Exame de Qualificação de Análise
Doutorado — DM-UFSCar — agosto/2002

Obs. Resolva apenas seis questões entre as oito propostas. Assinale, no início de sua folha de respostas, quais as questões escolhidas.

Questão 1

- Seja B um espaço de Banach sobre os reais, e suponha que $u, v \in B$ com $\{u, v\}$ um subconjunto linearmente independente. Mostre que existe um elemento T do dual de B tal que $T(u) = 1$ e $T(v) = 0$.

- Mostre que o operador identidade

$$Id : (C[0,1], \|\cdot\|_1) \to (C[0,1], \|\cdot\|_\infty), \quad \psi \xrightarrow{Id} \psi,$$

é fechado mas não é contínuo. Use esses fatos para concluir que o espaço $(C[0,1], \|\cdot\|_1)$ não é completo (notação: $\|\psi\|_1 = \int_0^1 |\psi(t)|dt$ e $\|\cdot\|_\infty$ é a norma da convergência uniforme).

Questão 2

Denote por $B(X, Y)$ o espaço normado usual de operadores lineares contínuos entre os espaços normados X e Y. Mostre que se Y for completo, então $B(X, Y)$ também é completo com a norma usual.

Questão 3

- Enuncie a Desigualdade de Bessel num espaço de Hilbert $\mathcal{G}$ (não necessariamente separável).

- Use a Desigualdade de Bessel para demonstrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x) e^{-i2\pi nx} dx = 0, \quad \forall f \in L^2[0,1].$$

(Esta última afirmação é conhecida como o Lema de Riemann-Lebesgue para $L^2[0,1]$.)

Questão 4

- Seja $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Mostre que

$$(T_K f)(t) = \int_a^b K(t,s) f(s) ds,$$

define um operador compacto em $L^2[a,b]$.

- Discuta quando um operador de projeção ortogonal num espaço de Hilbert é compacto.

Questão 5

- Para quais valores de p temos que o espaço $C_c(\mathbb{R}^k)$ não é denso em $L^p(\mathbb{R}^k)$? Demonstre a sua afirmação.
- Todo subconjunto compacto não-vazio de $\mathbb{R}^k$ é suporte de uma medida não-negativa de Borel? (Neste caso define-se: suporte(μ) = $\{x$; para todo aberto U contendo x temos que $\mu(U) \neq 0\}$).

Questão 6

- Caracterize unicamente a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^k$.
- Dê condições necessárias, e suficientes, sobre uma função real f para que exista $g \in L^1(\mathbb{R})$ e uma constante C tal que $f(x) = \int_0^x g(t)dt + C$.

Questão 7

- Seja K um subconjunto compacto não-vazio de $\mathbb{R}^k$, e considere $C(K, \mathbb{R})$ (= o espaço de Banach das funções contínuas definidas em K a valores reais com a norma do máximo). Todo funcional linear real não-negativo em $C(K, \mathbb{R})$ é contínuo?
- Quando uma medida μ de Borel é da forma $\mu(E) = \int_E f(x)dx$, onde $f \in L^1(\mathbb{R}, dx)$ e dx é a medida de Lebesgue?

Questão 8

- Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^k)$; mostre que a transformada de Fourier

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \int e^{-ix.\xi} f(x)dx$$

  define uma função em $C_0(\mathbb{R}^k)$ (=espaço das funções contínuas que se anulam no infinito); aqui $x.y$ denota o produto interno usual.

- Mostre que o produto de convolução $f * g$ dado por $f * g(x) = \int f(x-y)g(y)dy$ define um operador $T_g f$ em $L^p(\mathbb{R}^k)$, para cada $g \in L^1(\mathbb{R}^k)$ fixado.