EXAME DE QUALIFICAÇÃO DE CÁLCULO AVANÇADO

ADILSON E. PRESOTO & SÁVIO RODRIGUES

04/03/2015

Nome:_____

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-x^{-2}}$ quando $x \neq 0$ e $f(0) = 0$.
   (a) Mostre que esta função é diferenciável em 0 e calcule esta derivada.
   (b) Mostre que a derivada de ordem k, $f^{(k)}(x)$, é diferenciável em $x = 0$.

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se} \quad (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = 0 \end{cases}$$

   Mostre que $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(t) = f(ta, tb)$ para algum $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ é uma função diferenciável. Mostre que, no entanto, $f(x, y)$ não é diferenciável. A função f é contínua em (0,0)?

3. (a) Enuncie as hipóteses do teorema da função inversa.
   (b) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $a \in \mathbb{R}^n$ satisfaz $f(a) = 0$ e tal qual que f satisfaz as hipóteses do teorema da função inversa nas vizinhanças V e W nas quais $a \in V$ e $0 \in W$. Mostre que se exite uma vizinhanças $V' \subset V$, e $\tilde{V} \subset V$, com $a \in V'$ e $a \in \tilde{V}$, tal que para todo $c \in V'$ e para todo $x_0 \in \tilde{V}$ a sequência x_n definida por

$$x_{n+1} = x_n - (Df(c))^{-1} f(x_n)$$

   converge para a. Para tanto, sugere-se usar o teorema do ponto fixo no qual $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é definido por $T(x) = x - (Df(c))^{-1} f(x)$.
   Sugestão: Como primeiro passo, mostre que existe uma vizinhança de a tal que $|DT(x)| \leq k < 1$ para todo x nesta vizinhança. Como segundo passo, você pode estabelecer uma desigualdade para $|T(x) - T(a)|$ e usar que $T(a) = a$.

4. Seja $P \subset \mathbb{R}^n$ um paralelepípedo (produto cartesiano de intervalos compactos) e seja $f : P \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que existe um $x_0 \in P$ tal que

$$\int_P f(x)\, dx = f(x_0) \cdot Vol(P).$$

   Escolha e resolva **uma** das duas questões abaixo.

5. Seja $g : U \to Q$ um difeomorfismo no qual $U \subset \mathbb{R}^n$, $Q \subset \mathbb{R}^n$ e Q é um cubo n dimensional cuja aresta tem comprimento 2. Suponha que g seja da forma $g = (g_1(x_1), g_2(x_1, x_2), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_n))$; isto é, g_j depende das variáveis $x_1, \ldots, x_j$. Suponha também que $\frac{\partial g_j(x)}{\partial x_j} > 0$ em U. Encontre o valor de

$$\int_U (g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_n(x)) \cdot \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial g_n(x)}{\partial x_n}\, dx.$$

6. (a) Prove que o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^4$ é $\pi^2/2$. Para fazer isto, integre a função característica $\chi_{B_4}(x)$ em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ no qual $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ denota a bola de dimensão n.

   (b) Prossiga para dimensões maiores provando que $\mathrm{Vol}(B_n) = 2\pi \mathrm{Vol}(B_{n-2})/n$, para todo n par.
   Sugestão: decomponha $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$ e integre primeiramente em $\mathbb{R}^{n-2}$.

7. Seja ω uma $(k-1)$-forma exata em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Se $c : [0,1]^k \to U$ é uma k-cadeia em U mostre que
$$\int_{\partial c} \omega = 0.$$

Boa Prova