EXAME DE QUALIFICAÇÃO DE ANÁLISE FUNCIONAL
29/02/2016

Nome:_____

Sejam E um espaço de Banach com dual E'. Considere as topologia fraca $\sigma(E, E')$ e fraca-estreala $\sigma(E', E)$ em E e E', respectivamente.

1. Determine se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas, justificando as que forem verdadeira e dando contraexemplo para as falsas.
   (a) Se E é um espaço normado separável então E' é separável.
   (b) Se (x_n) é uma sequência em um espaço de Hilbert H tal que $x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(H, H')$ e $\|x_n\| \to \|x\|$, então $x_n \to x$ na topologia forte.
   (c) A esfera $S = \{x \in E; \|x\| = 1\}$ é um subconjunto fechado de E na topologia fraca $\sigma(E, E')$.
   (d) Se $A \subset E$ é um subconjunto que é compacto na topologia fraca $\sigma(E, E')$, então A é limitado.

2. Seja E um espaço normado separável de dimensão infinita.
   (a) Mostre que existe uma sequência (M_n) de subespaços vetoriais de dimensão finita de E tal que $M_n \subset M_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ é denso em E.
   (b) Prove que existe uma sequência de funcionais lineares $(\varphi_n) \subset E'$ tal que $\|\varphi_n\| = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, e $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0$ $\forall x \in E$.

3. Seja $T : E \to E'$ um operador linear satisfazendo
$$\langle Tx, y\rangle = \langle Ty, x\rangle, \quad \forall x, y \in E.$$
Prove que T é limitado.

4. Seja H um espaço de Hilbert com produto interno $\langle \cdot, \cdot, \rangle$. Se M é subconjunto convexo não vazio fechado de H e $x \in H \setminus M$, mostre que existe um **único** $y \in M$ tal que
$$\delta = \inf_{z\in M} \|x - z\| = \|y - z\|.$$

5. Seja $T : l^p(\mathbb{N}) \to l^p(\mathbb{N})$, $1 < p < \infty$, definido por
$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_n}{n}, \ldots\right).$$
   (a) Calcule $\|T\|$ e mostre que T é compacto.
   (b) Encontre o espectro de T.

BOA PROVA