UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Wanderley Nunes do Nascimento

Equação da onda com dissipação não efetiva dependente do tempo.

São Carlos - SP
Abril de 2012

O presente trabalho teve suporte financeiro da CAPES

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Equação da onda com dissipação não efetiva dependente do tempo.

Wanderley Nunes do Nascimento
Orientador: Prof Dr. Rafael Augusto dos Santos Kapp

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática

São Carlos - SP
Abril de 2012

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária da UFSCar

N244eo

Nascimento, Wanderley Nunes do.
Equação da onda com dissipação não efetiva dependente do tempo / Wanderley Nunes do Nascimento. -- São Carlos : UFSCar, 2012.
97 f.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2012.

1. Análise. 2. Equação da onda. 3. Estimativas de Strichartz. 4. Estimativas da solução. I. Título.

CDD: 515 (20ª)

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Rafael Augusto dos Santos Kapp
DM - UFSCar

Prof. Dr. José Ruidival dos Santos Filho
DM - UFSCar

Prof. Dr. Marcelo Rempel Ebert
FFCLRP - USP

Agradecimentos

Primeiramente agradeço à Deus por ter me dado força e pela Sua infinita fidelidade.

Às pessoas mais importantes da minha vida, meus pais, Teresinha Nunes do Nascimento e Wander Nascimento Júnior, por toda motivação e confiança que depositaram em mim.

Aos meus irmãos Alessandra, Márcia e Fernando que mesmo distantes mostraram carinho e companheirismo.

Aos meus sobrinhos Igor, Natan e Cailainne que alegram minha vida!

Aos professores do departamento de matemática da UFSCar e da UFV que colaboraram para minha formação acadêmica, principalmente ao meu orientador Rafael pela paciência e dedicação, aos professores da banca Ruidival e Marcelo pela disponibilidade e a professora Lucy pelo carinho e amizade ao longo da minha graduação.

Aos meus amigos que tornaram meus dias mais felizes aqui em São Carlos, vocês são especiais para mim!

Aos servidores da UFSCar, especialmente a secretária Irma, pelo apoio e torcida em todos os momentos.

À CAPES pelo apoio financeiro deste projeto.

Resumo

O objetivo desta dissertação é a construção de uma representação estrutural das soluções do problema de Cauchy, para equação da onda com dissipação fraca abaixo de escala e deduzir estimativas do tipo Strichartz $L^p - L^q, q \geq 2$ para as soluções e sua energia. Além disso, mostraremos que existe uma certa equivalência assintótica entre as soluções para equação da onda livre e as soluções para a equação da onda com dissipação fraca.

Abstract

The objective of this dissertation is to construct structural representations of the solutions to Cauchy problems for weakly dissipative wave equations below scaling and to deduce Strichartz type estimate $L^p - L^q, q \geq 2$, for the solutions and its energy. Furthermore, we show that there is a asymptotic equivalence between the solutions for free waves equation and the solutions for the weakly dissipative wave equation.

Sumário

Agradecimentos **iii**

Resumo **iv**

Abstract **v**

Introdução **1**

1 Pré-requisitos **4**

1.1 Espaços L^P 4

1.2 Espaço das Distribuições 7

1.2.1 Operações com distribuições 9

1.2.2 Transformada de Fourier 10

1.2.3 Transformada Parcial de Fourier 12

1.3 Espaços de Besov 14

1.3.1 Resultados de Imersões 16

2 Representação da solução **18**

2.1 Zona Dissipativa 23

2.2 Zona Hiperbólica 35

2.2.1 Forma Normal 35

2.2.2 Solução Fundamental do Sistema na Forma Normal 44

2.3 Voltando ao problema inicial 54

3 Estimativas **56**

3.1 Estimativa de energia do tipo Strichartz $L^2 - L^2$ 56

3.2 Estimativa de energia do tipo Strichartz $L^p - L^q$ 65

3.3 Estimativas da solução 74

3.4 Teoria do Espalhamento 78

Apêndice A: Ferramentas Básicas I **85**

Apêndice B: Ferramentas Básicas II **86**

Apêndice C: Teorema de Hörmander-Mikhlin **92**

Apêndice D: Notações **94**

Referências Bibliográficas **96**

Introdução

Considere o problema de Cauchy para equação da onda com dissipação fraca

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + b(t)u_t = 0 \\ u(0,.) = u_1 \\ u_t(0,.) = u_2 \end{cases}, \tag{1}$$

onde o coeficiente $b(t)$ é por hipótese positivo e tende a zero quando t tende ao infinito. Este é um importante modelo para estudar a influência dos termos de ordem inferior da derivada em relação t.

Problemas análogos já foram considerados por outros autores, impondo determinadas hipóteses sobre o coeficiente $b(t)$. O caso conhecido como dissipação fraca com escala invariante, onde $b(t) \sim t^{-1}$, foi considerado pelo autor Jeans Wirth no artigo [15]. O caso em que o coeficiente é integrável foi estudado no trabalho de Mochizuki e co-autores no artigo [7] e também na tese de doutorado de Wirth [14].

O objetivo dessa dissertação é de demonstrar propriedades estruturais no caso abaixo de escala invariante, isto é, assumiremos que a função coeficiente decai mais rapidamente que t^{-1}, e a partir das propriedades estruturais derivar estimativas para a energia e estimativas a priori para a solução do problema. A referência básica é o artigo [16]. Faremos ainda uma relação entre as soluções para a equação de onda livre e as soluções da equação (1).

Assumiremos as seguintes propriedades para a função coeficiente:

- $(A1)$: positividade, isto é, $b(t) \geq 0$;

- $(A2)_l$: para todo $k \leq l$ temos

$$\left|\frac{d^k}{dt^k}b(t)\right| \leq C_k \left(\frac{1}{1+t}\right)^{k+1};$$

- $(A3) : \limsup_{t\to\infty} tb(t) < 1.$

Observe que a última hipótese é necessária para excluir o caso crítico, acima mencionado, $b(t) = \dfrac{1}{1+t}$. A hipótese $(A2)_l$ é de fundamental importância para encontrarmos a forma normal de uma matriz, que será realizado a seguir.

Seguiremos o seguinte cronograma. No Capítulo 1 introduziremos alguns resultados importantes para obtermos estimativas para o operador de energia e para a solução de (1). Definiremos os espaços L^p, os espaços usuais de distribuições, os espaços de Sobolev e os espaços de Besov. Enunciaremos as principais imersões contínuas que serão úteis nesse texto e indicaremos as principais referências consultadas para as demonstrações dos resultados. No Capítulo 2 dividiremos o espaço de fase em duas zonas, com o objetivo de encontrar uma representação estrutural para a solução fundamental de um sistema relacionado com (1). Em uma das zonas determinaremos a forma normal da matriz associada a esse sistema a fim de encontrarmos tal representação. No capítulo 3 usaremos a representação desenvolvida no capítulo 2 para encontrarmos estimativas do tipo Strichartz $L^p - L^q$ para o operador de energia. Em seguida, faremos estimativas a priori, do tipo Strichartz $L^p - L^q$, para a solução. Finalmente mostraremos que em determinados espaços, a menos de um fator $\lambda(t)$, as soluções para a equação da onda com dissipação em relação ao tempo se comportam como soluções para a equação de onda livre quando o tempo se torna suficientemente grande.

Os principais resultados dessa dissertação são a representação obtida no teorema (2.2.12) juntamente com suas consequências para as estimativas de energia no teorema (3.2.2) e a equivalência assintótica obtida no teorema (3.4.1). Como consequência desses teoremas obtemos os seguintes resultados:

Resultado 0.0.1. *A energia para a solução de* (1) *satisfaz a estimativa do tipo*

Strichartz

$$\|(\nabla, \partial_t)u(t,.)\|_q \leq C\frac{1}{\lambda(t)}(1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\left(\|u_1\|_{W_p^{r_p+1}} + \|u_2\|_{W_p^{r_p}}\right),$$

com a função auxiliar $\lambda(t) = \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t b(\tau)d\tau\right)$ *e para índices duais* $pq = p+q$, $q \in [2,\infty]$ *e com* $r_p > n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$.

Resultado 0.0.2. *Para cada dado inicial* $(u_1, u_2) \in W^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ *existe um dado inicial* $(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2) \in W^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$, *tal que para soluções correspondentes* $u(t,x)$ *para* (1) *e* $\widetilde{u}(t,x)$ *para a equação da onda livre, é válida a seguinte equivalência assintótica,*

$$\|\lambda(t)(\nabla u(t,.), \partial_t u(t,.)) - (\nabla\widetilde{u}(t,.), \partial_t\widetilde{u}(t,.))\|_2 \to 0, \quad t \to \infty.$$

Resultado 0.0.3. *A solução para* (1) *satisfaz as estimativas* $L^p - L^q$

$$\|u(t,.)\|_q \leq c\left(\|u_1\|_{W_p^{r_p}} + \|u_2\|_{W_p^{r_p-1}}\right)\begin{cases} \frac{1}{\lambda^2(t)}(1+t)^{1-n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}, p \geq p^* \\ \frac{1}{\lambda(t)}(1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}, p < p^* \end{cases},$$

para índices duais $pq = p+q$, $q \in [2,\infty]$, *com* $r_p > n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$ *o valor crítico* p^* *é escolhido de tal forma que*

$$\lambda(t) \lesssim (1+t)^{1-\frac{n+1}{2}\left(\frac{2}{p^*}-1\right)}.$$

Capítulo

1

Pré-requisitos

O objetivo deste capítulo é apresentar, de maneira sucinta, as ferramentas básicas que foram utilizadas para concluirmos os principais resultados dessa dissertação. Introduziremos importantes espaços de funções e enunciaremos os principais resultados relacionados a tais espaços. Indicaremos as referências onde se encontram as demonstrações de tais resultados.

1.1 Espaços L^P

Os espaços L^p são espaços de Banach cuja as normas são definidas em termos de integrais. Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida, se f é uma função mensurável em X e $1 \leq p < \infty$, denotamos por

$$\|f\|_p = \left[\int |f|^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Definimos

$$L^p(X, \mathcal{M}, \mu) = \left\{f : X \to \mathbb{C}; f \text{ é mensurável e } \|f\|_p < \infty\right\}.$$

Para completarmos o cenário dos espaços L^p, introduzimos o espaço L^∞. Se f

é uma função mensurável em X definimos,

$$\|f\|_\infty = \inf\{a \geq 0; \mu(\{x : |f(x)| > a\}) = 0\},$$

a norma de L^∞ é chamada de supremo essencial. Agora definimos

$$L^\infty = L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu) = \{f : X \to \mathbb{C}; f \text{ é mensurável e } \|f\|_\infty < \infty\}.$$

Usaremos a notação $L^p(X)$ ou simplesmente L^p quando não houver ambiguidades. Iniciamos com a clássica desigualdade de Hölder.

Teorema 1.1.1. ***(Desigualdade de Hölder)*** *Sejam (X, μ) um espaço de medida e $(p, q, r) \in [1, \infty]^3$ tais que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}.$$

Se $(f, g) \in L^p(X, \mu) \times L^q(X, \mu)$, então $fg \in L^r(X, \mu)$ e

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Demonstração: Veja [4].

Proposição 1.1.2. ***(Desigualdade de Minkowski)*** *Sejam $f, g \in L^p$ com $1 \leq p < \infty$. Então*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Demonstração: Veja [4].

Definiremos a seguir convolução que será uma importante ferramenta para estabelecermos desigualdades a priori para a solução do nosso problema.

Definição 1.1.3. *Seja $f \in C(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Definimos o suporte de f da seguinte forma*

$$supp(f) = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}.$$

Definição 1.1.4. *Sejam $f, g \in C(\mathbb{R}^n)$ e suponha que uma delas tenha suporte compacto. A convolução de f por g é dada da seguinte forma*

$$f * g(x) = \int f(x-y)g(y)dy, x \in \mathbb{R}^n.$$

Teorema 1.1.5. ***(Desigualdade de Young)*** *Suponha que $1 \leq p, q, r \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$. Se $f \in L^p$ e $g \in L^q$, então $f * g \in L^r$ e mais*

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Demonstração: Veja [4].

O próximo teorema é de fundamental importância para estabelecermos desigualdades para o operador de energia que iremos considerar adiante.

Teorema 1.1.6. ***(Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin)*** *Sejam $p_i, q_i \in [1, \infty]$, para $i = 0, 1$ e se $0 < \theta < 1$ defina p e q por*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Se T é um operador linear de $(L^{p_0}, L^{p_1}) \longmapsto (L^{q_0}, L^{q_1})$, tal que

$$\|Tu\|_{q_0} \leq M_0 \|u\|_{p_0},$$

$$\|Tu\|_{q_1} \leq M_1 \|u\|_{p_1},$$

então,

$$\|Tu\|_q \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|u\|_p.$$

Demonstração: Veja [3].

1.2 Espaço das Distribuições

Aqui vamos introduzir algumas notações que serão utilizadas nessa dissertação, mais especificamente quando fizermos o estudo para a transformada de Fourier.

Seja $\mathbb{Z}_+$ o conjunto dos números inteiros maiores ou iguais a zero. Então $\mathbb{Z}_+^n$ é o conjunto das n-uplas $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ tais que $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$, $\forall i$. Tais n-uplas são chamadas de multi-índices. Definimos para cada $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$, $\alpha \leq \beta$ se, e só se, $\alpha_i \leq \beta_i$, $\forall i = 1, ..., n$ e $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!...\alpha_n!$. Denotaremos ainda o operador D como sendo $D = \frac{1}{i}\partial$.

Se $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ é uma variável em $\mathbb{R}^n$, denotamos para $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} ... \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

As distribuições são objetos que estendem a noção de funções e suas operações.

Definição 1.2.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Denotaremos por*

$$C_0^\infty(\Omega) = \{f \in C^\infty; supp\,(f) é\ compacto\}$$

o espaço das funções testes em Ω.

A seguinte proposição garante a existência de funções testes.

Proposição 1.2.2. *Seja $K \subset \Omega$ compacto. Existe $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$ e $\psi \equiv 1$ numa vizinhança de K.*

Demonstração: Veja [5].

É possível munir o espaço das funções teste com uma topologia não metrizável de tal forma que a convergência em $C_0^\infty(\Omega)$ seja da seguinte forma.

Definição 1.2.3. *Uma sequência $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}} \in C_0^\infty(\Omega)$ converge a zero em $C_0^\infty(\Omega)$ se*

- *Existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que $supp\,(\phi_j) \subset K, j = 1, 2, ...$;*

- *Para todo inteiro positivo m, as derivadas de ordem m das funções ϕ_j convergem uniformemente a zero quando $j \to \infty$.*

Definição 1.2.4. *Seja f uma função mensurável, dizemos que f é uma função localmente integrável em Ω se para todo compacto $K \subset \Omega$*

$$\int_K |f| dx < \infty.$$

Denotamos o espaço das funções localmente integráveis como $L^1_{loc}(\Omega)$.

É fácil ver que C_0^∞ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Podemos então falar de funcionais lineares sobre $C_0^\infty(\Omega)$.

Definição 1.2.5. *Uma distribuição definida em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um funcional linear contínuo $u : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$. Denotaremos o espaço das distribuições definidas em Ω por $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Observação 1.2.6. *Denotaremos $\langle u, \varphi \rangle$ para representar a ação de $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ em $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.*

O próximo resultado nos permite identificar as funções localmente integráveis como distribuições.

Proposição 1.2.7. *Seja $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então o funcional*

$$\begin{aligned} T_f : C_0^\infty(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \phi &\longmapsto T_f(\phi) = \int f(x)\phi(x)dx \end{aligned}$$

é uma distribuição em Ω. E mais, se $T_f = T_g$ então $f(x) = g(x)$ q.t.p. em Ω.

Demonstração: Veja [5].

Esta identificação permite considerar muitos espaços de funções, como por exemplo os $L^p(\Omega)$ e $C^k(\Omega)$, como subespaços de $\mathcal{D}'(\Omega)$. É nesse sentido que as distribuições são funções generalizadas.

Podemos munir o espaço das distribuições com uma topologia de tal forma que a convergência é dada da seguinte forma.

Definição 1.2.8. *Seja $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Dizemos que $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge a $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se, e somente se, $\langle u_j, \varphi\rangle$ converge a $\langle u, \varphi\rangle$, para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.*

1.2.1 Operações com distribuições

Considere $L : C_0^\infty \to C_0^\infty$ um operador linear e contínuo. Suponha que L possua um "transposto formal", ou seja, que exista $L^t : C_0^\infty \to C_0^\infty$ linear e contínuo tal que

$$\int (L\varphi(x))\,\psi(x)dx = \int \varphi(x)\left(L^t\psi(x)\right)dx, \forall\varphi,\psi \in C_0^\infty.$$

Definição 1.2.9. *Seja $L : C_0^\infty \to C_0^\infty$ um operador linear e contínuo e $L^t : C_0^\infty \to C_0^\infty$ seu transposto formal. Podemos estender L de maneira única a um operador $L : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ da seguinte forma*

$$\langle Lu, \varphi\rangle = \langle u, L^t\varphi\rangle, \forall u \in \mathcal{D}'(\Omega), \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

A seguir daremos alguns exemplos importantes de operações com distribuições.

Exemplo 1.2.10. *Considere $L\varphi = f\varphi, \varphi \in C_0^\infty, f \in C^\infty$. Então $L^t = L$. Daí segue que*

$$\langle fu, \varphi\rangle = \langle u, f\varphi\rangle, \forall\varphi \in C_0^\infty.$$

Exemplo 1.2.11. *Considere $L = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$. Usando a integração por partes concluí-se que $L^t = -L$. Sendo assim,*

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = -\left\langle u, \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \right\rangle, \forall\varphi \in C_0^\infty.$$

Exemplo 1.2.12. *Seja α um multi-índice e defina $L = \partial^\alpha$. Usando a integração por partes concluí-se que $L^t = (-1)^{|\alpha|}L$. Sendo assim,*

$$\langle \partial^\alpha u, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u, \partial^\alpha\varphi\rangle, \forall\varphi \in C_0^\infty.$$

Com uma motivação análoga podemos definir a convolução de uma distribuição com uma função teste.

Definição 1.2.13. *Se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ então definimos a convolução de u por φ como*

$$u * \varphi(x) = \langle u, \check{\varphi}_x \rangle,$$

onde $\check{\varphi}_x = \varphi(x - y)$.

1.2.2 Transformada de Fourier

Queremos agora definir e enunciar importantes resultados sobre a transformada de Fourier que será uma importante ferramenta para estabelecermos estimativas à priori para a solução da equação da onda com dissipação.

Definição 1.2.14. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos a transformada de Fourier de f como sendo*

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int e^{-ix\xi} f(x) dx,$$

onde $x\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i$ com $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$.

O teorema da convergência dominada implica na continuidade de $\hat{f}$. Facilmente vemos que $\hat{f}$ é limitada uma vez que $|\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1$.

Sabemos que a transformada de Fourier não é um operador bem definido em C_0^∞ pois a transformada de Fourier de uma função não nula não com suporte compacto tem suporte compacto. Por isso vamos introduzir o espaço de Schwarz, onde a transformada de Fourier é invariante.

Definição 1.2.15. *Definimos o espaço de Schwartz, e denotamos por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, o subespaço de C^∞ consistindo das funções φ tais que, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$,*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| < \infty.$$

Dizemos que $\varphi_j \to 0$ em $\mathcal{S}$ se para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, $x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) \to 0$ uniformemente.

Teorema 1.2.16. *A transformada de Fourier é um operador linear contínuo de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{S}$ e vale,*

1. $\widehat{D^\alpha \varphi}(\xi) = \xi^\alpha \hat{\varphi}(\xi)$,
2. $\mathcal{F}\left(x^\alpha \varphi(x)\right)(\xi) = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \hat{\varphi}(\xi)$,

para toda $\varphi \in \mathcal{S}$.

Demonstração: Veja [5].

Corolário 1.2.17. *Se $f \in L^1$, então $\hat{f}(\xi) \to 0$ se $|\xi| \to \infty$.*

O próximo resultado mostra que o espaço de Schwartz é um espaço ideal para trabalharmos com a transformada de Fourier.

Teorema 1.2.18. *A transformada de Fourier é continuamente inversível de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{S}$ e*

$$\mathcal{F}^{-1}\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\xi} \varphi(\xi) d\xi.$$

Segue agora algumas propriedades para a transformada de Fourier.

Teorema 1.2.19. *Se $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$, então*

1. $\int \hat{\varphi}(x)\psi(x)dx = \int \varphi(x)\hat{\psi}(x)dx$;
2. $\int \varphi(x)\overline{\psi(x)}dx = (2\pi)^{-n} \int \hat{\varphi}(x)\overline{\hat{\psi}(x)}$;
3. $\widehat{\varphi * \psi} = \hat{\varphi}\hat{\psi}$;
4. $\widehat{\varphi\psi} = (2\pi)^{-n}\hat{\varphi} * \hat{\psi}$.

Demonstração: Veja [5].

Queremos nesse momento introduzir a transformada de Fourier para distribuições. O espaço das distribuições não será um bom espaço para se definir a transformada, por essa razão introduzimos as distribuições temperadas que é um subespaço de $\mathcal{D}'$.

Definição 1.2.20. *Um funcional linear e contínuo sobre $\mathcal{S}$ é dito ser uma distribuição temperada. O espaço das distribuições temperadas é denotado por $\mathcal{S}'$.*

Definição 1.2.21. *Se $u \in \mathcal{S}'$, então a transformada de Fourier é definida por*

$$\langle \hat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \hat{\varphi} \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

O seguinte teorema será usado quando fizermos estimativas para o operador de energia relacionado a equação da onda com dissipação.

Teorema 1.2.22. ***(Fórmula de Plancharel)*** *Se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ então $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e vale*

$$\|f\|_2^2 = (2\pi)^{-n} \|\hat{f}\|_2^2.$$

Observação 1.2.23. *Valem as seguintes propriedades para a transformada de Fourier para distribuições temperadas:*

- *Se $u \in \mathcal{S}'$, então $\widehat{D^\alpha u} = \xi^\alpha \hat{u}$ e $\widehat{x^\alpha u} = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \hat{u}$;*
- $\hat{\hat{u}} = (2\pi)^n \check{u}$.

1.2.3 Transformada Parcial de Fourier

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f(t,x) \in L^1_{loc}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ onde $t = (t_1, t_2, ..., t_n) \in \Omega$ e $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Se para todo compacto $K \subset \Omega$, temos

$$\int_K \int_{\mathbb{R}^n} |f(t,x)| dx dt < \infty,$$

então definiremos a transformada parcial de Fourier de f com relação a x por

$$\mathcal{F}_x(f)(t,\xi) = \hat{f}(t,\xi) = \int e^{-ix\xi} f(t,x) dx,$$

para q.t.p. $t \in \Omega$.

Denotamos por $\pi : \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \Omega$ a projeção usual.

Definição 1.2.24. *Denotamos por* $C_0^\infty(\Omega, \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ *o subespaço de* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ *formado pelas funções* $\varphi(t,x)$ *tais que* $\pi(supp\,\varphi) \subset \Omega$ *é compacto.*

Uma sequência $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega, \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ converge a zero em $C_0^\infty(\Omega, \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ se $\varphi_j \to 0$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ e se existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que $\pi(\text{supp}\,\varphi_j) \subset K, \forall j$. Valem as seguintes propriedades para a transformada parcial de Fourier cuja a prova é feita de maneira análoga ao caso anterior.

Teorema 1.2.25. *A transformada parcial de Fourier com relação a* x *define um operador*

$$\mathcal{F}_x : C_0^\infty(\Omega, \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) \longrightarrow C_0^\infty(\Omega, \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$$

que é continuamente inversível com inversa dada por:

$$\mathcal{F}_x^{-1}(\varphi)(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ix\xi} \varphi(t,\xi) d\xi.$$

Além disso, valem as seguintes fórmulas:

1. $\widehat{D_x^\alpha \varphi}(t,\xi) = \xi^\alpha \hat{\varphi}(t,\xi)$;
2. $\widehat{x^\alpha \varphi}(t,\xi) = (-1)^{|\alpha|} D_\xi^\alpha \hat{\varphi}(t,\xi)$;
3. $\widehat{D_t^\beta \varphi}(t,\xi) = D_t^\beta \hat{\varphi}(t,\xi)$;
4. $\int\int_{\Omega \times \mathbb{R}^n} \mathcal{F}_x(\varphi)\psi dt dx = \int\int_{\Omega \times \mathbb{R}^n} \varphi \mathcal{F}_x(\psi) dt dx$;

para toda $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega, \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$.

Queremos agora definir transformada parcial de Fourier para certas distribuições. Para isso definimos:

Definição 1.2.26. *Um funcional linear e contínuo sobre* $C_0^\infty(\Omega, \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$ *é dito uma distribuição temperada em* x*. Denotamos o espaço das distribuição temperada em* x *por* $\mathcal{D}'(\Omega, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$.

Definição 1.2.27. *Se* $u \in \mathcal{D}'(\Omega, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$ *definimos a transformada parcial de Fourier em* x *por*

$$\langle \mathcal{F}_x u, \varphi \rangle = \langle u, \mathcal{F}_x \varphi \rangle, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)).$$

1.3 Espaços de Besov

Nessa seção vamos introduzir os espaços de Sobolev de ordem fracionária e os espaços de Besov. Enunciaremos algumas propriedades importantes para os espaços de Besov e os relacionaremos com os espaços de Sobolev.

Primeiramente definiremos os espaços de Sobolev.

Definição 1.3.1. *Seja* m *um número inteiro não negativo. O espaço de Sobolev, denotado por* W_p^m*, é o espaço das funções* $f \in L^p$ *tal que para todo* $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ *com* $|\alpha| \leq m$*, tem-se que* $\partial^\alpha f \in L^p$*.*

Vamos agora introduzir os espaços de Sobolev de ordem fracionária, também conhecidos como espaços potenciais de Bessel, que desempenham um papel importante na teoria de equação diferenciais parciais e adiante estabeleceremos uma importante imersão dos espaços de Sobolev de ordem fracionária nos espaços de Besov. Para mais detalhes veja [9].

Definição 1.3.2. *Seja* r *um número real e seja* $1 < p < \infty$*. Então o espaço de Sobolev de ordem fracionária, denotado por* W_p^r*, é definindo da seguinte forma*

$$W_p^r = \left\{ f \in \mathcal{S}' : \|f\|_{p,r} = \left\| \mathcal{F}^{-1}\left[\left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{r}{2}} \mathcal{F} f \right] \right\|_p < \infty \right\}.$$

Temos a seguinte relação entre os espaços de Sobolev e os espaços potenciais de Bessel.

Proposição 1.3.3. *Se* r *é um número inteiro não negativo, então as definições* (1.3.1) *e* (1.3.2) *coicidem.*

Demonstração: Veja [13].

Definiremos os espaços de Besov utilizando a transformada de Fourier. Para tais fins precisamos do seguinte lema.

Lema 1.3.4. *Existe uma função não negativa* $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *com*

$$supp\,(\phi) \subset \left\{\xi; \frac{1}{2} < |\xi| < 2\right\},$$

tal que

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi(2^{-j}\xi) = 1, \ \ \xi \neq 0.$$

Demonstração: Seja $\widetilde{\phi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ positiva em $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq |\xi| \leq \sqrt{2}$ tal que $\text{supp}\,(\widetilde{\phi}) \subset \left\{\xi; \frac{1}{2} < |\xi| < 2\right\}$, o resultado segue definindo

$$\phi(\xi) = \frac{\widetilde{\phi}(\xi)}{\sum_{j=-\infty}^{\infty} \widetilde{\phi}(2^{-j}\xi)}.$$

■

A partir de agora vamos usar a notação

$$\phi_j(\xi) = \phi\left(2^{-j}\xi\right), j \in \mathbb{Z},$$

onde ϕ é a função do lema (1.3.4). Uma vez que $\phi \in C_0^\infty$, temos pela desigualdade de Young que $\mathcal{F}^{-1}(\phi_j \hat{v}) = \mathcal{F}^{-1}(\phi_j) * v \in L^p$, para $v \in L^p$.
Dizemos que $\{\phi_j\}$ formam uma decomposição diádica do espaço.

Para sequências $c = (c_j)_{j \in \widetilde{\mathbb{Z}}}$, onde $\widetilde{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{Z}$, seja

$$\|c\|_{l_q(\widetilde{\mathbb{Z}})} = \begin{cases} \left(\sum_{j \in \widetilde{\mathbb{Z}}} |c_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}, 1 \leq q < \infty \\ \sup_{j \in \widetilde{\mathbb{Z}}} |c_j|, q = \infty. \end{cases}.$$

Definição 1.3.5. *Sejam* $r > 0$, $1 \leq p, q \leq \infty$. *Dizemos que* v *pertence ao Espaço de Besov* $B_{p,q}^r$ *se* $v \in L^p$ *e se a sequência* $\left\{2^{rj} \left\|\mathcal{F}^{-1}(\phi_j \hat{v})\right\|_p\right\} \in l_q$.

Teorema 1.3.6. *A definição dos espaços de Besov não dependem da decomposição diádica escolhida.*

Definição 1.3.7. *Sejam $r > 0$, $1 \leq p, q \leq \infty$. Definimos o espaço de Sobolev homegêneo por*

$$\dot{B}^r_{p,q} = \left\{ v \in \mathcal{S}'; \|v\|_{\dot{B}^r_{p,q}} = \left\| \left\{ 2^{rj} \|\mathcal{F}^{-1}(\phi_j \hat{v})\|_{l_q} \right\} \right\|_p < \infty \right\}$$

É possível provar que $B^r_{p,q}$ é um espaço vetorial normado com a seguinte norma $\|v\|_{B^r_{p,q}} = \|v\|_p + \|v\|_{\dot{B}^r_{p,q}}$. De fato vale o seguinte teorema.

Teorema 1.3.8. *O espaço de Besov $B^r_{p,q}$ é um espaço de Banach.*

Demonstração: Veja [2].

1.3.1 Resultados de Imersões

Queremos agora comparar o espaços de Besov com diferentes índices e também fazer uma relação entre os espaços de Besov e os espaços de Sobolev.

Definição 1.3.9. *Sejam B_1 e B_2 espaços de Banach. Temos que B_1 está continuamente imerso em B_2 se existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$\|v\|_{B_2} \leq c\|v\|_{B_1}, v \in B_1.$$

Denotamos da seguinte forma $B_1 \hookrightarrow B_2$.

Notemos que os espaços de Sobolev formam uma família decrescente de espaços, isto é, vale o seguinte teorema.

Teorema 1.3.10. *Sejam $m \geq m'$ inteiros não negativos. Vale a seguinte imersão contínua*

$$W^m_p \hookrightarrow W^{m'}_p.$$

Para os espaços de Besov $B^r_{p,q}$ com p fixado, vale o seguinte.

Teorema 1.3.11. *Seja* $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq q_1 \leq \infty$ *e* $r \geq r_1 > 0$. *Então*

$$B^r_{p,q} \hookrightarrow B^{r_1}_{p,q_1}.$$

Demonstração: Veja [2].

Relacionaremos os espaços de Besov com os espaços de Sobolev no seguinte teorema.

Teorema 1.3.12. *Seja* $1 \leq p \leq \infty$ *e* m *um inteiro positivo. Então,*

$$B^m_{p,1} \hookrightarrow W^m_p \hookrightarrow B^m_{p,\infty}.$$

Demonstração: Veja [2].

A próxima imersão foi de fundamental importância no capítulo 3, para encontrarmos estimativas para os operadores solução fundamental e de energia.

Teorema 1.3.13. *Temos a seguinte imersão contínua*

$$W^r_p \hookrightarrow B^r_{p,2}.$$

Demonstração: Veja a proposição da página 14 e o teorema da página 30 de [9]. Para a prova veja [10] e [13].

Capítulo

2

Representação da solução

Aplicando a transformada parcial de Fourier em relação a variável x transformamos o problema de Cauchy para a equação diferencial parcial (1) em um PVI de equação diferencial ordinária com parâmetro de frequência $|\xi|$

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt} + |\xi|^2\hat{u} + b(t)\hat{u}_t = 0 \\ \hat{u}(0,.) = \hat{u}_1 \\ \hat{u}_t(0,.) = \hat{u}_2 \end{cases} . \tag{2.1}$$

A solução para o problema (2.1) pode ser representada como

$$\hat{u}(t,\xi) = \Phi_1(t,\xi)\hat{u_1} + \Phi_2(t,\xi)\hat{u_1},$$

em relação aos seus dados de Cauchy $\hat{u}_1, \hat{u}_2$ com funções Φ_1, Φ_2 adequadas. Nosso objetivo é obter propriedades estruturais para Φ_1, Φ_2 a fim de determinar propriedades assintóticas para a solução.

Obter estimativas para Φ_i diretamente da equação não é uma tarefa fácil. Por isso é natural reescrevermos a equação de segunda ordem como um determinado sistema, relacionado a uma microenergia, e encontrar a forma normal para simplificar nosso problema, possibilitando assim determinar estimativas para a solução fundamental.

O objetivo deste capitulo é o de encontrar uma representação para a solução

da edo de tal forma que possamos usar tal representação para fazermos estimativas para o operador de energia e para a solução da equação de onda com dissipação fraca.

A fim de encontrarmos tal representação, vamos dividir o plano de fase em duas zonas. Para isso utilizaremos a seguinte função definida implicitamente

$$(1 + t_\xi)|\xi| = N, \tag{2.2}$$

com uma constante N adequada e definimos as zonas

$$Z_{hyp}(N) = \{(t, \xi); t \geq t_\xi\}, \quad Z_{diss}(N) = \{(t, \xi); 0 \leq t \leq t_\xi\}. \tag{2.3}$$

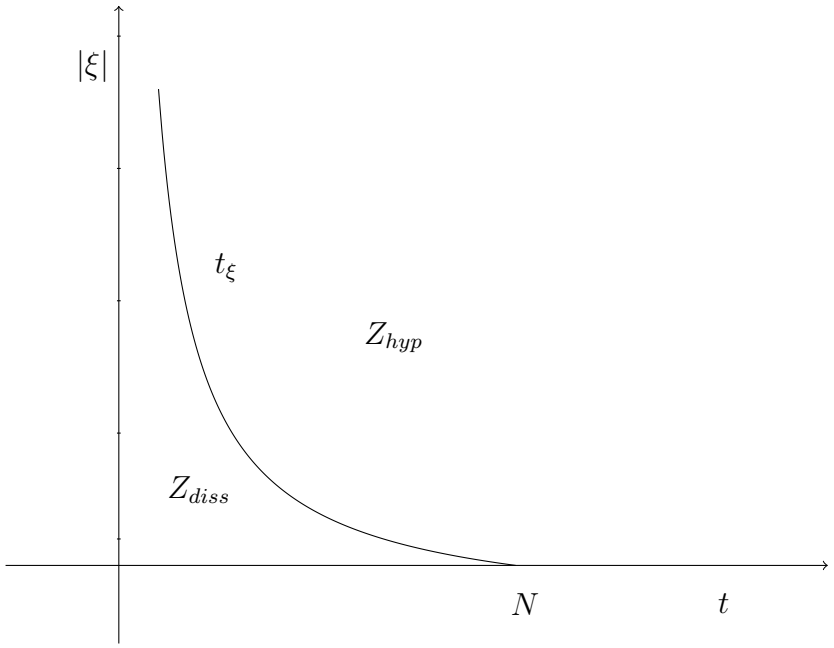


Figura 2.1: Zonas Dissipativa e Hiperbólica.

Com o objetivo de encontrarmos uma forma normal na zona hiperbólica, vamos introduzir a seguinte classe de símbolos.

Definição 2.0.14. *O símbolo $a(t, \xi)$ de um operador pseudo-diferencial pertence a*

classe do símbolo hiperbólico $S_N^{l_1,l_2}\{m_1,m_2\}$*, se satisfaz em* $Z_{hyp}(N)$ *a desigualdade*

$$\left|D_t^k D_\xi^\alpha a(t,\xi)\right| \leq C_{K,\alpha}|\xi|^{m_1-|\alpha|}\left(\frac{1}{1+t}\right)^{m_2+k} \tag{2.4}$$

para todo número natural $k \leq l_1$ *e para todo múlti-índices* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *com* $|\alpha| \leq l_2$.

Se a estimativa é válida para todas as derivadas escrevemos abreviadamente $S_N\{m_1,m_2\}$ para indicar $S_N^{\infty,\infty}\{m_1,m_2\}$.

Proposição 2.0.15. (1) $S_N\{m_1,m_2\}$ *é um espaço de Fréchet.*
(2) $S_N^{l_1',l_2'}\{m_1-k,m_2+l\} \hookrightarrow S_N^{l_1,l_2}\{m_1,m_2\}, \forall l \geq k \geq 0, l_1' \geq l_1, l_2' \geq l_2$.
(3) $S_N\{m_1,m_2\}.S_N\{m_1',m_2'\} \hookrightarrow S_N\{m_1+m_1',m_2+m_2'\}$.
(4) $D_t D_\xi^\alpha S_N\{m_1,m_2\} \hookrightarrow S_N\{m_1-|\alpha|,m_2+1\}$.
(5) $S_N\{-1,2\} \hookrightarrow L_\xi^\infty L_t^1(Z_{hyp})$.

Demonstração: (1) Observe que $S_N\{m_1,m_2\}$ munido com as operações de soma e multiplicação por escalar usuais sobre o corpo K já herda as propriedades de associatividade, comutatividade e distributividade. Além disso é claro que $S_N\{m_1,m_2\}$ possui elemento neutro e inverso. Basta mostrar apenas que $S_N\{m_1,m_2\}$ é fechado para a adição e multiplicação por escalares. Para isso, sejam $a(t,\xi), b(t,\xi) \in S_N\{m_1,m_2\}$ e $\lambda \in K$. Então:

$$\begin{aligned}
\left|D_t^k D_\xi^\alpha(a(t,\xi)+\lambda b(t,\xi))\right| &= \left|D_t^k D_\xi^\alpha(a(t,\xi)) + \lambda D_t^k D_\xi^\alpha(b(t,\xi))\right| \\
&\leq \left|D_t^k D_\xi^\alpha(a(t,\xi))\right| + |\lambda|\left|D_t^k D_\xi^\alpha(b(t,\xi))\right| \\
&\leq c_{k,\alpha}|\xi|^{m_1-|\alpha|}\left(\frac{1}{1+t}\right)^{m_2+k} + d_{k,\alpha}|\lambda||\xi|^{m_1-|\alpha|}\left(\frac{1}{1+t}\right)^{m_2+k} \\
&= C_{k,\alpha}|\xi|^{m_1-|\alpha|}\left(\frac{1}{1+t}\right)^{m_2+k}, \forall k \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n
\end{aligned}$$

ou seja, $a(t,\xi)+\lambda b(t,\xi) \in S_N\{m_1,m_2\}$. Logo $S_N\{m_1,m_2\}$ é um espaço de Fréchet.

(2) Seja $a(t,\xi) \in S_N^{l_1',l_2'}\{m_1-k,m_2+l\}$, com $l \geq k \geq 0$. Estamos trabalhando na

zona hiperbólica, então

$$1+t \geq 1+t_\xi \Rightarrow \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{1+t_\xi} = \frac{|\xi|}{N}.$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned}
\left|D_t^\eta D_\xi^\alpha a(t,\xi)\right| &\leq c_{\eta,\alpha}|\xi|^{m_1-k-|\alpha|}\left(\frac{1}{1+t}\right)^{m_2+l+\eta} \\
&= c_{\eta,\alpha}|\xi|^{m_1-|\alpha|}|\xi|^{-k}\left(\frac{1}{1+t}\right)^{m_2+l-k+\eta}\left(\frac{1}{1+t}\right)^{k} \\
&\leq c_{\eta,\alpha}|\xi|^{m_1-|\alpha|}|\xi|^{-k}\left(\frac{1}{1+t}\right)^{m_2+l-k+\eta}\left(\frac{1}{1+t_\xi}\right)^{k} \\
&= c_{\eta,\alpha}|\xi|^{m_1-|\alpha|}|\xi|^{-k}\left(\frac{1}{1+t}\right)^{m_2+l-k+\eta}\frac{|\xi|^k}{N^k} \\
&= C_{\eta,\alpha}|\xi|^{m_1-|\alpha|}\left(\frac{1}{1+t}\right)^{m_2+l-k+\eta} \\
&\leq C_{\eta,\alpha}|\xi|^{m_1-|\alpha|}\left(\frac{1}{1+t}\right)^{m_2+\eta}, \forall \eta \leq l_1, \forall |\alpha| \leq l_2, \\
&\Rightarrow a(t,\xi) \in S_N^{l_1,l_2}\{m_1,m_2\}.
\end{aligned}$$

O que conclui 2.

(3) Sejam $a(t,\xi) \in S_N\{m_1,m_2\}$ e $b(t,\xi) \in S_N\{m_1^{'},m_2^{'}\}$. Pela regra de Leibniz,

$$\begin{aligned}
\left|D_t^k D_\xi^\alpha a(t,\xi).b(t,\xi)\right| &= \left|\sum_{k_1+k_2=k}\sum_{\alpha_1+\alpha_2=\alpha} c_{k_1,k_2,\alpha_1,\alpha_2} D_t^{k_1} D_\xi^{\alpha_1} a(t,\xi) D_t^{k_2} D_\xi^{\alpha_2} b(t,\xi)\right| \\
&\leq \sum_{k_1+k_2=k}\sum_{\alpha_1+\alpha_2=\alpha} c_{k_1,k_2,\alpha_1,\alpha_2}\left|D_t^{k_1} D_\xi^{\alpha_1} a(t,\xi)\right|\left|D_t^{k_2} D_\xi^{\alpha_2} b(t,\xi)\right| \\
&\leq \sum_{k_1+k_2=k}\sum_{\alpha_1+\alpha_2=\alpha} c_{k_1,k_2,\alpha_1,\alpha_2}|\xi|^{m_1+m_1^{'}-|\alpha_1|-|\alpha_2|}\left(\frac{1}{1+t}\right)^{m_2+m_2^{'}+k_1+k_2} \\
&= C_{k,\alpha}|\xi|^{m_1+m_1^{'}-|\alpha|}\left(\frac{1}{1+t}\right)^{m_2+m_2^{'}+k}, \forall k \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \\
&\Rightarrow a(t,\xi).b(t,\xi) \in S_N\{m_1+m_1^{'}, m_2+m_2^{'}\}.
\end{aligned}$$

(4) Seja $a(t,\xi) \in S_N\{m_1,m_2\}$. Pelo teorema de Schwarz,

$$\begin{aligned}\left|D_t^k D_\xi^\alpha \left(D_t D_\xi^\alpha a(t,\xi)\right)\right| &= \left|D_t^{k+1} D_\xi^{\alpha+\alpha} a(t,\xi)\right| \\ &\leq |\xi|^{(m_1-|\alpha|-|\alpha|)} \left(\frac{1}{1+t}\right)^{(m_2+1)+k}, \forall k \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \\ &\Rightarrow a(t,\xi) \in S_N\{m_1-|\alpha|, m_2+1\}.\end{aligned}$$

(5) Seja $a(t,\xi) \in S_N\{-1,2\}$, então

$$\begin{aligned}\|a(t,\xi)\|_{L_t^1(Z_{hyp})} &= \int_{Z_{hyp}} |a(t,\xi)|dt \\ &\lesssim \int_{Z_{hyp}} \frac{1}{|\xi|(1+t)^2}dt \\ &= \int_{t_\xi}^{\infty} \frac{1}{|\xi|(1+t)^2}dt = \frac{1}{N}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sup_\xi \|a(t,\xi)\|_{L_t^1(Z_{hyp})} \lesssim \frac{1}{N} \Rightarrow a(t,\xi) \in L_\xi^\infty L_t^1(Z_{hyp}).$$

■

Para a construção da representação das soluções, usaremos na zona dissipativa uma reformulação da equação integral de Volterra (3.8).

Consideremos a microenergia,

$$U = (h(t,\xi)\hat{u}, D_t\hat{u}) \tag{2.5}$$

com

$$h(t,\xi) = \frac{N}{1+t}\phi_{diss,N}(t,\xi) + |\xi|\phi_{hyp,N}(t,\xi). \tag{2.6}$$

A partir daqui vamos denotar por $\phi_{diss,N}(t,\xi)$ a função corte da zona dissipativa e por $\phi_{hyp,N}(t,\xi)$ a função corte da zona hiperbólica, isto é, $\phi_{diss,N}(t,\xi) = \chi\left(\frac{(1+t)|\xi|}{N}\right)$ com $\chi \in C_0^\infty(B(0,2))$, $\chi \equiv 1$ na $B\left(0,\frac{1}{2}\right)$ e $\phi_{hyp,N}(t,\xi) = 1 - \phi_{diss,N}(t,\xi)$. Particularmente segue que $\phi_{hyp,N} \in S_N\{0,0\}$. A microenergia (2.5) está relacionada com o operador

de energia $\mathbb{E}(t,D)$,

$$\mathbb{E}(t,D):(\langle D\rangle u_1,u_2)\mapsto(|D|u(t,.),D_tu(t,.))\,, \tag{2.7}$$

onde $\langle D\rangle$ e $|D|$ são operadores pseudo-diferenciais com símbolos $\langle\xi\rangle=\sqrt{1+|\xi|^2}$ e $|\xi|$ respectivamente.

Nosso objetivo é encontrar estimativas e uma representação estrutural para a solução fundamental $\mathcal{E}(t,s,\xi)$ correspondente ao sistema $D_tU=A(t,\xi)U$ e a partir disso deduzir desigualdades para o operador de energia $\mathbb{E}(t,D)$.

Observação 2.0.16. *Ao longo desse texto as hipóteses* $(A1)$*,* $(A2)_l$ *e* $(A3)$ *são aquelas consideradas na introdução.*

2.1 Zona Dissipativa

A idéia básica é reescrever o problema como uma equação integral. Na zona dissipativa a microenergia (2.5) simplifica-se para

$$U=\left(\frac{N}{1+t}\hat{u},D_t\hat{u}\right)^T$$

e então temos que resolver o sistema

$$D_t\mathcal{E}(t,s,\xi)=A(t,\xi)\mathcal{E}(t,s,\xi)=\begin{bmatrix}\frac{i}{1+t} & \frac{N}{1+t}\\ \frac{(1+t)|\xi|^2}{N} & ib(t)\end{bmatrix}\mathcal{E}(t,s,\xi),\quad \mathcal{E}(s,s,\xi)=I. \tag{2.8}$$

a fim de obter a relação $U(t,\xi)=\mathcal{E}(t,s,\xi)U(s,\xi)$, para a demonstração dessa relação é suficiente que ambos os lados da igualdade satisfazem o mesmo PVI. Vamos usar a função auxiliar definida como:

$$\lambda(t)=\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t b(\tau)d\tau\right\}. \tag{2.9}$$

Proposição 2.1.1. *Suponha* $(A1)$ *e* $(A3)$*. Então para função auxiliar definida em* (2.9)*, temos que*

$$\int_0^t \frac{d\tau}{\lambda^2(\tau)} \sim \frac{t}{\lambda^2(t)}$$

e $\dfrac{t}{\lambda^2(t)}$ *é monótona crescente para* t *suficientemente grande e tende para o* ∞*, quando* $t \to \infty$*. Particularmente* $\lambda^2(t) \lesssim 1 + t$*,* $t \geq 0$*.*

Demonstração: A monotonicidade é consequência de:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{t}{\lambda^2(t)} &= \frac{d}{dt}\left\{\frac{t}{\exp\{\int_0^t b(\tau)d\tau\}}\right\} \\
&= \frac{\exp\{\int_0^t b(\tau)d\tau\} - t\exp\{\int_0^t b(\tau)d\tau\}b(t)}{\exp^2\{\int_0^t b(\tau)d\tau\}} \\
&= \frac{1-tb(t)}{\lambda^2(t)}.
\end{aligned}$$

Agora observe que

$$\frac{1-tb(t)}{\lambda^2(t)} \sim \frac{1}{\lambda^2(t)}.$$

De fato, como $t \geq 0$ e $b(t) \geq 0$, é claro que

$$\frac{1-tb(t)}{\lambda^2(t)} \leq \frac{1}{\lambda^2(t)}.$$

Por outro lado, como $\limsup_{t\to\infty} tb(t) < 1$, para $t \geq 0$ suficientemente grande existe c tal que $0 \leq tb(t) \leq c < 1$. Daí que,

$$\frac{1-tb(t)}{\lambda^2(t)} \geq \frac{1-c}{\lambda^2(t)} = k\frac{1}{\lambda^2(t)}, \quad k > 0$$

concluindo a afirmação. Porque $\dfrac{1}{\lambda^2(t)} > 0$, conclui-se que $\dfrac{t}{\lambda^2(t)}$ é monotonicamente crescente, para t suficientemente grande.

Mostremos agora que $\lim_{t\to\infty} \dfrac{t}{\lambda^2(t)} = \infty$. De fato, sabemos que para t suficiente-

mente grande tem-se

$$0 \leq b(t) \leq \frac{c}{t} \Rightarrow \int_0^t b(t)dt \leq \int_0^t \frac{c}{s}ds \Rightarrow \exp \int_0^t b(t)dt \leq \exp c(\ln t - 1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda^2(t)} \geq \frac{1}{t^c e^{-c}} \Rightarrow \frac{t}{\lambda^2(t)} \geq \frac{t}{t^c e^{-c}} = t^{1-c}e^c \to \infty,$$

pois $c < 1$.

Para mostrarmos a compatibilidade entre as funções observemos que,

$$\frac{1 - tb(t)}{\lambda^2(t)} \leq \frac{1}{\lambda^2(t)},$$

integrando de 0 a t ambos os lados da desigualdade,

$$\frac{t}{\lambda^2(t)} \leq \int_0^t \frac{d\tau}{\lambda^2(\tau)} \tag{2.10}$$

Por outro lado, para t suficientemente grande

$$\frac{1 - c}{\lambda^2(t)} \leq \frac{1 - tb(t)}{\lambda^2(t)},$$

integrando de 0 a t ambos os lados da desigualdade,

$$(1 - c)\int_0^t \frac{d\tau}{\lambda^2(\tau)} \leq \frac{t}{\lambda^2(t)}, \quad 1 - c > 0. \tag{2.11}$$

As desigualdades (2.10) e (2.11), implicam que $\displaystyle\int_0^t \frac{d\tau}{\lambda^2(\tau)} \sim \frac{t}{\lambda^2(t)}$.

Finalmente, como $\dfrac{t}{\lambda^2(t)}$ é monotonicamente crescente a partir de um certo t_0 temos que

$$\frac{t_0}{\lambda^2(t_0)} \leq \frac{t}{\lambda^2(t)}, \forall t \geq t_0.$$

Sabemos ainda que $\dfrac{t}{\lambda^2(t)}$ é contínua, logo assume um mínimo $k > 0$ em $[\varepsilon, t_0], \forall \varepsilon > 0$.

Tomando $\widetilde{C} = min\left\{\frac{t_0}{\lambda^2(t_0)}, k\right\}$, temos que

$$1 \lesssim \frac{t}{\lambda^2(t)} \Rightarrow \lambda^2(t) \lesssim 1 + t, \forall t > 0.$$

■

Após a Proposição (2.1.1) estamos aptos para encontrar uma desigualdade para a norma da solução fundamental.

Lema 2.1.2. *Suponha* $(A1)$ *e* $(A3)$. *Então,*

$$\|\mathcal{E}(t, s, \xi)\| \leq \frac{\lambda^2(s)}{\lambda^2(t)}, \quad t_\xi \geq t \geq s. \tag{2.12}$$

Demonstração: Vamos denotar por $v(t, s, \xi)$ e $w(t, s, \xi)$ as entradas de uma coluna de $\mathcal{E}(t, s, \xi)$. Então resolver a equação (2.8) é equivalente a resolver as seguintes edo's:

$$\begin{cases} v_t(t, s, \xi) = -\frac{1}{1+t}v(t, s, \xi) + \frac{iN}{1+t}w(t, s, \xi) \\ v(s, s, \xi) = \eta_1 \end{cases} \tag{2.13}$$

$$\begin{cases} w_t(t, s, \xi) = \frac{i(1+t)}{N}|\xi|^2 v(t, s, \xi) - b(t)w(t, s, \xi) \\ w(s, s, \xi) = \eta_2 \end{cases} \tag{2.14}$$

onde $\eta = (\eta_1, \eta_2) = (1, 0)$ para a primeira coluna e $\eta = (0, 1)$ para a segunda coluna. Para resolve-las utilizaremos o método do fator integrante. Para a edo (2.13) temos que o fator integrante é:

$$\mathcal{M}(t) = \exp\left(\int_s^t \frac{1}{1+\tau}d\tau\right) = \exp\left(\ln(1+\tau)|_s^t\right) = \frac{1+t}{1+s}, \tag{2.15}$$

multiplicando (2.13) por (2.15), obtemos,

$$\frac{d}{dt}\left(v(t, s, \xi)\frac{1+t}{1+s}\right) = i\frac{N}{1+s}w(t, s, \xi)$$

integrando de s a t, substituindo o dado inicial e isolando $v(t,s,\xi)$,

$$v(t,s,\xi) = \frac{1+s}{1+t}\eta_1 + i\frac{N}{1+t}\int_s^t w(\tau,s,\xi)d\tau \tag{2.16}$$

Agora para a edo (2.14), o fator integrante é

$$\beta(t) = \exp\left(\int_s^t b(\tau)d\tau\right) = \frac{\lambda^2(t)}{\lambda^2(s)} \tag{2.17}$$

multiplicando (2.14) por (2.17), obtemos,

$$\frac{d}{dt}\left(w(t,s,\xi)\frac{\lambda^2(t)}{\lambda^2(s)}\right) = \frac{\lambda^2(t)}{\lambda^2(s)}\frac{i}{N}|\xi|^2(1+t)v(t,s,\xi)$$

integrando de s a t, substituindo o dado inicial e isolando $w(t,s,\xi)$,

$$w(t,s,\xi) = \frac{\lambda^2(t)}{\lambda^2(s)}\eta_2 + \frac{i}{N}\frac{|\xi|^2}{\lambda^2(t)}\int_s^t \lambda^2(\tau)(1+\tau)v(\tau,s,\xi)d\tau. \tag{2.18}$$

Multiplicando (2.16) e (2.18) pelo fator peso $\dfrac{\lambda^2(t)}{\lambda^2(s)}$, chegaremos a

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda^2(t)}{\lambda^2(s)}v(t,s,\tau) &= \frac{\lambda^2(t)}{\lambda^2(s)}\frac{1+s}{1+t}\eta_1 + \frac{iN\lambda^2(t)}{1+t}\int_s^t \frac{1}{\lambda^2(\tau)}\left(\frac{\lambda^2(\tau)}{\lambda^2(s)}w(\tau,s,\xi)\right)d\tau \\
\frac{\lambda^2(t)}{\lambda^2(s)}w(t,s,\xi) &= \eta_2 + \frac{i|\xi|^2}{N}\int_s^t (1+\tau)\left(\frac{\lambda^2(\tau)}{\lambda^2(s)}v(\tau,s,\xi)\right)d\tau.
\end{aligned}$$

Objetivando provar a existência das funções $v, w \in L^\infty\{t \geq s, (t,\xi), (s,\xi) \in Z_{diss}(N)\}$, vamos substituir a primeira equação na segunda e logo depois encontrar uma limitação uniforme para ambas funções. Fazendo a substituição chegaremos a:

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda^2(t)}{\lambda^2(s)}w(t,s,\xi) &= \eta_2 + \frac{i|\xi|^2}{N}\int_s^t (1+s)\frac{\lambda^2(\tau)}{\lambda^2(s)}\eta_1 d\tau \\
&- |\xi|^2\int_s^t \lambda^2(\tau)\int_s^\tau \frac{1}{\lambda^2(\theta)}\left(\frac{\lambda^2(\theta)}{\lambda^2(s)}w(\theta,s,\xi)\right)d\theta d\tau.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Fazendo

$$f(t,\xi) = \frac{\lambda^2(t)}{\lambda^2(s)} w(t,s,\xi),$$

$$\psi(t,\xi) = \eta_2 + \frac{i|\xi|^2}{N}\int_s^t (1+s)\frac{\lambda^2(\tau)}{\lambda^2(s)}\eta_1 d\tau,$$

e

$$k(\tau,\theta,\xi) = \frac{1}{\lambda^2(\theta)}\int_s^t |\xi|^2\lambda^2(\tau)d\tau,$$

teremos que,

$$f(t,p) + \int_s^\tau k(t,\theta,\xi)f(\theta,\xi)d\theta = \psi(t,\xi).$$

Pelo teorema (3.4.10) garantimos a existência de $\dfrac{\lambda^2(t)}{\lambda^2(s)} w(t,s,\xi)$ e consequentemente a existência de $w(t,s,\xi)$.

Lembre-se que estamos trabalhando na zona dissipativa, isto é, $t_\xi \geq t \geq s$ e que $\lambda(t)$ é uma função crescente. Sendo assim,

$$\begin{aligned}
|\xi|^2\int_s^t (1+s)\frac{\lambda^2(s)}{\lambda^2(\tau)}d\tau &\lesssim |\xi|^2(1+t)\lambda^2(t)\int_s^t \frac{d\tau}{\lambda^2(\tau)} && (2.20)\\
&\lesssim |\xi|^2(1+t)\lambda^2(t)\frac{t}{\lambda^2(t)} && (2.21)\\
&\lesssim |\xi|^2(1+t)t && (2.22)\\
&\lesssim |\xi|^2(1+t)^2 && (2.23)\\
&\lesssim [|\xi|(1+t_\xi)]^2 = N^2 \lesssim 1 && (2.24)
\end{aligned}$$

onde usamos a proposição (2.1.1) para a estimativa (2.21). Ainda

$$\begin{aligned}
\int_s^t |\xi|^2\int_s^\tau \frac{\lambda^2(\tau)}{\lambda^2(\theta)}d\theta d\tau &\lesssim \int_s^t |\xi|^2\frac{\tau}{\lambda^2(\tau)}\lambda^2(\tau)d\tau && (2.25)\\
&= \frac{|\xi|^2}{2}(t^2-s^2) && (2.26)\\
&\lesssim \frac{(|\xi|t_\xi)^2}{2} && (2.27)\\
&\lesssim \frac{[|\xi|(t_\xi+1)]^2}{2} = \frac{N^2}{2} \lesssim 1 && (2.28)
\end{aligned}$$

onde usamos a proposição (2.1.1) para a estimativa (2.25).
Da expressão (2.19), juntamente com (2.24) e (2.28) obtemos que,

$$\frac{\lambda^2(t)}{\lambda^2(s)}|w(t,s,\xi)| \leq K + \int_s^t |\xi|^2 \int_s^\tau \frac{\lambda^2(\tau)}{\lambda^2(\theta)} d\tau \frac{\lambda^2(\theta)}{\lambda^2(s)} |w(t,s,\xi)| d\theta,$$

pela desigualdade de Gronwall,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^2(t)}{\lambda^2(s)}|w(t,s,\xi)| &\leq K \exp\left(\int_s^\tau |\xi|^2 \int_s^t \frac{\lambda^2(\tau)}{\lambda^2(\theta)}\right) d\tau d\theta \\ &\lesssim Ke \lesssim 1, \end{aligned}$$

portanto,

$$\|w(t,s,\xi)\| \lesssim \frac{\lambda^2(s)}{\lambda^2(t)}.$$

Analogamente prova-se a existência de $v(t,s,\xi)$ e que $\|v(t,s,\xi)\| \lesssim \dfrac{\lambda^2(s)}{\lambda^2(t)}$. Concluindo assim o lema.

■

A fim de encontrarmos a forma normal perfeita na zona hiperbólica é essencial encontrar uma estimativa para $\mathcal{E}(t_\xi, 0, \xi)$ para $|\xi| \leq N$. É o que faremos no próximo lema.

Lema 2.1.3. *Suponha* $(A1)$, $(A2)_l$ *e* $(A3)$. *Então para* $|\xi| \leq N$ *e* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *a estimativa*

$$\left\| D_\xi^\alpha \mathcal{E}(t_\xi, 0, \xi) \right\| \leq C_\alpha \frac{1}{\lambda^2(t_\xi)} |\xi|^{-|\alpha|}$$

é válida parra todo multi-índice $|\alpha| \leq l+1$.

Demonstração: Temos que $D_t\mathcal{E} = A\mathcal{E}$, onde

$$A = \begin{bmatrix} \frac{i}{1+t} & \frac{N}{1+t} \\ \frac{(1+t)|\xi|^2}{N} & ib(t) \end{bmatrix}.$$

Afirmação 1:

$$\|A(t,\xi)\| \lesssim \frac{1}{1+t}. \tag{2.29}$$

De fato, pela hipótese e pela definição da zona dissipativa segue que,

$$|ib(t)| = |b(t)| \leq C_0 \frac{1}{1+t} \Rightarrow |b(t)| \lesssim \frac{1}{1+t}$$

e

$$\frac{1+t}{N}|\xi|^2 \leq \frac{1+t_\xi}{N}|\xi|^2 = \frac{(1+t_\xi)|\xi|}{N}|\xi| = |\xi| \leq \frac{N}{1+t} \Rightarrow \frac{1+t}{N}|\xi|^2 \lesssim \frac{1}{1+t}.$$

O que conclui a afirmação.

Para $|\alpha| = 1$ temos que,

$$D_t D_\xi^\alpha \mathcal{E} = D_\xi^\alpha (A\mathcal{E}) = \left(D_\xi^\alpha A\right)\mathcal{E} + A\left(D_\xi^\alpha \mathcal{E}\right). \tag{2.30}$$

Usando a propriedade da solução fundamental com condição inicial $D_\xi^\alpha \mathcal{E}(0,0,\xi) = 0$,

$$D_\xi^\alpha \mathcal{E}(t,0,\xi) = \int_0^t \mathcal{E}(t,\tau,\xi)\left(D_\xi^\alpha A(\tau,\xi)\right)\mathcal{E}(\tau,0,\xi)d\tau.$$

O lema (2.1.2) nos dá uma estimativa para $\mathcal{E}(t,s,\xi)$ e sabemos que para $|\alpha| = 1$ temos

$$\left\|D_\xi^\alpha A(t,\xi)\right\| \lesssim 1, \tag{2.31}$$

pois quando derivarmos cada entrada da matriz A em relação a ξ, o único termo não nulo que restará é $\left|D_\xi^\alpha\left(\frac{(1+t)|\xi|^2}{N}\right)\right| \lesssim |\xi_i| \lesssim |\xi| \lesssim N$ .Então,

$$\begin{aligned}
\left\|D_\xi^\alpha \mathcal{E}(t,0,\xi)\right\| &= \left\|\int_0^t \mathcal{E}(t,\tau,\xi)\left(D_\xi^\alpha A(\tau,\xi)\right)\mathcal{E}(\tau,0,\xi)d\tau\right\| \\
&\leq \int_0^t \|\mathcal{E}(t,\tau,\xi)\|\left\|\left(D_\xi^\alpha A(\tau,\xi)\right)\right\|\|\mathcal{E}(\tau,0,\xi)\|d\tau \\
&\lesssim \int_0^t \frac{\lambda^2(\tau)}{\lambda^2(t)}\frac{\lambda^2(0)}{\lambda^2(\tau)}d\tau.
\end{aligned}$$

Daí

$$\left\|D_\xi^\alpha \mathcal{E}(t,0,\xi)\right\| \;=\; \frac{t}{\lambda^2(t)}$$

Ainda, pela a definição da zona dissipativa, temos

$$t \leq t_\xi \leq t_\xi + 1 \Rightarrow t|\xi| \leq (1+t_\xi)|\xi| = N \Rightarrow t \lesssim |\xi|^{-1}$$

$$\therefore \left\|D_\xi^\alpha \mathcal{E}(t,0,\xi)\right\| \lesssim \frac{1}{\lambda^2(t)}|\xi|^{-1}, \forall (t,\xi) \in Z_{diss}(N). \tag{2.32}$$

Usando novamente a solução fundamental, também é verdade que:

$$D_\xi^\alpha \mathcal{E}(t,s,\xi) = \int_0^t \mathcal{E}(t,\tau,\xi)\left(D_\xi^\alpha A(\tau,\xi)\right)\mathcal{E}(\tau,s,\xi)d\tau.$$

Daí que,

$$\begin{aligned}
\left\|D_\xi^\alpha \mathcal{E}(t,s,\xi)\right\| &= \left\|\int_0^t \mathcal{E}(t,\tau,\xi)\left(D_\xi^\alpha A(\tau,\xi)\right)\mathcal{E}(\tau,s,\xi)d\tau\right\| \\
&\leq \int_0^t \|\mathcal{E}(t,\tau,\xi)\|\left\|\left(D_\xi^\alpha A(\tau,\xi)\right)\right\|\|\mathcal{E}(\tau,s,\xi)\|d\tau. \\
&\lesssim \int_0^t \frac{\lambda^2(\tau)}{\lambda^2(t)}\frac{\lambda^2(s)}{\lambda^2(\tau)}d\tau \\
&= \frac{\lambda^2(s)}{\lambda^2(t)}t \\
&\leq \frac{\lambda^2(t)}{\lambda^2(t)}t \\
&\lesssim |\xi|^{-1}.
\end{aligned}$$

Afirmação 2: Para qualquer $\alpha \in \mathbb{N}^n$, temos que

$$\left\|D_\xi^\alpha A(t,\xi)\right\| \lesssim |\xi|^{1-|\alpha|}.$$

De fato, para $|\alpha| = 1$ segue veracidade pela desigualdade (2.31). Para $|\alpha| = 2$,

usando o fato de estarmos na zona dissipativa,

$$\left\|D_\xi^\alpha A(t,\xi)\right\| \leq \frac{1+t}{N} \leq |\xi|^{-1}.$$

Para $|\alpha| > 2$ temos que as derivadas das entradas da matriz $A(t,\xi)$ se anulam, portanto a afirmação está provada.

Afirmação 3: Para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$\left\|D_\xi^\alpha \mathcal{E}(t,s,\xi)\right\| \leq |\xi|^{-|\alpha|} \tag{2.33}$$

A prova desta afirmação é feita de maneira análoga a:

Afirmação 4: Para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$\left\|D_\xi^\alpha \mathcal{E}(t,0,\xi)\right\| \leq \frac{1}{\lambda^2(t)}|\xi|^{-|\alpha|} \tag{2.34}$$

Usaremos a regra de Leibniz e indução sobre $|\alpha|$. É verdade para $|\alpha| = 1$ pela desigualdade (2.32). Suponhamos que a afirmação seja válida para todo $|\alpha| \leq l$. Seja e_i um elemento da base canônica de $\mathbb{R}^n$ e considere $\beta = \alpha - e_i$, então para $|\alpha| = l+1$ temos $|\beta| = l$ e

$$\begin{aligned}\left\|D_\xi^\alpha \mathcal{E}(t,0,\xi)\right\| &= \left\|D_\xi^\beta D_\xi^{e_i}\mathcal{E}(t,0,\xi)\right\| \\ &= \left\|D_\xi^\beta \int_0^t \mathcal{E}(t,\tau,\xi)\left(D_\xi^{e_i}A(\tau,\xi)\right)\mathcal{E}(\tau,0,\xi)d\tau\right\|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\|D_\xi^\alpha \mathcal{E}(t,0,\xi)\right\| &= \left\|\int_0^t \sum_{\beta_1+\beta_2=\beta}\sum_{\beta'+\beta''=\beta_1} D_\xi^{\beta'}\mathcal{E}(t,\tau,\xi)\left(D_\xi^{\beta''+e_i}A(\tau,\xi)\right)D_\xi^{\beta_2}\mathcal{E}(\tau,0,\xi)d\tau\right\| \\ &\leq \int_0^t \sum_{\beta_1+\beta_2=\beta}\sum_{\beta'+\beta''=\beta_1}\left\|D_\xi^{\beta_1}\mathcal{E}(t,\tau,\xi)\right\|\left\|\left(D_\xi^{\beta''+e_i}A(\tau,\xi)\right)\right\|\left\|D_\xi^{\beta_2}\mathcal{E}(\tau,0,\xi)\right\|d\tau.\end{aligned}$$

Pelas afirmações 2, 3 e pela hipótese de indução, segue que

$$\begin{aligned}
\left\|D_\xi^\alpha \mathcal{E}(t,0,\xi)\right\| &\lesssim \int_0^t \sum_{\beta_1+\beta_2=\beta} \sum_{\beta'+\beta''=\beta_1} \frac{1}{\lambda^2(t)} |\xi|^{-|\beta'|} |\xi|^{1-|\beta''|+1} |\xi|^{-|\beta_2|} d\tau. \\
&= \int_0^t \frac{1}{\lambda^2(t)} \sum_{\beta_1+\beta_2=\beta} \sum_{\beta'+\beta''=\beta_1} |\xi|^{-|\beta_1|} |\xi|^{-|\beta_2|} d\tau. \\
&= \int_0^t \frac{1}{\lambda^2(t)} \sum_{\beta_1+\beta_2=\beta} \sum_{\beta'+\beta''=\beta_1} |\xi|^{-|\beta|} d\tau. \\
&\lesssim \int_0^t \frac{1}{\lambda^2(t)} |\xi|^{-|\beta|} d\tau. \\
&\lesssim \frac{t}{\lambda^2(t)} |\xi|^{-|\beta|} \\
&\lesssim \frac{t}{\lambda^2(t)} |\xi|^{-|\beta|-1}.
\end{aligned}$$

Concluindo assim a afirmação 4.

Das afirmações 2 e 4, segue que

$$\left\| \left(D_\xi^{\alpha_1} A(t,\xi)\right)\right) \left(D_\xi^{\alpha_2} \mathcal{E}(t,0,\xi)\right) \right\| \lesssim \frac{1}{\lambda^2(t)} |\xi|^{1-|\alpha_1|-|\alpha_2|}. \tag{2.35}$$

para $|\alpha_1| + |\alpha_2| \leq l$.

Integrando (2.30) de 0 a t e usando a estimativa (2.35),

$$\begin{aligned}
\left\|D_\xi^\alpha \mathcal{E}(t,0,\xi)\right\| &= \left\| \int_0^t \left[\left(D_\xi^\alpha A\right) \mathcal{E} + A\left(D_\xi^\alpha \mathcal{E}\right)\right] d\tau \right\| \\
&\leq \int_0^t \left[\left\| \left(D_\xi^\alpha A\right) \mathcal{E}\right\| + \left\| A\left(D_\xi^\alpha \mathcal{E}\right) \right\|\right] d\tau \\
&\lesssim \int_0^t \left[\frac{1}{\lambda^2(t)} |\xi|^{1-|\alpha|} + \frac{1}{\lambda^2(t)} |\xi|^{1-|\alpha|}\right] d\tau \\
&\lesssim \int_0^t \frac{1}{\lambda^2(t)} |\xi|^{1-|\alpha|} d\tau,
\end{aligned}$$

pela proposição (2.1.1),

$$\left\|D_\xi^\alpha \mathcal{E}(t,0,\xi)\right\| \lesssim \frac{t}{\lambda^2(t)} |\xi|^{1-|\alpha|}$$

$$\begin{aligned} &\lesssim \frac{|\xi|^{-1}}{\lambda^2(t)}|\xi|^{1-|\alpha|} \\ &= \frac{1}{\lambda^2(t)}|\xi|^{-|\alpha|}. \end{aligned}$$

A hipótese sobre as derivadas de $b(t)$ implica

$$\left\|D_t^k A(t,\xi)\right\| \lesssim \left(\frac{1}{1+t}\right)^{k+1}, k \leq l.$$

Segue das observações anteriores que

$$\left\|D_t^k D_\xi^\alpha A(t,\xi)\right\| \lesssim |\xi|^{1-|\alpha|}\left(\frac{1}{1+t}\right)^{k+1}$$

Usando o fato de que $D_t\mathcal{E} = A\mathcal{E}$, a fórmula de Leibniz e as estimativas acima, concluímos:

$$\left\|D_t^k D_\xi^\alpha \mathcal{E}(t,0,\xi)\right\| \lesssim \frac{1}{\lambda^2(t)}\left(\frac{1}{1+t}\right)^k |\xi|^{1-|\alpha|}. \tag{2.36}$$

Finalmente, de $(1+t_\xi)|\xi| = N$ é fácil observar o que se segue

$$|D_\xi^\alpha t_\xi| \lesssim |\xi|^{-1-|\alpha|} \tag{2.37}$$

Da fórmula de Faà de Bruno e das estimativas (2.36) e (2.37) concluímos a demonstração do lema.

■

Este resultado pode ser reformulado para mostrar que

$$\lambda^2(t_\xi)\mathcal{E}(t_\xi,0,\xi) \in \dot{S}^0,$$

onde

$$\dot{S}^0 = \{m \in C^\infty(\mathbb{R}^n - 0); |D^\alpha m(\xi)| \leq C_\alpha |\xi|^{k-\alpha}\}$$

denota a classe de símbolo homogêneo de ordem k.

2.2 Zona Hiperbólica

Vamos usar a classe de símbolos introduzidos na definição (2.0.14). Note que $|\xi|\phi_{hyp,N} \in S_N\{1,0\}$ e que pela hipótese sobre as derivadas de $b(t)$, temos que o coeficiente $b(t)\phi_{hyp,N} \in S_N^{l,\infty}\{0,1\}$.

2.2.1 Forma Normal

Na zona hiperbólica a microenergia (2.5) simplifica para $U = (|\xi|\hat{u}, D_t\hat{u})^T$. Sendo assim devemos considerar o seguinte sistema

$$D_tU = A(t,\xi)U = \begin{bmatrix} 0 & |\xi| \\ |\xi| & ib(t) \end{bmatrix} U. \tag{2.38}$$

Vamos aplicar duas transformações. No primeiro passo vamos diagonalizar a parte homogênea principal. Depois executaremos mais passos de diagonalização para fazer o restante pertencer a uma classe de símbolos suficientemente boa.

Passo 1: A fim de diagonalizarmos a parte homogênea principal do sistema (2.38), vamos encontrar os autovetores da matriz $A(t,\xi)$. Os autovalores de $A(t,\xi)$ são:

$$det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow det \begin{bmatrix} \lambda & |\xi| \\ |\xi| & \lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 = |\xi|^2 \Rightarrow \lambda = \pm|\xi|.$$

Portanto os autovetores associados aos autovalores $|\xi|$ e $-|\xi|$ são respectivamente,

$$\begin{bmatrix} |\xi| & |\xi| \\ |\xi| & |\xi| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = -y$$

escolha o autovetor $(-1,1)$ e

$$\begin{bmatrix} -|\xi| & |\xi| \\ |\xi| & -|\xi| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = y$$

escolha o autovetor $(1,1)$.

Seja então

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.39}$$

a matriz constituída de autovetores de $A(t,\xi)$.

Então obtemos que $U^{(0)} = M^{-1}U$ satisfaz

$$\begin{aligned} D_t U^{(0)} &= M^{-1} D_t U = M^{-1} A(t,\xi) U \\ &= M^{-1} A(t,\xi)(MM^{-1})U \\ &= M^{-1} A(t,\xi) M U^{(0)} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & |\xi| \\ |\xi| & ib(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} U^{(0)} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2|\xi| + ib(t) & ib(t) \\ ib(t) & -2|\xi| + ib(t) \end{bmatrix} \\ \Rightarrow D_t U^{(0)} &= \left(D(\xi) - R(t)\right) U^{(0)}, \end{aligned}$$

onde

$$D(\xi) = \begin{bmatrix} |\xi| & 0 \\ 0 & |\xi| \end{bmatrix} \in S_N\{1,0\} \quad e \quad R(t) = -i\frac{b(t)}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in S_N^{l,\infty}\{0,1\}. \tag{2.40}$$

Passo k+1, $k \geq 1$**:** Construiremos recursivamente a matriz $N_k(t,\xi)$. Sejam,

$$N_k(t,\xi) = \sum_{j=0}^{k} N^{(j)}(t,\xi) \quad e \quad F_k(t,\xi) = \sum_{j=0}^{k} F^{(j)}(t,\xi), \tag{2.41}$$

onde $N^{(0)} = I, B^{(0)} = R(t)$ e $F^{(0)} = diagB^{(0)} = F_0(t)$. Note que F_0 é um múltiplo

da I. A construção segue o seguinte esquema

$$\begin{aligned} F^{(j)} &= diagB^{(j)} && (2.42)\\ N^{(j+1)} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{B_{12}^{(j)}}{2|\xi|} \\ \frac{-B_{21}^{(j)}}{2|\xi|} & 0 \end{bmatrix} && (2.43)\\ B^{(j+1)} &= (D_t - D + R)\, N_{j+1} - N_{j+1}\,(D_t - D + F_j) && (2.44) \end{aligned}$$

Antes de prosseguirmos com as observações sobre a forma normal, vamos provar a seguinte proposição que será útil na demostração do próximo lema.

Proposição 2.2.1. *Seja $s \in \mathbb{N}$. Então $\forall (t,\xi) \in Z_{hyp}(N)$ temos que*

$$S_N^{l_1,l_2}\{m_1,m_2\} \hookrightarrow S_N^{l_1,l_2}\{m_1+s, m_2-s\}.$$

Demonstração: Seja $a(t,\xi) \in S_N^{l_1,l_2}\{m_1,m_2\}$. Como $(t,\xi) \in Z_{hyp}(N)$, então

$$\frac{1}{1+t} \leq \frac{|\xi|}{N}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left|D_t^k D_\xi^\alpha a(t,\xi)\right| &\lesssim |\xi|^{m_1-|\alpha|}\left(\frac{1}{1+t}\right)^{m_2+k}, \forall k \leq l_1, |\alpha| \leq l_2\\ &= |\xi|^{m_1-|\alpha|}\left(\frac{1}{1+t}\right)^{m_2-s+k}\left(\frac{1}{1+t}\right)^{s}\\ &\lesssim |\xi|^{m_1-|\alpha|}|\xi|^{s}\left(\frac{1}{1+t}\right)^{m_2-s+k}\\ &= |\xi|^{m_1+s-|\alpha|}\left(\frac{1}{1+t}\right)^{m_2-s+k}. \end{aligned}$$

Portanto $a(t,\xi) \in S_N^{l_1,l_2}\{m_1+s, m_2-s\}$.

■

Proposição 2.2.2. *Suponha que $(A1)$ e $(A2)_l$. Sejam $N^{(j)}$, $B^{(j)}$ como definidas anteriormente. Então $N^{(j)} \in S_N^{l-j+1,\infty}\{-j,j\}$ e $B^{(j)} \in S_N^{l-j,\infty}\{-j,j+1\}$. E mais, a*

matriz $N^{(j)}$ é invertível em $Z_{hyp}(N)$.

Demonstração: Vamos provar usando o princípio da indução finita sobre j.

1) Para $j = 0$, usando a hipótese sobre as derivadas de $b(t)$, sabemos que

$$F^{(0)}(t,\xi) = F_0(t) = ib(t)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in S_N^{l,\infty}\{0,1\}.$$

Ainda,

$$N^{(1)}(t,\xi) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{B_{12}^{(0)}}{2|\xi|} \\ \frac{-B_{21}^{(0)}}{2|\xi|} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{ib(t)}{4|\xi|} \\ \frac{-ib(t)}{4|\xi|} & 0 \end{bmatrix} \in S_N^{l,\infty}\{-1,1\}.$$

Daí que,

$$\begin{aligned} B^{(1)} &= (D_t - D + R)\,N_1 - N_1\,(D_t - D + F_0) \\ &= (D_t - D + R)\left(N^{(0)} + N^{(1)}\right) - \left(N^{(0)} + N^{(1)}\right)(D_t - D + F_0) \\ &= [D_t, N^{(1)}] + \left(B^{(0)} + [N^{(1)}, D] - F_0\right) - N^{(1)}F_0 + RN^{(1)}, \end{aligned}$$

observe que a igualdade (2.42), implica que

$$B^{(0)} - F_0 = \frac{ib(t)}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$[N^{(1)}, D] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{ib(t)}{4|\xi|} \\ \frac{-ib(t)}{4|\xi|} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} |\xi| & 0 \\ 0 & -|\xi| \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} |\xi| & 0 \\ 0 & -|\xi| \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \frac{ib(t)}{4|\xi|} \\ \frac{-ib(t)}{4|\xi|} & 0 \end{bmatrix} = -\frac{ib(t)}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore B^{(0)} + [N^{(1)}, D] - F_0 = 0.$$

Sendo assim,

$$B^{(1)} = [D_t, N^{(1)}] - N^{(1)}F_0 + RN^{(1)}. \tag{2.45}$$

Segue da proposição (2.0.15),

$$\begin{aligned} N^{(1)} \in S_N^{l,\infty}\{-1,1\} &\Rightarrow [D_t, N^{(1)}] \in S_N^{l-1,\infty}\{-1,2\} \\ F_0 \in S_N^{l,\infty}\{0,1\}, N^{(1)} \in S_N^{l,\infty}\{-1,1\} &\Rightarrow N^{(1)}F_0 \in S_N^{l,\infty}\{-1,2\} \\ R \in S_N^{l,\infty}\{0,1\}, N^{(1)} \in S_N^{l,\infty}\{-1,1\} &\Rightarrow RN^{(1)} \in S_N^{l,\infty}\{-1,2\} \end{aligned}$$

Como $S_N^{l-1,\infty}\{-1,2\}$ é um espaço vetorial, concluímos que $B^{(1)} \in S_N^{l-1,\infty}\{-1,2\}$.

2) Para $j \geq 1$, suponha que $B^{(j)} \in S_N^{l-j,\infty}\{-j, j+1\}$. Então pela definição de $N^{(j+1)}$ e porque $|\xi|^{-1} \in S_N\{-1,0\}$ segue pela proposição (2.0.15) que $N^{(j+1)} \in S_N^{l-j,\infty}\{-j-1, j+1\}$ e que $F^{(j)} \in S_N^{l-j,\infty}\{-j, j+1\}$.

3) Para $B^{(j+1)}$, temos

$$\begin{aligned} B^{(j+1)} &= (D_t - D + R)\, N_{j+1} - N_{j+1}\,(D_t - D + F_j) \\ &= (D_t - D + R) \sum_{v=0}^{j+1} N^{(v)} - \sum_{v=0}^{j+1} N^{(v)} \left(D_t - D + \sum_{v=0}^{j} F^{(v)} \right) \\ &= (D_t - D + R) \sum_{v=0}^{j+1} N^{(v)} - \sum_{v=0}^{j+1} N^{(v)} \left(D_t - D + \sum_{v=0}^{j-1} F^{(v)} \right) - \sum_{v=0}^{j+1} N^{(v)} F^{(j)} \\ &= B^{(j)} + (D_t - D + R)\, N^{(j+1)} - N^{(j+1)} \left(D_t - D + \sum_{v=0}^{j-1} F^{(v)} \right) - \sum_{v=1}^{j+1} N^{(v)} F^{(j)} - F^{(j)} \\ &= B^{(j)} + \left[N^{(j+1)}, D\right] - F^{(j)} + \left[D_t, N^{(j+1)}\right] - N^{(j+1)} \sum_{v=0}^{j-1} F^{(v)} + RN^{(j+1)} - \sum_{v=1}^{j+1} N^{(v)} F^{(j)}. \end{aligned}$$

De modo análogo ao passo 1 da indução mostra-se que:

$$B^{(j)} + \left[N^{(j+1)}, D\right] - F^{(j)} = 0$$

$$\therefore B^{(j+1)} = \left[D_t, N^{(j+1)}\right] - N^{(j+1)} \sum_{v=0}^{j-1} F^{(v)} + RN^{(j+1)} - \sum_{v=1}^{j+1} N^{(v)} F^{(j)}.$$

As proposições (2.0.15) e (2.2.1) implicam que

$$\begin{aligned}
N^{(j+1)} \in S_N^{l-j,\infty}\{-j-1, j+1\} &\Rightarrow \left[D_t, N^{(j+1)}\right] \in S_N^{l-j-1,\infty}\{-j-1, j+2\} \\
\sum_{v=0}^{j-1} F^{(v)} \in S_N^{l-j+1,\infty}\{0,1\} &\Rightarrow N^{(j+1)} \sum_{v=0}^{j-1} F^{(v)} \in S_N^{l-j-1,\infty}\{-j-1, j+2\} \\
R \in S_N^{l,\infty}\{0,1\} &\Rightarrow RN^{(j+1)} \in S_N^{l-j-1,\infty}\{-j-1, j+2\} \\
\sum_{v=1}^{j+1} N^{(v)} \in S_N^{l-j,\infty}\{-1,1\} &\Rightarrow \sum_{v=1}^{j+1} N^{(v)} F^{(j)} \in S_N^{l-j-1,\infty}\{-j-1, j+2\}.
\end{aligned}$$

Como $S_N^{l-j-1,\infty}\{-j-1, j+2\}$ é um espaço vetorial segue que $B^{(j+1)} \in S_N^{l-j-1,\infty}\{-j-1, j+2\}$.

Que N_k é invertível em $Z_{hyp}(N)$ basta observar que $N_k - I \in S_N^{l,\infty}\{-1,1\}$, sendo assim

$$\begin{aligned}
\|N_k - I\| &\lesssim \frac{1}{|\xi|(1+t)} \lesssim \frac{1}{|\xi|(1+t_\xi)} = \frac{1}{N} \\
&\therefore \quad \|N_k - I\| \to 0, N \to \infty.
\end{aligned}$$

Por conseguinte N_k é invertível para N suficientemente grande.

■

Após as proposições (2.2.1) e (2.2.2), denotando $R_k(t,\xi) = -N_k^{-1}(t,\xi)B^{(k)}(t,\xi)$, obteremos o seguinte

Lema 2.2.3. *Suponha* $(A1)$ *e* $(A2)_l$. *Para cada* $1 \leq k \leq l$, *existem uma zona constante* N *e matrizes*

1. $N_k(t,\xi) \in S_N^{l-k+1,\infty}\{0,0\}$ *invertível parra todo* $(t,\xi) \in Z_{hyp}(N)$ *com* $N_k^{-1}(t,\xi) \in S_N^{l-k+1,\infty}\{0,0\}$.

2. $F_{k-1}(t,\xi) \in S_N^{l-k+1,\infty}\{0,1\}$ *diagonal com* $F_{k-1}(t,\xi) - \frac{ib(t)}{2}I \in S_N^{l-k+1,\infty}\{-1,2\}$.

3. $R_k(t,\xi) \in S_N^{l-k,\infty}\{-k, k+1\}$,

tais que a identidade entre os operadores

$$(D_t - D(\xi) + R(t))\, N_k(t,\xi) = N_k(t,\xi)\,(D_t - D(\xi) + F_{k-1}(t,\xi) - R_k(t,\xi))\,, \quad (2.46)$$

acontece $\forall (t,\xi) \in Z_{hyp}(N)$.

Demonstração:

1. Que N_k é invertível segue da proposição (2.2.2). Por que $S_N^{l-k+1,\infty}\{0,0\}$ é um espaço vetorial e pela proposição (2.2.1) conclui-se a afirmação.

2. Segue diretamente da proposição (2.2.1) e porque $S_N^{l-k+1,\infty}\{0,1\}$ é um espaço vetorial.

3. Como $B^{(k)} \in S_N^{l-k,\infty}\{-k, k+1\}$ e $N_k^{-1} \in S_N^{l-k+1,\infty}\{0,0\}$ segue pela proposição (2.0.15) que $R_k(t,\xi) \in S_N^{l-k,\infty}\{-k, k+1\}$, e é claro que a identidade (2.46) acontece $\forall (t,\xi) \in Z_{hyp}(N)$.

■

O lema (2.2.3) pode ser entendido como a forma normal perfeita do sistema original. A fim de definir soma assintótica, vamos assumir a hipótese $(A2)$ para todas as derivadas em t de $b(t)$.

Definição 2.2.4. *Dizemos que $F(t,\xi)$ é soma assintótica de $F^{(k)}(t,\xi)$ se, e somente se,*

$$F(t,\xi) - F_k(t,\xi) \in S_N\{-k-1, k+2\}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Denotamos por

$$F(t,\xi) \sim F^{(k)}(t,\xi).$$

Definição 2.2.5. *Dizemos que $N(t,\xi)$ é soma assintótica de $N^{(k)}(t,\xi)$ se, e somente se,*

$$N(t,\xi) - N_k(t,\xi) \in S_N\{-k-1, k+1\}, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Denotamos por

$$N(t,\xi) \sim N^{(k)}(t,\xi).$$

Observação 2.2.6. *A soma assintótica $N(t,\xi)$ pode ser escolhida invertível. De fato, sabemos que $N(t,\xi) - N_k(t,\xi) \in S_N\{-k-1, k+1\}, \forall k \in \mathbb{N}$. Daí que*

$$\begin{aligned} \|N - N_k\| &\lesssim |\xi|^{-k-1}\left(\frac{1}{1+t}\right)^{k+1} \\ &= \left(\frac{1}{|\xi|(1+t)}\right)^{k+1} \\ &\lesssim \frac{1}{N^{k+1}} \to 0, N >> 0. \end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$\|N - I\| \leq \|N - N_k\| + \|I - N_k\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Proposição 2.2.7. *Sejam $F(t,\xi)$ e $N(t,\xi)$ as somas assintóticas de $F^{(k)}(t,\xi)$ e $N^{(k)}(t,\xi)$ respectivamente. Então,*

$$\left(D_t - D(\xi) + R(t)\right) N(t,\xi) - N(t,\xi)\left(D_t - D(\xi) + F(t,\xi)\right) \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} S_N\{-k, k+1\}.$$

Demonstração: Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $I = \left(D_t - D + R\right) N - N\left(D_t - D + F\right)$. Então temos que

$$\begin{aligned} I &= \left(D_t - D + R\right)(N - N_k) - (N - N_k)\left(D_t - D + F\right) + \left(D_t - D + R\right) N_k - \\ &- N_k\left(D_t - D + F\right) \\ &= \left(D_t - D + R\right)(N - N_k) - (N - N_k)\left(D_t - D + (F - F_{k-1})\right) - (N - N_k) F_{k-1} - \\ &- N_k\left(D_t - D + F - F_{k-1} + F_{k-1}\right) + \left(D_t - D + R\right) N_k \\ &= \left(D_t - D + R\right) N_k - N_k\left(D_t - D + F_{k-1}\right) + \left(D_t - D + R\right)(N - N_k) - \\ &- (N - N_k)\left(D_t - D + (F - F_{k-1})\right) - N_k\left(F - F_{k-1}\right) - (N - N_k) F_{k-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= (D_t - D + R)\, N_k - N_k\,(D_t - D + F_{k-1}) - N_k\,(F - F_{k-1}) - (N - N_k)\, F_{k-1} + \\ &+ [D_t, N - N_k] + [N - N_k, D] + R\,(N - N_k) - (N - N_k)\,(F - F_{k-1})\,. \end{aligned}$$

As proposições (2.0.15) e (2.2.2) implicam que

$$\begin{aligned} (D_t - D + R)\, N_k - N_k\,(D_t - D + F_{k-1}) &\in S_N\{-k, k+1\} \\ N_k\,(F - F_{k-1}) &\in S_N\{-k, k+1\} \\ (N - N_k)\, F_{k-1} &\in S_N\{-k-1, k+2\} \hookrightarrow S_N\{-k, k+1\} \\ [D_t, N - N_k] &\in S_N\{-k-1, k+2\} \hookrightarrow S_N\{-k, k+1\} \\ R\,(N - N_k) &\in S_N\{-k-1, k+2\} \hookrightarrow S_N\{-k, k+1\} \\ (N - N_k)\,(F - F_{k-1}) &\in S_N\{-k, k+1\}. \end{aligned}$$

Concluindo assim a proposição.

■

Definição 2.2.8. *Definimos a classe de símbolo residual* $\mathcal{H}\{m\}$ *como sendo*

$$\mathcal{H}\{m\} := \bigcap_{m_1+m_2=m} S_N\{-k, k+1\}.$$

Observação 2.2.9. *Existe* $P_\infty(t,\xi) \in \mathcal{H}\{1\}$ *tal que*

$$(D_t - D(\xi) + R(t))\, N(t,\xi) = N(t,\xi)\,(D_t - D(\xi) + F(t,\xi) - P_\infty(t,\xi))\,. \qquad (2.47)$$

De fato, pela proposição (2.2.7) *temos que*

$$\begin{aligned} (D_t - D + R)\, N &= N\,(D_t - D + F) + B, B \in S_n\{-k, k+1\}, \forall k \in \mathbb{N} \\ &= N\,(D_t - D + F - P_\infty)\,, \end{aligned}$$

onde $P_\infty = -N^{-1}B$. *Como* $N - N_k \in S_N\{-k-1, k+1\} \hookrightarrow S_N\{0,0\}$, *temos que* $N \in S_N\{0,0\}$, *e por conseguinte* $P_\infty(t,\xi) \in S_N\{-k, k+1\}, \forall k \in \mathbb{N}$. *Então*

$P_\infty(t,\xi) \in \mathcal{H}\{1\}$.

A classe $\mathcal{H}\{m\}$ é invariante sob multiplicação por $\exp(\pm it|\xi|)$. Isto explica o fato de termos efetuado mais de um passo para encontrar a forma normal. A multiplicação por $\exp(\pm it|\xi|)$ não é uma operação bem definida em $S_N\{m_1,m_2\}$, ela "destrói"a estimativa do símbolo, enquanto a classe residual preserva. Fato que pode ser observado na seguinte proposição.

Proposição 2.2.10. *Temos que*

1. $\exp(\pm it|\xi|)S_N^{l_1,l_2}\{m_1,m_2\} \hookrightarrow S_N^{l_1,l_2}\{m_1+l, m_2-l\}$, *com* $l = l_1+l_2$.
2. $\exp(\pm it|\xi|)\mathcal{H}\{m\} \hookrightarrow \mathcal{H}\{m\}$.

Demonstração: É suficiente provarmos a primeira afirmação. Seja $a(t,\xi) \in S_N^{l_1,l_2}\{m_1,m_2\}$. Usando a regra de Leibniz e a definição da zona hiperbólica, obtemos

$$\begin{aligned} D_t^k D_\xi^\alpha \left(\exp(\pm it|\xi|)a(t,\xi)\right) &= \sum_{k_1+k_2=k}\sum_{\alpha_1+\alpha_2=\alpha} C_{k_2,k_2,\alpha_1,\alpha_2}|\xi|^{k_1} t^{\alpha_1} e^{it|\xi|} D_t^{k_2} D_\xi^{\alpha_2} a(t,\xi) \\ &= \sum_{k_1+k_2=k}\sum_{\alpha_1+\alpha_2}\sum_{k'+k''=k_1} C'_{k_2,k_2,\alpha_1,\alpha_2}|\xi|^{m_1-\alpha_2+k_1}\left(\frac{1}{1+t}\right)^{m_2+k_2-\alpha_1} \\ &\leq C_{k,\alpha}|\xi|^{m_1+l-\alpha}\left(\frac{1}{1+t}\right)^{m_2-l+k}. \end{aligned}$$

■

2.2.2 Solução Fundamental do Sistema na Forma Normal

Depois de realizar vários passos para encontrar a forma normal adequada, queremos construir uma solução para o sistema,

$$\begin{cases} \left(D_t - D(\xi) - F_{k-1} - R_k(t,\xi)\right)\mathcal{E}_k(t,s,\xi) = 0 \\ \mathcal{E}_k(s,s,\xi) = I \end{cases} \tag{2.48}$$

e obter propriedade estruturais para a solução. A construção segue os seguintes passos:

- Determinar uma solução fundamental de $\mathcal{E}_0(t,s,\xi)$ para $D_t - D(\xi)$.
- Analisar a influência do termo principal de $F^{(0)}(t,\xi)$ de $F_{k-1}(t,\xi)$.
- Analisar a influência de $F_k(t,\xi) - F^{(0)}(t,\xi)$ e $R_k(t,\xi)$.

Sabemos que a solução para $\mathcal{E}_0(t,s,\xi)$ para

$$\begin{cases} (D_t - D(\xi))\,\mathcal{E}_0(t,s,\xi) = 0 \\ \mathcal{E}_0(s,s,\xi) = I \end{cases}$$

é dada por

$$\mathcal{E}_0(t,s,\xi) = \exp\{i(t-s)D(\xi)\} = \begin{bmatrix} e^{i(t-s)|\xi|} & 0 \\ 0 & e^{-i(t-s)|\xi|} \end{bmatrix}. \tag{2.49}$$

Fazendo $\widetilde{\mathcal{E}}_0(t,s,\xi) = \dfrac{\lambda(s)}{\lambda(t)}\mathcal{E}_0(t,s,\xi)$, com $\lambda(t) = exp\left\{\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t b(\tau)d\tau\right\}$ temos que

$$\begin{aligned} D_t\widetilde{\mathcal{E}}_0(t,s,\xi) &= D_t\left(\frac{\lambda(s)}{\lambda(t)}Id\right)\mathcal{E}_0(t,s,\xi) + \frac{\lambda(s)}{\lambda(t)}D_t\mathcal{E}_0(t,s,\xi) \\ &= \left(i\frac{\lambda(s)\lambda'(t)}{\lambda^2(t)}Id + \frac{\lambda(s)}{\lambda(t)}D(\xi)\right)\mathcal{E}_0(t,s,\xi) \\ &= \left(i\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)}Id + D(\xi)\right)\frac{\lambda(s)}{\lambda(t)}\mathcal{E}_0(t,s,\xi) \\ &= \left(\frac{i}{2}b(t)Id + D(\xi)\right)\widetilde{\mathcal{E}}_0(t,s,\xi) \\ &= \left(D(\xi) - F^{(0)}(t,\xi)\right)\widetilde{\mathcal{E}}_0(t,s,\xi). \end{aligned}$$

Portanto $\widetilde{\mathcal{E}}_0(t,s,\xi)$ satisfaz

$$D_t\widetilde{\mathcal{E}}_0(t,s,\xi) = \left(D(\xi) + F^{(0)}(t,\xi)\right)\widetilde{\mathcal{E}}_0(t,s,\xi). \tag{2.50}$$

Então $\widetilde{\mathcal{E}}_0(t,s,\xi)$ descreve a influência do termo principal $F^{(0)}(t,\xi)$ de $F_{k-1}(t,\xi)$, ou seja, descreve a influência dos termos da diagonal principal.

A fim de analisar a influência de $-F_k(t,\xi)+F^{(0)}(t,\xi)$ e $R_k(t,\xi)$, definiremos, com o auxílio de $\mathcal{F}_0(t,s,\xi)$, a seguinte matriz

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_k(t,s,\xi) &= \widetilde{\mathcal{E}}_0(t,s,\xi)\left(-F_{k-1}(t,\xi)+R_k(t,\xi)+F^{(0)}(t,\xi)\right)\widetilde{\mathcal{E}}_0(s,t,\xi)\\ &= -\mathcal{E}_0(t,s,\xi)F_{k-1}\mathcal{E}_0(s,t,\xi)+\mathcal{E}_0(t,s,\xi)R_k(t,\xi)\mathcal{E}_0(s,t,\xi)+\\ &+ \mathcal{E}_0(t,s,\xi)F^{(0)}(t,\xi)\mathcal{E}_0(s,t,\xi),\end{aligned}$$

como as matrizes $\mathcal{E}_0(t,s,\xi)$, $F^{(0)}(t,\xi)$ e F_{k-1} são diagonais, elas comutam e

$$\mathcal{E}_0(t,s,\xi)\mathcal{E}_0(s,t,\xi)=I,$$

segue que

$$\mathcal{R}_k(t,s,\xi)=-F_{k-1}+\mathcal{E}_0(t,s,\xi)R_k(t,\xi)\mathcal{E}_0(s,t,\xi)+F^{(0)}(t,\xi). \tag{2.51}$$

Consideremos agora o seguinte sistema

$$\begin{cases} D_t\mathcal{Q}_k(t,s,\xi)=\mathcal{R}_k(t,s,\xi)Q_k(t,s,\xi)\\ \mathcal{Q}_k(s,s,\xi)=I\end{cases} \tag{2.52}$$

e observemos que a solução do sistema diagonalizado $\mathcal{E}_k(t,s,\xi)$ pode ser representada da seguinte maneira,

$$\mathcal{E}_k(t,s,\xi)=\widetilde{\mathcal{E}}_0(t,s,\xi)\mathcal{Q}_k(t,s,\xi)=\frac{\lambda(t)}{\lambda(s)}\mathcal{E}_0(t,s,\xi)\mathcal{Q}_k(t,s,\xi). \tag{2.53}$$

De fato,

$$\begin{aligned}D_t\mathcal{E}_k &= \left(D_t\widetilde{\mathcal{E}}_0\right)\mathcal{Q}_k+\widetilde{\mathcal{E}}_0\left(D_t\mathcal{Q}_k\right)\\ &= \left(D-F^{(0)}\right)\widetilde{\mathcal{E}}_0\mathcal{Q}_k+\widetilde{\mathcal{E}}_0\left(\mathcal{R}_k\mathcal{Q}_k\right)\\ &= \left(D-F^{(0)}\right)\widetilde{\mathcal{E}}_0\mathcal{Q}_k+\left(-F_{k-1}+R_k+F^{(0)}\right)\widetilde{\mathcal{E}}_0\mathcal{Q}_k\\ &= \left(D-F_{k-1}+R_k\right)\mathcal{E}_k.\end{aligned}$$

A solução para o sistema (2.52) é dada pela fórmula de Peano-Baker (3.7)

$$\mathcal{Q}_k(t,s,\xi) = I + \sum_{l=1}^{\infty} i^l \int_s^t \mathcal{R}_k(t_1,s,\xi) \int_s^{t_1} \mathcal{R}_k(t_2,s,\xi) ... \int_s^{t_{l-1}} \mathcal{R}_k(t_l,s,\xi) dt_l ... dt_1.$$

Para estimar esta representação, utilizaremos a proposição (3.4.7).

Afirmação: A representação da solução de (2.52) dada pela fórmula de Peano-Backer implica que $\|\mathcal{Q}_k(t,s,\xi)\| \lesssim 1$.

De fato, primeiramente observemos que

$$\|\mathcal{R}_k(t,s,\xi)\| \leq \|F_{k-1} - F_0\| + \|R_k(t,\xi)\| \lesssim \frac{1}{(1+t)^2|\xi|},$$

uma vez que $F_{k-1} - F_0 \in S_N^{l-k,\infty}\{-1,2\}$, $R_k(t,\xi) \in S_N^{l-k,\infty}\{-1,2\}$ e $\|\mathcal{E}_0(t,s,\xi)\| = 1$. Daí que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{Q}_k(t,s,\xi)\| &= \left\| I + \sum_{l=1}^{\infty} i^l \int_s^t \mathcal{R}_k(t_1,s,\xi) \int_s^{t_1} \mathcal{R}_k(t_2,s,\xi) ... \int_s^{t_{l-1}} \mathcal{R}_k(t_l,s,\xi) dt_l ... dt_1 \right\| \\
&\leq 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \int_s^t \|\mathcal{R}_k(t_1,s,\xi)\| \int_s^{t_1} \|\mathcal{R}_k(t_2,s,\xi)\| ... \int_s^{t_{l-1}} \|\mathcal{R}_k(t_l,s,\xi)\| dt_l ... dt_1 \\
&\lesssim 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \int_s^t \frac{1}{|\xi|(1+t)^2} \int_s^{t_1} \frac{1}{|\xi|(1+t_1)^2} ... \int_s^{t_{l-1}} \frac{1}{|\xi|(1+t_l)^2} dt_l ... dt_1 \\
&\leq 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\int_s^t \frac{d\tau}{|\xi|(1+\tau)} \right)^l \\
&= \exp\left(\int_s^t \frac{d\tau}{|\xi|(1+\tau)} \right) \\
&\leq \exp\left(\int_{t_\xi}^{\infty} \frac{d\tau}{|\xi|(1+\tau)} \right) = \exp\left(\frac{1}{N} \right) \lesssim 1.
\end{aligned}$$

Nosso objetivo agora é estabelecer estimativas para as derivadas em relação a ξ de $\mathcal{Q}_k(t,s,\xi)$. Uma vez que $R_k(t,\xi) \in S_N^{l-k,\infty}\{-k,k+1\}$ sob a hipótese $(A2)_l$ com $k-1 \leq l-k$, a proposição (2.2.10) implica que $\mathcal{R}_k(t,s,\xi) \in S_N^{k-1,k-1}\{-1,2\}$ uniformemente em s. Observe ainda que a expressão de $\mathcal{Q}_k(t,s,\xi)$ dada pela fórmula de Peano-Baker implica que as suas derivadas em relação a s se comportam como

multiplicação por $|\xi|$.

Proposição 2.2.11. *Suponha que* $a \in S^{l,l}_N\{-1,2\}$. *Então*

$$b(t,s,\xi) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \int_s^t a(t_1,\xi) \int_s^{t_1} a(t_2,\xi)... \int_s^{t_{j-1}} a(t_j,\xi) dt_j ... dt_1$$

define um símbolo de $S^{l,l}_N\{0,0\}$ *uniformemente em* $s \geq t_\xi$.

Demonstração: Sejam $k, j \in \mathbb{N}$, tais que $k \leq j$ e $k < l$. Pelo teorema fundamental do cálculo e pela regra de Leibniz tem-se,

$$\begin{aligned}
D_t^k b(t,s,\xi) &= \sum_{j=1}^{\infty} D_t^k \int_s^t a(t_1,\xi) \int_s^{t_1} a(t_2,\xi)... \int_s^{t_{j-1}} a(t_j,\xi) dt_j ... dt_1 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} D_t^{k-1} a(t,\xi) \int_s^t a(t_2,\xi)... \int_s^{t_{j-1}} a(t_j,\xi) dt_j ... dt_1 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k_1+k_2=k-1} D_t^{k_1} a(t,\xi) D_t^{k_2} \int_s^t a(t_2,\xi)... \int_s^{t_{j-1}} a(t_j,\xi) dt_j ... dt_2 \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k_1+k_2=k-1} D_t^{k_1} a(t,\xi) D_t^{k_2-1} a(t_2,\xi) \int_s^t a(t_3,\xi)... \int_s^{t_{j-1}} a(t_j,\xi) dt_j ... dt_3 \\
&\vdots \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k_1,k_2,...,k_{2l+1}} D_t^{k_1} a(t,\xi) ... D_t^{k_{2l+1}} a(t,\xi) \int_s^t a(t_{2l+1},\xi)... \int_s^{t_{j-1}} a(t_j,\xi) dt_j ... dt_{2l+1}
\end{aligned}$$

com $k_1+k_2+...k_{2l+1} = k-(l+1)$. A seguir vamos omitir os pontos em que os símbolos $b(t,s,\xi)$ e $a(t,\xi)$ serão aplicados. Como estamos na zona hiperbolica obteremos que,

$$\begin{aligned}
\left\| D_\xi^\alpha D_t^k b \right\| &= \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k_1,k_2,...,k_{2l+1}} \sum_{\alpha_0+...+\alpha_w=\alpha} \left(D_\xi^{\alpha_0} D_t^{k_1} a\right) ... \left(D_\xi^{\alpha_l} D_t^{k_{2l+1}} a\right) \int_s^t D_\xi^{\alpha_{l+1}} a ... \int_s^{t_{j-1}} D_\xi^{\alpha_w} a \right\| \\
&\lesssim |\xi|^{-\alpha-l} \left(\frac{1}{1+t}\right)^{k-(l+1)+2l+1} \sum_{j=1}^{\infty} \int_s^t \frac{1}{|\xi|(1+t_{2l+1})^2} ... \int_s^t \frac{1}{|\xi|(1+t_j)^2} dt_{2l+1} ... dt_j \\
&\lesssim |\xi|^{-\alpha} \left(\frac{1}{1+t}\right)^{l+k} \left(\frac{1}{1+t}\right)^{-l}, s \geq t_\xi \\
&= |\xi|^{-\alpha} \left(\frac{1}{1+t}\right)^{k}, \forall k \leq l, \forall |\alpha| \leq l.
\end{aligned}$$

Portanto $b(t,s,\xi) \in S_N^{l,l}\{0,0\}$.

■

Como consequência imediata desta proposição e do parágrafo anterior, segue a representação estrutural da solução fundamental do sistema (2.48).

Teorema 2.2.12. *Suponha* $(A1)$ *e* $(A2)_{2k-1}, k \geq 1$. *Então a solução fundamental* $\mathcal{E}_k(t,s,\xi)$ *do sistema diagonalizado* (2.48) *pode ser representado como*

$$\mathcal{E}_k(t,s,\xi) = \frac{\lambda(s)}{\lambda(t)}\mathcal{E}_0(t,s,\xi)\mathcal{Q}_k(t,s,\xi), \quad t,s \geq t_\xi, \tag{2.54}$$

com o símbolo $\mathcal{Q}_k(t,s,\xi) \in S_N^{k-1,k-1}\{0,0\}$. *Valendo a seguinte estimativa,*

$$\left\|D_s^l D_\xi^\alpha \mathcal{Q}_k(t,s,\xi)\right\| \leq C_{l,\alpha}|\xi|^{l-|\alpha|}, \quad t,s \geq t_\xi, \tag{2.55}$$

para todo multi-índices $|\alpha| \leq k-1$ *e para todo* $l \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Segue diretamente das observações anteriores.

■

Observação 2.2.13. *A primeira derivada de* $\mathcal{Q}_k$ *com respeito a* t *pode ser estimada diretamente pela sua expressão herdada da fórmula de Peano-Backer.*

De fato, segue pela proposição (3.4.7)

$$\begin{aligned}
\|D_t\mathcal{Q}_k(t,s,\xi)\| &= \left\|\sum_{l=1}^{\infty} i^l \mathcal{R}_k(t,s,\xi)\int_s^t \mathcal{R}_k(t_2,s,\xi)\ldots\int_s^{t_{l-1}} \mathcal{R}_k(t_l,s,\xi)dt_l\ldots dt_2\right\| \\
&\lesssim \frac{1}{|\xi|(1+t)^2}\sum_{l=1}^{\infty}\int_s^t \frac{1}{|\xi|(1+t_2)^2}\ldots\int_s^{t_{l-1}} \frac{1}{|\xi|(1+t_l)^2}dt_l\ldots dt_2 \\
&\lesssim \frac{1}{1+t},
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos o fato de estarmos na zona hiperbólica.

Mais adiante veremos que é importante fazermos estimativas para $\mathcal{E}_k(t,t_\xi,\xi)$. Sendo assim, com as propriedades das derivadas de t_ξ segue o seguinte,

Corolário 2.2.14. *Suponha* (A_1) *e* $(A2)_{2k-1}, k \geq 1$. *Então,*

$$\mathcal{Q}_k(t, t_\xi, \xi) \in S_N^{1,k-1}\{0,0\},$$

para $t \geq t_\xi$ *e* $|\xi| \leq N$.

Demonstração: Para demonstrarmos esse corolário, suponhamos que as derivadas em relação a ξ sejam todas na mesma direção, este fato nos permitirá aplicar a fórmula de Faà de Bruno. Faça $s = t_\xi$ e seja $|\alpha| = n$, sendo assim

$$\begin{aligned}
\|D_t D_\xi \mathcal{Q}_k(t,s,\xi)\| &= \left\| D_t \left[\sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} C_{k_1,\ldots,k_n} D_s^k \mathcal{Q}_k(t,s,\xi) \left(D_\xi t_\xi\right)_1^k \ldots \left(D_\xi t_\xi\right)_n^k \right] \right\| \\
&= \left\| \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} C_{k_1,\ldots,k_n} D_t D_s^k \mathcal{Q}_k(t,s,\xi) \left(D_\xi t_\xi\right)_1^k \ldots \left(D_\xi t_\xi\right)_n^k \right\|,
\end{aligned}$$

com $k = k_1 + \ldots k_n$. Agora da desigualdade (2.37), pela observação (2.2.13) e lembrando que derivação em relação a s se comporta como multiplicação por $|\xi|$, teremos que

$$\begin{aligned}
\|D_t D_\xi \mathcal{Q}_k(t,s,\xi)\| &\lesssim \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \frac{1}{1+t} |\xi|^k \left(|\xi|^{-1-1}\right)^{k_1} \ldots \left(|\xi|^{-1-n}\right)^{k_n} \\
&\lesssim \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \frac{1}{1+t} |\xi|^k |\xi|^{-k} |\xi|^{-n} \\
&\lesssim \frac{1}{1+t} |\xi|^{-n}.
\end{aligned}$$

Logo $\mathcal{Q}_k(t, t_\xi, \xi) \in S_N^{1,k-1}\{0,0\}$. Para concluir o caso geral, basta fixarmos uma direção e aplicar Faà de Bruno repetidas vezes.

■

A matriz $\mathcal{Q}_k(t,s,\xi)$ converge para um limite bem definido quando $t \to \infty$. Este limite será usado futuramente para concluir a a equivalência assintótica entre as soluções para a equação da onda livre e a equação da onda com dissipação fraca.

Teorema 2.2.15. *Suponha* (A_1) *e* $(A)_{2k-1}, k \geq 1$. *O limite,*

$$\mathcal{Q}_k(\infty, s, \xi) = \lim_{t\to\infty} \mathcal{Q}_k(t, s, \xi)$$

existe uniformemente em ξ *para* $s \geq t_\xi$. *E mais*

$$\left\| D_\xi^\alpha \mathcal{Q}_k(\infty, s, \xi) \right\| \leq C_\alpha |\xi|^{-|\alpha|} \tag{2.56}$$

para todo multi-índice $|\alpha| \leq k-1$.

Demonstração: Vamos fixar o valor inicial de s e vamos considerar $s \geq t_\xi$. Tomando a diferença $I = \|\mathcal{Q}_k(t, s, \xi) - \mathcal{Q}_k(t_1, s, \xi)\|$ na representação em série, pela proposição (3.4.7) teremos,

$$\begin{aligned}
I &= \left\| \sum_{l=1}^{\infty} i^l \int_{t_1}^{t} \mathcal{R}_k(t_1, s, \xi) \int_s^{t_1} \mathcal{R}_k(t_2, s, \xi) ... \int_s^{t_{l-1}} \mathcal{R}_k(t_l, s, \xi) dt_l ... dt_1 \right\| \\
&\leq \int_{t_1}^{t} \|\mathcal{R}_k(t_1, s, \xi)\| \sum_{l=1}^{\infty} \int_s^{t_1} \|\mathcal{R}_k(t_2, s, \xi)\| ... \int_s^{t_{l-1}} \|\mathcal{R}_k(t_l, s, \xi)\| \, dt_l ... dt_1 \\
&\leq \int_{t_1}^{t} \|\mathcal{R}_k(t_1, s, \xi)\| \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\int_s^{t_1} \|\mathcal{R}_k(\tau, s, \xi)\| \, d\tau \right)^l dt_1 \\
&\leq \int_{t_1}^{t} \|\mathcal{R}_k(t_1, s, \xi)\| \exp\left(\int_s^{t_1} \|\mathcal{R}_k(\tau, s, \xi)\| \, d\tau \right) dt_1 \\
&\leq \int_{t_1}^{t} \|\mathcal{R}_k(t_1, s, \xi)\| \exp\left(\int_{t_\xi}^{\infty} \|\mathcal{R}_k(\tau, s, \xi)\| \, d\tau \right) dt_1 \\
&\lesssim \int_{t_1}^{t} \|\mathcal{R}_k(t_1, s, \xi)\| \, dt_1 \to 0,
\end{aligned}$$

quando $t, t_1 \to \infty$. Logo

$$\|\mathcal{Q}_k(t, s, \xi) - \mathcal{Q}_k(t_1, s, \xi)\|_{L^\infty(\{s \geq t_\xi\})} \lesssim \int_{t_1}^{t} \|\mathcal{R}_k(t_1, s, \xi)\| \, dt_1 \to 0, \quad t, t_1 \to \infty.$$

Daí que $\mathcal{Q}_k(t_n, s, \xi)$ é uma sequência de Cauchy em $L^\infty(\{s \geq t_\xi\})$ que é um espaço de Banach e portanto convergente.

Antes de falarmos da estimativa (2.56), precisamos garantir a existência de $D_\xi^\alpha \mathcal{Q}_k(\infty, s, \xi)$. Agindo de modo análogo, obtemos para $|\alpha| \leq k-1$

$$\left\| D_\xi^\alpha \mathcal{Q}_k(t, s, \xi) - D_\xi^\alpha \mathcal{Q}_k(t_1, s, \xi) \right\| \lesssim |\xi|^{-|\alpha|} \int_{t_1}^{t} \frac{d\tau}{(1+\tau)^2} \to 0, \quad t, t_1 \to \infty,$$

uniformemente para $s \geq t_\xi$. Logo existe $D_\xi^\alpha \mathcal{Q}_k(\infty, s, \xi)$. Por conseguinte, a estimativa (2.56) segue da fórmula de Faà de Bruno, aplicada como no corolário anterior, e da estimativa (2.37).

■

A proposição (3.4.7), também pode ser usada para estimar a representação $\mathcal{Q}_k(\infty, s, \xi)$ como um símbolo em (s, ξ). É o que temos no corolário a seguir.

Corolário 2.2.16. *A representação em série*

$$\mathcal{Q}_k(\infty, s, \xi) = I + \sum_{l=1}^{\infty} i^l \int_s^\infty \mathcal{R}_k(t_1, s, \xi) \int_s^{t_1} \mathcal{R}_k(t_2, s, \xi) \ldots \int_s^{t_{l-1}} \mathcal{R}_k(t_l, s, \xi) dt_l \ldots dt_1,$$

nos fornece uma expansão assintótica de $\mathcal{Q}_k(\infty, s, \xi)$ *em* $S_N^{0,k-1}\{0,0\}$, *isto é, o* $j-$*ésimo termo pertence a* $S_N^{0,k-1}\{-j, j\}$.

Demonstração: Seja $\alpha \in \mathbb{N}^n$, com $|\alpha| \leq k-1$. Então,

$$\begin{aligned}
\left\| D_\xi^\alpha \mathcal{Q}_k(\infty, s, \xi) \right\| &= \left\| \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_l = \alpha} \int_s^\infty i^l D_\xi^{\alpha_1} \mathcal{R}_k(t_1, s, \xi) \ldots \int_s^{t_{l-1}} D_\xi^{\alpha_l} \mathcal{R}_k(t_l, s, \xi) dt_l \ldots dt_1 \right\| \\
&\lesssim \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\alpha_1 + \ldots + \alpha_l = \alpha} \int_s^\infty \frac{1}{|\xi|^{1+|\alpha_1|}(1+t)^2} \int_s^{t_1} \ldots \int_s^{t_{l-1}} \frac{1}{|\xi|^{1+|\alpha_l|}(1+t_l)^2} dt_l \ldots dt_1 \\
&\lesssim \sum_{l=1}^{\infty} |\xi|^{-|\alpha|} \int_s^\infty \frac{1}{|\xi|(1+t)^2} \int_s^{t_1} \ldots \int_s^{t_{l-1}} \frac{1}{|\xi|(1+t_l)^2} dt_l \ldots dt_1 \\
&\lesssim |\xi|^{-|\alpha|} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\int_{t_\xi}^\infty \frac{1}{|\xi|(1+\tau)} d\tau \right) \\
&\lesssim |\xi|^{-|\alpha|}.
\end{aligned}$$

■

Vamos agora explorar um pouco sobre a matriz inversa de $\mathcal{Q}_k$. Primeiramente faremos a seguinte observação.

Observação 2.2.17. *A matriz $\mathcal{Q}_k^T(\infty, s, \xi)$ é invertível. De fato, é suficiente mostrarmos que $\mathcal{Q}_k(\infty, s, \xi)$ é invertível.*

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{Q}_k(t,s,\xi) - I\| &= \left\| \sum_{l=1}^{\infty} i^l \int_s^t \mathcal{R}_k(t_1,s,\xi) \int_s^{t_1} \mathcal{R}_k(t_2,s,\xi) ... \int_s^{t_{l-1}} \mathcal{R}_k(t_l,s,\xi) dt_l ... dt_1 \right\| \\
&\lesssim \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\int_{t_\xi}^t \frac{1}{|\xi|(1+\tau)} d\tau \right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{N}\right) - 1 \to 0, N \to \infty.
\end{aligned}$$

Proposição 2.2.18. *A transposta inversa de $\mathcal{Q}_k$ satisfaz a equação*

$$\begin{cases} D_t \mathcal{Q}_k^{-T}(t,s,\xi) + \mathcal{R}_k^T(t,s,\xi) = 0 \\ \mathcal{Q}_k^{-T}(s,s,\xi) = I \end{cases}. \tag{2.57}$$

Demonstração: De fato,

$$\begin{aligned}
0 &= D_t I = D_t(\mathcal{Q}_k \mathcal{Q}_k^{-1}) \\
&\Rightarrow (D_t \mathcal{Q}_k)\mathcal{Q}_k^{-1} + \mathcal{Q}_k(D_t \mathcal{Q}_k^{-1}) = 0 \\
&\Rightarrow \mathcal{R}_k \mathcal{Q}_k \mathcal{Q}_k^{-1} + \mathcal{Q}_k(D_t \mathcal{Q}_k^{-1}) = 0 \\
&\Rightarrow D_t \mathcal{Q}_k^{-1} + \mathcal{Q}_k^{-1}\mathcal{R}_k = 0 \\
&\Rightarrow D_t \mathcal{Q}_k^{-T}(t,s,\xi) + \mathcal{R}_k^T(t,s,\xi) = 0.
\end{aligned}$$

■

A matriz $\mathcal{R}_k^T(t,s,\xi)$ satisfaz as mesmas estimativas que $\mathcal{R}_k(t,s,\xi)$, e portanto, de maneira análoga, os resultados anteriores relacionados a $\mathcal{Q}_k(t,s,\xi)$ são válidos para $\mathcal{Q}_k^{-T}(t,s,\xi)$. Especialmente $\mathcal{Q}_k^{-1}(\infty,s,\xi)$ existe.

Corolário 2.2.19. *Suponha* $(A1)$ *e* $(A2)_{2k-1}, k \geq 1$. *Então o limite*

$$\mathcal{Q}_k^{-1}(\infty, s, \xi) = \lim_{t\to\infty} \mathcal{Q}_k^{-1}(t, s, \xi),$$

existe uniformente em ξ, *para* $s \geq t_\xi$.

Demonstração: Análogo ao teorema (2.2.15).

■

2.3 Voltando ao problema inicial

Depois de construirmos a solução fundamental $\mathcal{E}_k(t, s, \xi)$, vamos voltar ao problema original obtendo a seguinte representação para a zona hiperbólica para frequências grandes, isto é, para $t \geq s \geq t_\xi$,

$$\mathcal{E}(t, s, \xi) = MN_k(t, \xi)\mathcal{E}_k(t, s, \xi)N_k^{-1}(t, \xi)M^{-1}, \forall s \geq t_\xi \tag{2.58}$$

com matrizes uniformemente limitadas $N_k, N_k^{-1} \in S_N\{0, 0\}$. De fato, já sabemos que

$$N_k^{-1}(t, \xi)\left(D_t - D(\xi) + R(t)\right)N_k(t, \xi) = \left(D_t - D(\xi) + F_{k-1}(t, \xi) - R_k(t, \xi)\right),$$

como $\mathcal{E}_k(t, s, \xi)$, é solução de $(D_t - D(\xi) + F_{k-1}(t, \xi) - R_k(t, \xi))$, segue que

$$\left(D_t - D(\xi) + R(t)\right)N_k(t, \xi)\mathcal{E}_k(t, s, \xi) = 0,$$

Denotemos por $\mathcal{E}^{(0)}(t, s, \xi)$ a solução fundamental relacionada ao sistema $D_tU^{(0)} = \left(D(\xi) - R(t)\right)U^{(0)}$. Desta forma, $\mathcal{E}^{(0)}(t, s, \xi)N_k(s, \xi)$ e $N_k(t, \xi)\mathcal{E}_k(t, s, \xi)$ satisfazem o mesmo PVI. Daí segue que,

$$\mathcal{E}^{(0)}(t, s, \xi)N_k(s, \xi) = N_k(t, \xi)\mathcal{E}_k(t, s, \xi) \Rightarrow \mathcal{E}^{(0)}(t, s, \xi) = N_k(t, \xi)\mathcal{E}_k(t, s, \xi)N_k^{-1}(s, \xi).$$

Temos ainda que $\mathcal{E}^{(0)}(t,s,\xi)$ e $M^{-1}\mathcal{E}(t,s,\xi)M$ satisfazem o mesmo PVI. Pelo teorema de existência e unicidade segue a representação desejada.

Queremos agora encontrar uma representação para frequências pequenas, isto é, para $s \leq t_\xi \leq t$. Para o tal basta observar a propriedade de solução fundamental. Sabemos que para $0 \leq s \leq t_\xi \leq t$ acontece,

$$\mathcal{E}(t,s,\xi) \;=\; \mathcal{E}(t,t_\xi,\xi)\mathcal{E}(t_\xi,s,\xi)$$

isto implica que para todo $0 \leq s \leq t_\xi \leq t$. Podemos aplicar (2.58) para $\mathcal{E}(t,t_\xi,\xi)$. Daí segue que,

$$\mathcal{E}(t,s,\xi) = \frac{1}{\lambda(t)} M N_k(t,\xi)\mathcal{E}_0(t,t_\xi,\xi)\mathcal{Q}_k(t,t_\xi,\xi)N_k^{-1}(t_\xi,\xi)M^{-1}\lambda(t_\xi)\mathcal{E}(t_\xi,s,\xi). \tag{2.59}$$

Capítulo

3

Estimativas

Até agora obtemos uma representação da solução para o sistema de edo. Nosso objetivo nesse momento é fazer estimativas utilizando essa representação para concluirmos o comportamento assintótico da solução. Este capítulo é dedicado para estudar estimativas que estão diretamente relacionadas com nossa microenergia, isto é, estimativas para a solução fundamental $\mathcal{E}(t,s,D)$ ou para o operador de energia $\mathbb{E}(t,D)$.

3.1 Estimativa de energia do tipo Strichartz L^2-L^2

Nesta seção estamos interessados em encontrar desigualdade do tipo Strichartz L^2-L^2 para a equação da onda com dissipação fraca dependente do tempo.

O teorema (2.2.12) juntamente com a estimativa do lema (2.1.2) implicam, pelo teorema de Plancherel, a seguinte estimativa para a norma do operador.

Teorema 3.1.1. *Suponha* $(A1)$, $(A2)_1$ *e* $(A3)$. *Então vale a seguinte estimativa* L^2-L^2

$$\|\mathcal{E}(t,s,D)\|_{2\to 2}\lesssim\frac{\lambda(s)}{\lambda(t)}.$$

Demonstração: Para a zona dissipativa temos que o lema (2.1.2) implica que

$$\|\mathcal{E}(t,s,\xi)\|\lesssim\frac{\lambda^2(s)}{\lambda^2(t)}\lesssim\frac{\lambda(s)}{\lambda(t)},\forall t_\xi\geq t\geq s. \tag{3.1}$$

Para a zona hiperbólica temos que analisar dois casos: frequências pequenas, que acontecem quando $0 \leq s \leq t_\xi \leq t$ e frequências grandes que ocorrem para $0 \leq t_\xi \leq s \leq t$. Quando temos frequências pequenas segue que,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{E}(t,s,\xi)\| &= \left\| \frac{1}{\lambda(t)} M N_k(t,\xi) \mathcal{E}_0(t,t_\xi,\xi) \mathcal{Q}_k(t,t_\xi,\xi) N_k^{-1}(t_\xi,\xi) M^{-1} \lambda(t_\xi) \mathcal{E}(t_\xi,s,\xi) \right\| \\
&\lesssim \left\| \frac{1}{\lambda(t)} \lambda(t_\xi) \mathcal{E}(t_\xi,s,\xi) \right\| \\
&\lesssim \frac{\lambda(s)}{\lambda(t)}.
\end{aligned}$$

Para frequências grandes temos que,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{E}(t,s,\xi)\| &= \left\| M N_k(t,\xi) \mathcal{E}_k(t,s,\xi) N_k^{-1}(t,\xi) M^{-1} \right\| \\
&\lesssim \|\mathcal{E}_k(t,s,\xi)\| \\
&= \frac{\lambda(s)}{\lambda(t)} \|\mathcal{E}_o(t,s,\xi) \mathcal{Q}_k(t,s,\xi)\| \\
&\lesssim \frac{\lambda(s)}{\lambda(t)}.
\end{aligned}$$

Sendo assim, a desigualdade (3.1) é válida em todo espaço de fase. Seja $u \in L^2$, então

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{E}(t,s,D)u(x)\|_2 &= \left\| \mathcal{F}^{-1} \left[\mathcal{E}(t,s,.) \hat{u}(.) \right] \right\|_2 \\
&\sim \|\mathcal{E}(t,s,.) \hat{u}(.)\|_2 \\
&\leq \|\mathcal{E}(t,s,.)\|_\infty \|\hat{u}(.)\|_2 \\
&\lesssim \frac{\lambda(s)}{\lambda(t)} \|u(.)\|_2 .
\end{aligned}$$

Concluindo assim o teorema.

■

Usando a definição da microenergia (2.5), podemos reformular esta estimativa em termos do operador de energia $\mathbb{E}(t,D)$. Por conveniência faremos uma relação entre a solução fundamental $\mathcal{E}(t,s,\xi)$ e $\mathbb{E}(t,\xi)$. Citaremos esses resultados na seguinte

proposição que é consequência imediata da definição de nossa microenergia (2.5) e do lema a seguir.

Lema 3.1.2. *O símbolo $\mathbb{E}(t,\xi)$ satisfaz a seguinte edo,*

$$D_t\mathbb{E}(t,\xi) = A(t,\xi)\mathbb{E}(t,\xi),$$

para $s \geq t_\xi$.

Demonstração: De fato, por um lado temos que

$$\mathbb{E}(t,D)(\langle D\rangle u_1, u_2)^T = (2\pi)^{-n}\int e^{-ix\xi}\mathbb{E}(t,\xi)(\langle\xi\rangle\hat{u}_1, \hat{u}_2)^T d\xi. \tag{3.2}$$

Por outro lado, a definição do nosso operador de energia implica que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(t,D)(\langle D\rangle u_1, u_2)^T &= (|D|u(t,.), D_t u(t,.))^T \\ &= (2\pi)^{-n}\int e^{-ix\xi}(|\xi|\hat{u}(t,\xi), D_t\hat{u}(t,\xi))^T d\xi \\ &= (2\pi)^{-n}\int e^{-ix\xi}U(t,\xi)d\xi,\end{aligned}$$

onde a última igualdade se justifica por estamos trabalhando na zona hiperbólica, pois $s \geq t_\xi$. Igualando a (3.2) obteremos o seguinte

$$(2\pi)^{-n}\int e^{-ix\xi}\mathbb{E}(t,\xi)(\langle\xi\rangle\hat{u}_1, \hat{u}_2)^T d\xi = (2\pi)^{-n}\int e^{-ix\xi}U(t,\xi)d\xi.$$

Derivando os dois lados em relação a t chegaremos à

$$\begin{aligned}(2\pi)^{-n}\int e^{-ix\xi}D_t\mathbb{E}(t,\xi)(\langle\xi\rangle\hat{u}_1, \hat{u}_2)^T d\xi &= (2\pi)^{-n}\int e^{-ix\xi}D_t U(t,\xi)d\xi \\ &= (2\pi)^{-n}\int e^{-ix\xi}A(t,\xi)U(t,\xi)d\xi \\ &= A(t,D)(|D|, u(t,.), D_t u(t,.)) \\ &= A(t,D)(2\pi)^{-n}\int e^{-ix\xi}\mathbb{E}(t,\xi)(\langle\xi\rangle\hat{u}_1, \hat{u}_2)^T d\xi.\end{aligned}$$

Então,

$$(2\pi)^{-n}\int e^{-ix\xi}D_t\mathbb{E}(t,\xi)(\langle\xi\rangle\hat{u}_1,\hat{u}_2)^T d\xi \;=\; (2\pi)^{-n}\int e^{-ix\xi}A(t,\xi)\mathbb{E}(t,\xi)(\langle\xi\rangle\hat{u}_1,\hat{u}_2)^T d\xi.$$

Portanto $D_t\mathbb{E}(t,\xi) = A(t,\xi)\mathbb{E}(t,\xi)$.

■

Proposição 3.1.3. (1) *Temos que* $\mathbb{E}(t,\xi) = \mathcal{E}(t,s,\xi)\mathbb{E}(t,s)$, *para* $s \geq t_\xi$.
(2) *O símbolo do operador de energia se relaciona com a solução fundamental* $\mathcal{E}(t,s,\xi)$ *da seguinte forma*

$$\mathbb{E}(t,\xi)\begin{bmatrix} \frac{\langle\xi\rangle}{h(0,\xi)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{|\xi|}{h(t,\xi)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathcal{E}(t,0,\xi).$$

(3) *O multiplicador* $\dfrac{|\xi|}{h(t,\xi)}$ *induz uma família de operadores uniformemente limitados em* $L^p, p \in (1,\infty)$, *convergindo fortemente para a identidade quando* $t \to \infty$.

Demonstração: (1) Sabemos pelo lema (3.1.2) que para $s \geq t_\xi$, $V(t,\xi) = \mathbb{E}(t,\xi)$ satisfaz o seguinte PVI

$$\begin{cases} D_tV(t,\xi) = A(t,\xi)V(t,\xi) \\ V(s,\xi) = \mathbb{E}(s,\xi) \end{cases}, \tag{3.3}$$

ainda temos que a solução fundamental $\mathcal{E}(t,s,\xi)$ satisfaz

$$\begin{cases} D_t\mathcal{E}(t,s,\xi) = A(t,\xi)\mathcal{E}(t,s,\xi) \\ \mathcal{E}(s,s,\xi) = I \end{cases}.$$

Fazendo $\tilde{U}(t,\xi) = \mathcal{E}(t,s,\xi)\mathbb{E}(s,\xi)$, temos que

$$\begin{cases} D_t\tilde{U}(t,\xi) = A(t,\xi)\mathcal{E}(t,s,\xi)\mathbb{E}(s,\xi) = A(t,\xi)\tilde{U}(t,\xi) \\ \tilde{U}(s,\xi) = \mathcal{E}(s,s,\xi)\mathbb{E}(s,\xi) = \mathbb{E}(s,\xi) \end{cases}.$$

Logo, $\tilde{U}(t,\xi)$ satisfaz o P.V.I. (3.3), logo pelo teorema de existência e unicidade para edo segue o resultado desejado.

(2) Vamos mostrar a identidade entre os operadores pseudo-diferenciais relacionadas com tais símbolos. Temos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(t,D)\begin{bmatrix}\frac{\langle D\rangle}{h(0,D)} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h(0,D)u_1\\ u_2\end{bmatrix} &= \mathbb{E}(t,D)\begin{bmatrix}\langle D\rangle u_1\\ u_2\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}|D|u\\ D_t u\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}\frac{|D|}{h(t,D)} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h(t,D)u\\ D_t u\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}\frac{|D|}{h(t,D)} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}U(s,D)\\
&= \begin{bmatrix}\frac{|D|}{h(t,D)} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\mathcal{E}(t,0,D)U(0,D)\\
&= \begin{bmatrix}\frac{|D|}{h(t,D)} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\mathcal{E}(t,0,D)\begin{bmatrix}h(0,D)u_1\\ u_2\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Logo vale a igualdade dos símbolos correspondentes a esses operadores.

(3) Temos que $|\xi| \in S_N\{1,0\}$ e que $\dfrac{1}{h(t,\xi)} \in S_N\{-1,0\}$. Logo $\dfrac{|\xi|}{h(t,\xi)} \in S_N\{0,0\}$, isto implica que $\dfrac{|\xi|}{h(t,\xi)}$ e suas derivadas em relação a ξ são uniformemente limitadas em t e que $\dfrac{|\xi|}{h(t,\xi)} \in \dot{S}^0_k$. Pelo teorema de Hörmander-Mickhlin (3.4.16) segue que $\dfrac{|\xi|}{h(t,\xi)}$ induz uma família uniformemente limitada de operadores em L^p. A convergência segue do fato que $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{|\xi|}{h(t,\xi)} = 1$.

■

Proposição 3.1.4. *A aplicação* $W^1 \times L^2 \ni (u_1,u_2) \longmapsto (\langle D\rangle u_1, u_2) \in L^2 \times L^2$ *é sobrejetora. E mais,* $\|\langle D\rangle u\|_2 \lesssim \|u\|_{W^1}$.

Demonstração: De fato, para a sobrejetividade, tomando $(u,v) \in L^2 \times L^2$, basta considerarmos o par $(\langle D\rangle^{-1}u, v) \in W^1 \times L^2$. Que $\langle D\rangle^{-1}u \in W^1$ segue de,

$$\begin{aligned}
\left\|\langle D\rangle^{-1}u\right\|_{W^1}^2 &= \left\|\mathcal{F}^{-1}\left[\langle\xi\rangle^{-1}\hat{u}\right]\right\|_{W^1}^2 \\
&= \int \langle\xi\rangle^2 \left|\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\left[\langle\xi\rangle^{-1}\hat{u}(\xi)\right]\right|^2 d\xi \\
&= \int |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \|\hat{u}\|_2^2 \\
&\sim \|u\|_2^2.
\end{aligned}$$

Para concluirmos a proposição veja que o teorema de Plancharel implica que

$$\begin{aligned}
\|\langle D\rangle u\|_2^2 &= \left\|\mathcal{F}^{-1}\left[\langle\xi\rangle\hat{u}\right]\right\|_2^2 \\
&\sim \|\langle\xi\rangle\hat{u}\|_2^2 \\
&= \|u\|_{W^1}^2.
\end{aligned}$$

■

Após feitas tais relações podemos provar o seguinte

Corolário 3.1.5. *As hipóteses* $(A1)$, $(A2)_1$ *e* $(A3)$ *implicam que*

$$\|\mathbb{E}(t,D)\|_{2\to 2} \lesssim \frac{1}{\lambda(t)}.$$

Demonstração: Seja $(u_1,u_2) \in W^1 \times L^2$, então pela observação anterior, temos que $u = (\langle D\rangle u_1, u_2) \in L^2 \times L^2$. O teorema de Plancharel e a proposição (3.1.3) ítens (b) e (c) implicam que

$$\|\mathbb{E}(t,D)u\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} \frac{|D|}{h(t,D)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathcal{E}(t,0,D) \begin{bmatrix} \frac{h(0,D)}{\langle D\rangle} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \right\|_2$$

$$\begin{aligned}\|\mathbb{E}(t,D)u\|_2 &\lesssim \left\|\mathcal{E}(t,0,D)\begin{bmatrix}\frac{h(0,D)}{\langle D\rangle} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}u\right\|_2\\ &\lesssim \frac{1}{\lambda(t)}\left\|\begin{bmatrix}\frac{h(0,D)}{\langle D\rangle} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}u\right\|_2\\ &\lesssim \frac{1}{\lambda(t)}\|u\|_2\,.\end{aligned}$$

Observando que $\dfrac{h(0,\xi)}{\langle\xi\rangle} \in S_N\{0,0\}$, logo induz um operador de $L^p - L^p$. Por conseguinte

$$\begin{aligned}\|\mathbb{E}(t,D)u\|_2 &\lesssim \frac{1}{\lambda(t)}\left(\|\langle D\rangle u_1\|_2 + \|u_2\|_2\right)\\ &\lesssim \frac{1}{\lambda(t)}\left(\|u_1\|_{W^1} + \|u_2\|_2\right).\end{aligned}$$

Provando assim o resultado desejado.

■

Encerraremos esta seção dando alguns exemplos importantes onde podemos aplicar a técnica utilizada nessa dissertação.

Exemplo 3.1.6. *Seja*

$$b(t) = \frac{\beta}{1+t}, \beta \in (0,1).$$

Esse exemplo foi considerado pelo autor Jeans Wirth no artigo [15]. As hipóteses $(A1)$, $(A2)_l$ e $(A3)$ são satisfeitas. De fato,

- $(A1)$ é trivialmente satisfeita;
- Para provar $(A2)_l$ veja que

$$\left|\frac{d^k}{dt^k}b(t)\right| = \beta\left(\frac{1}{1+t}\right)^{k+1} \lesssim \left(\frac{1}{1+t}\right)^{k+1}, \forall k \leq l;$$

- Finalmente para $(A3)$ observe que

$$\limsup_{t\to\infty} tb(t) = \lim_{t\to\infty} tb(t) = \beta < 1.$$

Logo o corolário (3.1.5) implica que

$$\|\mathbb{E}(t,D)\|_{2\to 2} \lesssim \frac{1}{\lambda(t)}.$$

Como

$$\lambda(t) = \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\beta}{1+\tau}d\tau\right) = \exp\left(ln(1+t)^{\frac{\beta}{2}}\right) = (1+t)^{\frac{\beta}{2}},$$

temos que

$$\|\mathbb{E}(t,D)\|_{2\to 2} \lesssim (1+t)^{-\frac{\beta}{2}}.$$

Exemplo 3.1.7. *Seja $\beta > 0$ e $n \geq 1$. Consideremos*

$$b(t) = \frac{\beta}{(1+t)\ln(e+t)...\ln^{[n]}(e^{[n]}+t)}.$$

Nossa notação aqui tem o seguinte sentido, $\ln^{[n]}$ é a $n-$ésima interação do logaritmo, isto é, $\ln^{[0]}(\tau) = \tau$ e $\ln^{[k+1]}(\tau) = \ln\left(ln^{[k]}(\tau)\right)$. Analogamente, $e^{[0]} = 1$ e $e^{[k+1]} = e^{e^{[k]}}$. Este exemplo foi considerado pelo autor Mochizuki e Nakazawa no artigo [7]. As hipóteses $(A1)$, $(A2)_l$ e $(A3)$ são satisfeitas. De fato,

- $(A1)$ é trivialmente satisfeita;

- Para $(A2)_l$ basta observarmos que

$$\frac{1}{1+t} \in S_N\{0,1\}, \quad \frac{1}{\ln^{[n]}(e^{[n]}+t)} \in S_N\{0,0\},$$

afirmação esta que pode ser provada por indução sobre n. Sendo assim $b(t) \in S_N\{0,1\}$ e particularmente satisfaz a hipótese $(A2)_l$;

- Para $(A3)$ tem-se

$$\lim_{t\to\infty} t\frac{\beta}{(1+t)\ln(e+t)...\ln^{[n]}(e^{[n]}+t)} = 0 < 1.$$

Logo o corolário (3.1.5) implica que

$$\|\mathbb{E}(t,D)\|_{2\to 2} \lesssim \left(\ln^{[n]}(e^{[n]}+t)\right)^{-\frac{\beta}{2}}.$$

Sendo assim a energia decai em uma taxa arbitrariamente pequena.

Exemplo 3.1.8. *Podemos considerar funções oscilatórias do tipo*

$$b(t) = \frac{2+\cos(\alpha\ln(e+t))}{4(e+t)},$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$ *suficientemente grande.*

Neste último exemplo observe que as funções coeficientes $b(t)$ não precisam ser necessariamente monótonas. As hipóteses $(A1)$, $(A2)_l$ e $(A3)$ são satisfeitas. De fato,

- (A1) é satisfeita trivialmente;

- Podemos concluir $(A2)_l$ observando que

$$b(t) = \frac{1}{2(e+t)} + \frac{1}{4(e+t)}\cos(\alpha\ln(e+t))$$

  e mais, $\dfrac{1}{2(e+t)} \in S_N\{0,1\}$, $\dfrac{1}{4(e+t)} \in S_N\{0,1\}$ e $\cos(\alpha\ln(e+t)) \in S_N\{0,0\}$. Daí que $b(t) \in S_N\{0,1\}$ e consequentimente $b(t)$ satisfaz $(A2)_l$;

- $(A3)$ ocorre uma vez que

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{t}{e+t}\left(\frac{2+\cos(\alpha\ln(e+t))}{4}\right) = 1\left(\frac{2+1}{4}\right) = \frac{3}{4} < 1.$$

Logo o corolário (3.1.5) implica que

$$\|\mathbb{E}(t,D)\|_{2\to 2} \lesssim \frac{1}{\lambda(t)}.$$

A mudança de variáveis para integrais implica que

$$\int_0^t b(t)dt = \frac{1}{2}\ln(e+t) + \frac{1}{4\alpha}\text{sen}(\alpha \ln(e+t)).$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned}
\lambda(t) &= \exp\left(\int_0^t b(t)dt\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{2}\ln(e+t) + \frac{1}{4\alpha}\text{sen}(\alpha\ln(e+t))\right) \\
&\sim \exp\ln\sqrt{e+t}\exp\left(\frac{1}{4\alpha}\text{sen}(\alpha\ln(e+t))\right) \\
&\gtrsim \sqrt{e+t}.
\end{aligned}$$

Daí segue que

$$\|\mathbb{E}(t,D)\|_{2\to 2} \lesssim (e+t)^{-\frac{1}{2}},$$

que independe da escolha de α.

3.2 Estimativa de energia do tipo Strichartz $L^p - L^q$

Esta seção está destinada a encontrar desigualdade do tipo Strichartz $L^p - L^q$, com p, q índices duais, para equação da onda com dissipação fraca dependente do tempo. Uma importante ferramente utilizada aqui foi a representação da solução obtida no capítulo anterior.

A estimativa básica encontra-se no próximo teorema, onde mostraremos um resultado para ondas livres na linguagem de nosso operador.

Teorema 3.2.1. *A seguinte desigualdade acontece*

$$\|\mathcal{E}_0(t,0,D)\|_{p,r\to q} \leq C_{p,q}(1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)},$$

para índices duais p *e* q, $p \in (1,2]$ *e com regularidade* $r = n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$.

Demonstração: A matriz $\mathcal{E}_0(t,0,\xi)$ tem entradas que são combinações lineares de termos $e^{\pm it|\xi|}$. Portanto, é suficiente considerarmos apenas esses termos. Faremos duas decomposições diádicas para o retrato de fase, lembrando que os espaços de Besov independem da decomposição diádica escolhida. Essa decomposição diádica no retrato de fase tem o objetivo de dividir o operador em componentes. Primeiramente, para $t \leq 1$ efetuaremos a seguinte decomposição diádica: Tome $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, com supp $\psi \subset \left[\frac{1}{2},2\right]$ tal que, $\phi_j(\xi) = \psi(2^{-j}|\xi|)$ para $\xi \neq 0$ satisfazendo $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \phi_j(\xi) = 1$. Pelo Lema de Brenner (3.4.12) e fazendo a mudança de variável $\eta = 2^{-j}|\xi|$, obteremos

$$\begin{aligned}
I_j &= \left\|\mathcal{F}^{-1}\left[\phi_j(\xi)e^{\pm it|\xi|}\right]\right\|_\infty \\
&= \left\|\mathcal{F}^{-1}\left[\psi(2^j|\xi|)e^{\pm it|\xi|}\right]\right\|_\infty \\
&= 2^{jn}\left\|\mathcal{F}^{-1}\left[\psi(\eta)e^{\pm it2^j|\eta|}\right]\right\|_\infty \\
&\leq C2^{jn}(1+2^jt)^{-\frac{n-1}{2}}\sum_{|\alpha|\leq M}\|D^\alpha\psi(\eta)\|_1 \\
&\leq \widetilde{C}2^{jn}(1+t)^{-\frac{n-1}{2}},
\end{aligned}$$

na última passagem usamos que $\dfrac{1+t}{1+2^jt} \leq 2$, para $t \leq 1$.

Agora para $t \geq 1$, consideremos a seguinte decomposição diádica: Tome $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, com supp $\psi \subset \left[\frac{1}{2},2\right]$ tal que, $\phi_j(t,\xi) = \psi(2^{-j}(t+1)|\xi|)$ para $\xi \neq 0$ satisfazendo $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \phi_j(t,\xi) = 1$. Fazendo a mudança de variável $\eta = 2^{-j}(t+1)|\xi|$,

obtemos,

$$\begin{aligned} I_j &= \left\|\mathcal{F}^{-1}\left[\phi_j(t,\xi)e^{\pm it|\xi|}\right]\right\|_\infty \\ &= \left\|\mathcal{F}^{-1}\left[\psi(2^{-j}(t+1)|\xi|)e^{\pm it|\xi|}\right]\right\|_\infty \\ &= 2^{jn}(1+t)^{-n}\left\|\mathcal{F}^{-1}\left[\psi(\eta)e^{\pm i\frac{t}{t+1}2^j|\eta|}\right]\right\|_\infty \\ &\leq k2^{jn}(1+t)^{-n}\left\|\psi(\eta)e^{\pm i\frac{t}{t+1}2^j|\eta|}\right\|_1 \\ &\leq \widetilde{k}2^{jn}(1+t)^{-\frac{n-1}{2}}, \end{aligned}$$

pois $(t+1)^{-1} \leq \frac{1}{2}$, $n > \frac{n-1}{2}$, $\|\psi(\eta)e^{\pm i\frac{t}{t+1}2^j|\eta|}\|_\infty \sim 1$ e ψ tem suporte compacto. Sendo assim, tomando $K = \max\{\widetilde{C}, \widetilde{k}\}$, concluiremos que,

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}\left[\phi_j(t,\xi)e^{\pm it|\xi|}\right]\right\|_\infty \leq K2^{jn}(1+t)^{-\frac{n-1}{2}}, \quad \forall t \geq 0.$$

Queremos utilizar o teorema (1.1.6), para isso vamos provar que nosso operador satisfaz as hipóteses do mesmo. Tome $u \in L^1$, então pela desigualdade de Young segue que,

$$\begin{aligned} \left\|\mathcal{F}^{-1}\left[\phi_j(t,\xi)e^{\pm it|\xi|}\hat{u}(\xi)\right]\right\|_\infty &= \left\|\mathcal{F}^{-1}\left[\phi_j(t,\xi)e^{\pm it|\xi|}\right] * \mathcal{F}^{-1}\hat{u}(\xi)\right\|_\infty \\ &\leq \left\|\mathcal{F}^{-1}\left[\phi_j(t,\xi)e^{\pm it|\xi|}\right]\right\|_\infty \|u(\xi)\|_1 \\ &\lesssim 2^{jn}(1+t)^{-\frac{n-1}{2}}\|u(\xi)\|_1. \end{aligned}$$

Tome $u \in L^2$, então pela fórmula de Plancharel segue que,

$$\begin{aligned} \left\|\mathcal{F}^{-1}\left[\phi_j(t,\xi)e^{\pm it|\xi|}\hat{u}\right]\right\|_2 &\sim \left\|\phi_j(t,\xi)e^{\pm it|\xi|}\hat{u}(\xi)\right\|_2 \\ &\leq \left\|\phi_j(t,\xi)e^{\pm it|\xi|}\right\|_\infty \|\hat{u}(\xi)\|_2 \\ &\lesssim \|u(\xi)\|_2. \end{aligned}$$

Então pelo teorema de interpolação de Riez-Thorin, tem-se que se $u \in L^p$ então

$\mathcal{F}^{-1}\left[\phi_j(t,\xi)e^{\pm it|\xi|}\hat{u}\right] \in L^q$, onde

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{2} \Rightarrow \theta = \frac{2}{q}, \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{2}.$$

Teremos ainda pelo teorema (1.1.6) que

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}\left[\phi_j(t,\xi)e^{\pm it|\xi|}\hat{u}(\xi)\right]\right\|_q \lesssim 2^{jn\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}(1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\left\|u(\xi)\right\|_p. \tag{3.4}$$

A desigualdade acima implica a seguinte propriedade para o operador

$$e^{\pm it|D|} : \dot{B}^r_{p,2} \to L^q,$$

com regularidade $r = n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$. De fato, seja $u \in \dot{B}^r_{p,2}$, a relação entre os suportes das $\phi_{j's}$, a desigualdade de Minkowsky e a desigualdade (3.4) implicam que

$$\begin{aligned}
\left\|\mathcal{F}^{-1}\left[e^{\pm it|\xi|}\hat{u}(\xi)\right]\right\|_q^2 &\sim \left(\sum_j \left\|\mathcal{F}^{-1}\left[\phi_j(t,\xi)e^{\pm it|\xi|}\hat{u}(\xi)\right]\right\|_q^2\right) \\
&= \left(\sum_j \left\|\mathcal{F}^{-1}\left[\phi_j(t,\xi)e^{\pm it|\xi|}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\phi_k(t,\xi)\hat{u}(\xi)\right]\right\|_q^2\right) \\
&\leq \sum_{k=-1}^{1}\left(\sum_j \left\|\mathcal{F}^{-1}\left[\phi_j(t,\xi)e^{\pm it|\xi|}\phi_{j+k}(t,\xi)\hat{u}(\xi)\right]\right\|_q^2\right) \\
&\leq \sum_{k=-1}^{1}\left(\sum_j \left\|\mathcal{F}^{-1}\left[\phi_j(t,\xi)e^{\pm it|\xi|}\mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}\phi_{j+k}(t,\xi)\hat{u}(\xi)\right]\right]\right\|_q^2\right) \\
&\lesssim (1+t)^{-(n-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\sum_j\left(\left\|2^{jn\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\left[\mathcal{F}^{-1}\left(\phi_{j+k}(t,\xi)\hat{u}(\xi)\right)\right]\right\|_p^2\right),
\end{aligned}$$

por conseguinte,

$$\begin{aligned}
\left\|\mathcal{F}^{-1}\left[\phi_j(t,\xi)e^{\pm it|\xi|}\hat{u}(\xi)\right]\right\|_q &\lesssim (1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\sum_j\left(\left\|2^{jn\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\left[\mathcal{F}^{-1}\left(\phi_{j+k}(t,\xi)\hat{u}(\xi)\right)\right]\right\|_p^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= (1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|u\|_{\dot{B}^r_{p,2}}.
\end{aligned}$$

Concluindo assim a propriedade do operador.

Para concluirmos o teorema usaremos a imersão contínua,

$$W_p^r \hookrightarrow B_{p,2}^r \doteq \dot{B}_{p,2}^r \cap L^p.$$

Tome $u \in W_p^r$, então

$$\begin{aligned}
\left\|e^{\pm it|D|}u(\xi)\right\|_q &= \left\|\mathcal{F}^{-1}\left[e^{\pm it|\xi|}\hat{u}(\xi)\right]\right\|_q \\
&\lesssim (1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|u\|_{\dot{B}_{p,2}^r} \\
&\lesssim (1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\left(\|u\|_p + \|u\|_{\dot{B}_{p,2}^r}\right) \\
&= (1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|u\|_{B_{p,2}^r} \\
&\lesssim (1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|u\|_{p,r}.
\end{aligned}$$

■

Este teorema é a principal ferramenta para entender o operador $\mathbb{E}(t,D)$ restrito a zona hiperbólica. Estamos aptos agora a provar o seguinte teorema.

Teorema 3.2.2. *Suponha* $(A1)$*,* $(A2)$ *e* $(A3)$*. Então o operador* $\mathcal{E}(t,0,D)$ *satisfaz para índices duais* p *e* q*,* $p \in (1,2]$*, a seguinte estimativa*

$$\|\mathcal{E}(t,0,D)\|_{p,r\to q} \lesssim \frac{1}{\lambda(t)}(1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)},$$

com regularidade $r = n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$.

Demonstração: Vamos dividir a prova em duas etapas.

Etapa 1: Primeiramente vamos considerar $\mathcal{E}(t,0,D)\phi_{diss,N}(t,D)$, isto é, o operador localizado na zona dissipativa. Note que $\sqrt{\phi}$ continua sendo uma função corte da zona dissipativa. Pelo lema (2.1.2), já sabemos que

$$\left\|\mathcal{E}(t,0,D)\phi_{diss,N}^{\frac{1}{2}}(t,D)\right\| \lesssim \frac{1}{\lambda^2(t)}.$$

Queremos aplicar a desigualdade de interpolação de Riez-Thorin, para isto observe que, se $u \in L^1$ então pela desigualdade de Young e propriedades da transformada de Fourier temos

$$\begin{aligned}
\left\|\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{E}(t,0,.)\phi_{diss,N}(t,.)\hat{u}(.)\right]\right\|_\infty &= \left\|\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{E}(t,0,.)\phi_{diss,N}(t,.)\right] * u(.)\right\|_\infty \\
&\leq \left\|\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{E}(t,0,.)\phi_{diss,N}(t,.)\right]\right\|_\infty \|u(.)\|_1 \\
&\leq \|\mathcal{E}(t,0,.)\phi_{diss,N}(t,.)\|_1 \|u(.)\|_1 \\
&\leq \left\|\mathcal{E}(t,0,.)\phi^{\frac{1}{2}}_{diss,N}(t,.)\right\|_\infty \left\|\phi^{\frac{1}{2}}_{diss,N}(t,.)\right\|_1 \|u(.)\|_1 \\
&\leq \frac{1}{\lambda^2(t)} \left\|\phi^{\frac{1}{2}}_{diss,N}(t,.)\right\|_1 \|u(.)\|_1.
\end{aligned}$$

Agora se $u \in L^2$, segue pelo teorema de Plancharel,

$$\begin{aligned}
\left\|\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{E}(t,0,.)\phi_{diss,N}(t,.)\hat{u}(.)\right]\right\|_2 &\sim \|\mathcal{E}(t,0,.)\phi_{diss,N}(t,.)\hat{u}(.)\|_2 \\
&\leq \|\mathcal{E}(t,0,.)\phi_{diss,N}(t,.)\|_\infty \|\hat{u}(.)\|_2 \\
&\lesssim \frac{1}{\lambda^2(t)} \|u(.)\|_2 .
\end{aligned}$$

Como $1-\theta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, segue pela desigualdade de interpolação de Riez-Thorin que

$$\begin{aligned}
\left\|\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{E}(t,0,.)\phi_{diss,N}(t,.)\hat{u}(.)\right]\right\|_q &\leq \left(\frac{1}{\lambda^2(t)}\right)^\theta \left(\frac{1}{\lambda^2(t)} \|\phi_{diss,N}(t,.)\|_1\right)^{1-\theta} \|u\|_p \\
&= \frac{1}{\lambda^2(t)} \|\phi_{diss,N}(t,.)\|_1^{1-\theta} \|u\|_p \\
&\lesssim \frac{1}{\lambda^2(t)} (1+t)^{-n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} \|u\|_p,
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos a mudança de variável $x = \dfrac{(1+t)|\xi|}{N}$ para resolvermos a integral de $\phi_{diss,N}$.

Para concluirmos o resultado, tome $u \in W^r_p$, particularmente $u \in B^r_{p,2} \doteq \dot{B}^r_{p,2} \cap L^p$.

Daí que,

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{E}(t,0,.)\phi_{diss,N}(t,.)\hat{u}(.)\right]\right\|_q &\lesssim \frac{1}{\lambda^2(t)}(1+t)^{-n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|u\|_p \\ &\leq \frac{1}{\lambda^2(t)}(1+t)^{-n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\left(\|u\|_p+\|u\|_{\dot{B}^r_{p,2}}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{\lambda^2(t)}(1+t)^{-n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|u\|_{B^r_{p,2}} \\ &\leq \frac{1}{\lambda^2(t)}(1+t)^{-n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|u\|_{p,r},\end{aligned}$$

que é uma estimativa de maior decaimento do que a dada no teorema.

Etapa 2: Na segunda etapa vamos considerar o operador localizado na zona hiperbólica. Vamos usar a função corte e separar os casos onde temos frequências grandes das frequências pequenas.

Para frequências pequenas vamos usar a representação (2.59):

$$\mathcal{E}(t,0,D)\phi_{hyp,N}(t,D)=\frac{1}{\lambda(t)}\underbrace{MN_k(t,D)}_{q\to q}\underbrace{\mathcal{E}_0(t,t_\xi,D)}_{p,r\to q}\underbrace{\mathcal{Q}_k(t,t_\xi,D)}_{p,r\to p,r}\cdot$$

$$\underbrace{N_k^{-1}(t_\xi,D)M^{-1}\lambda(t_\xi)\mathcal{E}(t_\xi,0,D)}_{p,r\to p,r}\phi_{hyp,N}(t,D).$$

De fato,

- Sabemos que $MN_k(t,\xi)\in S_N^{l-k+1,\infty}\{0,0\}$, consequentemente $MN_k(t,\xi)\in\dot{S}^0$, logo pelo teorema de Hörmander-Mikhlin, veja (3.4.16), segue que $MN_k(t,D)\in M_q^q$, uniformemente em t;

- Que $\mathcal{E}_0(t,t_\xi,D):W_p^r\to L_q$ segue do teorema (3.2.1), uma vez que $\mathcal{E}_0(t,t_\xi,D)=\mathcal{E}_0(t,0,D)\mathcal{E}_0(0,t_\xi,D)$;

- Temos $\mathcal{Q}_k(t,t_\xi,\xi)\in S_N^{1,k-1}\{0,0\}$, logo $\mathcal{Q}_k(t,t_\xi,\xi)\in\dot{S}^0$, pelo teorema de Hörmander-Mikhlin $\mathcal{Q}_k(t,t_\xi,D):W_p^r\to W_p^r$, uniformemente em t;

- Finalmente, temos que $N_k^{-1}(t_\xi,\xi)M^{-1}\lambda(t_\xi)\mathcal{E}(t_\xi,0,\xi)\in\dot{S}^0$, usando o análogo da proposição (2.0.15) parte (3) para a classe de símbolo $\dot{S}^0$, segue pelo teorema (3.4.16) que $N_k^{-1}(t_\xi,D)M^{-1}\lambda(t_\xi)\mathcal{E}(t_\xi,0,D):W_p^r\to W_p^r$, uniformemente em t;

Por conseguinte seja $u\in W_p^r$. Denote por $\|\mathcal{L}u\|_q=\|\mathcal{E}_0(t,0,D)\phi_{hyp,N}(t,D)u\|_q$, então

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{L}u\|_q &= \left\|\frac{1}{\lambda(t)}MN_k(t,D)\mathcal{E}_0(t,t_\xi,D)\mathcal{Q}_k(t,t_\xi,D)N_k^{-1}(t_\xi,D)M^{-1}\lambda(t_\xi)\mathcal{E}(t_\xi,0,D)\phi_{hyp,N}(t,D)u\right\|_q\\
&\lesssim \frac{1}{\lambda(t)}\left\|\mathcal{E}_0(t,t_\xi,D)\mathcal{Q}_k(t,t_\xi,D)N_k^{-1}(t_\xi,D)M^{-1}\lambda(t_\xi)\mathcal{E}(t_\xi,0,D)\phi_{hyp,N}(t,D)u\right\|_q\\
&\lesssim \frac{1}{\lambda(t)}(1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\left\|\mathcal{Q}_k(t,t_\xi,D)N_k^{-1}(t_\xi,D)M^{-1}\lambda(t_\xi)\mathcal{E}(t_\xi,0,D)\phi_{hyp,N}(t,D)u\right\|_{p,r}\\
&\lesssim \frac{1}{\lambda(t)}(1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\left\|N_k^{-1}(t_\xi,D)M^{-1}\lambda(t_\xi)\mathcal{E}(t_\xi,0,D)\phi_{hyp,N}(t,D)u\right\|_{p,r}\\
&\lesssim \frac{1}{\lambda(t)}(1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\left\|\phi_{hyp,N}(t,D)u\right\|_{p,r}\\
&\lesssim \frac{1}{\lambda(t)}(1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\left\|\phi_{hyp,N}(t,D)\right\|_\infty\left\|u\right\|_{p,r}\\
&\lesssim \frac{1}{\lambda(t)}(1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\left\|u\right\|_{p,r}.
\end{aligned}$$

Para frequências grandes, usamos a representação (2.58):

$$\mathcal{E}(t,0,D)\phi_{hyp,N}(t,D)=MN_k(t,D)\mathcal{E}_k(t,0,D)N_k^{-1}(t,D)M^{-1}\phi_{hyp,N}(t,D).$$

Lembrando que $\mathcal{E}_k(t,0,\xi)=\dfrac{1}{\lambda(t)}\mathcal{E}_0(t,0,\xi)\mathcal{Q}_k(t,0,\xi)$, teremos

$$\mathcal{E}(t,0,D)\phi_{hyp,N}(t,D)=\frac{1}{\lambda(t)}\underbrace{MN_k(t,D)}_{q\to q}\underbrace{\mathcal{E}_0(t,0,D)}_{p,r\to q}\underbrace{\mathcal{Q}_k(t,0,D)}_{p,r\to p,r}\underbrace{N_k^{-1}(t,D)M^{-1}}_{p,r\to p,r}\phi_{hyp,N}(t,D).$$

Analogamente para o caso de frequências pequenas segue o resultado.

■

Observação 3.2.3. *Com a notação*

$$l_n = 2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1 = \begin{cases} n+1, & n = 2k+1, k \in \mathbb{Z} \\ n+2, & n = 2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

podemos provar a estimativa anterior com a hipótese mais fraca $(A2)_{l_n}$ *sobre a função* $b(t)$*. Se usarmos essa regularidade na função coeficiente e fizermos* $k = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ *passos na diagonalização, obteremos* $N_k \in S^{0,\infty}_N\{0,0\}$ *e* $\mathcal{Q}_k(t,s,\xi)$ *um símbolo de suavidade* $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ *uniformemente em* $t \geq s \geq t_\xi$*. Daí o teorema* (3.4.16) *implicará que* $N_k\phi_{hyp}$*,* $\mathcal{Q}_k\phi_{hyp}$ *definem operadores* $L^p \to L^p$*, para todo* $p \in (1,\infty)$ *uniformemente em* t*.*

Observação 3.2.4. *Vale a seguinte imersão contínua*

$$L_{p,r+1} \times W^r_p \ni (u_1, u_2) \hookrightarrow (\langle D\rangle u_1, u_2) \in W^r_p \times W^r_p.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \|\langle D\rangle u_1\|_{p,r} &= \left\| \mathcal{F}^{-1}\left[\langle\xi\rangle^r \widehat{\langle D\rangle u_1}\right] \right\|_p \\ &= \left\| \mathcal{F}^{-1}\left[\langle\xi\rangle^r \mathcal{F}\left[\mathcal{F}^{-1}[\langle\xi\rangle \hat{u}_1]\right]\right] \right\|_p \\ &= \left\| \mathcal{F}^{-1}\left[\langle\xi\rangle^{r+1} \hat{u}_1\right] \right\|_p \\ &= \|u_1\|_{p,r_p+1}. \end{aligned}$$

Segue diretamente do teorema (3.2.1) e pela proposição (3.1.3) o seguinte corolário.

Corolário 3.2.5. *As hipóteses* $(A1)$*,* $(A2)$ *e* $(A3)$ *implicam que*

$$\|\mathbb{E}(t,D)\|_{p,r\to q} \lesssim \frac{1}{\lambda(t)}(1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}.$$

Demonstração: Análoga a do corolário (3.1.5).

3.3 Estimativas da solução

As estimativas para a solução seguem basicamente das estimativas para a microenergia $U(t,\xi) = (h(t,\xi)\hat{u}, D_t\hat{u})$. Usaremos basicamente a representação estrutural que obtivemos para a solução fundamental $\mathcal{E}(t,s,\xi)$.

Proposição 3.3.1. *Sejam $u_1 \in W^1$ e $u_2 \in L^2$. Temos que a microenergia satisfaz a seguinte estimativa $L^2 - L^2$,*

$$\|U(t,\xi)\|_2 \lesssim \begin{cases} \frac{1}{\lambda^2(t)} \left(\|u_1\|_{W^1} + \|u_2\|_2\right), s \leq t \leq t_\xi. \\ \frac{1}{\lambda(t)} \left(\|u_1\|_{W^1} + \|u_2\|_2\right), t_\xi \leq s \leq t \end{cases}$$

e mais,

$$\|U(t,\xi)\lambda(t_\xi)\|_2 \lesssim \frac{1}{\lambda(t)} \left(\|u_1\|_{W^1} + \|u_2\|_2\right), s \leq t_\xi \leq t.$$

Demonstração: De fato, na zona dissipativa temos a seguinte relação com a solução fundamental

$$\begin{aligned} U(t,\xi) = \mathcal{E}(t,s,\xi)U(s,\xi) &\Rightarrow U(t,\xi) = \mathcal{E}(t,s,\xi)\mathcal{E}(s,0,\xi)U(0,\xi) \\ &\Rightarrow U(t,\xi) = \mathcal{E}(t,s,\xi)\mathcal{E}(s,0,\xi)(N\hat{u_1}, \hat{u_2}), s \leq t \leq t_\xi. \end{aligned}$$

Daí segue pelo lema (2.1.2) e pelo teorema de Plancharel que,

$$\begin{aligned} \|U(t,\xi)\|_2 &\lesssim \frac{\lambda^2(s)}{\lambda^2(t)} \frac{\lambda^2(0)}{\lambda^2(s)} \|(N\hat{u_1}, \hat{u_2})\|_2 \\ &\lesssim \frac{1}{\lambda^2(t)} \left(\|u_1\|_2 + \|u_2\|_2\right) \\ &\lesssim \frac{1}{\lambda^2(t)} \left(\|u_1\|_{W^1} + \|u_2\|_2\right). \end{aligned}$$

Para a zona hiperbólica temos que analisar dois casos. Faça $I = \|U(t,\xi)\|_2$.

Para frequências grandes, isto é, para $t_\xi \leq s \leq t$ vamos usar a propriedade para

solução fundamental. Tome $\widetilde{t} \leq t_\xi$, então

$$\begin{aligned} I &= \|\mathcal{E}(t,s,\xi)\mathcal{E}(s,0,\xi)U(0,\xi)\|_2 \\ &= \left\|\mathcal{E}(t,s,\xi)\mathcal{E}(s,\widetilde{t},\xi)\mathcal{E}(\widetilde{t},0,\xi)U(0,\xi)\right\|_2. \end{aligned}$$

Agora observe que para $\mathcal{E}(t,s,\xi)$ podemos usar a representação para frequências grandes, para $\mathcal{E}(s,\widetilde{t},\xi)$ podemos usar a representação para frequências pequenas e para $\mathcal{E}(\widetilde{t},0,\xi)$ podemos usar o lema (2.1.2). Daí segue que,

$$\|U(t,\xi)\|_2 \lesssim \frac{1}{\lambda(t)}\left(\|u_1\|_{W^1} + \|u_2\|_2\right).$$

Faça $J = \|U(t,\xi)\lambda(t_\xi)\|_2$. Para frequências pequenas, isto é, para $0 \leq s \leq t_\xi \leq t$, temos pelo lema (2.1.2)

$$\begin{aligned} J &= \|\mathcal{E}(t,s,\xi)\mathcal{E}(s,0,\xi)U(0,\xi)\lambda(t_\xi)\|_2 \\ &= \left\|\frac{1}{\lambda(t)}MN_k(t,\xi)\mathcal{E}_0(t,t_\xi,\xi)\mathcal{Q}_k(t,t_\xi,\xi)N_k^{-1}(t_\xi,\xi)M^{-1}\lambda^2(t_\xi)\mathcal{E}(t_\xi,s,\xi)\mathcal{E}(s,0,\xi)U(0,\xi)\right\|_2 \\ &\lesssim \frac{1}{\lambda(t)}\left(\|u_1\|_{W^1} + \|u_2\|_2\right). \end{aligned}$$

■

Vamos definir o operador solução

$$\mathbb{S}(t,D) : \left(u_1, \langle D\rangle^{-1}u_2\right) \longmapsto u(t,.),$$

a fim de obteremos estimativas $L^p - L^q$ para a solução.
Observe que a aplicação $W^1 \times L^2 \ni (u_1,u_2) \longmapsto (u_1, \langle D\rangle^{-1}u_2) \in L^2 \times L^2$ está bem definida uma fez que vale o seguinte isomorfismo

$$\langle D\rangle^r : W_p^r(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n).$$

Teorema 3.3.2. *Suponha* $(A1)$, $(A2)_1$ *e* $(A3)$. *Então a solução* $u(t,x)$ *satisfaz a*

seguinte estimativa $L^2 - L^2$

$$\|\mathbb{S}(t,D)\|_{2\to 2} \lesssim \frac{1+t}{\lambda^2(t)}.$$

Demonstração: Seja $(u_1, u_2) \in W^1 \times L^2$. A demonstração segue basicamente da proposição (3.3.1).

Para a zona dissipativa temos que $h(t,\xi) = \frac{N}{1+t}$. Como $U(t,\xi) = (h(t,\xi)\hat{u}, D_t\hat{u})$, segue que

$$\|h(t,\xi)u\|_2 \lesssim \frac{1}{\lambda^2(t)} \left(\|u_1\|_{W^1} + \|u_2\|_2\right).$$

Então

$$\begin{aligned}
\left\|\mathbb{S}(t,D)(u_1, \langle D\rangle^{-1}u_2)\right\|_2 &= \|u(t,.)\|_2 \\
&= \|h^{-1}(t,\xi)h(t,\xi)u(t,.)\|_2 \\
&\lesssim (1+t)\|h(t,\xi)u(t,.)\|_2 \\
&\lesssim \frac{1+t}{\lambda^2(t)} \left(\|u_1\|_{W^1} + \|u_2\|_2\right).
\end{aligned}$$

Para a zona hiperbólica temos dois casos. Para $t_\xi \leq s \leq t$, temos que $h(t,\xi) = |\xi| > c > 0$ e

$$\|h(t,\xi)u\|_2 \lesssim \frac{1}{\lambda(t)} \left(\|u_1\|_{W^1} + \|u_2\|_2\right).$$

Então,

$$\begin{aligned}
\left\|\mathbb{S}(t,D)(u_1, \langle D\rangle^{-1}u_2)\right\|_2 &= \|u(t,.)\|_2 \\
&= \|h^{-1}(t,\xi)h(t,\xi)u(t,.)\|_2 \\
&\lesssim \|h(t,\xi)u(t,.)\|_2 \\
&\lesssim \frac{1}{\lambda(t)} \left(\|u_1\|_{W^1} + \|u_2\|_2\right) \\
&\lesssim \frac{1+t}{\lambda^2(t)} \left(\|u_1\|_{W^1} + \|u_2\|_2\right),
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos a proposição (2.1.1) da seguinte forma

$$\frac{\lambda^2(t)}{\lambda(t)} \lesssim 1+t \Rightarrow \frac{1}{\lambda(t)} \lesssim \frac{1+t}{\lambda^2(t)}.$$

Para $s \leq t_\xi \leq t$, temos que $h(t,\xi) = |\xi|$ e

$$\|\lambda(t_\xi)h(t,\xi)u\|_2 \lesssim \frac{1}{\lambda(t)}\left(\|u_1\|_{W^1} + \|u_2\|_2\right).$$

Então,

$$\begin{aligned}
\left\|\mathbb{S}(t,D)(u_1, \langle D\rangle^{-1}u_2)\right\|_2 &= \|u(t,.)\|_2 \\
&= \|h^{-1}(t,\xi)\lambda^{-1}(t_\xi)\lambda(t_\xi)h(t,\xi)u(t,.)\|_2 \\
&\lesssim \left\|\frac{1}{|\xi|\lambda(t_\xi)}\right\|_\infty \|\lambda(t_\xi)h(t,\xi)u(t,.)\|_2 \\
&\lesssim \left\|\frac{1}{|\xi|\lambda(t)\lambda(t_\xi)}\right\|_\infty \left(\|u_1\|_{W^1} + \|u_2\|_2\right) \\
&\lesssim \frac{1+t}{\lambda^2(t)}\left(\|u_1\|_{W^1} + \|u_2\|_2\right),
\end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos o seguinte

$$\frac{1}{|\xi|\lambda(t)\lambda(t_\xi)} \sim \frac{1+t_\xi}{\lambda(t)\lambda(t_\xi)} \lesssim \frac{1+t}{\lambda^2(t)},$$

observando que para t suficientemente grande a função $\dfrac{1+t}{\lambda(t)}$ é crescente.

■

Uma reformulação do teorema (3.2.2) juntamente com a representação estrutural da solução fundamental e a estrutura do símbolo $\mathbb{S}(t,\xi)$ nos fornece estimativas $L^p - L^q$ para o operador solução.

Teorema 3.3.3. *Suponha* $(A1)$, $(A2)_{l_n}$ *e* $(A3)$. *Então a solução* $u(t,x)$ *satisfaz a*

seguinte estimativa $L^p - L^q$

$$\|\mathbb{S}(t,D)\|_{p,r\to q} \lesssim \begin{cases} \frac{1}{\lambda^2(t)}(1+t)^{1-n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}, & p \geq p^* \\ \frac{1}{\lambda(t)}(1+t)^{-\frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}, & p < p^* \end{cases},$$

para índices duais p *e* q, $p \in (1,2]$ *e com regularidade* $r = n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$. *O valor crítico de* p^* *é escolhido de tal forma que*

$$\lambda(t) \lesssim (1+t)^{1-\frac{n+1}{2}\left(\frac{2}{p^*}-1\right)}.$$

■

Observação 3.3.4. *Quando* $tb(t) \to \infty$ *o valor crítico* p^* *simplifica-se para* $p^* = \frac{2n+2}{n+3}$.

3.4 Teoria do Espalhamento

Nesta seção temos como objetivo mostrar que, a menos de um fator $\lambda(t)$, as soluções da equação de onda com dissipação fraca em relação ao tempo, com algumas hipóteses sobre o coeficiente $b(t)$, se comportam, em determinados espaços, como soluções da equação de onda livre quando o tempo se tornar suficientemente grande.

A idéia principal é definir um operador que leva condições iniciais do problema de onda livre,

$$\begin{cases} \widetilde{u}_{tt} - \Delta\widetilde{u} = 0 \\ \widetilde{u}(0,.) = \widetilde{u}_1 \\ \widetilde{u}_t(0,.) = \widetilde{u}_2 \end{cases},$$

às condições iniciais do problema da onda com dissipação fraca,

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u - b(t)u_t = 0 \\ u(0,.) = u_1 \\ u_t(0,.) = u_2 \end{cases},$$

de tal forma que haja uma certa equivalência assintótica entre as soluções dos problemas supracitados.

O operador que relaciona (u_1, u_2) à $(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2)$ será denominado como operador de onda de Mϕller. Esta denominação está de acordo com a convenção para a teoria do espalhamento para as equações de onda e de Schrödinger. Para mais detales veja [14].

Primeiramente vamos definir o operador de energia para o problema de onda livre da seguinte maneira. Seja $(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2) \in H^1 \times L^2$,

$$\mathbb{E}_0(t, D) : (\langle D\rangle \widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2) \longmapsto (|D|\widetilde{u}(t, .), D_t\widetilde{u}(t, .)) .$$

A matriz $M\mathcal{E}_0(t, 0, \xi)M^{-1}$ é o símbolo do operador $\mathbb{E}_0(t, D)$.

Lembramos que o operador de energia para equação da onda com dissipação foi definido da seguinte forma. Seja $(u_1, u_2) \in H^1 \times L^2$,

$$\mathbb{E}(t, D) : (\langle D\rangle u_1, u_2)^T \longmapsto (|D|u(t, .), D_t u(t, .))^T$$

Vamos relacionar esses dois operadores afim de definirmos o operador de onda de Mϕller. Veja a figura (3.1) e observa que se o limite

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t) \left(\mathbb{E}_0(t, D)\right)^{-1} \mathbb{E}(t, D)$$

existe, então estaremos definindo o operador de onda de Mϕller.

Nosso objetivo então é provar o seguinte teorema.

Teorema 3.4.1. *Suponha* $(A1)$, $(A2)$ *e* $(A3)$. *Então o limite*

$$W_+(D) = \lim_{t\to\infty} \lambda(t) \left(\mathbb{E}_0(t, D)\right)^{-1} \mathbb{E}(t, D)$$

existe pontualmente em $L^2 - L^2$ *e define o operador de Mϕller* W_+. *E mais, o símbolo*

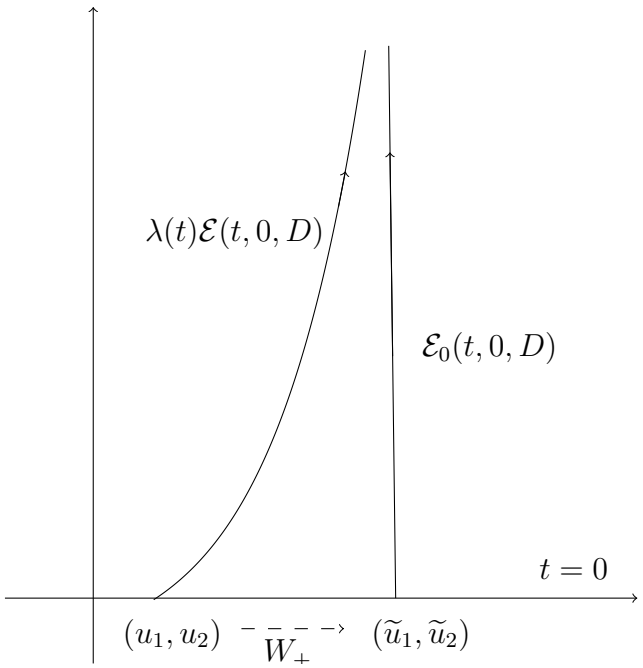


Figura 3.1: Operadores de energia para onda livre e com dissipação.

do operador W_+ *satisfaz*

$$W_+(\xi) = (\mathbb{E}_0(t_\xi,\xi))^{-1}\, M\mathcal{Q}_k(\infty,s,\xi)N_k^{-1}(t_\xi,\xi)M^{-1}\lambda(t_\xi)\mathbb{E}(t_\xi,\xi),$$

para todo $k \geq 1$.

Demonstração: A prova consiste em três etapas:

Etapa 1: Com a notação

$$V_c = \{u \in L^2(\mathbb{R}^2); dist(0, supp\ \hat{u}) \geq c\},$$

podemos construir o subespaço denso $U = \bigcup_{c>0} V_c$ de L^2. Agora o teorema (2.2.15) juntamente com a representação $\mathbb{E}(t,\xi) = \mathcal{E}(t,t_\xi,\xi)\mathbb{E}(t_\xi,\xi)$ implica a existência do limite

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t)\,(\mathbb{E}_0(t,D))^{-1}\,\mathbb{E}(t,D)$$

pontualmente, como um operador de $V_c \to V_c$, para todo $c > 0$. De fato, para t

suficientemente grande, teremos que $|\xi|$ é pequeno, ou seja, estamos trabalhando com frequências pequenas. Então,

$$\begin{aligned}\lambda(t)\left(\mathbb{E}_0(t,\xi)\right)^{-1}\mathbb{E}(t,\xi) &= \lambda(t)\left(\mathbb{E}_0(t,\xi)\right)^{-1}\mathcal{E}(t,t_\xi,\xi)\mathbb{E}(t_\xi,\xi)\\ &= \left(\mathbb{E}_0(t,\xi)\right)^{-1}MN_k(t,\xi)\lambda(t_\xi)\mathcal{E}_0(t,t_\xi,\xi)\mathcal{Q}_k(t,t_\xi,\xi)N_k^{-1}(t,\xi)\mathbb{E}(t_\xi,\xi).\end{aligned}$$

Agora observe que

$$\left(\mathbb{E}_0(t,\xi)\right)^{-1} = M\mathcal{E}_0(0,t,\xi)M^{-1},$$

temos ainda que

$$\mathcal{E}_0(0,t,\xi) = \mathcal{E}_0(0,t_\xi,\xi)\mathcal{E}_0(t_\xi,t,\xi).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{E}_0(t,\xi)\right)^{-1} &= M\mathcal{E}_0(0,t_\xi,\xi)M^{-1}M\mathcal{E}_0(t_\xi,t,\xi)M^{-1}\\ &= \left(\mathbb{E}_0(t,\xi)\right)^{-1}M\mathcal{E}_0(t_\xi,t,\xi)M^{-1}.\end{aligned}$$

Daí que,

$$\lambda(t)\left(\mathbb{E}_0(t,\xi)\right)^{-1}\mathbb{E}(t,\xi) = \left(\mathbb{E}_0(t,\xi)\right)^{-1}M\mathcal{E}_0(t_\xi,t,\xi)N_k(t,\xi)\mathcal{E}_0(t,t_\xi,\xi)\times$$

$$\times\mathcal{Q}_k(t,t_\xi,\xi)N_k^{-1}(t,\xi)M^{-1}\lambda(t_\xi)\mathbb{E}(t_\xi,\xi),$$

onde $\mathcal{Q}_k(t,t_\xi,\xi)\to\mathcal{Q}_k(\infty,t_\xi,\xi)$ quando $t\to\infty$, uniformemente para $|\xi|\geq c$, e

$$\mathcal{E}_0(t_\xi,t,\xi)N_k(t,\xi)\mathcal{E}_0(t,t_\xi,\xi) = I+\mathcal{E}_0(t_\xi,t,\xi)\left(N_k(t,\xi)-I\right)\mathcal{E}_0(t,t_\xi,\xi)\to I$$

Finalmente concluímos que

$$\lim_{t\to\infty}\lambda(t)\left(\mathbb{E}_0(t,\xi)\right)^{-1}\mathbb{E}(t,\xi) = \left(\mathbb{E}_0(t_\xi,\xi)\right)^{-1}M\mathcal{Q}_k(\infty,s,\xi)N_k^{-1}(t_\xi,\xi)M^{-1}\lambda(t_\xi)\mathbb{E}(t_\xi,\xi).$$

Então o limite existe pontualmente em U.

Etapa 2: A estimativa de energia, corolário (3.1.5), implica que $\lambda(t)\left(\mathbb{E}_0(t,D)\right)^{-1}\mathbb{E}(t,D)$ é uniformemente limitado em $L^2 \to L^2$, pois

$$\left\|\lambda(t)\left(\mathbb{E}_0(t,D)\right)^{-1}\mathbb{E}(t,D)\right\|_2 \lesssim \|\left(\mathbb{E}_0(t,D)\right)^{-1}\|_\infty \|\lambda(t)\mathbb{E}(t,D)\|_2 \lesssim 1.$$

Então o teorema de Banach-Steinhaus, veja (3.4.11), garante a existência do limite pontualmente e define W^+.

Etapa 3: Acabamos de definir o operador W^+ em cada subespaço V_c como sendo um operador cujo o símbolo é

$$W^+(\xi) = \left(\mathbb{E}_0(t_\xi,\xi)\right)^{-1} M\mathcal{Q}_k(\infty,s,\xi)N_k^{-1}(t_\xi,\xi)M^{-1}\lambda(t_\xi)\mathbb{E}(t_\xi,\xi),$$

que é independente de c. Então a representação é válida em U, e usando a limitação de W^+, a representação é válida em todo o espaço.

■

Note que para o teorema acima precisamos da hipótese $(A2)_{2k-1}$ para a representação de $W_+(\xi)$ em termos de $\mathcal{Q}_k(t,s,\xi)$. Logo hipótese a $(A2)$ é suficiente para garantir a existência do operador de onda de Mϕller.

Faremos agora uma observação que segue diretamente do teorema de Liouville e nos dá uma expressão para o determinante de $\mathbb{E}(t,\xi)$.

Lema 3.4.2. *A seguinte relação é válida* $\det\mathbb{E}(t,\xi) = \dfrac{1}{\lambda^2(t)}[\xi]$, *onde* $[\xi] = \dfrac{|\xi|}{\langle\xi\rangle}$, *para t suficientemente grande.*

Demonstração: Segue diretamente do ítem (b) da proposição (3.1.3) e pelo teorema de Liouville (3.4.9).

■

Corolário 3.4.3. *A seguinte relação é válida*

$$\det W_+(\xi) = [\xi],$$

e isto implica que o núcleo do operador $W_+(D)$ só contem o vetor nulo, ou seja, $W_+(D)$ é um operador injetivo em L^2.

Demonstração: Segue pelo teorema (3.4.1), pela continuidade da função determinante e pelo (3.4.2) que

$$\begin{aligned}
\det W_+(\xi) &= \det\left[\lim_{t\to\infty}\lambda(t)\left(\mathbb{E}_0(t,\xi)\right)^{-1}\mathbb{E}(t,\xi)\right] \\
&= \lim_{t\to\infty}\det\left[\lambda(t)\left(\mathbb{E}_0(t,\xi)\right)^{-1}\mathbb{E}(t,\xi)\right] \\
&= \lim_{t\to\infty}\lambda^2(t)\det\left(\mathbb{E}_0(t,\xi)\right)^{-1}\det\mathbb{E}(t,\xi) \\
&= \lim_{t\to\infty}\lambda^2(t)\det M\det\mathcal{E}_0(0,t,\xi)\det M^{-1}\det\mathbb{E}(t,\xi) \\
&= \lim_{t\to\infty}\lambda^2(t)\frac{1}{\lambda^2(t)}[\xi] \\
&= [\xi].
\end{aligned}$$

A injetividade segue do fato de que $\det W_+(\xi)\neq 0$, isto é, a matriz $W_+(\xi)$ é inversível.

■

Veja que o terema (3.4.1) pode ser usado para construir para cada dado inicial $(\langle D\rangle u_1, u_2)^T \in L^2$ do problema de Cauchy com dissipação, um dado inicial $(\langle D\rangle\widetilde{u_1},\widetilde{u_2})^T = W_+(D)(\langle D\rangle u_1,u_2)^T$ do problema de Cauchy para ondas livres, de tal forma que a seguinte equivalência assintótica é verdadeira.

Proposição 3.4.4. *A equivalência assintótica é válida*

$$\left\|\mathbb{E}_0(t,D)(\langle D\rangle\widetilde{u_1},\widetilde{u_2})^T-\lambda(t)\mathbb{E}(t,D)(\langle D\rangle u_1,u_2)^T\right\|_2\to 0,\quad t\to\infty.$$

Demonstração: De fato, seja $J=\left\|\mathbb{E}_0(t,D)(\langle D\rangle\widetilde{u_1},\widetilde{u_2})^T-\lambda(t)\mathbb{E}(t,D)(\langle D\rangle u_1,u_2)^T\right\|$. Então,

$$\begin{aligned}
J &= \left\|\left(\mathbb{E}_0(t,D)W_+(D)-\lambda(t)\mathbb{E}(t,D)\right)\left(\langle D\rangle u_1,u_2\right)^T\right\| \\
&= \left\|\mathbb{E}_0(t,D)\left(W_+(D)-\lambda(t)\left(\mathbb{E}_0(t,D)\right)^{-1}\mathbb{E}(t,D)\right)\left(\langle D\rangle u_1,u_2\right)^T\right\|.
\end{aligned}$$

Como $\lambda(t)\left(\mathbb{E}_0(t,D)\right)^{-1}\mathbb{E}(t,D) \to W_+(D)$, quando $t \to \infty$ e $\mathbb{E}_0(t,D)$ é um operador limitado, segue que $J \to 0$ quando $t \to \infty$. Concluindo assim a proposição.

■

Apêndice A: Ferramentas Básicas I

Neste apêndice vamos enunciar alguns resultados básicos que envolvem derivadas e indicaremos referências onde podem ser encontradas as provas dos mesmos. Vamos começar enunciando a fórmula de Leibniz.

Proposição 3.4.5. ***(Regra de Leibniz):*** *Sejam f e g funções com todas as derivadas necessárias definidas. Então,*

$$D_t^n\left(f(t).g(t)\right) = \sum_{k_1+k_2=n} \binom{n}{k} D_t^{k_1} f(t) D_t^{k_2} g(t).$$

Demonstração: Veja [6].

Um outro resultado que foi utilizado nessa dissertação foi a fórmula de Faà di Bruno.

Teorema 3.4.6. ***(Fórmula de Faà di Bruno):*** *Sejam f e g funções com todas as derivadas necessárias definidas. Então,*

$$D_t^n\left[f(g(t))\right] = \sum_{k_1+2k_2+...+nk_n=n} \frac{n!}{k_1!...k_n!} \left(D_t^k f\right)(g(t)) \left(\frac{D_t g(t)}{1!}\right)^{k_1} ... \left(\frac{D_t g(t)}{n!}\right)^{k_n},$$

onde $k = k_1 + ... + k_n$.

Demonstração: Veja [8].

■

Apêndice B: Ferramentas Básicas II

Neste apêndice vamos enunciar e provar alguns resultados básicos usados nessa dissertação. Primeiramente vamos relembrar que qualquer sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u = A(t)u \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

pode ser resolvido em termos da sua solução fundamental $\mathcal{E}(t,s)$, como $u(t) = \mathcal{E}(t,0)u_0$, sabendo que a solução fundamental satisfaz o seguinte PVI,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\mathcal{E}(t,s) = A(t)\mathcal{E}(t,s) \\ \mathcal{E}(s,s) = I \end{cases}. \tag{3.5}$$

Quando a matrix $A(t)$ tem coeficientes constantes, sabemos que a solução fundamental pode ser expressa como a exponencial da matrix A. A pergunta natural que surge é se o mesmo resultado é válido para matrizes com coeficientes variáveis. A resposta é não, porém temos um resultado para esse caso que será dado a seguir. Antes de enunciá-lo vamos provar outro resultado importante que será usado na demonstração do mesmo e também foi usado em outras oportunidades na dissertação.

Proposição 3.4.7. *Seja $r \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Então*

$$\left| \int_s^t r(t_1) \int_s^{t_1} r(t_2) ... \int_s^{t_{k-1}} r(t_k) dt_k ... dt_1 \right| \leq \frac{1}{k!} \left(\int_s^t |r(\tau)| d\tau \right)^k, \tag{3.6}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Faremos indução sobre k. Para $k = 1$ a igualdade segue trivial-

mente. Suponhamos que a desigualdade seja válida para k, isto é,

$$\left|\int_s^t r(t_1)\int_s^{t_1} r(t_2)...\int_s^{t_{k-1}} r(t_k)dt_k...dt_1\right| \leq \frac{1}{k!}\left(\int_s^t |r(\tau)|d\tau\right)^k.$$

Então para $k+1$ temos que,

$$\begin{aligned}\left|\int_s^t r(t_1)\int_s^{t_1} r(t_2)...\int_s^{t_k} r(t_{k+1})dt_{k+1}...dt_1\right| &\leq \int_s^t |r(t_1)|\,\frac{1}{k!}\left(\int_s^{t_1}|r(\tau)|d\tau\right)^k dt_1\\ &= \frac{1}{k!}\int_s^t |r(t_1)|\left(\int_s^{t_1}|r(\tau)|d\tau\right)^k dt_1\\ &= \frac{1}{k!}\frac{1}{(k+1)}\left(\int_s^{t_1}|r(\tau)|d\tau\right)^{k+1},\end{aligned}$$

onde na última passagem usamos a mudança de variáveis para resolvermos a integral. Logo pelo princípio da indução finita segue o resultado.

■

Teorema 3.4.8. *Seja $A(t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{n\times n})$. Então a solução fundamental $\mathcal{E}(t,s)$ de (3.5) é dado pela fórmula de Peano-Baker*

$$\mathcal{E}(t,s) = I + \sum_{k=1}^{\infty}\int_s^t A(t_1)\int_s^{t_1} A(t_2)...\int_s^{t_{k-1}} A(t_k)dt_k...dt_1. \tag{3.7}$$

Demonstração: Antes do mais nada vamos demostrar a convergência da série a acima e da sua derivada. Observe que a proposição (3.4.7) implica que

$$\left|\int_s^t A(t_1)\int_s^{t_1} A(t_2)...\int_s^{t_{k-1}} A(t_k)dt_k...dt_1\right| \leq \frac{1}{k!}\left(\int_s^t |A(\tau)|\,d\tau\right)^k.$$

Como a série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\int_s^t |A(\tau)|\,d\tau\right)^k$ converge uniformemente sobre compactos, por se tratar da exponencial, segue pelo teste M de Weierstrass a convergência uniforme de (3.7) sobre compactos. Para provarmos a convergência da série da derivada, basta agirmos de maneira análoga, lembrando que $A(t) \in L^1_{loc}$. Resta agora mostrar que

(3.7) satisfaz o sistema (3.5). De fato, derivando a série termo a termo, temos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t,s) &= A(t)\sum_{k=1}^{\infty}\int_s^t A(t_2)...\int_s^{t_{k-1}} A(t_k)dt_k...dt_2 \\ &= A(t)\mathcal{E}(t,s) \\ \mathcal{E}(s,s) &= I.\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{E}(t,s)$ é solução de (3.5).

■

O próximo resultado foi utilizado para provar a injetividade do operador de onda de Mϕller.

Teorema 3.4.9. ***(Teorema de Liouville)*** *Seja $A(t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^{n\times n})$. Então a solução fundamental $\mathcal{E}(t,s)$ satisfaz*

$$\det \mathcal{E}(t,s) = \exp\int_s^t tr\, A(\tau)d\tau.$$

Para a construção da representação da solução na zona dissipativa, transformamos o problema de resolver a E.D.O. em uma equação integral, conhecida como equação integral de Volterra. Considerando

$$f(t,p) + \int_0^t k(t,\tau,p)f(\tau,p)d\tau = \psi(t,p), \tag{3.8}$$

com $\psi(0,p)$ dependendo apenas do parâmetro $p \in P \subset \mathbb{R}^n$, a seguinte proposição é válida.

Proposição 3.4.10. *Sejam $\psi \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times P)$, $k \in L^\infty(\mathbb{R}^2_+ \times P)$ e*

$$\int_0^t \|k(.,\tau,p)\|_\infty d\tau \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times P).$$

Então existe uma única solução $f(t,p) \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times P)$ de (3.8).

Demonstração: Observe que provar (3.8) é equivalente mostrar que

$$(I - T)f = \psi(t, p),$$

onde

$$\begin{aligned} T : L^\infty(\mathbb{R}_+ \times P) &\longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}_+^2 \times P) \\ f &\longmapsto \int_0^t k(t, \tau, p) f(\tau, p) d\tau. \end{aligned}$$

Temos que T é linear, está bem definida e é contínua. De fato,

$$\begin{aligned} \|Tf(t,p)\| &= \left\| \int_0^t k(t,\tau,p) f(\tau,p) d\tau \right\| \\ &\leq \int_0^t \|k(t,\tau,p)\| \, \|f(\tau,p)\| \, d\tau \\ &\leq \|f(t,p)\|_\infty \int_0^t \|k(,\tau,p)\|_\infty \, d\tau \\ &\leq M \|f(t,p)\|_\infty < \infty \end{aligned}$$

Sendo assim basta determinar a inversa de $I - T$ para resolvermos a equação. Observemos que a candidata para inversa é $\sum_{j=0}^{\infty} T^j$, uma vez que $(I - T)\sum_{j=0}^{\infty} T^j = I$. Para que $\sum_{j=0}^{\infty} T^j$ esteja bem definida basta que $\|T^j\| \leq k, k > 0$.

Sabemos que $\|T^j\| = \sup_{|f| \leq 1} \|T^j f\|$. Tome f tal que $|f| \leq 1$, então pela proposição (3.4.7)

$$\begin{aligned} \|T^k f\| &= \left\| \int_0^t k(t,t_1,p) \int_0^{t_1} k(t,\tau_2,p) ... \int_0^{t_{k-1}} k(t,t_k,p) f(t_k,p) dt_1 ... dt_k \right\| \\ &\leq \int_0^t \|k(t,t_1,p)\| \int_0^{t_1} \|k(t,t_2,p)\| ... \int_0^{t_{k-1}} \|k(t,t_k,p)\| \, \|f(t_k,p)\| \, dt_1 ... dt_k \\ &\leq \int_0^t \|k(t,t_1,p)\| \int_0^{t_1} \|k(t,t_2,p)\| ... \int_0^{t_{k-1}} \|k(t,t_k,p)\| \, dt_1 ... dt_k \\ &\leq \frac{1}{k!} \left(\int_0^t \|k(t,\tau,p)\| d\tau \right) \end{aligned}$$

$$\leq \quad \exp\left(\int_0^t \|k(t,\tau,p)d\tau\|\right) \leq k.$$

Logo $I - T$ é inversível. A unicidade segue diretamente.

■

O seguinte teorema foi utilizado para mostrar a existência do operador de onda de Mϕller.

Teorema 3.4.11. ***(Banach-Steinhaus)*** *Sejam A e B espaços de Banach e suponha que $\{F_n\}$ seja uma sequência de operadores lineares contínuos de A para B. Então F_n converge pontualmente a um operador linear contínuo $F : A \to B$, isto é, $F_n x$ converge a Fx para todo $x \in A$ se, e somente se,*

- *A sequência das normas dos operadores $\|F_n\|$ é limitada;*
- *A sequência $F_n x$ converge para Fx para todo $x \in M$, onde M é um subconjunto denso de A.*

Demonstração: Veja [3].

■

Agora enunciaremos o lema de Brenner, que foi importante na demostração do teorema (3.2.1).

Lema 3.4.12. ***(Lema de Brenner)*** *Seja P uma função real, suave em uma vizinhança do supp ϕ, com $\phi \in C_0^\infty$. Suponhamos ainda que o posto da matriz hessiana $H_P(\xi) = \left(\dfrac{\partial^2 P}{\partial \xi_i \xi_j}\right)$ seja pelo menos ρ no supp ϕ. Então existe um inteiro M, dependendo da dimensão do espaço, e uma constante $C > 0$, dependendo das derivadas de P no supp ϕ, tal que*

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}\left[e^{itP(\xi)}\phi(\xi)\right]\right\|_\infty \leq C(1+t)^{-\frac{\rho}{2}} \sum_{|\alpha|\leq M} \|D^\alpha \phi\|_1.$$

Demonstração: Veja o artigo [1].

■

Apêndice C: Teorema de Hörmander-Mikhlin

A seguir faremos algumas definições que serão importante para enunciarmos o teorema de Hörmander-Mikhlin. Usamos este teorema na prova das estimativas para o operador de energia.

Definição 3.4.13. *Seja $f \in \mathcal{S}'$. Definimos o seguinte operador*

$$m(D)f = \mathcal{F}^{-1}\left[m(\xi)\mathcal{F}(f)\right],$$

onde $m(\xi)$ é uma distribuição. Chamamos tais distribuições de multiplicadores de Fourier.

Definição 3.4.14. *Denotamos para $p \leq q$*

$$M_p^q = \{m(\xi); m(D) : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)\},$$

chamamos M_p^q de espaço dos multiplicadores.

O espaço M_p^q é um espaço de Banach munido com a respectiva norma do operador. A seguir enunciaremos algumas propriedades para o espaço M_p^q.

Proposição 3.4.15. *1.* $M_2^2(\mathbb{R}^n) = L^\infty(\mathbb{R}^n)$,

2. $M_p^p(\mathbb{R}^n) \subset M_2^2(\mathbb{R}^n)$, *para todo* $p \in [1, \infty]$,

3. $M_p^p(\mathbb{R}^n) = M_q^q(\mathbb{R}^n)$, *para índices duais p e q,*

4.$L^1(\mathbb{R}^n) \subset M_1^\infty(\mathbb{R}^n)$,

5. $M_1^\infty(\mathbb{R}^n) \cap M_2^2(\mathbb{R}^n) \subset M_p^q(\mathbb{R}^n)$, *para índices duais p e q arbitrários.*

A seguir enunciaremos o teorema de Hörmander-Mikhlin.

Teorema 3.4.16. *Suponha que* $m(\xi) \in C^k(\mathbb{R}^n - \{0\})$ *para* $k = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ *e que*

$$\left|D_\xi^\alpha m(\xi)\right| \leq C_\alpha |\xi|^{-|\alpha|}, \forall \ |\alpha| \leq k$$

isto é, $m(\xi) \in \dot{S}_k^0$. *Então* $m(\xi) \in M_p^p(\mathbb{R}^n)$ *para todo* $p \in [1, \infty]$.

Demonstração: Veja [11].

■

Apêndice D: Notações

A seguir fixaremos as notações usadas neste texto. Iniciaremos com alguns símbolos com significado especial:

$\langle\cdot\rangle$	$\langle x\rangle = \sqrt{1+\lvert x\rvert^2}$,
$\lvert\cdot\rvert$	denota o valor absoluto,
$[\xi]$	por definição é $[\xi] = \dfrac{\lvert\xi\rvert}{\langle\xi\rangle}$
$\lceil\cdot\rceil$	denota o menor inteiro maior que um dado número, isto é, $\lceil x\rceil = \min\{m \in \mathbb{Z}; x \leq m\}$,
$\lVert\cdot\rVert$	denota a norma para um vetor ou para uma matriz,
$\lVert\cdot\rVert_p$	norma nos espaços L^p,
$L^p \to L^q$	operadores definidos em L^p chegando em L^q,
$\lVert\cdot\rVert_{p,r\to q}$	norma do operador $W^r_p \to L^q$,
$f \lesssim g$	existe uma constante $c > 0$ tal que $f \leq cg$,
$f \gtrsim g$	existe uma constante $c > 0$ tal que $cf \geq g$,
$f \sim g$	se $f \gtrsim g$ e $f \lesssim g$.

A seguir faremos uma lista dos principais espaços usados nessa dissertação.

$L^p(\mathbb{R}^n)$	espaços L^p, $1 \leq p \leq \infty$,
$L^pL^r(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$	espaço $L^p(\mathbb{R}^n, L^r(\mathbb{R}^m))$,
$L_{p,\alpha(\mathbb{R}^n)}$	espaço potencial de Bessel, $L_{p,\alpha(\mathbb{R}^n)} = \langle D\rangle^{-\alpha}L^p(\mathbb{R}^n)$
$C^k(\mathbb{R}^n)$	espaço das funções k vezes diferenciáveis,
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	espaço de Schwartz das funções com decaimento rápido,

$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$	espaço das distribuições,
$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$	espaço das distribuições temperadas,
$B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$	espaços de Besov,
$M^q_p(\mathbb{R}^n)$	espaço dos multiplicadores que induzem operadores limitados $L^p \to L^q$.

Algumas notações definidas ao longo do texto,

$h(t,\xi)$	$h(t,\xi) = \dfrac{N}{1+t}\phi_{diss,N}(t,\xi) + \lvert\xi\rvert\phi_{hyp,N}(t,\xi)$, com $\phi_{diss,N}(t,\xi)$ e $\phi_{hyp,N}(t,\xi)$ funções cortes das zonas dissipativas e hiperbólica respectivamente,
$U(t,\xi)$	microenergia $U = (h(t,\xi)\hat{u}, D_t\hat{u})$, satisfazendo $D_tU = A(t,\xi)U$,
$\mathcal{E}(t,s,\xi)$	solução fundamental para o sistema $D_t - A(t,\xi)$,
$\mathcal{E}_0(t,s,\xi)$	solução fundamental para a equação de onda livre,
$\mathcal{E}_k(t,s,\xi)$	solução fundamental para o sistema depois de k interações para encontrar a forma normal,
$\lambda(t)$	$\lambda(t) = \exp\left(\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t b(\tau)d\tau\right)$,
$W_+(\xi)$	símbolo correspondente ao operador de onda de Mϕller,
$\mathbb{E}(t,\xi)$	símbolo correspondente ao operador de energia,
$\mathbb{S}(t,\xi)$	símbolo correspondente ao operador solução.

Referências Bibliográficas

[1] Brenner, J. - *On $L^p - L^q$ estimates for wave equation*, Math. Z. 145 251-254. (1975).

[2] Brenner, J., Thomée, V., Wahlbin, L.B. - *Besov Spaces and Applications to Difference Methods for Initial Value Problems*, Springer-Verlag, Berlin (1941).

[3] Brezis, H., - *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Differential Partial Equations*, Springer (2010).

[4] Folland, Gerald B., - *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley and Sons, INC (1999).

[5] Hounie, J., - *Teoria Elementar das distribuições*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro - (1970).

[6] Jordan, Charles - *Calculus of finite differences*, Chelsea publishing company, New York, N.Y. (1950).

[7] Mochizuki, K., Nakazawa, H., - *Energy decay and asymptotic behavior of solutions to the wave equation with linear dissipation*, Publ. Res. Inst. Math Sci. 32 (3) (1996) 401-414.

[8] Roman, Steven - *The formula of Faa di Bruno.*, American Mathematical Monthly vol 87 (805-809), (1980).

[9] Runst, T., Sickel, W., - *Sobolev Spaces of Fractional Order, Nemytskij Operators, and Nonlinear Partial Differential Equations*, Walter de Gruyter, Berlin - New York. (1996).

[10] Sickel, S., and Triebel, H., - *Hölder inequalities and sharp embeddings in function spaces of $B^s_{p,q}$ e $F^s_{p,q}$ type.*, Z. Anal. Anwendungen, 14 (1965), 105-140.

[11] Stein, Elias M. - *Singular Integrals and differentiability properties of functions.*, Princeton, Mathematical Series, Princeton, N.J. (1970).

[12] Treves, François. - *Basic Linar Partial Differential Equations*, Academic Press, New York (1975).

[13] Triebel, H. - *Theory of function spaces.*, Geest e Porting, Leipzig, (1983) and Birkhäuser, Basel, (1983).

[14] Wirth, J. - *Asymptotic properties of solutions to wave equations with time-depend dissepation*, Tese de Doutorado apresentada à Faculty of Mathematics and Computer Science of the Technical University Bergakademie Freiberg - (2005)

[15] Wirth,J. - *Solution representations for a wave equation with weak dissipation*, Math. Methods Appl. Sci. 27 (1), (2004) 101-124.

[16] Wirth, J. - *Wave equation with time-dependent dissipation I. Non-effective dissipation*, J. Differential Equations 222 (2) (2006) 487-514.

[17] Zygmund, A. - *Trigonometric Series II*, Cambridge University Press, Cambridge (1959).