Exame de Qualificação de Análise - Doutorado
DM-UFSCar — agosto/2005

-) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ denota um espaço X, uma σ-álgebra $\mathcal{A}$ em X e uma medida μ positiva sobre $\mathcal{A}$. Se nada for comentado, no caso de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ fica implícito que as afirmações se referem aos borelianos.
-) resolva as questões M1–M3 e apenas três entre as F1–F4.

Questão M1 (a) Se $\mathcal{F}$ é uma coleção qualquer de subconjuntos de X, mostre que

$$\mathcal{E} := \bigcap_{\mathcal{F} \subset \mathcal{A}} \mathcal{A},$$

em que $\mathcal{A}$ é σ-álgebra, é também uma σ-álgebra.

(b) Sejam f contínua em $Q = \{(x,t) : 0 \leq x, t \leq 1\}$ e $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ em $L^1_\mu([0,1])$ e de forma que $|f(x,t)| \leq |g(x)|$ para todos t, x. Mostre que a função $h(t) = \int_{[0,1]} f(x,t)\, d\mu(x)$ é contínua.

Questão M2 (a) Se $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência de medidas de probabilidade em $(X, \mathcal{A})$, exiba uma medida de probabilidade μ de forma que $\mu_n \ll \mu, \forall n$.

(b) Se μ, λ são medidas $\sigma-$finitas em $(X, \mathcal{A})$, $\lambda \ll \mu$ e $f = \frac{d\lambda}{d\mu}$, mostre que

$$\int_X g\, d\lambda = \int_X gf\, d\mu, \quad \forall g \in L^1_\lambda(X).$$

Questão M3 Sejam X um espaço topológico Hausdorff localmente compacto e $(\mathcal{A}, \mu)$ como no Teorema de Representação de Riesz. Se X for também σ-compacto, mostre que

(a) para $E \in \mathcal{A}$ e $\varepsilon > 0$ dados, existem um aberto A e um fechado F com $F \subset E \subset A$ e $\mu(A \setminus F) < \varepsilon$.

(b) μ é uma medida regular.

Questão F1 Seja X um espaço normado real.

i) Defina a noção de funcional sublinear $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$.

ii) Mostre que $p : \ell^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$p(x) = \limsup_{n\to\infty} x_n, \qquad x = (x_n),$$

é um funcional sublinear.

iii) Dê um exemplo de um funcional sublinear $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que não seja linear.

iv) Dê um exemplo de um funcional sublinear $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que não seja uma seminorma.

Questão F2 Seja X um espaço de Banach, $Y \subset X$ um subespaço fechado. Denote com $\dot{x}$ a classe de x no espaço quociente $Z = X/Y$, ou seja, o conjunto $x + Y$. Defina a seguinte norma em Z:

$$\|\dot{x}\|_Z = \inf_{y\in Y} \|x + y\|_X.$$

Mostre que

i) Z é um espaço de Banach.

ii) A aplicação $\Pi : X \longrightarrow Z$ definida por $\Pi x = \dot{x}$ é linear, limitada, aberta e tem norma 1.

Questão F3 Seja $\{e_j\}$ um sistema ortonormal infinito de um espaço de Hilbert H, $\delta_j > 0$ uma seqüência de números positivos e seja Q o conjunto dos vetores $x \in H$ que pode ser escrito da forma

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_j \quad \text{onde os escalares satisfazem } |c_j| \le \delta_j.$$

Mostre que Q é compacto se e somente se $\sum_j \delta_j^2 < \infty$.

Questão F4 Fixe $1 \le p \le \infty$ e seja q o expoente conjugado: $(1/p) + (1/q) = 1$. Seja $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável com a propriedade de que $gf \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Mostre que $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. *Sugestão*: Defina $g_n(x) = g(x)$ caso $|x| \le n$ e $|g(x)| \le n$, e $g_n(x) = 0$ no caso contrário, $n = 1, 2, \ldots$. Então $g_n \in L^q \simeq (L^p)^*$. Aplique uma conseqüência do teorema de Banach-Steinhaus aos funcionais Λ_n

$$L^p(\mathbb{R}^n) \ni f \mapsto \Lambda_n f = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g_n(x)\, dx.$$