 \rangle_{x_0} [\beta], \tag{1.29}$$

em que o lado direito da igualdade em (1.29) representa a ação de $\pi_1(X, x_0)$ em $p_{x_0}^{-1}(x_0)$, se-

gundo a proposição (1.2.1). Como tal ação é efetivamente computada por $\langle x_0, \overline{x}_0\rangle_{x_0}[\beta] = \widetilde{\beta}_{\langle x_0,\overline{x}_0\rangle}(1)$, pela proposição (1.3.2) concluímos que

$$T_\beta\langle x_0, \overline{x}_0\rangle_{x_0} = \langle x_0, \overline{x}_0\rangle_{x_0}[\beta] = \langle x_0, \overline{x}_0 * \beta\rangle_{x_0} = \langle x_0, \beta\rangle_{x_0}. \tag{1.30}$$

Portanto a translação T_β está totalmente determinada pelo valor $T_\beta\langle x_0, \overline{x}_0\rangle_{x_0}$, pois pela proposição (1.2.3) basta que saibamos a imagem em um único elemento de $\widetilde{X}(x_0)$. Segue ainda da igualdade em (1.29) as seguintes propriedades.

Proposição 1.3.3. *Seja X um espaço para o qual existe o recobrimento universal $(\widetilde{X}(x_0); p_{x_0})$, para $x_0 \in X$. Dados $\beta, \beta_1, \cdots, \beta_n \in \pi_1(X, x_0)$, valem as seguintes propriedades:*

(i) $T_{\beta_1} \circ \cdots \circ T_{\beta_n} = T_{\beta_1 * \cdots * \beta_n} \in Cov(\widetilde{X}(x_0)/X)$;

(ii) *Se* $\beta = 1 \in \pi_1(X, x_0)$, *então* $T_\beta = Id_{\widetilde{X}(x_0)} \in Cov(\widetilde{X}(x_0)/X)$;

(iii) $T_\beta^{-1} = T_{\beta^{-1}} \in Cov(\widetilde{X}(x_0)/X)$.

Demonstração. Seguem da igualdade em (1.29) e da proposição (1.2.3). □

CAPÍTULO 2

CLASSES DE COINCIDÊNCIA E CLASSES DE REIDEMEISTER

Neste capítulo a princípio estabelecemos alguns elementos da teoria clássica de coincidência entre aplicações, seguindo principalmente as referências [6], [10], [12] e [16]. Em seguida fornecemos uma nova abordagem desta teoria, substituindo as aplicações em questão por secções do fibrado trivial p_1, na seção 2.3, mediante às adaptações necessárias. Tal abordagem motivou alguns resultados referentes à teoria de coincidência entre secções de um fibrado arbitrário, o que fazemos na seção 2.4.

2.1 Classes de Coincidência

Dadas duas aplicações $f, g : X \to Y$, considere $\Gamma(f,g)$ o conjunto de todos os pontos de coincidência entre f e g, isto é, $\Gamma(f,g) = \{x \in X \,;\, f(x) = g(x)\}$. Observe que se Y for um espaço de Hausdorff, então $\Gamma(f,g)$ é fechado. Basta notar que $\Gamma(f,g) = (f,g)^{-1}(\Delta_Y)$, sendo $\Delta_Y = \{(y,y); y \in Y\}$ a diagonal em $Y \times Y$ (que é um subconjunto fechado se Y é de Hausdorff) e $(f,g)(x) = (f(x), g(x))$.

Mediante a hipótese de que o par (X, x_0) seja não degenerado, poderemos assumir durante toda essa seção que $\Gamma(f,g) \neq \emptyset$, com ao menos x_0 uma coincidência entre as aplicações f e g.

No conjunto $\Gamma(f,g)$ defina a seguinte relação entre seus elementos:

$$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow \text{ existe } \gamma : I \to X \text{ entre } x_1 \text{ e } x_2 \text{ tal que } f\gamma \cong g\gamma \text{ rel } \{0,1\}. \tag{2.1}$$

Proposição 2.1.1. *A relação " $\sim$ " definida em (2.1) é de equivalência.*

Demonstração. Reflexividade: Todo elemento $x \in \Gamma(f,g)$ está relacionado consigo mesmo,

pois basta considerar o caminho constante $\overline{x}$. Assim $f\overline{x}(t) = f(x) = g(x) = f\overline{x}(t)$ para todo $t \in I$, e em particular $f\overline{x} \cong g\overline{x}$ rel $\{0,1\}$.

Simetria: Suponha que $x_1 \sim x_2$, isto é, existe um caminho $\gamma : I \to X$ entre x_1 e x_2 tal que $f\gamma \cong g\gamma$ rel $\{0,1\}$. Considerando o caminho γ^{-1} entre x_2 e x_1, note que $f\gamma^{-1} \cong g\gamma^{-1}$ rel $\{0,1\}$, logo $x_2 \sim x_1$.

Transitividade: Se $x_1 \sim x_2$ e $x_2 \sim x_3$, existem caminhos γ entre x_1 e x_2 e λ entre x_2 e x_3, tais que $f\gamma \cong g\gamma$ rel $\{0,1\}$ e $f\lambda \cong g\lambda$ rel $\{0,1\}$. Sendo $\xi = \gamma * \lambda$, este é um caminho entre x_1 e x_3, e teremos $f\xi \cong g\xi$ rel $\{0,1\}$. □

Definição 2.1.1. Cada classe de equivalência $[x]$ de um elemento $x \in \Gamma(f,g)$ será chamada *classe de coincidência (de Nielsen),* e vamos denotar por $\widetilde{\Gamma}(f,g)$ ao quociente de $\Gamma(f,g)$ pela relação $\sim$. Neste conjunto $\widetilde{\Gamma}(f,g)$ estaremos considerando a topologia coinduzida pela projeção quociente $\varpi : \Gamma(f,g) \to \widetilde{\Gamma}(f,g)$.

Proposição 2.1.2. *Sejam $f, g : X \to Y$ aplicações, com X localmente conexo por caminhos e Y semilocalmente 1-conexo. Cada classe de coincidência $[x] \in \widetilde{\Gamma}(f,g)$ é um subconjunto aberto em $\Gamma(f,g)$.*

Demonstração. Tome $x \in \Gamma(f,g)$ e $U \subseteq Y$ vizinhança aberta de $f(x) = g(x) = y$, na qual todo laço em y é homotópico ao laço constante $\overline{y}$. Como X é localmente conexo por caminhos e f, g são contínuas, podemos escolher um aberto conexo por caminhos $W \subseteq f^{-1}(U) \cap g^{-1}(U)$, que é uma vizinhança de x.

Agora note que se $x_1 \in W \cap \Gamma(f,g)$ e $\gamma_1 : I \to W$ é um caminho entre x e x_1, então $f\gamma_1$ e $g\gamma_1$ são caminhos em W, tais que $f(\gamma_1) * g(\gamma_1)^{-1}$ é um laço em y (que é homotópico ao laço constante), logo $f\gamma_1 \cong g\gamma_1$ rel $\{0,1\}$. Portanto $[x]$ é um subconjunto aberto de $\Gamma(f,s)$. □

Teorema 2.1.1. *Sejam $f, g : X \to Y$ aplicações.*

- ***(i)*** *Cada componente conexa por caminhos de $\Gamma(f,g)$ está contida em uma única classe de coincidência;*
- ***(ii)*** *Se X for conexo, localmente conexo por caminhos e Y semilocalmente 1-conexo, então $\widetilde{\Gamma}(f,g)$ é discreto;*
- ***(iii)*** *Se nas hipóteses do ítem (ii), Y for de Hausdorff e X for compacto, então $\widetilde{\Gamma}(f,g)$ é finito.*

Demonstração.

(i) Imediato, pois sendo dois elementos na mesma componente conexa por caminhos, tal caminho entre eles estará contido em $\Gamma(f,g)$.

(ii) Seja $[b] \in \widetilde{\Gamma}(f,g)$ e tome V uma vizinhança de $f(b) = g(b)$ em Y tal que

$$\pi_1\left(V, f(b) = g(b)\right) \xrightarrow{i_\sharp} \pi_1\left(Y, f(b) = g(b)\right) \tag{2.2}$$

é o homomorfismo trivial, e escolha $U \subseteq X$ um aberto conexo por caminhos tal que $b \in U \subseteq f^{-1}(V) \cap g^{-1}(V)$. Afirmamos que todo elemento de $W = U \cap \Gamma(f,g)$ está em $[b]$.

De fato, se $b_1 \in W$, então existe um caminho $\gamma : I \to U$ entre b e b_1, e observe que $f(b_1) = g(b_1)$ e $f\gamma*(g\gamma)^{-1}$ é um laço em $f(b) = g(b)$. Logo $[f\gamma*(g\gamma)^{-1}] \in \pi_1(V, f(b) = g(b))$ e por (2.2) temos $f\gamma \cong g\gamma$ rel $\{0,1\}$, isto é, $b_1 \in [b]$.

Provamos assim que cada elemento $[b]$ é aberto em $\widetilde{\Gamma}(f,g)$, pois este está sendo considerado munido da topologia coinduzida de $\Gamma(f,g)$ pela projeção quociente $\varpi : \Gamma(f,g) \to \widetilde{\gamma}(f,g)$, portanto $\widetilde{\Gamma}(f,g)$ é discreto.

(iii) Nestas condições o conjunto $\Gamma(f,g)$ é compacto, e pela continuidade e sobrejetividade da projeção quociente $\varpi : \Gamma(f,g) \to \widetilde{\Gamma}(f,g)$, segue que $\widetilde{\Gamma}(f,g)$ é compacto e discreto pelo ítem (ii), donde é finito. □

Uma parte da teoria de coincidência de aplicações se preocupa em obter limitantes para o cardinal de $\widetilde{\Gamma}(f,g)$ e com este intuito vamos supor a partir de agora que os espaços X e Y satisfazem as hipótese do ítem (iii) no (2.1.1) anterior, e estaremos interessados em obter um limitante para o cardinal de $\widetilde{\Gamma}(f,g)$, pois neste caso $|\widetilde{\Gamma}(f,g)| < \infty$. Tal limitante é obtido por meio do estudo das classes de Reidemeister, que veremos na seção 2.2 a seguir.

Lembremos também que ao tomarmos o domínio X das aplicações f e g (ou mais geralmente de duas secções $s, f : B \to E$) e fixarmos um ponto base $x_0 \in X$, estamos supondo que o par (X, x_0) é não degenerado, tornando possível assumir, a menos de homotopia, que $x_0 \in \Gamma(f,g)$ (ou $b_0 \in \Gamma(s,f)$ no contexto do problema 2).

2.2 Classes de Reidemeister

Dados dois homomorfismos de grupos $\varphi, \psi : G \to H$ e F um subgrupo de H, considere a relação definida em F por

$$a_1 \sim_{(\varphi,\psi;F)} a_2 \Leftrightarrow \text{Existe } b \in G \text{ tal que } \varphi(b)a_1 = a_2\psi(b). \tag{2.3}$$

Na maioria das vezes iremos denotar a relação $\sim_{(\varphi,\psi;F)}$ simplesmente por $\sim$, quando os homomorfismos φ, ψ e o subgrupo F forem especificados previamente ou estiverem claros no contexto.

Proposição 2.2.1. *A relação $\sim_{(\varphi,\psi;F)}$ definida em (2.3) é de equivalência em F.*

Demonstração. Dado $k \in F$, sejam e_G e e_H os elementos neutros de G e H respectivamente. Note que $k = \varphi(e_G)k = e_Hk = ke_H = k\psi(e_G)$, portanto (omitindo F no índice) $k \sim_{(\varphi,\psi)} k$, para todo $k \in F$. Suponha agora que $k_1 \sim_{(\varphi,\psi)} k_2$ e $k_2 \sim_{\varphi,\psi} k_3$, isto é, existem $g_0, g_1 \in G$ tais que $\varphi(g_0)k_1 = k_2\psi(g_0)$ e $\varphi(g_1)k_2 = k_3\psi(g_1)$. Considerando $g = g_1g_0$, teremos

$$\varphi(g)k_1 = \varphi(g_1)\varphi(g_0)k_1 = \varphi(g_1)k_2\psi(g_0) = k_3\psi(g_1)\psi(g_0) = k_3\psi(g),$$

isto é, $k_1 \sim_{(\varphi,\psi)} k_3$. Se $\varphi(g)k_1 = k_2\psi(g)$, note que

$$\varphi(g^{-1})\varphi(g)k_1\psi(g^{-1}) = \varphi(g^{-1})k_2\psi(g)\psi(g^{-1}) \Rightarrow k_1\psi(g^{-1}) = \varphi(g^{-1})k_2,$$

ou seja, $k_2 \sim_{(\varphi,\psi)} k_1$. □

Definição 2.2.1. Vamos denotar por $[k]_R$ a $(\varphi,\psi;F)-$classe de um elemento $k \in F \subseteq H$, isto é, $[k]_R = \{k' \in F\,;\, k' \sim_{(\varphi,\psi)} k\}$, em que cada classe $[k]_R$ será chamada $(\varphi,\psi;F)-$*classe de Reidemeister*, e por $R(\varphi,\psi;F)$ o quociente de F pela relação $\sim_{(\varphi,\psi;F)}$. O cardinal de $R(\varphi,\psi;F)$, denotado por $r(\varphi,\psi;F)$, é chamado *número de Reidemeister determinado por* φ *e* ψ *referente ao subgrupo* F. Quando $F = H$, denotamos $R(\varphi,\psi;F)$ simplesmente por $R(\varphi,\psi)$ e analogamente $r(\varphi,\psi)$.

Observação 2.2.1. Note que $k_1 \sim_{(\varphi,\psi)} k_2 \Leftrightarrow k_1^{-1} \sim_{(\psi,\varphi)} k_2^{-1}$, então isto induz uma bijeção $R(\varphi,\psi) \to R(\psi,\varphi)$, mostrando que tais conjuntos possuem o mesmo cardinal, ou seja, $r(\varphi,\psi) = r(\psi,\varphi)$.

Proposição 2.2.2. *Definindo a ação (à esquerda)* $G \times H \to H$, $(a,b) \mapsto \varphi(a)b\psi(a^{-1})$, *então* $R(\varphi,\psi)$ *é o conjunto das órbitas desta ação. Tal ação é chamada ação de Reidemeister.*

Demonstração. Imediato da definição de $R(\varphi,\psi)$. □

Observação 2.2.2. Da proposição (2.2.2) podemos escrever $r(\varphi,\psi) = |\{\text{orb}(h); h \in H\}|$. E de forma semelhante acontece para F um subgrupo de H, pois neste caso estaremos tomando as órbitas dos elementos em F, isto é, $r(\varphi,\psi;F) = |\{\text{orb}(h); h \in F\}|$. E note também que $r(\varphi,\psi;F) \leq r(\varphi,\psi)$.

Proposição 2.2.3. *Sejam* $\varphi,\psi : G \to H$ *homomorfismos e* $\rho : K \to G$ *um homomorfismo sobrejetor. Então* $r(\rho\varphi,\rho\psi) = r(\varphi,\psi)$.

Demonstração. Sejam $h_1, h_2 \in H$ tais que $[h_1]_R = [h_2]_R \in R(\varphi,\psi)$, isto é, existe $g \in G$ tal que $\varphi(g)h_1 = h_2\psi(g)$. Da sobrejetividade de ρ, existe $k \in K$ tal que $\rho(k) = g$, e note que $h_1 \sim_{(\varphi\rho,\psi\rho)} h_2$, pois $(\varphi\circ\rho)(k)h_1 = h_2(\psi\circ\rho)(k)$.

Por outro lado, se $h_1 \sim_{(\varphi\rho,\psi\rho)} h_2$, ou seja, existe $k \in K$ tal que $(\varphi\circ\rho)(k)h_1 = h_2(\psi\circ\rho)(k)$, tome $g = \rho(k)$ e observe que $\varphi(g)h_1 = h_2\psi(g)$, isto é, $h_1 \sim_{(\varphi,\psi)} h_2$.

Portanto existe uma bijeção entre o conjunto $R(\varphi,\psi)$ e $R(\varphi\rho,\psi\rho)$, donde concluímos que $r(\varphi,\psi) = r(\varphi\rho,\psi\rho)$. □

Proposição 2.2.4. *Sejam* $\varphi,\psi : G \to H$ *homomorfismos. Se* H *é um grupo abeliano, então* $r(\varphi,\psi) = ord\,(Coker(\varphi-\psi)) = ord\left(\frac{H}{Im(\varphi-\psi)}\right)$.

Demonstração. Supondo $(H,+)$ abeliano, tome $[a_1]_R \in R(\varphi,\psi)$ e suponha $a_2 \in [a_1]_R$, ou seja, existe $b \in G$ tal que $\varphi(b) + a_1 = a_2 + \psi(b)$, logo

$$a_1 - a_2 = -\varphi(b) + \psi(b) = -(\varphi-\psi)(b) = (\varphi-\psi)(b^{-1}) \in \text{Im}(\varphi-\psi).$$

Portanto a_2 pertece à classe lateral $\{h \in H\,;\, a_1 - h \in \mathrm{Im}(\varphi - \psi)\}$.

Por outro lado, se $a_2 \in \{h \in H\,;\, a_1 - h \in \mathrm{Im}(\varphi - \psi)\}$, ou seja, existe $b \in G$ tal que $\varphi(b) - \psi(b) = a_1 - a_2$. Logo,

$$\begin{aligned} \varphi(b) - a_1 = \psi(b) - a_2 &\Leftrightarrow -(-\varphi(b) + a_1) = -(-\psi(b) + a_2) \\ &\Leftrightarrow -(\varphi(b^{-1}) + a_1) = -(\psi(b^{-1}) + a_1), \end{aligned}$$

e temos $[a_1]_R = [a_2]_R$. □

Observação 2.2.3. Lembramos que ao assumirmos (X, x_0) um par não degenerado, podemos dizer que $\Gamma(f,g) \neq \emptyset$, a menos de homotopia, com pelo menos x_0 um ponto de coincidência entre f e g. Portanto sempre que escolhermos um ponto $x_0 \in \Gamma(f,g)$ estará implícito que (X, x_0) é não degenerado, para que tal escolha seja possível.

Definição 2.2.2. Dadas duas aplicações $f, g : X \to Y$, tome $x_0 \in \Gamma(f,g)$ com $y_0 = f(x_0) = g(x_0) \in Y$. Definimos o número de Reidemeister $r(f,g)$ determinado por f e g como sendo o cardinal de $R(f_\sharp, g_\sharp)$, isto é, $r(f,g) = r(f_\sharp, g_\sharp)$, sendo $f_\sharp, g_\sharp : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$. Analogamente, se F é um subgrupo de $\pi_1(Y, y_0)$, teremos $r(f, g; F) = |R(f_\sharp, g_\sharp; F)|$.

Em [6], [12] e [16], os autores definem a relação de Reidemeister somente quando $F = H$, ou mais precisamente quando $F = \pi_1(Y, y_0)$. Mostraremos na seção 2.3 o por quê de estendermos esta definição, pois esta se fará necessária ao substituirmos as aplicações em questão por secções.

Teorema 2.2.1. *Sejam $f, g : X \to Y$ aplicações, com $x_0 \in \Gamma(f,g)$ e $y_0 = f(x_0) = g(x_0) \in Y$. Então $|\widetilde{\Gamma}(f,g)| \leq r(f,g)$.*

Demonstração. Tome $x \in \Gamma(f,g)$ e escolha um caminho $\gamma_x : I \to X$ entre x_0 e x. Note que $[f(\gamma_x) * g(\gamma_x^{-1})]$ é um elemento em $\pi_1(Y, y_0)$ e podemos tomar a classe de Reidemeister $[f(\gamma_x) * g(\gamma_x^{-1})]_R \in R(f,g)$.

Escolhida a coleção de caminhos $\{\gamma_x\}_{x \in X}$ entre x_0 e x, defina a função $\Theta : \Gamma(f,g) \to R(f,g)$ por $\Theta(x) = [f(\gamma_x) * g(\gamma_x^{-1})]_R$. Afirmamos que Θ está bem definida, isto é, independe da escolha da coleção $\{\gamma_x\}_{x \in X}$, passa ao quociente no sentido do diagrama comutativo abaixo, com $\widetilde{\Theta}$ uma aplicação injetora.

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(f,g) & \xrightarrow{\Theta} & R(f,g;) \\ \downarrow{\scriptstyle \varpi} & \nearrow_{\widetilde{\Theta}} & \\ \widetilde{\Gamma}(f,g) & & \end{array} \tag{2.4}$$

Seja $\{\delta_x\}_{x\in X}$ outra coleção de caminhos entre x_0 e x. Dizer que $[f(\gamma_x)*g(\gamma_x^{-1})]_R = [f(\delta_x)*g(\delta_x^{-1})]_R$ significa a existência de $\alpha \in \pi_1(X,x_0)$ tal que $f_\sharp(\alpha)[f(\gamma_x)*g(\gamma_x^{-1})] = [f(\delta_x)*g(\delta_x^{-1})]g_\sharp(\alpha)$.

Ora, tomando $\alpha = [\delta_x * \gamma_x^{-1}] \in \pi_1(X,x_0)$, note que $f_\sharp(\alpha)[f(\gamma_x)*g(\gamma_x^{-1})] = [f(\delta_x)*g(\gamma_x^{-1})] = [f(\delta_x)*g(\delta_x^{-1})]g_\sharp(\alpha)$. Portanto Θ está bem definida.

Suponha que $[x_1] = [x_2]$ em $\widetilde{\Gamma}(f,g)$, isto é, existe $\lambda : I \to X$ caminho entre x_1 e x_2 tal que $f(\lambda) \cong g(\lambda)$ rel $\{0,1\}$. Escolha γ_{x_1} um caminho entre x_0 e x_1 e $\gamma_{x_2} = \gamma_{x_1} * \lambda$, e note que

$$[f(\gamma_{x_2})*g(\gamma_{x_2}^{-1})] = [f(\gamma_{x_1})*f(\lambda)*g(\lambda^{-1})*g(\gamma_{x_1}^{-1})] = [f(\gamma_{x_1})*g(\gamma_{x_1}^{-1})], \tag{2.5}$$

isto é, $\Theta(x_1) = \Theta(x_2)$, logo Θ passa ao quociente como no diagrama comutativo acima, com $\widetilde{\Theta}$ bem definida tal que $\widetilde{\Theta}[x] = [\Theta(x)]_R$.

Provemos agora que $\widetilde{\Theta}$ é injetora. Suponha que $\widetilde{\Theta}[x_1] = [x_2]$, isto é, existe $[\mu] \in \pi_1(X,x_0)$ tal que

$$\begin{aligned} f_\sharp[\mu][f(\gamma_{x_1})*g(\gamma_{x_1}^{-1})] = [f(\gamma_{x_2})*g(\gamma_{x_2}^{-1})]g_\sharp[\mu] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow [f(\mu)*f(\gamma_{x_1})*g(\gamma_{x_1}^{-1})] = [f(\gamma_{x_2})*g(\gamma_{x_2}^{-1})*g(\mu)] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow [f(\gamma_{x_2}^{-1}*\mu*\gamma_{x_1})] = [g(\gamma_{x_2}^{-1}*\mu*\gamma_{x_1})]. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Então $\omega = \gamma_{x_2}^{-1}*\mu\gamma_{x_1}$ é um caminho entre x_2 e x_1, tal que $f(\omega) \cong g(\omega)$ rel $\{0,1\}$, portanto $[x_1] = [x_2]$ em $\widetilde{\Gamma}(f,g)$, e $\widetilde{\Theta}$ é injetora, provando o teorema. □

2.3 Classes de Reidemeister para Coincidências entre Secções de um Fibrado - Caso Fibrado Trivial

A partir das aplicações $f,g : (B,b_0) \to (Y,y_0)$, defina $s_f, s_g : B \to B \times Y$ por $s_f(b) = (b,f(b))$ e $s_g(b) = (b,g(b))$. Observe que $s_f(b) = s_g(b) \Leftrightarrow (b,f(b)) = (b,g(b)) \Leftrightarrow b \in \Gamma(f,g)$, isto é, $\Gamma(f,g) = \Gamma(s_f,s_g)$.

Observação 2.3.1. Aqui mais uma vez ressaltamos que estamos assumindo ao longo da seção (B,b_0) não degenerado para que, a menos de homotopias, $\Gamma(s_f,s_g) \neq \emptyset$.

Proposição 2.3.1. $\widetilde{\Gamma}(f,g) = \widetilde{\Gamma}(s_f,s_g)$.

Demonstração. Dado $b \in \Gamma(f,g)$, mostraremos que $[b] \in \widetilde{\Gamma}(f,g)$ se, e somente se, $[b] \in \widetilde{\Gamma}(s_f,s_g)$.

Ora, se $z \in [b]$ em $\widetilde{\Gamma}(f,g)$, existe um caminho $\lambda : I \to B$ entre z e b tal que $f(\lambda) \cong g(\lambda)$ rel $\{0,1\}$. Logo,

$$\begin{aligned} (\lambda*\lambda^{-1}, f(\lambda)*g(\lambda^{-1})) \cong (\overline{b}_0,\overline{y}_0) &\Leftrightarrow (\lambda, f(\lambda)) \cong (\lambda, g(\lambda)) \text{ rel } \{0,1\} \\ &\Leftrightarrow s_f(\lambda) \cong s_g(\lambda) \text{ rel } \{0,1\}. \end{aligned}$$

Portanto $z \in [b]$ em $\widetilde{\Gamma}(f,g)$ se, e somente se, $z \in [b]$ em $\widetilde{\Gamma}(s_f, s_g)$. □

Observação 2.3.2. Sendo $q = p_1$ a projeção no primeiro fator, note que para qualquer $b \in B$, $q \circ s_f(b) = q \circ s_g(b) = b$, ou seja, s_f e s_g são secções do fibrado q, lembrando que estamos assumindo que B e Y satisfazem as hipóteses do ítem (iii) do teorema (2.1.1), e que o par (B, b_0) é não degenerado, o que nos garante os seguintes fatos:

(i) O conjunto $\widetilde{\Gamma}(s_f, s_g)$ é finito;

(ii) A menos de homotopias de g, temos $\Gamma(s_f, s_g) \neq \emptyset$.

Pela sequência exata longa de fibração, a existência das secções s_f e s_g garantem a existência da sequência exata curta em (2.7), sendo $B \times Y = E$, $s_f(b_0) = s_g(b_0) = e_0$ e $F_0 = b_0 \times Y$ a fibra sobre b_0.

$$1 \longrightarrow \pi_1(F_0, e_0) \xrightarrow{i_\sharp} \pi_1(E, e_0) \xrightarrow{q\sharp} \pi_1(B, b_0) \longrightarrow 1 \tag{2.7}$$

Convenção 2.3.1. Ainda pela existência das secções s_f e s_g de q, existem isomorfismos ϕ_f e ϕ_g (a rigor ϕ_{s_f} e ϕ_{s_g}) entre $\pi_1(E, e_0)$ e $\pi_1(F_0, e_0) \rtimes \pi_1(B, b_0)$, em que ϕ_f é induzido pela secção s_f e ϕ_g é induzido pela secção s_g. Por convenção adotaremos o isomorfismo ϕ_g, que por simplicidade denotaremos somente por ϕ. Uma vez fixado $\phi = \phi_g$, que é expresso por

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \pi_1(E, e_0) & \to & \pi_1(F_0, e_0) \rtimes \pi_1(B, b_0) \\ & \alpha & \mapsto & (\alpha * (s_g \circ q)(\alpha^{-1}), q(\alpha)) \end{array} \tag{2.8}$$

adotamos também a operação no produto semidireto induzida por s_g, que é dada por

$$(\alpha_1, \beta_1) \star (\alpha_2, \beta_2) = (\alpha_1 * s_g(\beta_1) * \alpha_2 * s_g(\beta_1^{-1}), \beta_1 * \beta_2). \tag{2.9}$$

Observação 2.3.3. Apesar de convencionarmos o isomorfismo ϕ sendo o induzido pela secção s_g, poderíamos de forma semelhante escolher ϕ sendo o isomorfismo ϕ_{s_f}, desde que adotássemos a operação $\star$ no produto semidireto induzida também por s_f. Isto mostra a simetria de tratamento que existe neste problema, não importando a ordem em que tomamos as aplicações f e g, consideradas inicialmente.

Observação 2.3.4. Pela exatidão da sequência (2.7), note que $\pi_1(F_0, e_0)$ se realiza como um subgrupo normal de $\pi_1(E, e_0)$. Desta forma, podemos considerar os números $r(s_f, s_g)$ e $r(s_f, s_g; \pi_1(F_0, e_0))$. Gostaríamos de relacionar os números $r(f, g)$ e $r(s_f, s_g)$, e com este intúito observe o seguinte exemplo.

Exemplo 2.3.1 (Exemplo Motivador)**.** Neste exemplo vamos considerar $B = S^1 = Y$, e sejam $g : S^1 \to S^1$ uma aplicação de grau[1] 4 e $Id : S^1 \to S^1$ a identidade. Então, como $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$

[1] Grau homológico, isto é, $g_*(1) = 4$, sendo $1 \in H_1(S^1, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ um gerador e g_* a induzida de g em homologia.

é abeliano, pela proposição (2.2.4),

$$r(Id, g) = \text{ord}\left(\frac{\pi_1(S^1)}{\text{Im}(Id_\sharp - g_\sharp)}\right) = \text{ord}\left(\frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}}\right) = 3. \tag{2.10}$$

Porém, ao tomarmos s_g e s_Δ as secções de $p_1 : S^1 \times S^1 \to S^1$ obtidas a partir de g e Id, temos,

$$r(s_\Delta, s_g) = \text{ord}\left(\frac{\pi_1(S^1) \oplus \pi_1(S^1)}{\text{Im}\left((s_\Delta)_\sharp - (s_g)_\sharp\right)}\right) = \text{ord}\left(\frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{0 \oplus 3\mathbb{Z}}\right) = \infty. \tag{2.11}$$

Vemos assim que $r(s_f, s_g)$ fica muito maior que $r(f, g)$ neste caso (sendo $f = Id$ e $s_f = s_\Delta$). Isto torna-se evidente quando percebemos que estamos agora computando o número de Reidemeister no produto cartesiano $E = B \times Y$, e não mais somente em Y (que coincide com B neste exemplo).

Portanto, de forma geral, o caso $r(s_f, s_g)$ necessita ser restrito a um subgrupo F de $\pi_1(E, e_0)$, e note que ao fazermos $F = \pi_1(F_0, e_0)$, obtemos exatamente a igualdade $r(s_f, s_\Delta; F) = r(f, Id)$, pois $\pi_1(F_0) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

Mais geralmente, afirmamos que o número $r(s_f, s_g; \pi_1(F_0, e_0))$ limita o número de classes de coindicência entre f e g, como vemos no teorema (2.3.1), cuja demonstração é semelhante a do teorema (2.2.1).

Teorema 2.3.1. *Sejam $f, g : B \to Y$ aplicações, com $f(b_0) = g(b_0) = e_0$. Então $|\widetilde{\Gamma}(f, g)| \leq r(s_f, s_g; \pi_1(F_0, e_0))$.*

Demonstração. Pela proposição (2.3.1) sabemos que $|\widetilde{\Gamma}(s_f, s_g)| = |\widetilde{\Gamma}(f, g)|$, portanto basta provar que $|\widetilde{\Gamma}(s_f, s_g)| \leq r(s_f, s_g; \pi_1(F_0, e_0))$. Por simplicidade de notação escreveremos simplesmente $r(s_f, s_g; F_0)$ para indicar o cardinal $r(s_f, s_g; \pi_1(F_0, e_0))$.

Fixado $b_0 \in \Gamma(s_f, s_g)$, seja $e_0 = s_f(b_0) = s_g(b_0)$, e dado outro ponto $b_1 \in \Gamma(s_f, s_g)$, escolha um caminho $\beta_{b_1} : I \to B$ entre b_0 e b_1. Assim, $[s_f(\beta_{b_1}) * s_g(\beta_{b_1}^{-1})] \in \pi_1(F_0, e_0) \subseteq \pi_1(E, e_0)$, pois $q_\sharp[s_f(\beta_{b_1}) * s_g(\beta_{b_1}^{-1})] = [\bar{b}_0]$, isto é, $[s_f(\beta_{b_1}) * s_g(\beta_{b_1}^{-1})] \in \ker q_\sharp = \text{Im} i_\sharp = \pi_1(F_0, e_0)$.

Podemos então tomar a $(s_f, s_g)-$classe de Reidemeister $[s_f(\beta_{b_1}) * s_g(\beta_{b_1}^{-1})]_R$ em $R(s_f, s_g; F_0)$. E uma vez feita as escolhas dos caminhos β_b entre b_0 e b, para cada $b \in B$, definimos a função

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \Gamma(s_f, s_g) & \to & R\left(s_f, s_g; F_0\right)) \\ & b & \mapsto & \left[s_f(\beta_b) * s_g(\beta_b^{-1})\right]_R \end{array} \tag{2.12}$$

Afirmamos que a função φ em (2.12) está bem definida, e existe uma função injetora $\widetilde{\varphi}$ tal

que o diagrama abaixo é comutativo, isto é, φ passa ao quociente.

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(s_f, s_g) & \xrightarrow{\varphi} & R(s_f, s_g; F_0) \\ \downarrow{\scriptstyle \varpi} & \nearrow_{\widetilde{\varphi}} & \\ \widetilde{\Gamma}(s_f, s_g) & & \end{array} \tag{2.13}$$

Para provar que φ está bem definida, devemos mostrar que se γ_b for outro caminho em B entre b_0 e b, então $[s_f(\beta_b) * s_g(\beta_b^{-1})]_R = [s_f(\gamma_b) * s_g(\gamma_b^{-1})]_R$, isto é, existe $\alpha \in \pi_1(B, b_0)$ tal que

$$(s_f)_\sharp(\alpha)[s_f(\beta_b) * s_g(\beta_b^{-1})] = [s_f(\gamma_b) * s_g(\gamma_b^{-1})](s_g)_\sharp(\alpha). \tag{2.14}$$

Ora, tomando $\alpha = [\gamma_b * (\beta_b^{-1} * \beta_b) * \gamma_b^{-1}] \in \pi_1(B, b_0)$, note que

$$(s_f)_\sharp(\alpha)[s_f(\beta_b) * s_g(\beta_b^{-1})] = [s_f(\gamma_b) * s_g(\beta_b^{-1})] = [s_f(\gamma_b) * s_g(\gamma_b^{-1})](s_g)_\sharp(\alpha), \tag{2.15}$$

portanto φ está bem dfinida.

Para que φ induza uma aplicação $\widetilde{\varphi}$ no quociente, devemos provar que se $[b_1] = [b_2] \in \widetilde{\Gamma}(s_f, s_g)$, então $\varphi(b_1) = \varphi(b_2)$. Com efeito, suponha que $[b_1] = [b_2]$, ou seja, existe um caminho λ entre b_1 e b_2 tal que $s_f(\lambda) \cong s_g(\lambda)$ rel $\{0, 1\}$. Seja β_{b_1} um caminho entre b_0 e b_1 e tome β_{b_2} o caminho definido pela justaposição $\beta_{b_1} * \lambda$, que é um caminho entre b_0 e b_2. Logo, $\varphi(b_1) = [s_f(\beta_{b_1}) * s_g(\beta_{b_1}^{-1})]_R = [s_f(\beta_{b_2}) * s_g(\beta_{b_2}^{-1})]_R = \varphi(b_2)$, pois

$$s_f(\beta_{b_2}) * s_g(\beta_{b_2}^{-1}) = s_f(\beta_{b_1} * \lambda) * s_g(\beta_{b_1} * \lambda)^{-1} \cong s_f(\beta_{b_1}) * s_g(\beta_{b_1}^{-1}). \tag{2.16}$$

Então φ induz no quociente uma aplicação bem definida $\widetilde{\varphi}([b]) = \varphi(b)$. Provaremos agora que $\widetilde{\varphi}$ é injetora. Para isso, sejam $b_1, b_2 \in \Gamma(s_f, s_g)$, β_{b_1} e β_{b_2} caminhos em B, entre b_0 e b_1 e entre b_0 e b_2 respectivamente e suponha que $\widetilde{\varphi}([b_1]) = \widetilde{\varphi}([b_2])$, isto é,

$$\widetilde{\varphi}([b_1]) = \widetilde{\varphi}([b_2]) \Leftrightarrow \left[s_f(\beta_{b_1}) * s_g(\beta_{b_1}^{-1})\right]_R = \left[s_f(\beta_{b_2}) * s_g(\beta_{b_2}^{-1})\right]_R. \tag{2.17}$$

Então existe um laço $\alpha : I \to B$, $\alpha(0) = \alpha(1) = b_0$, tal que

$$\begin{gathered} (s_f)_\sharp[\alpha]\left[s_f(\beta_{b_1}) * s_g(\beta_{b_1}^{-1})\right] = \left[s_f(\beta_{b_2}) * s_g(\beta_{b_2}^{-1})\right](s_g)_\sharp[\alpha] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow [s_f(\alpha)][s_f(\beta_{b_1})][s_g(\beta_{b_1}^{-1})] = [s_f(\beta_{b_2})][s_g(\beta_{b_2}^{-1})][s_g(\alpha)] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow [s_f(\beta_{b_2}^{-1} * \alpha * \beta_{b_1})] = [s_g(\beta_{b_2}^{-1} * \alpha * \beta_{b_1})]. \end{gathered} \tag{2.18}$$

Logo $\delta = \beta_{b_2}^{-1} * \alpha * \beta_{b_1}$ é um caminho entre b_2 e b_1, com $s_f(\delta) \cong s_g(\delta)$ rel $\{0, 1\}$, ou seja, $[b_1] = [b_2]$, sendo então $\widetilde{\varphi}$ uma aplicação injetora, o que prova o teorema. □

Observação 2.3.5. O teorema anterior mostra que, assim como o faz o número de Reidemeister $r(f,g)$, o número $r(s_f, s_g; \pi_1(F_0, e_0))$ limita a quantidade de classes de coincidência entre f e g de forma geométrica, pela existência da injeção $\widetilde{\varphi}$, e tudo isso sem passar por $r(f,g)$. Porém veremos no teorema (2.3.2) que tal resultado poderia ser concluído diretamente, a partir da igualdade $r(s_f, s_g; \pi_1(F_0, e_0)) = r(f,g)$, pois já sabemos que $|\widetilde{\Gamma}(f,g)| \leq r(f,g)$.

Teorema 2.3.2. *Sejam $f, g : (B, b_0) \to (Y, y_0)$ aplicações, com $e_0 = s_f(b_0) = s_g(b_0) \in B \times Y = E$. Então $r(s_f, s_g; \pi_1(F_0, e_0)) = r(f,g)$.*

Demonstração. Considere os homomorfismos Φ_f e Φ_g, dados pelas composições abaixo (em que estamos omitindo os índices $\sharp$),

$$\Phi_f : \pi_1(B, b_0) \xrightarrow{s_f} \pi_1(E, e_0) \xrightarrow{\phi} \pi_1(F_0, e_0) \rtimes \pi_1(B, b_0) ;$$

$$\Phi_g : \pi_1(B, b_0) \xrightarrow{s_g} \pi_1(E, e_0) \xrightarrow{\phi} \pi_1(F_0, e_0) \rtimes \pi_1(B, b_0) .$$

Sendo ϕ o isomorfismo induzido por s_g, conforme convencionamos em (2.3.1), teremos $r(\Phi_f, \Phi_g; \phi(F)) = r(s_f, s_g; F)$, para qualquer subgrupo F de $\pi_1(E, e_0)$. Como neste caso $\pi_1(E, e_0) = \pi_1(B \times Y, (b_0, f(b_0)))$, com $b_0 \in \Gamma(f,g)$, então se $\alpha \in \pi_1(E, e_0)$ devemos escrever $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. Desta forma o isomorfismo ϕ é expresso por

$$\phi(\alpha_1, \alpha_2) = \left(\left(b_0, \alpha_2 * g(\alpha_1^{-1})\right), \alpha_1\right). \tag{2.19}$$

Tomando $(a,b) \in \pi_1(F_0, e_0) \rtimes \pi_1(B, b_0)$, devemos escrever $(a,b) = ((b_0, a_1), b)$, e analogamente para $(c,d) = ((b_0, c_1), d) \in \pi_1(F_0, e_0) \rtimes \pi_1(B, b_0)$. Nestas notações reescrevemos a operação $\star$ no produto semidireto por

$$((b_0, a_1), b) \star ((b_0, c_1), d) = \left((b_0, a_1 * g(b) * c_1 * g(b^{-1})), b * d\right). \tag{2.20}$$

Desta forma, dizer que $(a,b) = ((b_0, a_1), b)$ esta relacionado com $(c,d) = ((b_0, c_1), d)$ (ação de Reidemeister) via Φ_f e Φ_g, significa que existe $\gamma \in \pi_1(B, b_0)$ tal que

$$\Phi_f(\gamma) \star ((b_0, a_1), b) = ((b_0, c_1), d) \star \Phi_g(\gamma) \tag{2.21}$$

Expandindo o lado esquerdo da equação (2.21), obtemos

$$\begin{aligned} (\phi \circ s_f)(\gamma) \star ((b_0, a_1), b) &= \phi(\gamma, f(\gamma)) \star ((b_0, a_1), b) \\ &= \left((b_0, f(\gamma) * g(\gamma^{-1})), \gamma\right) \star ((b_0, a_1), b) \\ &= \left((b_0, f(\gamma) * a_1 * g(\gamma^{-1})), \gamma * b\right). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Expandindo agora o lado direito, temos

$$((b_0, c_1), d) \star \phi(\gamma, g(\gamma)) = ((b_0, c_1), d) \star ((b_0, y_0), \gamma) = ((b_0, c_1), d * \gamma)\,. \tag{2.23}$$

Portanto, para que valha a igualdade em (2.21), tais elementos devem satisfazer o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} f(\gamma) * a_1 = c_1 * g(\gamma) \\ \gamma * b = d * \gamma \end{cases}\,. \tag{2.24}$$

Note que a primeira equação é exatamente a relação de Reidemeister determinada por f e g, ou seja, ela mostra que $[a_1]_R = [c_1]_R$ em $R(f, g)$. Portanto, ao restringirmos a ação determinada por Φ_f e Φ_g em $\pi_1(F_0, e_0)$, teremos $b = d = b_0$, tornando a segunda equação claramente satisfeita sempre, portanto $r(f, g) = r(s_f, s_g; \pi_1(F_0, e_0))$. □

2.4 Classes de Reidemeister Para Coincidências Entre Secções de um Fibrado - Caso Geral

Dadas duas aplicações $s, f : B \to E$, ao estudarmos o conjunto das classes de coincidências $\widetilde{\Gamma}(s, f)$ e o conjunto das classes de Reidemeister $R(s, f)$, em virtude do que fizemos na seção anterior, podemos assumir que tais aplicações são secções de um fibrado arbitrário $q : E \to B$, pois sendo $b_0 \in B$ um ponto de coincidência entre s e f, basta redefinir o conjunto $R(s, f)$ restringindo a ação de Reidemeister ao subgrupo normal $\pi_1(F_0, e_0)$, sendo $F_0 = q^{-1}(b_0)$ e $e_0 = s(b_0) = f(b_0)$, isto é, devemos agora considerar o conjunto $R(s, f; \pi_1(F_0, e_0))$.

Veremos nesta seção como o tratamento desta situação particular forneceu alguns resultados gerais a respeito do conjunto das classes de coincidencias e classes de Reidemeister se tratando de secções agora de um fibrado arbitrário.

Ao tomarmos $s, f : B \to E$ secções de um fibrado $q : E \to B$, com $b_0 \in B$, estamos assumindo que tais espaços satisfazem as hipótese do teorema (2.4.1) abaixo, que é apenas um caso particular do teorema (2.1.1), e que o par (B, b_0) é não degenerado.

Teorema 2.4.1 (Teorema (2.1.1))**.** *Sejam $s, f : B \to E$ aplicações. Se B for compacto, conexo, localmente conexo por caminhos, E um espaço de Hausdorff e semilocalmente 1-conexo, então o conjunto $\widetilde{\Gamma}(s, f)$ é finito.*

Motivado pelo tratamento feito na seção 2.3, para o caso em que as aplicações eram secções do fibrado trivial, obtemos o seguinte fato geral.

Teorema 2.4.2. *Sejam $s, f : B \to E$ secções do fibrado $q : E \to B$, com $e_0 = s(b_0) = f(b_0) \in E$. Então $|\widetilde{\Gamma}(s, f)| \leq r(s, f; \pi_1(F_0, e_0))$.*

Demonstração. Inteiramente análoga à demonstração do teorema (2.3.1), pois basta definir exatamente a mesma função $\varphi : \Gamma(s, f) \to R(s, f; \pi_1(F_0, e_0))$, observar que esta está bem definida

e passa ao quociente $\widetilde{\varphi} : \widetilde{\Gamma}(s,f) \to R(s,f;\pi_1(F_0,e_0))$, com $\widetilde{\varphi}$ sendo uma aplicação injetora.

Os detalhes da demonstração são idênticos, fazendo $s_f = f$ e $s_g = s$, extatamente porque no caso do teorema (2.3.1) nenhuma conclusão é obtida em função da particularidade das secções s_f e s_g, ou seja, tais secções podem ser tomadas arbitrariamente, assim como o fibrado q. □

Definição 2.4.1. No conjunto $\Gamma(s,f)$, defina a seguinte relação: $b_1 \approx_F b_2$ se, e somente se, existe um caminho $\beta : I \to B$ entre b_1 e b_2 tal que $[s(\beta) * f(\beta^{-1})] \in \pi_1(F_1, s(b_1))$, sendo $F_i = q^{-1}(b_i)$.

Proposição 2.4.1. *A relação $\approx_F$ é de equivalência em $\Gamma(s,f)$, e denotamos o quociente $\Gamma(s,f)/\approx_F$ por $\widetilde{\Gamma}_F(s,f)$. As classes em $\widetilde{\Gamma}_F(s,f)$ serão denotadas por $[b]_F$, para cada $b \in \Gamma(s,f)$.*

Demonstração. Dado $b \in \Gamma(s,f)$, é claro que $[s(\overline{b}) * f(\overline{b}^{-1})] = [s(\overline{b})] \in \pi_1(F_b, s(b))$, isto é, $b \approx_F b$. Supondo $b_1 \approx_F b_2$, isto é, existe um caminho $\beta : I \to B$ entre b_1 e b_2 tal que $[s(\beta) * f(\beta^{-1})] \in \pi_1(F_1, s(b_1))$. Então, sendo $\delta = \beta^{-1}$, temos $[s(\delta) * f(\delta^{-1})] \in \pi_1(F_2, s(b_2))$, ou seja, $b_2 \approx_F b_1$.

Se além disso $b_2 \approx_F b_3$, com $\gamma : I \to B$ um caminho entre b_2 e b_2 tal que $[s(\gamma) * f(\gamma^{-1})] \in \pi_1(F_2, s(b_2))$, então $[s(\beta * \gamma) * f((\beta * \gamma)^{-1})] \in \pi_1(F_1, s(b_1))$, portanto $b_1 \approx_F b_2$ e $b_2 \approx_F b_3$ implicam em $b_1 \approx_F b_3$. □

Observação 2.4.1. A relação $\approx_F$ é de alguma forma uma generalização da relação definida em (2.1), pois note que para este caso podemos considerar a família dos subgrupos triviais $F = \{[\overline{e_i}]\} \subseteq \pi_1(E, e_i)$, sendo $e_i = s(b_i)$. E a relação (2.1) é expressa nesta linguagem por:

$$b_1 \sim b_2 \Leftrightarrow \text{ existe } \beta : I \to B \text{ entre } b_1 \text{ e } b_2 \text{ tal que } [s(\beta) * f(\beta^{-1})] \in \{[s(\overline{b}_1)]\} \subset \pi_1(E, s(b_1)).$$

E neste caso denotamos o conjunto $\widetilde{\Gamma}(s,f) = \Gamma(s,f)/\sim$ por $\widetilde{\Gamma}_e(s,f)$, fazendo referência à família de subgrupos $\{[\overline{e}_i]\}$, uma vez que F faz referência à família dos subgrupos normais induzidos pelas fibras $F_i = q^{-1}(b_i)$, com pontos base induzidos pela secção s.

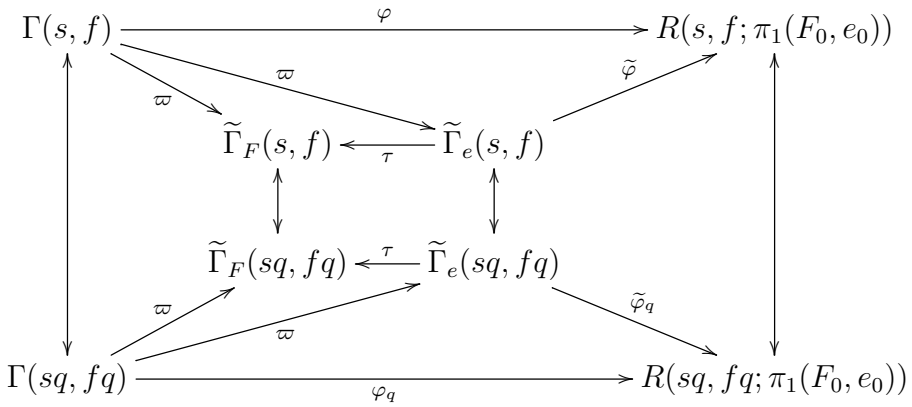
Proposição 2.4.2. $\left|\widetilde{\Gamma}_F(s,f)\right| \leq \left|\widetilde{\Gamma}_e(s,f)\right|$.

Demonstração. Note que a função $\tau : \widetilde{\Gamma}_e(s,f) \to \widetilde{\Gamma}_F(s,f)$, que a cada classe $[b]_e$ em $\widetilde{\Gamma}_e(s,f)$ associa a classe $\tau[b]_e = [b]_F$ em $\widetilde{\Gamma}_F(s,f)$, está bem definida e é uma sobrejeção, donde tem-se $\left|\widetilde{\Gamma}_F(s,f)\right| \leq \left|\widetilde{\Gamma}_e(s,f)\right|$. □

Corolário 2.4.1. $\left|\widetilde{\Gamma}_F(s,f)\right| \leq r(s,f;\pi_1(F,e_0))$.

Por ser q uma sobrejeção, pela proposição (2.2.3), temos $r(s,f) = r(sq,fq)$, isto é, existe uma bijeção $R(s,f) \longleftrightarrow R(sq,fq)$, em particular existe uma bijeção $R(s,f;\pi_1(F_0,e_0)) \longleftrightarrow R(sq,fq;\pi_1(F_0,e_0))$. Observe também que q induz uma bijeção $\Gamma(sq,fq) \longleftrightarrow \Gamma(s,f)$. E sendo ϖ as projeções quocientes, temos o seguinte diagrama, em que as setas do tipo " $\longleftrightarrow$ "

indicam a existência de bijeções, φ e $\widetilde{\varphi}$ são as aplicações definidas no teorema (2.4.2), φ_q e $\widetilde{\varphi}_q$ são as análogas de φ para as composições sq e fq e τ é a sobrejeção definida na proposição (2.4.2).



CAPÍTULO 3

CLASSES DE REIDEMEISTER VIA RECOBRIMENTOS

Ao estudarmos a teoria clássica das classes de Reidemeister para coincidências, observamos que esta é apresentada na maioria das vezes, como em [8], [12] e [16], via duas abordagens, sendo a primeira por meio da ação de Reidemeister como está definida no capítulo anterior, a segunda utilizando a teoria dos espaços de recobrimento, a qual abordaremos agora.

No capítulo anterior definimos a ação de Reidemeister e mostramos a adaptação desta ao substituirmos as aplicações por secções de um fibrado. Neste capítulo procedemos de forma semelhante, isto é, estabelecemos a teoria das classes de Reidemeister via espaços de recobrimento, seguindo principalmente as referêndcias [8], [10], [12] e [16], em seguinda exibimos a adaptação para o caso em que as aplicações são secções de um fibrado.

3.1 Classes de Reidemeister via Recobrimentos Universais

A partir de agora vamos supor que os espaços X e Y sejam conexos, localmente conexos por caminhos e semilocalmente 1-conexo, portanto possuem recobrimentos $\widetilde{X}(G)$ e $\widetilde{Y}(H)$, construídos a partir de subgrupos G e H, dos seus respectivos grupos fundamentais, como fazemos na seção 1.3.

Considerando ainda $f, g : X \to Y$ aplicações, com[1] $x_0 \in \Gamma(f, g)$ e $y_0 = f(x_0) = g(x_0)$ (estamos supondo que o par (X, x_0) é não degenerado), sejam $(\widetilde{X}(x_0); p_{x_0})$ e $(\widetilde{Y}(y_0); p_{y_0})$ os recobrimentos universais de X e Y, respectivamente, construídos a partir dos subgrupos triviais $\{[\overline{x}_0]\} \lhd \pi_1(X, x_0)$ e $\{[\overline{y}_0]\} \lhd \pi_1(Y, y_0)$.

Definição 3.1.1. Diremos que o par de aplicações $\widetilde{f}, \widetilde{g} : \widetilde{X}(x_0) \to \widetilde{Y}(y_0)$ é um levantamento do

[1] Aqui estamos assumindo que (X, x_0) é não degenerado, para que tal escolha seja possível, a menos de homotopia.

par (f,g) se os diagramas abaixo são comutativos.

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X}(x_0) & \xrightarrow{\widetilde{f}} & \widetilde{Y}(y_0) \\ \downarrow{\scriptstyle p_{x_0}} & & \downarrow{\scriptstyle p_{y_0}} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \widetilde{X}(x_0) & \xrightarrow{\widetilde{g}} & \widetilde{Y}(y_0) \\ \downarrow{\scriptstyle p_{x_0}} & & \downarrow{\scriptstyle p_{y_0}} \\ X & \xrightarrow{g} & Y \end{array} \tag{3.1}$$

Denotamos por $\mathcal{L}ev(f,g)$ ao conjunto de todos os pares $(\widetilde{f},\widetilde{g})$, em que $\widetilde{f}$ é um levantamento de f e $\widetilde{g}$ é um levantamento de g, segundo os diagramas acima. Precisamente, temos $\mathcal{L}ev(f,g) = \mathcal{L}ev(f) \times \mathcal{L}ev(g)$, sendo $\mathcal{L}ev(f)$ e $\mathcal{L}ev(g)$ o conjunto de todos os levantamentos de f e g, respectivamente.

Observação 3.1.1. Observe que $\mathcal{L}ev(f,g) \neq \emptyset$, (pelo teorema (1.2.2)) pois $\widetilde{f}$ e $\widetilde{g}$ são na verdade levantamentos (segundo o diagrama (1.13)) de $f \circ p_{x_0}$ e $g \circ p_{x_0}$, respectivamente, e temos

$$(f \circ p_{x_0})_\sharp \pi_1 \left(\widetilde{X}(x_0), \widetilde{x}_0\right) = \{[1]\} \lhd (p_{y_0})_\sharp \pi_1 \left(\widetilde{Y}(y_0), \widetilde{y}_0\right) = \{[1]\}, \text{ e}$$

$$(g \circ p_{x_0})_\sharp \pi_1 \left(\widetilde{X}(x_0), \widetilde{x}_0\right) = \{[1]\} \lhd (p_{y_0})_\sharp \pi_1 \left(\widetilde{Y}(y_0), \widetilde{y}_0\right) = \{[1]\}.$$

Observação 3.1.2. Como sabemos, $Cov(\widetilde{X}(x_0)/X) \cong \pi_1(X,x_0)$ e $Cov(\widetilde{Y}(y_0)/Y) \cong \pi_1(Y,y_0)$, via isomorfismos $\alpha \mapsto T_\alpha$ e $\beta \mapsto T_\beta$, como mostramos na observação (1.2.5). Lembrando que o fato de tais recobrimentos serem (em particular) regulares, as translações de recobrimento atuam transitivamente em cada fibra, isto é, dados quisquer $\langle x,\alpha_1\rangle_{x_0}, \langle x,\alpha_2\rangle_{x_0} \in p_{x_0}^{-1}(x)$, existe $T \in Cov(\widetilde{X}/X)$ tal que $T\langle x,\alpha_1\rangle_{x_0} = \langle x,\alpha_2\rangle_{x_0}$, e analogamente para as translações referentes a $\widetilde{Y}(y_0)$.

Proposição 3.1.1. *Dados dois levantamentos $\widetilde{f}$ e $\widetilde{f}_1$ de f, existe um único $\alpha_1 \in \pi_1(Y,y_0)$ tal que $\widetilde{f}_1 = T_{\alpha_1} \circ \widetilde{f}$. Analogamente, dados $\widetilde{g}$ e $\widetilde{g}_1$ levantamentos de g, existe um único elemento $\alpha_2 \in \pi_1(Y,y_0)$ tal que $\widetilde{g}_1 = T_{\alpha_2} \circ \widetilde{g}$.*

Demonstração. Tome $\langle x_0,\overline{x}_0\rangle \in \widetilde{X}(x_0)$ e sejam $\langle y_1,\beta_1\rangle = \widetilde{f}\langle x_0,\overline{x}_0\rangle$ e $\langle y_2,\beta_2\rangle = \widetilde{f}_1\langle x_0,\overline{x}_0\rangle$ em $\widetilde{Y}(y_0)$. Como $\langle y_1,\beta_1\rangle$ e $\langle y_2,\beta_2\rangle$ estão sobre a mesma fibra $p_{y_0}^{-1}(y_0)$, temos $y_1 = y_2 = f(x_0) = y_0$, e existe $\alpha_1 \in \pi_1(Y,y_0)$, e a translação de recobrimento T_{α_1}, tal que $T_{\alpha_1}\langle y_1,\beta_1\rangle = \langle y_2,\beta_2\rangle$.

Logo, como $T_{\alpha_1} \circ \widetilde{f}\langle x_0,\overline{x}_0\rangle = T_{\alpha_1}\langle y_1,\beta_1\rangle = \langle y_2,\beta_2\rangle = \widetilde{f}_1\langle x_0,\overline{x}_0\rangle$, segue que $\widetilde{f}_1 = T\alpha_1 \circ \widetilde{f}$. Para o caso de g o argumento é análogo. □

Corolário 3.1.1. *Fixado $(\widetilde{f}_0,\widetilde{g}_0)$ um par de levantamentos em $\mathcal{L}ev(f,g)$, temos $\mathcal{L}ev(f,g) = \{(T_{\alpha_1} \circ \widetilde{f}_0, T_{\alpha_2} \circ \widetilde{g}_0 \,;\, \alpha_1,\alpha_2 \in \pi_1(Y,y_0))\}$.*

Proposição 3.1.2. *Fixado o par de levantamentos $(\widetilde{f}_0,\widetilde{g}_0) \in \mathcal{L}ev(f,g)$, temos*

$$\Gamma(f,g) = \bigcup_{\alpha \in \pi_1(Y,y_0)} p_{x_0}\Gamma(\widetilde{f}_0, T_\alpha \circ \widetilde{g}_0). \tag{3.2}$$

Demonstração. Tome $x \in \Gamma(f,g)$ e sejam $\widetilde{x} = \langle x, \beta\rangle \in p_{x_0}^{-1}(x)$, $\widetilde{f}_0(\widetilde{x}) = \widetilde{y}_1$ e $\widetilde{g}_0(\widetilde{x}) = \widetilde{y}_2$. Como os pontos $\widetilde{y}_1$ e $\widetilde{y}_2$ estão sobre uma mesma fibra, existe $\alpha \in \pi_1(Y, y_0)$ tal que $T_\alpha(\widetilde{y}_2) = \widetilde{y}_1$. Segue então que $T_\alpha \circ \widetilde{g}_0(\widetilde{x}) = T_\alpha(\widetilde{y}_2) = \widetilde{y}_1 = \widetilde{f}_0(\widetilde{x})$, ou seja, $x \in p_{x_0}\Gamma(\widetilde{f}_0, T_\alpha \circ \widetilde{g}_0)$.

Reciprocamente, tome $x \in p_{x_0}\Gamma(\widetilde{f}_0, T_\alpha \circ \widetilde{g}_0)$, para algum $\alpha \in \pi_1(Y, y_0)$. Então da comutatividade do diagrama abaixo segue que $f(x) = g(x)$.

$$\begin{array}{ccc} \left(\widetilde{X}(x_0), \widetilde{x}\right) & \overset{T_\alpha \circ \widetilde{g}_0}{\underset{\widetilde{f}_0}{\rightrightarrows}} & \left(\widetilde{Y}(y_0), \widetilde{y}\right) \\ \downarrow{\scriptstyle p_{x_0}} & & \downarrow{\scriptstyle p_{y_0}} \\ (X, x) & \overset{g}{\underset{f}{\rightrightarrows}} & (Y, y) \end{array} . \tag{3.3}$$

□

Observação 3.1.3. Fixado um levantamento $\widetilde{f}_0$ de f e dado outro levantamento $\widetilde{f}_1$ de f, então existe um único elemento $\alpha \in \pi_1(Y, y_0)$ tal que $\widetilde{f}_1 = T_\alpha \circ \widetilde{f}_0$. Por outro lado, também existe um único $\beta \in \pi_1(X, x_0)$ tal que $\widetilde{f}_1 = \widetilde{f}_0 \circ T_\beta$.

Assim, fixado o levantamento $\widetilde{f}_0$, para cada $T_\beta \in Cov(\widetilde{X}(x_0)/X)$, existe uma única translação $T_\alpha \in Cov(\widetilde{Y}(y_0)/Y)$ tal que $T_\alpha \circ \widetilde{f}_0 = \widetilde{f}_0 \circ T_\beta$. Estabelecemos portanto uma associação

$$\begin{array}{rccc} \Omega_{\widetilde{f}_0} : & Cov(\widetilde{X}(x_0)/X) & \to & Cov(\widetilde{Y}(y_0)/Y) \\ & T_\beta & \mapsto & T_\alpha = \Omega_{\widetilde{f}_0}(T_\beta) \end{array} \tag{3.4}$$

tal que $\Omega_{\widetilde{f}_0}(T_\beta) \circ \widetilde{f}_0 = \widetilde{f}_0 \circ T_\beta$, determinada pelo levantamento $\widetilde{f}_0$. Da unicidade de α e β neste contexto, segue que $\Omega_{\widetilde{f}_0}$ é uma função bem definida.

Proposição 3.1.3. *A função $\Omega_{\widetilde{f}_0}$, determinada pelo levantamento $\widetilde{f}_0$, é um homomorfismo.*

Demonstração. Sejam $T_{\beta_1}, T_{\beta_2} \in Cov(\widetilde{X}(x_0)/X)$. Por definição, $\Omega_{\widetilde{f}_0}(T_{\beta_1} \circ T_{\beta_2})$ é a translação de recobrimento tal que $\Omega_{\widetilde{f}_0}(T_{\beta_1} \circ T_{\beta_2}) \circ \widetilde{f}_0 = \widetilde{f}_0 \circ T_{\beta_1} \circ T_{\beta_2}$. Por outro lado,

$$\left(\widetilde{f}_0 \circ T_{\beta_1}\right) \circ T_{\beta_2} = \Omega_{\widetilde{f}_0}(T_{\beta_1}) \circ \widetilde{f}_0 \circ T_{\beta_2} = \Omega_{\widetilde{f}_0}(T_{\beta_1}) \circ \Omega_{\widetilde{f}_0}(T_{\beta_2}) \circ \widetilde{f}_0,$$

portanto $\Omega_{\widetilde{f}_0}(T_{\beta_1} \circ T_{\beta_2}) = \Omega_{\widetilde{f}_0}(T_{\beta_1}) \circ \Omega_{\widetilde{f}_0}(T_{\beta_2})$. □

Lema 3.1.1. *Definindo as funções $\widetilde{f}_0, \widetilde{g}_0 : \widetilde{X}(x_0) \to \widetilde{Y}(y_0)$ respectivamente por $\widetilde{f}_0\langle x, \beta\rangle_{x_0} = \langle f(x), f(\beta)\rangle_{y_0}$ e $\widetilde{g}_0\langle x, \beta\rangle_{x_0} = \langle g(x), g(\beta)\rangle_{y_0}$, afirmamos que estas são levantamentos de f e g, respectivamente.*

Demonstração. Claramente tais funções tornam os diagramas (3.1) comutativos, provaremos então que elas são contínuas. Com efeito, tome $\langle x, \beta\rangle_{x_0}$ e seja $V(\langle f(x), f(\beta)\rangle_{y_0})$ um aberto básico em $\widetilde{Y}(y_0)$, sendo V uma vizinhança aberta de $f(x)$ em Y. Da continuidade de f, tome $U = f^{-1}(V)$ uma vizinhança aberta de x em X e note que $\widetilde{f}_0(U(\langle x, \beta\rangle_{x_0})) \subseteq V(\langle f(x), f(\beta)\rangle_{y_0})$. O argumento para a continuidade de $\widetilde{g}_0$ é análogo. □

Convenção 3.1.1. Pelo lema (3.1.1) foi possível exibir ao menos um levantamento para f e um levantamento para g, e a partir de agora quando nos referirmos ao par de levantamentos fixado $(\widetilde{f}_0, \widetilde{g}_0) \in \mathcal{L}ev(f,g)$, estaremos nos referindo ao par fornecido pelo lemma (3.1.1).

Lema 3.1.2. *Via as identificações (isomorfismos)* $Cov(\widetilde{X}(x_0)/X) \cong \pi_1(X,x_0)$ *e* $Cov(\widetilde{Y}(y_0)/Y)$, *temos* $\Omega_{\widetilde{f}_0}(\beta) = f_\sharp(\beta)$, *para cada* $\beta \in \pi_1(X,x_0)$ *e semelhantemente* $\Omega_{\widetilde{g}_0}(\beta) = g_\sharp(\beta)$, *para cada* $\beta \in \pi_1(X,x_0)$.

Demonstração. Usando a observação 1.3.4, basta notar que $\widetilde{f}_0 \circ T_\beta\langle x_0, \overline{x}_0\rangle_{x_0} = \widetilde{f}_0\langle x_0, \beta\rangle_{x_0} = \langle f(x_0), f(\beta)\rangle_{y_0} = T_{f(\beta)} \circ \widetilde{f}_0\langle x_0, \overline{x}_0\rangle_{x_0}$. De forma análoga vemos que $\Omega_{\widetilde{g}_0} = g_\sharp$. □

Observação 3.1.4. Note que o homomorfismo $\Omega_{\widetilde{f}}$ pode ser definido a partir de qualquer levantamento $\widetilde{f}$, e analogamente para $\Omega_{\widetilde{g}}$. Porem o lema (3.1.2) exibe uma propriedade importante, que justificará o porque de tomarmos em particular o par $(\widetilde{f}_0, \widetilde{g}_0)$, fornecido pelo lema (3.1.1). Uma dessas propriedades é expressa na observação seguinte.

Observação 3.1.5. Em consequência do lema (3.1.2), a respeito dos homomorfismos $\Omega_{\widetilde{f}_0}$ e $\Omega_{\widetilde{g}_0}$, note que

$$T_{f(\beta)} \circ \widetilde{f}_0 = \widetilde{f}_0 \circ T_\beta \text{ e } T_{g(\beta)} \circ \widetilde{g}_0 = \widetilde{g}_0 \circ T_\beta. \tag{3.5}$$

Lema 3.1.3. *Se* $p_{x_0}\Gamma(\widetilde{f}_0, T_{\alpha_1} \circ \widetilde{g}_0) = p_{x_0}\Gamma(\widetilde{f}_0, T_{\alpha_2} \circ \widetilde{g}_0) \neq \emptyset$, *então existem* $\widetilde{x} \in \Gamma(\widetilde{f}_0, T_{\alpha_1} \circ \widetilde{g}_0)$ *e* $\beta \in \pi_1(X,x_0)$ *tais que* $T_\beta(\widetilde{x}) \in \Gamma(\widetilde{f}_0, T_{\alpha_2} \circ \widetilde{g}_0)$.

Demonstração. Tome $x \in p_{x_0}\Gamma(\widetilde{f}_0, T_{\alpha_1} \circ \widetilde{g}_0) = p_{x_0}\Gamma(\widetilde{f}_0, T_{\alpha_2} \circ \widetilde{g}_0)$, e sejam $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2 \in p_{x_0}^{-1}(x)$ tais que $\widetilde{x}_1 \in \Gamma(\widetilde{f}_0, T_{\alpha_1} \circ \widetilde{g}_0)$ e $\widetilde{x}_2 \in \Gamma(\widetilde{f}_0, T_{\alpha_2} \circ \widetilde{g}_0)$. Por estarem na mesma fibra (sobre x), existe $\beta \in \pi_1(X,x_0)$ tal que $T_\beta(\widetilde{x}_1) = \widetilde{x}_2$. Então,

$$\widetilde{f}_0 \circ T_\beta(\widetilde{x}_1) = \widetilde{f}_0(\widetilde{x}_2) = T_{\alpha_2} \circ \widetilde{g}_0(\widetilde{x}_2) = T_{\alpha_2} \circ \widetilde{g}_0 \circ T_\beta(\widetilde{x}_1),$$

logo $T_\beta(\widetilde{x}_1) \in \Gamma(\widetilde{f}_0, T_{\alpha_2} \circ \widetilde{g}_0)$. □

Teorema 3.1.1. *Para cada* $\alpha_1, \alpha_2 \in \pi_1(Y,y_0)$, *os conjuntos* $p_{x_0}\Gamma(\widetilde{f}_0, T_{\alpha_1} \circ \widetilde{g}_0)$ *e* $p_{x_0}\Gamma(\widetilde{f}_0, T_{\alpha_2} \circ \widetilde{g}_0)$ *são iguais se, e somente se,* $[\alpha_1]_R = [\alpha_2]_R$ *em* $R(f,g)$, *e quando* $[\alpha_1]_R \neq [\alpha_2]_R$, *tais conjuntos são disjuntos.*

Demonstração. Suponha que $p_{x_0}\Gamma(\widetilde{f}_0, T_{\alpha_1} \circ \widetilde{g}_0) = p_{x_0}\Gamma(\widetilde{f}_0, T_{\alpha_2} \circ \widetilde{g}_0) \neq \emptyset$, então (do lema(3.1.3)) existem $\widetilde{x} \in \Gamma(\widetilde{f}_0, T_{\alpha_1} \circ \widetilde{g}_0)$ e $\beta \in \pi_1(X,x_0)$ tais que $T_\beta(\widetilde{x}) \in \Gamma(\widetilde{f}_0, T_{\alpha_2} \circ \widetilde{g}_0)$. Assim,

$$\begin{aligned} T_{\alpha_2} \circ \widetilde{g}_0 \circ T_\beta(\widetilde{x}) &= \widetilde{f}_0 \circ T_\beta(\widetilde{x}) \\ &= T_{f(\beta)} \circ \widetilde{f}_0(\widetilde{x}) \\ &= T_{f(\beta)} \circ T_{\alpha_1} \circ \widetilde{g}_0(\widetilde{x}) \\ &= T_{f(\beta)} \circ T_{\alpha_1} \circ T_{g(\beta)^{-1}} \circ \widetilde{g}_0 \circ T_\beta(\widetilde{x}), \end{aligned}$$

ou seja, $T_{\alpha_2} = T_{f(\beta)} \circ T_{\alpha_1} \circ T_{g(\beta)^{-1}}$, logo $\alpha_2 = f(\beta) * \alpha_1 * g(\beta)^{-1}$, portanto $[\alpha_1]_R = [\alpha_2]_R$.

Reciprocamente, suponhamos agora que $[\alpha_1]_R = [\alpha_2]_R$, isto é, existe $\beta \in \pi_1(X, x_0)$ tal que $\alpha_2 = f(\beta) * \alpha_1 * g(\beta)^{-1}$, e tome $x \in p_{x_0}\Gamma(\widetilde{f}_0, T_{\alpha_1} \circ \widetilde{g}_0)$. Como $f(\beta) * \alpha_1 = \alpha_2 * g(\beta)$, temos para $\widetilde{x} \in p_{x_0}^{-1}(x)$,

$$\begin{aligned} \widetilde{f}_0 \circ T_\beta(\widetilde{x}) &= T_{f(\beta)} \circ \widetilde{f}_0(\widetilde{x}) \\ &= T_{f(\beta)} \circ T_{\alpha_1} \circ \widetilde{g}_0(\widetilde{x}) \\ &= T_{f(\beta)*\alpha_1} \circ \widetilde{g}_0(\widetilde{x}) \\ &= T_{\alpha_2} \circ T_{g(\beta)} \circ \widetilde{g}_0(\widetilde{x}) \\ &= T_{\alpha_2} \circ \widetilde{g}_0 \circ T_\beta(\widetilde{x}), \end{aligned}$$

isto é, $T_\beta(\widetilde{x}) \in \Gamma(\widetilde{f}_0, T_{\alpha_2} \circ \widetilde{g}_0)$, portanto $x \in p_{x_0}\Gamma(\widetilde{f}_0, T_{\alpha_2} \circ \widetilde{g}_0)$, mostrando a inclusão $p_{x_0}\Gamma(\widetilde{f}_0, T_{\alpha_1} \circ \widetilde{g}_0) \subseteq p_{x_0}\Gamma(\widetilde{f}_0, T_{\alpha_2} \circ \widetilde{g}_0)$. A inclusão contrária se faz de forma análoga.

Mostraremos agora que se existe ao menos um ponto $x \in p_{x_0}\Gamma(\widetilde{f}_0, T_{\alpha_1} \circ \widetilde{g}_0) \cap p_{x_0}\Gamma(\widetilde{f}_0, T_{\alpha_2} \circ \widetilde{g}_0)$, então tais conjuntos são necessariamente iguais. Supondo então que exista tal x, tome $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2 \in p_{x_0}^{-1}(x)$, tais que $\widetilde{x}_1 \in \Gamma(\widetilde{f}_0, T_{\alpha_1} \circ \widetilde{g}_0)$ e $\widetilde{x}_2 \in \Gamma(\widetilde{f}_0, T_{\alpha_2} \circ \widetilde{g}_0)$, e seja $\beta \in \pi_1(X, x_0)$ tal que $T_\beta(\widetilde{x}_1) = \widetilde{x}_2$. Então,

$$\begin{aligned} T_{\alpha_2} \circ \widetilde{g}_0 \circ T_\beta(\widetilde{x}_1) &= T_{\alpha_2} \circ \widetilde{g}_0(\widetilde{x}_2) \\ &= \widetilde{f}_0(\widetilde{x}_2) \\ &= \widetilde{f}_0 \circ T_\beta(\widetilde{x}_1) \\ &= T_{f(\beta)} \circ \widetilde{f}_0(\widetilde{x}_1) \\ &= T_{f(\beta)} \circ T_{\alpha_1} \circ \widetilde{g}_0(\widetilde{x}_1) \\ &= T_{f(\beta)} \circ T_{\alpha_1} \circ T_{g(\beta)^{-1}} \circ \widetilde{g}_0 \circ T_\beta(\widetilde{x}_1), \end{aligned}$$

portanto $\alpha_2 = f(\beta) * \alpha_1 * g(\beta)^{-1}$, e da primeira parte do teorema segue que $p_{x_0}\Gamma(\widetilde{f}_0, T_{\alpha_1} \circ \widetilde{g}_0) = p_{x_0}\Gamma(\widetilde{f}_0, T_{\alpha_2} \circ \widetilde{g}_0)$. □

Definição 3.1.2. Cada conjunto $p_{x_0}\Gamma(\widetilde{f}_0, T_\alpha \circ \widetilde{g}_0) \subseteq \Gamma(f, g)$ é chamado *classe de Reidemeister de f e g, determinada pelo par de levantamentos* $(\widetilde{f}_0, T_\alpha \circ \widetilde{g}_0)$.

Observação 3.1.6. Note que em virtude do teorema (3.1.1), temos uma correspondência entre os conjuntos $p_{x_0}\Gamma(\widetilde{f}_0, T_\alpha \circ \widetilde{g}_0)$, isto é, as classes de Reidemeister determinadas por levantamentos, e as classes em $R(f, g)$, ou seja,

$$\left| \bigsqcup_{[\alpha]_R \in R(f,g)} \left\{ p_{x_0}\Gamma(\widetilde{f}, T_\alpha \circ \widetilde{g}) \right\} \right| = r(f, g), \tag{3.6}$$

e obtemos assim uma forma equivalente de se chegar ao número de Reidemeister determinado pelas aplicações f e g. Observe ainda que nada impede de uma (ou mais) classes $p_{x_0}\Gamma(\widetilde{f}_0, T_\alpha \circ \widetilde{g}_0)$ sejam subconjuntos vazios em $\Gamma(f, g)$, o que não a exclui de ser contada, pois no lado

esquerdo da igualdade em (3.6) estamos nos referindo ao cardinal das classes $p_{x_0}\Gamma(\widetilde{f}_0, T_\alpha \circ \widetilde{g}_0)$ em $\Gamma(f,g)$, não sendo relevante portanto quantidade (caso não seja vazia) de pontos em cada classe determinada por um par de levantamentos.

Proposição 3.1.4. *Sejam $\widetilde{x} \in \Gamma(\widetilde{f}, \widetilde{g}_1)$ e $\beta \in \pi_1(X, x_0)$. Dado $\widetilde{g}_2 \in \mathcal{L}ev(g)$, então $T_\beta(\widetilde{x}) \in \Gamma(\widetilde{f}, \widetilde{g}_2)$ se, e somente se, $\widetilde{g}_2 = T_{f(\beta)} \circ \widetilde{g}_1 \circ T_{\beta^{-1}}$.*

Demonstração. Suponha que $\widetilde{g}_2 = T_{f(\beta)} \circ \widetilde{g}_1 \circ T_{\beta^{-1}}$, então

$$\widetilde{g}_2 \circ T_\beta(\widetilde{x}) = T_{f(\beta)} \circ \widetilde{g}_1 \circ T_{\beta^{-1}} \circ T_\beta(\widetilde{x}) = T_{f(\beta)} \circ \widetilde{g}_1(\widetilde{x}) = T_{f(\beta)} \circ \widetilde{f}(\widetilde{x}) = \widetilde{f} \circ T_\beta(\widetilde{x}),$$

ou seja, $T_\beta(\widetilde{x}) \in \Gamma(\widetilde{f}, \widetilde{g}_2)$. Reciprocamente, se $T_\beta(\widetilde{x}) \in \Gamma(\widetilde{f}, \widetilde{g}_2)$, então basta ver que

$$\widetilde{g}_2 \circ T_\beta(\widetilde{x}) = \widetilde{f} \circ T_\beta(\widetilde{x}) = T_{f(\beta)} \circ \widetilde{f}(\widetilde{x}) = T_{f(\beta)} \circ \widetilde{g}_1(\widetilde{x}) = T_{f(\beta)} \circ \widetilde{g}_1 \circ T_{\beta^{-1}} \circ T_\beta(\widetilde{x}),$$

isto é, $\widetilde{g}_2$ e $T_{f(\beta)} \circ \widetilde{g}_1 \circ T_{\beta^{-1}}$ coincidem em $T_\beta(\widetilde{x})$, portanto são iguais. □

Definição 3.1.3. No conjunto $\mathcal{L}ev(g)$ defina a seguinte relação (inspirada na relação de conjugação), que denotamos por "$conj$": Dados $\widetilde{g}_1, \widetilde{g}_2 \in \mathcal{L}ev(g)$, temos $\widetilde{g}_1$ $conj$ $\widetilde{g}_2$ se, e somente se, existe $\beta \in \pi_1(X, x_0)$ tal que $\widetilde{g}_2 = T_{f(\beta)} \circ \widetilde{g}_1 \circ T_{\beta^{-1}}$.

Proposição 3.1.5. *Afirmamos que a relação definida em (3.1.3) é de equivalência em $\mathcal{L}ev(g)$.*

Demonstração. De fato, se $\widetilde{g}_2 = T_{f(\beta)} \circ \widetilde{g}_1 \circ T_{\beta^{-1}}$, então $\widetilde{g}_1 = T_{f(\beta^{-1})} \circ \widetilde{g}_2 \circ T_{(\beta^{-1})^{-1}}$, e se além disso $\widetilde{g}_3 = T_{f(\beta_1)} \circ \widetilde{g}_2 \circ T_{\beta_1^{-1}}$, temos $\widetilde{g}_3 = T_{f(\beta_1)} \circ T_{f(\beta)} \circ \widetilde{g}_1 \circ T_{\beta^{-1}} \circ T_{\beta_1^{-1}} = T_{f(\beta_1 * \beta)} \circ \widetilde{g}_1 \circ T_{(\beta_1 * \beta)^{-1}}$, ou seja, $\widetilde{g}_1$ conj $\widetilde{g}_3$. Por fim, é claro que $\widetilde{g}_1 = T_{f(\beta)} \circ \widetilde{g}_1 \circ T_{\beta^{-1}}$, se $\beta = 1 \in \pi_1(X, x_0)$. □

Definição 3.1.4. Fixado o levantamento $\widetilde{f}_0 \in \mathcal{L}ev(f)$ dado pelo lema (3.1.1), denote por $\overline{\mathcal{L}ev}(f,g)$ ao conjunto $\{\widetilde{f}_0\} \times \frac{\mathcal{L}ev(g)}{conj}$, em que seus elementos são as classes de equivalência denotadas por $[\widetilde{f}_0, \widetilde{g}]$, isto é,

$$[\widetilde{f}_0, \widetilde{g}] = \left\{ \left(\widetilde{f}_0, T_{f(\beta)} \circ \widetilde{g} \circ T_{\beta^{-1}} \right) \; ; \beta \in \pi_1(X, x_0) \right\}. \tag{3.7}$$

Teorema 3.1.2. *Os conjuntos $p_{x_0}\Gamma(\widetilde{f}_0, \widetilde{g}_1)$ e $p_{x_0}\Gamma(\widetilde{f}_0, \widetilde{g}_2)$ são iguais se $[\widetilde{f}_0, \widetilde{g}_1] = [\widetilde{f}_0, \widetilde{g}_2]$, e disjuntos caso contrário.*

Demonstração. Suponha que $[\widetilde{f}_0, \widetilde{g}_1] = [\widetilde{f}_0, \widetilde{g}_2]$, isto é, existe $\beta \in \pi_1(X, x_0)$ tal que $\widetilde{g}_2 = T_{f(\beta)} \circ \widetilde{g}_1 \circ T_{\beta^{-1}}$. Então, pela proposição (3.1.4), temos $\Gamma(\widetilde{f}_0, \widetilde{g}_2) = T_\beta\Gamma(\widetilde{f}_0, \widetilde{g}_1)$, portanto $p_{x_0}\Gamma(\widetilde{f}_0, \widetilde{g}_2) = p_{x_0} \circ T_\beta\Gamma(\widetilde{f}_0, \widetilde{g}_1) = p_{x_0}\Gamma(\widetilde{f}, \widetilde{g}_1)$.

Suponha agora que exista $x \in p_{x_0}\Gamma(\widetilde{f}_0, \widetilde{g}_1) \cap p_{x_0}\Gamma(\widetilde{f}_0, \widetilde{g}_2)$. Existem então $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2 \in p_{x_0}^{-1}$ tais que $\widetilde{x}_1 \in \Gamma(\widetilde{f}_0, \widetilde{g}_1)$ e $\widetilde{x}_2 \in \Gamma(\widetilde{f}_0, \widetilde{g}_2)$. Como $\widetilde{x}_1$ e $\widetilde{x}_2$ estão sobre uma mesma fibra, existe $\beta \in \pi_1(X, x_0)$ tal que $T_\beta(\widetilde{x}_1) = \widetilde{x}_2$. Logo, pela proposição (3.1.4), temos $\widetilde{g}_2 = T_{f(\beta)} \circ \widetilde{g}_1 \circ T_{\beta^{-1}}$, portanto $[\widetilde{f}_0, \widetilde{g}_1] = [\widetilde{f}_0, \widetilde{g}_2]$. □

Observação 3.1.7. Combinando os teoremas (3.1.2) e (3.1.1), obtemos as igualdades abaixo

$$\left|\bigsqcup_{[\alpha]_R\in R(f,g)}\left\{p_{x_0}\Gamma(\widetilde{f}_0, T_\alpha\circ\widetilde{g}_0)\right\}\right| = \left|\bigsqcup_{[\widetilde{f}_0,\widetilde{g}_1]\in\overline{\mathcal{L}ev}(f,g)}\left\{p_{x_0}\Gamma(\widetilde{f}_0,\widetilde{g}_1)\right\}\right| = \left|\overline{\mathcal{L}ev}(f,g)\right| = r(f,g). \tag{3.8}$$

3.2 Invariância Homotópica

Nesta seção mostraremos que se existe uma homotopia $H; g \cong g'$, então $r(f,g) = r(f,g')$, e tal resultado é conhecido como *invariância homotópica do número de Reidemeister.* Para mostrar isto, note que basta exibir uma bijeção entre os conjuntos $\mathcal{L}ev(g)/conj$ e $\mathcal{L}ev(g')/conj$, pois assim o resultado seguirá do teorema (3.1.2), ou mais precisamente pela última igualdade em (3.8).

Definição 3.2.1. Por uma homtopia $H : g \cong g'$ entre as aplicações $g, g' : X \to Y$, entendemos a família (de aplicações) $H = \{h_t\}_{t\in I}$, sendo cada $h_t : X \to Y$ definida por $h_t(x) = H(x,t)$, com $h_0 = g$ e $h_1 = g'$.

Observação 3.2.1. Sendo $(\widetilde{X}(x_0)\times I; p_{x_0}\times Id)$ um recobrimento universal de $X\times I$, faz sentido tomar um levantamento $\widetilde{H} : \widetilde{X}(x_0)\times I \to \widetilde{Y}(y_0)$ de H. E note que ao denotarmos $\widetilde{H}$ pela família $\widetilde{H} = \{\widetilde{h}_t\}_{t\in I}$, temos $\widetilde{h}_t \in \mathcal{L}ev(h_t)$, para cada $t \in I$. Em particular, $\widetilde{h}_0 \in \mathcal{L}ev(g)$ e $\widetilde{h}_1 \in \mathcal{L}ev(g')$, com $\widetilde{H}$ uma homotopia entre os levantamentos $\widetilde{g}$ e $\widetilde{g}'$.

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X}(x_0)\times I & \xrightarrow{\widetilde{H}} & \widetilde{Y}(y_0) \\ \downarrow{\scriptstyle p_{x_0}\times Id} & & \downarrow{\scriptstyle p_{y_0}} \\ X\times I & \xrightarrow{H} & Y \end{array} \tag{3.9}$$

Lema 3.2.1. *Seja $H : g \cong g'$ uma homotopia. Dado $\widetilde{g}$ um levantamento de g, existe um único levantamento $\widetilde{H} = \{\widetilde{h}_t\}_{t\in I}$ de H tal que $\widetilde{h}_0 = \widetilde{g}$. E ainda, $\widetilde{h}_1$ é um levantamento de g', que é único com esta propriedade.*

Demonstração. Seja $\widetilde{H} = \{\widetilde{h}_t\}_{t\in I}$ um levantamento de H para o qual $\widetilde{h}_0 = \widetilde{g}$, e suponha que $\widetilde{H}' = \{\widetilde{h}'_t\}_{t\in I}$ seja outro levantamento de H. Se $\widetilde{h}_0 = \widetilde{h}'_0 = \widetilde{g}$, então $\widetilde{H}(x,0) = \widetilde{H}'(x,0)$, para todo $(x,0) \in X\times\{0\}$, portanto $\widetilde{H} = \widetilde{H}'$. Pela comutatividade do diagrama abaixo segue que

$\widetilde{h}_1$ é um levantamento de g', que é unicamente determinado pela unicidade de $\widetilde{H}$.

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X}(x_0)\times\{1\} & \xrightarrow{\widetilde{H}} & \widetilde{Y}(y_0) \\ \downarrow{\scriptstyle p_{x_0}\times Id} & & \downarrow{\scriptstyle p_{y_0}} \\ X\times\{1\} & \xrightarrow{H} & Y \end{array} \tag{3.10}$$

□

Observação 3.2.2. Dada uma homotopia $H : g \cong g'$, o lema (3.2.1) diz que H induz uma bijeção entre os levantamentos de g e de g'. Em símbolos, existe $\mathcal{H} : \mathcal{L}ev(g) \to \mathcal{L}ev(g')$, bijetora, cuja inversa é a induzida pela homotopia $H^{-1}(x,t) = H(x, 1-t)$, de forma que, dado $\widetilde{g} \in \mathcal{L}ev(g)$, escolhemos o único levantamento $\widetilde{H} = \{\widetilde{h}_t\}_{t\in I}$ de H tal que $\widetilde{h}_0 = \widetilde{g}$ e façamos $\mathcal{H}(\widetilde{g}) = \widetilde{h}_1 \in \mathcal{L}ev(g')$.

Teorema 3.2.1. *Seja $H : g \cong g'$ uma homotopia. Então a função bijetora $\mathcal{H} : \mathcal{L}ev(g) \to \mathcal{L}ev(g')$, induzida por H, passa ao quociente $\overline{\mathcal{H}} : \frac{\mathcal{L}ev(g)}{conj} \to \frac{\mathcal{L}ev(g')}{conj}$, com $\overline{\mathcal{H}}$ sendo uma bijeção.*

Demonstração. Basta notar que se $\{\widetilde{h}_t\}_{t\in I} : \widetilde{g} \cong \widetilde{g}'$, então

$$\{T_{f(\beta)} \circ \widetilde{h}_t \circ T_{\beta^{-1}}\}_{t\in I} : T_{f(\beta)} \circ \widetilde{g} \circ T_{\beta^{-1}} \cong T_{f(\beta)} \circ \widetilde{g}' \circ T_{\beta^{-1}}. \tag{3.11}$$

Tal resultado pode ser verificado por meio do seguinte diagrama comutativo,

$$\begin{array}{ccccccc} \widetilde{X}(x_0)\times I & \xrightarrow{T_{f(\beta)}\times Id} & \widetilde{X}(x_0)\times I & \xrightarrow{\widetilde{H}} & \widetilde{Y}(y_0) & \xrightarrow{T_{\beta^{-1}}} & \widetilde{Y}(y_0) \\ & {\scriptstyle p_{x_0}\times Id}\searrow & \downarrow{\scriptstyle p_{x_0}\times Id} & & \downarrow{\scriptstyle p_{y_0}} & \swarrow{\scriptstyle p_{y_0}} & \\ & & X\times I & \xrightarrow{H} & Y & & \end{array} \tag{3.12}$$

pois como $\{\widetilde{h}_t\}_{t\in I} : \widetilde{g} \cong \widetilde{g}'$, isto é, $\widetilde{h}_0 = \widetilde{g}$ e $\widetilde{h}_1 = \widetilde{g}'$, teremos $T_{f(\beta)} \circ \widetilde{h}_0 \circ T_{\beta^{-1}} = T_{f(\beta)} \circ \widetilde{g} \circ T_{\beta^{-1}}$ e $T_{f(\beta)} \circ \widetilde{h}_1 \circ T_{\beta^{-1}} = T_{f(\beta)} \circ \widetilde{g}' \circ T_{\beta^{-1}}$. Isto mostra que a função $\overline{\mathcal{H}}$ dada por $\overline{\mathcal{H}}[\widetilde{g}] = [\mathcal{H}(\widetilde{g})]$ está bem definida e é uma bijeção. □

Corolário 3.2.1. *Se existe uma homotopia $H : g \cong g'$, então $r(f,g) = r(f,g')$.*

Demonstração. A bijeção $\overline{\mathcal{H}}$ induz naturalmente uma bijeção entre $\overline{\mathcal{L}ev}(f,g)$ e $\overline{\mathcal{L}ev}(f,g')$, e o resultado segue da última igualdade em (3.8). □

O corolário acima afirma portanto que nada se perde em generalidade ao assumirmos, a menos de homotopias de f, que $\Gamma(s,f) \neq \emptyset$, mediante a hipótese de que o par (B, b_0) seja não degenerado, no contexto do problema 2.

3.3 Classes de Reidemeister via Recobrimentos para Coincidências Entre Secções de um Fibrado

Sejam $q : E \to B$ um fibrado com base B compacta e $f, s : B \to E$, secções de q. Suponha ainda que E e B sejam conexos, localmente conexos por caminhos e semilocalmente 1-conexos, o par (B, b_0) seja não degenerado e com $F_0 = q^{-1}(b_0)$ conexo por caminhos.

Assumindo que (B, b_0) seja não degenerado e considerando $b_0 \in \Gamma(f, s)$, com $e_0 = s(b_0) = f(b_0)$, como sabemos $\pi_1(F_0, e_0)$ se realiza como um subgrupo normal de $\pi_1(E, e_0)$. Podemos tomar então o recobrimento regular $\left(\widetilde{E}(F_0); q_{F_0}\right)$, de E, e os recobrimentos universais $\left(\widetilde{E}(e_0); p_{e_0}\right)$ e $\left(\widetilde{E}(e_0); q_{(e_0,F_0)}\right)$ de E e $\widetilde{E}(F_0)$, respectivamente, como dispostos no diagrama comutativo abaixo,

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{E}(e_0) & \xrightarrow{\quad p_{e_0} \quad} & E \\ \Big\downarrow{\scriptstyle q_{(e_0,F_0)}} & \nearrow_{q_{F_0}} & \\ \widetilde{E}(F_0) & & \end{array} \quad , \tag{3.13}$$

observando ainda que

$$Cov\left(\widetilde{E}(e_0)/\widetilde{E}(F_0)\right) \cong \frac{\pi_1\left(\widetilde{E}(F_0), \langle e_0, \overline{e}_0\rangle_{F_0}\right)}{\pi_1\left(\widetilde{E}(e_0), \langle e_0, \overline{e}_0\rangle_{e_0}\right)} \cong \pi_1(F_0, e_0). \tag{3.14}$$

Observação 3.3.1. Note que a projeção de recobrimento $q_{(e_0,F_0)}$ é expressa simplesmente por $q_{(e_0,F_0)}\langle e, \alpha\rangle_{e_0} = \langle e, \alpha\rangle_{F_0}$, pois basta fazer a sua construção de acordo com o teorema (1.2.3).

Definição 3.3.1. Analogamente ao que fizemos na seção anterior, vamos denotar por $\mathcal{L}ev(s)$ e $\mathcal{L}ev(f)$ ao conjunto de todos os levantamentos de s e f, respectivamente, com respeito aos recobrimentos universais e $\mathcal{L}ev(s, f) = \mathcal{L}ev(s) \times \mathcal{L}ev(f)$. Isto é, $(\widetilde{s}, \widetilde{f}) \in \mathcal{L}ev(s, f)$, sempre que os diagramas abaixo forem comutativos.

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{B}(b_0) & \xrightarrow{\widetilde{s}} & \widetilde{E}(e_0) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle p_{b_0}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle p_{e_0}} \\ B & \xrightarrow{s} & E \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \widetilde{B}(b_0) & \xrightarrow{\widetilde{f}} & \widetilde{E}(e_0) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle p_{b_0}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle p_{e_0}} \\ B & \xrightarrow{f} & E \end{array} \tag{3.15}$$

Definição 3.3.2. Denotamos por $\mathcal{L}ev(s; F_0)$ e $\mathcal{L}ev(f; F_0)$ ao conjunto de todos os levantamentos de s e f, respectivamente, referentes ao recobrimento $q_{F_0} : \widetilde{E}(F_0) \to E$, segundo os diagramas comutativos abaixo, com $\mathcal{L}ev(s, f; F_0) = \mathcal{L}ev(s; F_0) \times \mathcal{L}ev(f; F_0)$.

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{B}(b_0) & \xrightarrow{\widetilde{s}} & \widetilde{E}(F_0) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle p_{b_0}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle q_{F_0}} \\ B & \xrightarrow{s} & E \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \widetilde{B}(b_0) & \xrightarrow{\widetilde{f}} & \widetilde{E}(F_0) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle p_{b_0}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle q_{F_0}} \\ B & \xrightarrow{f} & E \end{array} \tag{3.16}$$

Lema 3.3.1. *Defina as funções* $s_{F_0}, f_{F_0} : \widetilde{B}(b_0) \to \widetilde{E}(F_0)$ *por* $s_{F_0}\langle b, \beta\rangle_{b_0} = \langle s(b), s(\beta)\rangle_{F_0}$ *e* $f_{F_0}\langle b, \beta\rangle_{b_0} = \langle f(b), f(\beta)\rangle_{F_0}$. *Afirmamos que* $(s_{F_0}, f_{F_0}) \in \mathcal{L}ev(s, f; F_0)$.

Demonstração. É claro que tais funções tornam o diagrama (3.16) comutativo, e a continuidade segue nos mesmos moldes da demonstração do lema (3.1.1). □

Lema 3.3.2. *Sendo* $\mathcal{L}ev(s_{F_0}, f_{F_0})$ *o conjunto dos pares de levantamentos de* s_{F_0} *e* f_{F_0} *(referente ao recobrimento universal* $q_{(e_0,F_0)} : \widetilde{E}(e_0) \to \widetilde{E}(F_0)$*), Afirmamos que* $\mathcal{L}ev(s_{F_0}, f_{F_0}) \subset \mathcal{L}ev(s, f)$.

Demonstração. Segue da comutatividade dos diagramas abaixo,

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{B}(b_0) & \xrightarrow{\widetilde{s}_{F_0}} & \widetilde{E}(e_0) \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle q_{(e_0,F_0)}} \\ \widetilde{B}(b_0) & \xrightarrow{s_{F_0}} & \widetilde{E}(F_0) \\ \downarrow{\scriptstyle p_{b_0}} & & \downarrow{\scriptstyle q_{F_0}} \\ B & \xrightarrow{s} & E \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \widetilde{B}(b_0) & \xrightarrow{\widetilde{f}_{F_0}} & \widetilde{E}(e_0) \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle q_{(e_0,F_0)}} \\ \widetilde{B}(b_0) & \xrightarrow{f_{F_0}} & \widetilde{E}(F_0) \\ \downarrow{\scriptstyle p_{b_0}} & & \downarrow{\scriptstyle q_{F_0}} \\ B & \xrightarrow{f} & E \end{array} \tag{3.17}$$

pois se $\widetilde{s}_{F_0} \in \mathcal{L}ev(s_{F_0})$, então $p_{e_0} \circ \widetilde{s}_{F_0} = q_{F_0} \circ q_{(e_0,F_0)} \circ \widetilde{s}_{F_0} = q_{F_0} \circ s_{F_0} = p_{b_0} \circ s$, e de forma semelhante para os levantamentos $\widetilde{f}_{F_0}$ de f_{F_0}. □

Observação 3.3.2. Definindo as aplicações $\widetilde{s}_0, \widetilde{f}_0 : \widetilde{B}(b_0) \to \widetilde{E}(e_0)$ por $\widetilde{s}_0\langle b, \beta\rangle_{b_0} = \langle s(b), s(\beta)\rangle_{e_0}$ e $\widetilde{f}_0\langle b, \beta\rangle_{b_0} = \langle f(b), f(\beta)\rangle_{e_0}$, note que este são levantamentos de s e f, respectivamente, e ainda, $q_{(e_0,F_0)} \circ \widetilde{s}_0 = s_{F_0}$ e $q_{(e_0,F_0)} \circ \widetilde{f}_0 = f_{F_0}$.

Observamos que o par de levantamentos $(\widetilde{s}_0, \widetilde{f}_0)$ é o análogo ao par $(\widetilde{f}, \widetilde{g})$ para o caso considerado na seção 3.1 e gozam de propriedades semelhantes neste contexto.

Lema 3.3.3. $\Gamma(s, f) = p_{b_0}\Gamma(s_{F_0}, f_{F_0})$.

Demonstração. Seja $\langle b, \beta\rangle_{b_0} \in \Gamma(s_{F_0}, f_{F_0})$, isto é,

$$s_{F_0}\langle b, \beta\rangle_{b_0} = \langle s(b), s(\beta)\rangle_{F_0} = \langle f(b), f(\beta)\rangle_{F_0} = f_{F_0}\langle b, \beta\rangle_{b_0}.$$

Então, em particular, $s(b) = f(b)$, portanto $p_{b_0}\Gamma(s_{F_0}, f_{F_0}) \subseteq \Gamma(s, f)$.

Reciprocamente, tome $b \in \Gamma(s, f)$ e seja $\beta : I \to B$ um caminho entre b_0 e b. Note que

$$s_{F_0}\langle b, \beta\rangle_{b_0} = \langle s(b), s(\beta)\rangle_{F_0} \overset{(\dagger)}{=} \langle f(b), f(\beta)\rangle_{F_0} = f_{F_0}\langle b, \beta\rangle_{b_0},$$

em que a igualdade $(\dagger)$ justifica-se pelo fato de $s(b) = s(b)$ e $q[s(\beta) * f(\beta^{-1})] = [\overline{b}_0]$, ou seja, $[s(\beta) * f(\beta^{-1})] \in \pi_1(F_0, e_0)$. □

Teorema 3.3.1. *Os conjuntos* $p_{b_0}\Gamma(\widetilde{s}_0, T_{\gamma_1} \circ \widetilde{f}_0)$ *e* $p_{b_0}\Gamma(\widetilde{s}_0, T_{\gamma_2} \circ \widetilde{f}_0)$ *são iguais se, e somente se,* $[\gamma_1]_R = [\gamma_2]_R$ *em* $R(s, f; \pi_1(F_0, e_0))$ *e disjuntos se* $[\gamma_1]_R \neq [\gamma_2]_R$.

Demonstração. A rigor, da demonstração do teorema (3.1.1), sabemos que $p_{b_0}\Gamma\left(\widetilde{s}_0, T_{\alpha_1}\circ\widetilde{f}_0\right) = p_{b_0}\Gamma\left(\widetilde{s}_0, T_{\alpha_2}\circ\widetilde{f}_0\right)$ sempre que $[\alpha_1]_R = [\alpha_2]_R$ em $R(s,f)$.

Por outro lado, como $Cov\left(\widetilde{E}(e_0)/\widetilde{E}(F_0)\right) \cong \pi_1(F_0,e_0)$ e $\mathcal{L}ev(s_{F_0}, f_{F_0}) \subset \mathcal{L}ev(s,f)$, ao considerarmos apenas os levantamentos em comum dos pares (s_{F_0}, f_{F_0}) e (s,f), devemos tomar α_1 e α_2 apenas pertencentes ao subgrupo $\pi_1(F_0,e_0)$, isto é, estamos restringindo a ação de Reidemeister a este subgrupo.

Os detalhes da demonstração seguem nos mesmos moldes da demonstração do teorema (3.1.1) e não a repetiremos aqui. □

Observação 3.3.3. Segue ainda do teorema (3.3.1) a seguinte igualdade:

$$\left|\bigsqcup_{\gamma\in R(s,f;\pi_1(F_0,e_0))}\left\{p_{b_0}\Gamma\left(\widetilde{s}_0, T_\gamma\circ\widetilde{f}_0\right)\right\}\right| = r(s,f;\pi_1(F_0,e_0)). \tag{3.18}$$

Ressaltando que no lado esquerdo da igualdade acima estamos contando o número de subconjuntos $p_{b_0}\Gamma\left(\widetilde{s}_0, T_\alpha\circ\widetilde{f}_0\right)$, e não a quantidade de pontos existentes em cada um.

Definição 3.3.3. Cada subconjunto $p_{b_0}\Gamma\left(\widetilde{s}_0, T_\alpha\circ\widetilde{f}_0\right) \subseteq \Gamma(s,f)$ é chamado *classe de Reidemeister de s e f, determinada pelo par de levantamentos* $\left(\widetilde{s}_0, T_\alpha\circ\widetilde{f}_0\right)$.

Observação 3.3.4. Assim como no caso em que consideramos apenas aplicações, pode ocorrer de classes $p_{b_0}\Gamma\left(\widetilde{s}_0, T_\alpha\circ\widetilde{f}_0\right)$ serem subconjuntos vazios em $\Gamma(s,f)$.

Observação 3.3.5. Definindo a ação $\Delta : \pi_1(B,b_0)\times\mathcal{L}ev(f)\to\mathcal{L}ev(f)$ por $\beta\Delta\widetilde{f} = T_{s(\beta)}\circ\widetilde{f}\circ T_{\beta^{-1}}$, note que o cardinal do conjunto das órbitas de Δ é exatamente $r(s,f)$, em virtude do teorema (3.1.2), pois Δ é apenas a adaptação da ação "$conj$" considerando agora as secções s e f. Tomando as órbitas da ação Δ restrita apenas aos elementos do subconjunto $\mathcal{L}ev(f_{F_0}) \subset \mathcal{L}ev(f)$, teremos o número de Reidemeister $r(s,f;\pi_1(F_0,e_0))$ igual ao cardinal de $\frac{\mathcal{L}ev(f_{F_0})}{\Delta}$, isto é,

$$\left|\frac{\mathcal{L}ev(f_{F_0})}{\Delta}\right| = r(s,f;\pi_1(F_0,e_0)). \tag{3.19}$$

De forma mais precisa, analogamente ao que fizemos na seção 3.1, fixado o levantamento particular $\widetilde{s}_0 \in \mathcal{L}ev(s_{F_0})$ e denotando por $[\widetilde{s}_0,\widetilde{f}] \in \{\widetilde{s}_0\}\times\frac{\mathcal{L}ev(f_{F_0})}{\Delta}$ a classe representada por $(\widetilde{s}_0,\widetilde{f}) \in \{\widetilde{s}_0\}\times\mathcal{L}ev(f_{F_0})$, sendo $\overline{\mathcal{L}ev}_{F_0}(s,f)$ o conjunto formado pelas classes $[\widetilde{s}_0,\widetilde{f}]$, temos

$$\left|\bigsqcup_{[\widetilde{s}_0,\widetilde{f}]}\left\{p_{b_0}\Gamma\left(\widetilde{s}_0,\widetilde{f}\right)\right\}\right| = r(s,f;\pi_1(F_0,e_0)), \tag{3.20}$$

para $[\widetilde{s}_0,\widetilde{f}]$ variando dentre os elementos de $\overline{\mathcal{L}ev}_{F_0}(s,f)$.

APÊNDICE A

Ação de Grupos

Sejam G um grupo e Y um conjunto. Dizemos que G *age* em Y se existe uma função $G \times Y \to Y$, $(g, y) \mapsto gy$, tal que, para todo $y \in Y$ e $g, g' \in G$,

(i) $(gg')y = g(g'y)$,

(ii) $1y = y$.

E neste caso chamamos Y de um $G-$conjunto . Dizemos que G age *transitivamente* em Y se, para cada $y, y' \in Y$, existe $g \in G$ tal que $gy = y'$. Neste caso chamamos Y de $G-$conjunto transitivo.

Dado $y \in Y$, chamamos de *orbita* de y ao conjunto $o(y) = \{gy; g \in G\} \subset Y$, e *estabilizador* de y ao conjunto $G_y = \{g \in G; gy = y\} \subset G$, também conhecido como *subgrupo de isotropia.* Note que, para qualquer $G-$conjunto Y, G_y é um subgrupo de G, para todo $y \in Y$. E ainda, G age transitivamente em Y se, e somente se, $o(y) = Y$ para todo $y \in Y$.

Sejam G um grupo e X, Z $G-$conjuntos. Dizemos que uma função $f : Y \to Z$ é $G-$*equivariante* quando $f(a \circ y) = a \bullet f(y)$, para todo $a \in G$ e $y \in Y$, sendo $\circ$ e $\bullet$ as ações de G em Y e em Z, respectivamente. Quando f é também uma bijeção, chamamos de $G-$isomorfismo, e denotamos por $Aut_G(Y, Z)$ ao conjunto de todos os $G-$isomorfismos $f : Y \to Z$.

Quando $Z = Y$, denotamos simplesmente por $Aut_G(Y)$ ao conjunto de todos os $G-$ isomorfismos de Y. Note que tal conjunto, munido da operação usual de composição de funções, é um grupo.

Sejam G um grupo e $H \subseteq G$ um subgrupo. Denotaremos por $N_G(H)$ ao subgrupo *normalizador* de H em G, isto é, $N_G(H)$ é o maior subgrupo de G, contendo H, que é normal. Em símbolos, $N_G(H) = \{g \in G \, ; \, gHg^{-1} = H\}$.

Proposição A.0.1. *Sejam Y um $G-$conjunto transitivo e $x, y \in Y$. Os estabilizadores G_x e G_y são iguais se, e somente se, existe $\varphi \in Aut_G(Y)$ tal que $\varphi(x) = y$.*

Demonstração. Vide [13], página 292. □

Proposição A.0.2. *Sejam Y um $G-$conjunto transitivo e $y_0 \in Y$. Então $Aut_G(Y) \cong N_G(G_{y_0})/G_{y_0}$.*

Demonstração. Tome $\varphi \in Aut_G(Y)$. Como G age transitivamente em Y, existe $g \in G$ (que depende de φ) tal que $\varphi(y_0) = gy_0$,e afirmamos que tal g pertence ao normalizador $N_G(G_{y_0})$.

De fato, dado $h \in G_0$, então $hy_0 = y_0$, e $gy_0\varphi(y_0) = \varphi(hy_0) = h\varphi(y_0) = hgy_0$, isto é, $y_0 = g^{-1}hgy_0$, logo $g^{-1}hg \in G_{y_0}$.

Suponha agora que $\varphi(y_0) = gy_0 = g_1y_0$. Então $g^{-1}gy_0 = y_0$, e temos $g_1G_{y_0} = gG_{y_0}$. Isto mostra que a função $\Sigma : Aut_G(Y) \to N_G(G_{y_0})/G_{y_0}$, $\Sigma(\varphi) = g^{-1}G_0$, está bem definida. Mostraremos que Σ é um isomorfismo.

Sejam $\varphi, \psi \in Aut_G(Y)$, com $\varphi(y_0) = g_1y_0$ e $\psi(y_0) = g_2y_0$. Note que $\psi\varphi(y_0) = \psi(g_1y_0) = g_1g_2y_0$, então $\Sigma(\psi\varphi) = (g_1g_2)^{-1}G_{y_0}$. Por outro lado, $\Sigma(\psi)\Sigma(\varphi) = g_2^{-1}G_{y_0}g_1^{-1}G_{y_0} = g_2^{-1}g_1^{-1}G_{y_0}$ $= (g_1g_2)^{-1}G_{y_0}$, portanto $\Sigma(\psi\varphi) = \Sigma(\psi)\Sigma(\varphi)$ e Σ é um homomorfismo.

Suponha que $\Sigma(\varphi) = G_{y_0}$, isto é, $\varphi(y_0) = y_0$. Então $\varphi(hy_0) = h\varphi(y_0) = hy_0$, para todo $h \in G$. Como G age transitivamente em Y, dado qualquer $y \in Y$, existe $a \in G$ tal que $ay_0 = y$, logo $\varphi(y) = y$, ou seja, φ é a identidade em Y,e Σ é injetor.

E para cada $g \in N_G(G_{y_0})$, defina $\varphi : Y \to Y$ por $\varphi(y) = hgy_0$, sendo $y = hy_0$ para algum $h \in G$, e note que $\varphi \in Aut_G(Y)$. Por fim, observe que $\Sigma(\varphi) = g^{-1}G_{y_0}$, modtrando que Σ é sobrejetor. □

Referências Bibliográficas

[1] ANDRADE, A. E. R., **D-classes de Homotopia, uma generalização da teoria de $\Delta-$classes de homotopia.** Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de São Carlos, 2011.

[2] BROWN, R. F., **The Lefschetz Fixed Point Theorem.** Glenview: Scott, Foresman and Company, 1970.

[3] DAVIS, J. F. & KIRK, P., **Lectures Notes in Algebraic Topology.** Graduate Studies in Mathematics, vol. 35: American Mathematical Soc., 2001.

[4] DOLD, A., **Lectures on Algebraic Topology.** Heidelberg: Springer-Verlag, 1980.

[5] DUGUNDJI, J,. **Topology.** Boston: Allyn and Bacon, 1966.

[6] GONÇALVES, D. L., **Coincidence Theory.** Handbook of Topological Fixed Point Theory, pp. 3-42. Dordrecht: Springer-Verlag, 2005.

[7] HATCHER, A., **Algebraic Topology.** Cambridge: Cambridge Univerity Press, 2002.

[8] JEZIERSKI, J., **The Nielsen Number Product Formula for Coincidences.** Fundamenta Mathematicae, 134 (1990), No. 3, pp. 183-212.

[9] JEZIERSKI, J., **The Relative Coincidence Nielsen Number.** Fundamenta Mathematicae, 149 (1996), No. 1, pp. 01-18.

[10] JIANG, B., **Lectures on Nielsen Fixed Point Theory**. Contemp. Math., vol. 14: American Mathematical Soc., 1983.

[11] KIANG, T., **The Theory of Fixed Point Classes.** New York: Springer-Verlag, 1989.

[12] LEE, S. H., & BAEK, S., **Remarks on the Reidemeister Number for Coincidences.** Comm. Korean Math. Soc. 13 (1998), No. 1, pp. 109-121.

[13] ROTMAN, J. J., **An Introduction to Algebraic Topology.** New York: Spring-Verlag, 1988.

[14] SELICK, P., **Introduction to Homotopy Theory.** Providence: American Mathematical Soc., 1997.

[15] SPANIER, E. H., **Algebraic Topology.** New York: McGraw-Hill, 1966.

[16] STAECKER, C. P., **Nielsen Equalizer Theory.** Topology and its Applications, 158 (2011), No. 13, pp. 1615-1625.

[17] STEENROD, N., **A Convenient Category of Topological Spaces.** Michigan Math. J. 14 (1967), pp. 133-152.

[18] VICK, J. W., **Homology Theory.** New York: Springer-Verlag, 1994.

[19] WHITEHEAD, G., **Elements of Homotopy Theory.** New York: Springer-Verlag, 1978

Índice Remissivo

G-conjunto, 48
G-conjunto transitivo, 15
G-isomorfismo, 48
órbita, 48

ação
  de Reidemeister, 27, 33
  de um grupo, 48
  transitiva, 48

classe
  de coincidência, 25
  de Redemeister, 27
  de Reidemeister determinada por um par de levantamentos, 41, 47

espaço
  compactamente gerado, 10
  paracompacto, 12
  semilocalmete 1-conexo, 20
estabilizador, 48
extensão de homotopias, 11

fibração, 7
  conexão para uma, 7
  secção de uma, 9
fibrado, 12
fibrado trivial, 12
função
  G-equivariante, 48

homomorfismos conectantes, 9

invariância homotópica, 43

levantamento, 13
  de uma homotopia, 43

número de Reidemeister, 27, 28
normalizador, 48

par de levantamentos, 37
par DR, 10
par não degenerado, 11
par NDR, 10
problema de extensão de homotopia, 11
problema de levantamento, 6
produto semidireto, 8
projeção de recobrimento, 13
propriedade do levantamento
  único de caminhos, 14
  único de homotopias, 14
  de homotopia, 6
pullback, 7

recobrimento
  espaço de, 13
  regular, 17
  translação de, 17
  universal, 19
retrato, 10

sequência exata, 8

curta de grupos, 8
cinde, 8
subconjunto
admissível, 13
igualmente recoberto, 13
subgrupo de isotropia, 48