EXAME DE QUALIFICAÇÃO
FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA

ADILSON E. PRESOTO & RAFAEL A. DOS SANTOS KAPP

06/03/2015

Nome:_____

1. Sejam $u, v : U \to \mathbb{R}$ funções harmônicas, onde U é um aberto convexo. Suponha que
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$
Prove que (u, v) é o gradiente de uma função harmônica $h : U \to \mathbb{R}$, isto é, $(u, v) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}\right)$.

2. Suponha que f seja inteira e $|f'(z)| \leq |z|$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Mostre que $f(z) = a + bz^2$ com $|b| \leq \frac{1}{2}$.

3. Seja f holomorfa numa vizinhança de $D[P, r]$. Se $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \partial D(P, r)$, aplique o teorema de Rouché para provar que $|f(z)| \leq M$, para todo $z \in D(P, r)$.

4. (a) Enuncie o Teorema de Runge.
   (b) Mostre que a função $f(z) = \frac{1}{z-a}$ não é aproximada uniformemente por uma sequência de polinômio em anéis em torno de a, $A(a; R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C} \;\; 0 < R_1 \leq |z - a| \leq R_2 \leq \infty\}$.
   (c) Mostre que se $|b-a| < R_1$ então $g(z) = \frac{1}{z-b}$ é aproximada uniformemente em $A(a; R_1, R_2)$ por funções racionais cujo único pólo é a.
   (d) Por que o exemplo do item (b) não contradiz o Teorema de Runge?

5. Suponha que f e g sejam holomorfas numa vizinhança disco $D[P, r]$. Se g tem zeros simples em $P_1, \cdots, P_k \in D[P, r]$. Calcule $\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{g(z)} dz$ em função dos valores de f e g' nestes pontos.

Escolha e resolva **uma** das duas questões abaixo.

6. Seja $\mathcal{F}$ a família das funções holomorfas em $\mathbb{C}$ que
   - têm partes reais estritamente positivas;
   - são iguais a 1 em $z = 0$.

   Mostre que $\mathcal{F}$ é uma família normal[1].

7. Suponha que $\{f_n\}$ seja uma família uniformemente limitada de funções holomorfas no domínio Ω. Seja $\{z_k\}$ uma sequência em Ω que converge para $z_0 \in \Omega$. Suponha que existem $\lim_{n\to\infty} f_n(z_k)$ para $k = 1, 2, \cdots$. Prove que $\{f_n\}$ converge uniformemente em compactos de Ω.

BOA PROVA

[1] Uma família $\mathcal{F}$ de funções holomorfas com domínio comum U é normal se toda sequência em $\mathcal{F}$ admite uma subsequência que converge uniformemente sobre compactos de U.