EXAME DE QUALIFICAÇÃO EM ÁLGEBRA LINEAR
(30/07/2014)

1) (1.0) Seja $T : \mathbb{C}^4 \to M_2(\mathbb{C})$ a transformação linear (entre $\mathbb{C}$-espaços vetoriais) definida por

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 + 7x_4 & 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 17x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 13x_4 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Determine uma base $\{v_1, v_2\}$ para o núcleo de T.
b) Determine $v_3, v_4 \in \mathbb{C}^4$ tal que $\{T(v_3), T(v_4)\}$ seja uma base para a imagem de T.

2) (0.5) Seja U um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e seja W um subespaço de U. Prove: se U tem dimensão finita, então

$$\dim_{\mathbb{K}}(U/W) = \dim_{\mathbb{K}} U - \dim_{\mathbb{K}} W.$$

3) (0.5) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear

$$T(x, y, z) = (x - 3y - 2z, y - 4z, -z).$$

Prove que T é um isomorfismo linear e determine T^{-1}.

4) (1.5) Considere o operador linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ definido por

$$T(a + bx + cx^2) = (a + 2b) + (2a + b)x,$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$.
a) Calcule a matriz $[T]_C$, onde $C = \{1, x, x^2\}$ é a base canônica de $P_2(\mathbb{R})$.
b) Determine o polinômio característico de T.
c) Determine os autovalores de T.
d) Determine uma base B de $P_2(\mathbb{R})$ formada por autovetores e também $[T]_B$.
e) Determine uma matriz P tal que

$$[T]_B = P^{-1}[T]_C P.$$

5) (1.0) Seja $T : V \to V$ um operador linear, onde V é um $\mathbb{C}$-espaço vetorial de dimensão 4. Suponha que B é uma base de V tal que

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Sabendo que $m_T(x)$ não tem grau 3, encontre $m_T(x)$.
b) Determine a forma de Jordan de T.

c) Se $G : V \to V$ é operador linear tal que $p_G(x) = p_T(x)$, encontre as 4 matrizes (não semelhantes) candidatas a forma de Jordan de G.

6) (1.0) Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial com base infinita enumerável

$$B = \{v_1, v_2, v_3, \ldots\}.$$

Defina $B' = \{f_1, f_2, f_3, \ldots\} \subset V^*$ por

$$f_i(v_j) = \delta_{ij}$$

para todo i, j. O conjunto $\{f_2, f_3, \ldots\}$ é uma base para o anulador de $\{v_1\}$? Justifique.

7) (1.0) Seja $V = P_1(\mathbb{R})$ e sejam $f_1, f_2 \in V^*$ definidos por

$$f_1(p(x)) = \int_0^1 p(x)dx \quad \text{e} \quad f_2(p(x)) = p(2).$$

a) Mostre que $B^* = \{f_1, f_2\}$ é uma base de V^*.
b) Encontre a base B de V cuja base dual é B^*.

8) (1.0) Considere no $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ o produto interno canônico. Seja W o conjunto solução do sistema

$$\begin{cases} x + y + z + w &= 0 \\ z - w &= 0 \end{cases}$$

a) Encontre uma base ortonormal para W.
b) Encontre o elemento de W mais próximo de $(0, 0, 1, 0)$.

9) (1.0) Considere no $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ o produto interno canônico. Defina o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por

$$T(x, y) = (x + 2y, 2x + y).$$

a) Mostre que T é um operador autoadjunto.
b) Se C é a base canônica de $\mathbb{R}^2$, encontre uma matriz invertível $P \in M_2(\mathbb{R})$ tal que

$$P^t \cdot [T]_C \cdot P$$

seja diagonal.

10) (0.5) Exiba dois operadores T_1 e T_2 normais, cuja soma $T_1 + T_2$ não seja normal.

11) (1.0) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno. Mostre que se $f \in V^*$, então existe único $v \in V$ tal que

$$f(u) = \langle u, v \rangle, \quad \text{para todo } u \in V.$$

NOTAÇÕES

- $\mathbb{K}$: corpo.
- $M_n(\mathbb{K})$: matrizes $n \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$.
- U/W : Espaço quociente de U por W.
- $P_n(\mathbb{K})$: conjunto dos polinômios de grau $\leq n$ com coeficientes em $\mathbb{K}$.
- $[T]_B$: matriz do operador linear T com relação a base B.
- $m_T(x)$: polinômio minimal do operador T.
- $p_T(x)$: polinômio característico do operador T.
- V^* : espaço dual de V.
- P^t : matriz transposta de P.