UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Espectro de Operadores de Schrödinger Não-Primitivos

Marcus Vinicius de Araujo Lima

São Carlos - SP
dezembro de 2001

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Espectro de Operadores de Schrödinger Não-Primitivos

Marcus Vinicius de Araujo Lima

Tese apresentada ao PPG-M da UFSCar como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática

São Carlos - SP
dezembro - 2001

Orientador

Prof. Dr. César Rogério de Oliveira

Sumário

Resumo **vii**

Abstract **ix**

1 Introdução **1**
1.1 Introdução e Resultados 1
1.2 Pequena Nota Histórica 11

2 Espectro Singular Contínuo **13**
2.1 Espectro Singular 13
2.2 Ausência de Espectro Pontual 18
2.3 Medida Nula para o Espectro 24

3 Um Resultado Uniforme **27**
3.1 Exemplo de Resultado Uniforme 27
3.2 Comentários Finais e Problemas Abertos 35

Resumo

Neste trabalho introduzimos uma classe de substituições não-primitivas para a qual os operadores de Schrödinger associados possuem espectro singular contínuo puro, com medida de Lebesgue zero. Para algumas substituições nesta classe apresentamos condições que garantem a ocorrência deste tipo espectral para conjuntos genéricos e de medida total no hull, além de um exemplo uniforme.

Abstract

We introduce a class of nonprimitive substitutions whose associated Schrödinger operators present purely singular continuous spectrum with null Lebesgue measure. For this class we give conditions for the occurence of this spectral type either for potentials in generic or full (invariant) measure sets in its hull, as well as one example with uniform singular continuous spectrum.

Capítulo 1

Introdução

1.1 Introdução e Resultados

Operadores de Schrödinger discretos, também denominados operadores *tight binding*, com potenciais peneperiódicos [1] (veja Definição 1.2) assumindo um número finito de valores, são modelos quânticos adequados para o estudo dos quase-cristais [1] — estruturas que figuram entre as periódicas (cristais perfeitos) e as aleatórias (materiais amorfos). No caso unidimensional estes operadores tomam a forma

$$(H_\omega u)_n = u_{n+1} + u_{n-1} + \omega_n u_n \tag{1.1}$$

em que $\omega = (\omega_n) \in l^\infty(\mathbb{Z})$ (potencial) assume valores reais e $u = (u_n) \in l^2(\mathbb{Z})$; desta forma, H_ω é um operador auto-adjunto e limitado em $l^2(\mathbb{Z})$. Este modelo descreve o movimento (quântico), de um elétron em uma rede unidimensional, cujos átomos estão fixos na rede e distribuídos conforme a seqüência ω. Supõe-se ainda que não há interação entres os diversos elétrons eventualmente presentes. Muitas vezes em Física usa-se o termo "desordem determinística" para se referir a seqüências peneperiódicas, e uma forma conveniente de construí-las é através de substituições (veja adiante).

Uma questão de interesse nesses modelos é estudar como as propriedades de transporte dependem da seqüência escolhida como potencial, e passos importantes no estudo desses modelos são a determinação do espectro do

[1] No sentido de *almost periodic* em inglês, para distinguir de quase-periódico (*quasi-periodic*). Termo sugerido pelo Prof. Dr. Giancarlo Pellegrino. Soube mais tarde que este termo fora introduzido pelo Prof. Dr. João Barata em sua Tese de Livre-Docência. Outras palavras que apresentam o mesmo prefixo são *península, penúltimo e penumbra.*

operador (que fisicamente representa os valores de energia que o sistema pode assumir) e do tipo espectral associado (que tem implicações diretas sobre a dinâmica do sistema).

Há duas classes de potenciais peneperiódicos que assumem um número finito de valores que concentram a maior parte dos principais resultados espectrais obtidos até o momento:

(a) alguns potenciais gerados por substituições primitivas [3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 14, 15, 20, 21, 36, 37]

(b) potenciais Sturmianos [6, 12] e Quase-Sturmianos [13];

as quais apresentam forte tendência a ter espectro singular contínuo puro, com medida de Lebesgue zero.

Pelo que sabemos, não há resultados deste tipo para potenciais obtidos através de substituições não-primitivas. Neste trabalho apresentaremos uma classe de substituições não-primitivas e, adaptando algumas técnicas do caso primitivo, mostraremos que os operadores de Schrödinger associados possuem características espectrais semelhantes àquelas das classes (a) e (b) acima.

Antes de enunciarmos os principais resultados deste trabalho introduziremos alguns conceitos acerca de substituições; referências relevantes são [1, 33]. Como trabalharemos com potenciais assumindo apenas dois valores, vamos restringir nossa discussão a *substituições* $\xi : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^*$ em que $\mathcal{A} = \{a, b\}$ e $\mathcal{A}^*$ é o conjunto de *fatores* em $\mathcal{A}$, ou seja, palavras finitas com letras em $\mathcal{A}$. A substituição ξ possui extensões naturais, por concatenação, a $\mathcal{A}^*$ e $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ (conjunto de todas as palavras infinitas à direita com letras em $\mathcal{A}$); por exemplo, $\xi(ab) = \xi(a)\xi(b)$. Denotamos por ξ^k a $k-$ésima iterada de ξ e definimos $\xi^0(a) = a$, para todo $a \in \mathcal{A}$. Vejamos alguns exemplos:

a) Fibonacci:

$$\xi_f(a) = ab \qquad \xi_f(b) = a$$

$$\xi_f^2(a) = \xi_f(ab) = aba \qquad \xi_f^2(b) = \xi_f(a) = ab;$$

b) Duplicação de Período:

$$\xi_{dp}(a) = ab \qquad \xi_{dp}(b) = aa$$

$$\xi_{dp}^2(a) = \xi_{dp}(ab) = abaa \qquad \xi_{dp}^2(b) = \xi_{dp}(aa) = abab.$$

c) Thue-Morse:

$$\xi_{tm}(a) = ab \qquad \xi_{tm}(b) = ba$$

$$\xi_{tm}^2(a) = \xi_{tm}(ab) = abba \qquad \xi_{tm}^2(b) = \xi_{tm}(ba) = baab;$$

Seja $M = M(\xi)$ a *matriz* 2×2 *de substituição* de ξ, cujas entradas M_{ab} são dadas pelo número de ocorrências da letra a em $\xi(b)$, para $a, b \in \mathcal{A}$. Dizemos que uma matriz M é *primitiva* se todas as entradas de alguma potência positiva $M^k = M(\xi^k)$ são estritamente positivas. Uma substituição ξ é *primitiva* se sua matriz de substituição é primitiva ou, equivalentemente, se existe $k \in \mathbb{N}$ de forma que ambos $\xi^k(a)$ e $\xi^k(b)$ contém todas as letras de $\mathcal{A}$. As substituições mencionadas acima são primitivas, como verificado em seguida:

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_f^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{dp} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_{dp}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_{tm} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Consideremos em $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ ($\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$) a topologia da convergência pontual dada pela métrica

$$d(u, v) = \sum_n \frac{D(u_n, v_n)}{2^{|n|}}, \quad u = (u_n), v = (v_n), \quad n \in \mathbb{N} \ \ (n \in \mathbb{Z}),$$

sendo D a métrica discreta em $\mathcal{A}$. Com esta métrica, $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ ($\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$) torna-se um espaço métrico compacto. Observemos que para a métrica d, duas seqüências em $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ estão próximas se elas coincidem nas posições centrais, ou seja, para índices num intervalo em $\mathbb{Z}$ que contém o zero. De modo análogo duas seqüências em $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ estão próximas se elas coincidem nas posições iniciais, ou seja, para índices num intervalo em $\mathbb{N}$ que contém o zero.

Uma *seqüência de substituição* é um ponto fixo $\bar{u}$ de ξ em $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, ou seja, $\xi(\bar{u}) = \bar{u}$. Duas condições simples garantem a existência de um ponto fixo para ξ ([33], Proposição V.1): $\xi(a)$ começa com a e $|\xi^k(a)| \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, em que $|\xi^k(a)|$ denota o comprimento de $\xi^k(a)$. Normalmente escreve-se $\xi^\infty(a) = \bar{u}$. Nosso objetivo é usar essas seqüências, com valores numéricos, para construir potenciais nos Operadores de Schrödinger (1.1).

Dada uma seqüência de substituição $\bar{u}$, consideremos as seqüências periódicas em $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$

$$u_n = \cdots \xi^n(a)\xi^n(a) \cdot \xi^n(a)\xi^n(a) \cdots ,$$

em que a primeira posição à esquerda do ponto indica o termo de índice zero. Escolhendo adequadamente uma seqüência $n_k \to \infty$, de modo que as iteradas $\xi^{n_k}(a)$ sempre terminem com a mesma letra, temos que (u_{n_k}) é uma seqüência de Cauchy pois

$$d(u_{n_j}, u_{n_k}) \leq \sum_{l \geq \min\{|\xi^{n_k}(a)|, |\xi^{n_j}(a)|\}} \frac{1}{2^{|l|}} \to 0, \quad j, k \to \infty$$

e o seguinte limite está bem definido

$$u = \lim_{k \to \infty} u_{n_k}$$

em $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. A seqüência u é denominada *seqüência de substituição bilateral* gerada por ξ. Observamos que u pode não ser ponto fixo de ξ em $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Como exemplo, definimos a seqüência de substituição bilateral gerada pela duplicação de período por

$$u_{dp} = \lim_{k \to \infty} u_{n_k}, \qquad u_{n_k} = \cdots \xi_{dp}^{2k-1}(a)\xi_{dp}^{2k-1}(a) \cdot \xi_{dp}^{2k-1}(a)\xi_{dp}^{2k-1}(a) \cdots .$$

Passemos agora à construção de um sistema dinâmico a partir de uma seqüência de substituição bilateral u. Introduziremos alguns conceitos sobre sistemas dinâmicos e teoria ergódica. Referências gerais são [32, 33, 38].

Seja $T : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ o *shift* à esquerda $(Tu)_n = u_{n+1}$; o *hull* de u em $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ é definido por

$$\Omega = \Omega(u) = \overline{\{T^n(u),\ n \in \mathbb{Z}\}}. \tag{1.2}$$

Definição 1.1 *Dizemos que uma seqüência u em $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ é recorrente se existem seqüências de inteiros $(n_k) \to \infty$ e $(m_j) \to -\infty$, satisfazendo*

$$T^{n_k}u \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} u \quad \text{e} \quad T^{m_j}u \overset{j \to \infty}{\longrightarrow} u.$$

O hull associado a uma seqüência recorrente u é um subconjunto compacto e $T-$invariante em $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, com $T\Omega(u) = \Omega(u)$ ([33], Capítulo V), de modo que o sistema dinâmico $(\Omega(u), T)$ está bem definido. O sistema dinâmico $(\Omega(u), T)$ é *minimal* se $\Omega(\omega) = \Omega(u)$ para todo $\omega \in \Omega(u)$; isto é equivalente a que todo $\omega \in \Omega(u)$ possui órbita $\{T^n(u),\ n \in \mathbb{Z}\}$ densa em $\Omega(u)$.

Definição 1.2 *Uma seqüência $\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ é peneperiódica se para todo $\epsilon > 0$ existem uma constante $K_\epsilon > 0$ e uma seqüência de inteiros n_k de forma que*

$$0 < n_{k+1} - n_k \leq K_\epsilon \quad \text{e} \quad d(T^{n_k}\omega, \omega) < \epsilon, \, \forall \, n_k.$$

Observemos que uma seqüência periódica, com período p, satisfaz a definição acima para $(n_k = kp)_{k\in\mathbb{Z}}$, $K = p$ e, neste caso, $d(T^{n_k}\omega, \omega) = 0$, $\forall \, n_k$. O resultado seguinte é algumas vezes usado como definição de seqüência peneperiódica ([32], Seção 4.1; [33], Capítulo IV).

Proposição 1.3 *$u \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ é peneperiódica se, e somente se, todo fator de u ocorre em saltos limitados.*

Demonstração: Suponhamos que u é peneperiódica. Dado um fator B em u, existe $N \in \mathbb{N}$ de forma que $B \subset u_{-N} \cdots u_N$. Seja $\epsilon = \sum_{i>|N|} \frac{1}{2^{|i|}}$. Então B ocorre em u em saltos limitados por $K(\epsilon)$. Reciprocamente, dado $\epsilon > 0$, exite $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i>N} \frac{1}{2^{|i|}} < \epsilon$. Em particular, $u_{-N} \cdots u_N$ ocorre em salto limitados, digamos por $K(N)$. A seqüência (n_k) dada por

$$n_k = k(2N+1) + \sum_{l=1}^{k-1} C_l, 1 \leq C_l \leq K(N), \forall l \in \mathbb{N} \text{ e } K(\epsilon) = (2N+1) + K(N)$$

satisfazem a Definição 1.2. □

Temos também que toda seqüência peneperiódica é recorrente (basta tomarmos uma seqüência $\epsilon_n \to 0$ na Definição 1.2). Assumiremos daqui por diante que u é recorrente ao escrevermos $\Omega(u)$. Uma propriedade importante das seqüências peneperiódicas é dada pela proposição que segue.

Proposição 1.4 (Gottschalk [32, 33]) *$(\Omega(u), T)$ é minimal se, e somente se, u é peneperiódica.*

Uma medida de probabilidade μ definida sobre a $\sigma-$álgebra de Borel $\mathcal{B}$ em $\Omega(u)$ é dita *invariante* se $\mu(T(B)) = \mu(B)$, para todo $B \in \mathcal{B}$. Como $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ é compacto e T é contínuo, existe uma medida de probabilidade μ, invariante em $\mathcal{B}$ (Teorema de Krilov-Bogolioubov; [38], Seção 6.2). Quando necessário, explicitaremos a medida μ na representação do sistema dinâmico $(\Omega(u), T)$, escrevendo $(\Omega(u), T, \mu)$. Dizemos que $(\Omega(u), T, \mu)$ é *ergódico* (ou μ é *ergódica*)

se todo conjunto $T-$invariante tem medida zero ou um; *unicamente ergódico* se existe uma única medida invariante μ e *estritamente ergódico* se é minimal e unicamente ergódico.

Um ponto que justifica o grande interesse no caso de potenciais obtidos de substituições primitivas é o fato que para essas substituições o sistema dinâmico (Ω, T) é estritamente ergódico ([33], Capítulo V). Para demonstrar este fato, mostra-se que todo fator em uma seqüência de substituição bilateral associada a uma substituição primitiva ocorre com freqüência positiva, que é uma conseqüência do importante Teorema de Perron-Frobenius ([33], Seção V.3; lembremos que uma substituição é primitiva se sua matriz de substituição é primitiva).

Nossa motivação inicial foi apresentar casos de substituições não-primitivas (por exemplo, $\zeta(a) = aabaa; \zeta(b) = b$ [16]) para as quais os sistemas dinâmicos associados fossem estritamente ergódicos, e obter resultados sobre o espectro dos operadores de Schrödinger correspondentes.

Dada uma função real bijetiva $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, associamos a cada $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \Omega(u)$ uma seqüência em $\{f(\omega_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ em $l^\infty(\mathbb{Z})$, i.e., apenas substituímos letras por números; se u é uma seqüência de substituição, chamaremos $\omega \in \Omega(u)$ de *potencial de substituição*, o qual continuaremos denotando por ω. Assim, todo elemento $\omega \in \Omega(u)$ define um operador limitado auto-adjunto H_ω da forma (1.1). Denotaremos por $\sigma(H_\omega)$ o espectro de H_ω, e por $\sigma_{ac}(H_\omega)$, $\sigma_{sc}(H_\omega)$ e $\sigma_p(H_\omega)$, os espectros absolutamente contínuo, singular contínuo e pontual de H_ω, respectivamente. Uma propriedade importante do ponto de vista da determinação do espectro de H_ω é dada pela seguinte proposição bem conhecida:

Proposição 1.5 *Se (Ω, T) é minimal, então $\sigma(H_\omega) = \sigma(H_{\omega'})$, $\forall\, \omega, \omega' \in \Omega$, ou seja, o espectro de H_ω,* como conjunto*, é o mesmo para todo $\omega \in \Omega$.*

Demonstração: Dados $\omega', \omega \in \Omega$, como Ω é minimal, existe uma seqüência (n_j) com $d(T^{n_j}\omega, \omega') \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Desta forma, existe $l(n_j) \overset{n_j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ com $\omega_{n_j+j} = {\omega_j}'$, $|j| \leq l(n_j)$. Assim,

$$\begin{aligned} \|H_{T^{n_j}\omega}\psi - H_{\omega'}\psi\|^2 &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |(\omega_{n+n_j} - \omega'_n)\psi_n|^2 \\ &\leq \sum_{|n|>l(n_j)} |\psi_n|^2 \overset{n_j\to\infty}{\to} 0 \end{aligned}$$

ou seja, $H_{T^{n_j}\omega} \to H_{\omega'}$ fortemente e obtemos $\sigma(H_{\omega'}) \subset \overline{\cup\sigma(H_{T^{n_j}\omega})}$ ([34], Teorema VIII.24). Por outro lado, $H_{T^{n_j}\omega} = U^{n_j} H_\omega U^{-n_j}$ em que U é o operador unitário dado por $(U(u))_n = u_{n+1}$ e, portanto, $\sigma(H_{T^{n_j}\omega}) = \sigma(H_\omega)$. Assim, $\sigma(H_{\omega'}) \subset \sigma(H_\omega)$. Invertendo os papéis de ω e ω', conclui-se a demonstração da proposição. □

Os resultados quanto ao tipo espectral dos operadores H_ω são classificados, em ordem crescente de generalidade, como *genéricos* (ponto de vista topológico), *q.t.p.* (ponto de vista de medida) e *uniforme* (para todo $\omega \in \Omega$). Resultados uniformes foram obtidos recentemente para a classe de potenciais (b) acima (incluindo Fibonacci, que é também Sturmiana) [12] e para um único caso na classe (a), duplicação de período [9]; em todos esses casos o espectro é singular contínuo puro com medida de Lebesgue zero. No Capítulo 3 mostraremos que este também é o caso para a seqüência de substituição não-primitiva discutida em [16].

Introduziremos agora, explicitamente, a classe de substituições que propomos neste trabalho, $\zeta = \zeta_N$, para cada $N \geq 1$, em $\mathcal{A} = \{a, b\}$, dada por

$$\zeta(a) = \underbrace{a...a}_{A_1}\underbrace{b...b}_{B_1}\underbrace{a...a}_{A_2}\cdots\underbrace{b...b}_{B_N}\underbrace{a...a}_{A_{N+1}}, \qquad \zeta(b) = b, \tag{1.3}$$

com $A_j, B_j \geq 1, j = 1, \cdots, N$ e $A_{N+1} \geq 1$, denotando o número de letras em cada bloco. Tal substituição claramente não é primitiva, já que qualquer potência positiva de sua matriz de substituição tem a forma

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ B & 1 \end{bmatrix}$$

para inteiros estritamente positivos A, B. Vamos nos referir a uma substituição da forma (1.3) dizendo que ela está na *classe* ζ .

Como $\zeta(a)$ começa e termina com a e $|\zeta^n(a)| \to \infty$, tanto a seqüência de substituição $\bar{\eta}$ como a seqüência de substituição bilateral η estão bem definidas, e são pontos fixos de ζ em $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ e $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, respectivamente.

É possível obter seqüências periódicas fazendo escolhas apropriadas de ζ em (1.3); por exemplo, a substituição $\zeta(a) = abba, \zeta(b) = b$ leva à seqüência periódica

$$a\,b\,b\,a\,b\,b\,a\,b\,b\,a\,b\,b\,a\,b\,b\ldots$$

A aperiodicidade das seqüências de substituição é fundamental para nossos resultados a respeito das propriedades espectrais dos operadores de Schrödinger associados. A proposição abaixo apresenta uma condição que, felizmente de simples aplicação, dá condições bastante gerais para que a seqüência de substituição bilateral gerada por ζ não seja periódica; este pode ser considerado nosso primeiro resultado.

Proposição 1.6 *Se $A_j \geq 2$ para algum $1 \leq j \leq (N+1)$, então a seqüência de substituição resultante η não é periódica e nem por fim periódica, i.e., não fica periódica a partir de um certo índice.*

Demonstração: Pela definição de η podemos nos restringir a analisar $\bar{\eta}$. Vamos supor que $A_1 = 2$ (os argumentos são os mesmos nos outros casos). Observemos que o número de blocos de $a's$ (e $b's$) distintos em η é finito. Suponhamos que $\bar{\eta}$ é periódica com período $\tau \geq 2$ ($\bar{\eta}$ não é constante) e denotemos por B o bloco representado pelas primeiras τ letras de $\bar{\eta}$. Seja $n_c \in \mathbb{N}$ de forma que

$$|\zeta^{n_c-1}(a)| < \tau \leq |\zeta^{n_c}(a)|.$$

O início da seqüência $\bar{\eta}$ é da forma

$$\zeta^{n_c+1}(a) = \zeta^{n_c}(a)\zeta^{n_c}(a)b \ldots b\zeta^{n_c}(a) \ldots \zeta^{n_c}(a) \cdots b \ldots b\zeta^{n_c}(a) \ldots \zeta^{n_c}(a).$$

A escolha de n_c garante que na posição $(|\zeta^{n_c}(a)|+1)$ inicia-se novamente um bloco B. Como o período aparece apenas nas posições que são múltiplos de τ (pois τ é o período de η), temos que $|\zeta^{n_c}(a)|$ é um múltiplo de τ. Assim, na posição $(2|\zeta^{n_c}(a)|+1)$ deve iniciar-se uma nova ocorrência de B, mas isto é impossível pois B começa com a letra a e na posição $(2|\zeta^{n_c}(a)|+1)$ de $\bar{\eta}$ ocorre um b. Portanto $\bar{\eta}$ (e conseqüentemente η) não é periódica.

Suponhamos agora que $\bar{\eta}$ é por fim periódica, i.e., existe um inteiro $k \geq 1$ de modo que η é periódica, com período τ, após a posição $k (k \geq 2)$. Seja $m \in \mathbb{N}$ com $|\zeta^m(a)| > k$ e $|\zeta^m(a)| > \tau$. As primeiras entradas de $\bar{\eta}$ são

$$\zeta^{m+1}(a)[\zeta^{m+1}(a)]b \ldots b\zeta^{m+1}(a) \ldots \zeta^{m+1}(a) \cdots b \ldots b\zeta^{m+1}(a) \ldots \zeta^{m+1}(a),$$

e expandindo o segundo bloco $\zeta^{m+1}(a)$ acima, temos o início de $\bar{\eta}$,

$$\zeta^{m+1}(a)[\zeta^m(a)\zeta^m(a)b \ldots b\zeta^m(a) \ldots \zeta^m(a) \cdots b \ldots b\zeta^m(a) \ldots \zeta^m(a)]b \ldots b.$$

A escolha de m implica que um bloco B começa na posição $(\zeta^{m+1}(a)+1)$ e também em $(|\zeta^{m+1}(a)|+|\zeta^m(a)|+1)$, e com a letra a. O mesmo argumento anterior implica que outro período deve iniciar-se na posição $(|\zeta^{m+1}(a)| + 2|\zeta^m(a)| + 1)$, i.e., B deve começar com a letra b. Esta contradição mostra que $\bar{\eta}$ (e portanto η) não é por fim periódica. □

Proposição 1.7 *A seqüência de substituição bilateral η gerada por ζ é recorrente e, portanto, o sistema dinâmico $(\Omega_\zeta(\eta), T, \mu)$ está bem definido.*

Demonstração: Como toda seqüência periódica é recorrente (basta tomar $n_k = kp$, em que p é o período), vamos supor que η não é periódica, ou seja, $A_j \geq 2$, para algum $1 \leq j \leq (N+1)$. Sejam $j_0 = \min\{1 \leq j \leq (N+1) : A_j \geq 2\}$ e $n_k = j_0|\zeta^k(a)| + \sum_{1\leq i\leq j_0-1} B_i$. Assim,

$$d(T^{n_k}\eta, \eta) \leq \sum_{l\geq|\zeta^k(a)|} \frac{1}{2^{|l|}} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pela definição da seqüência η, a construção pode ser feita para o lado esquerdo e, portanto, η é recorrente. □

Assumiremos daqui por diante que:

(i) $A_j \geq 2$ para algum $1 \leq j \leq (N+1)$ (de modo que a substituição resultante não seja periódica);

(ii) $\eta = \eta_\zeta$ denotará a seqüência de substituição bilateral definida por ζ;

(iii) Ω_ζ sempre denotará o hull da seqüência de substituição bilateral η determinada por ζ e (Ω_ζ, T), o sistema dinâmico associado;

(iv) a função $f : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}$ que define o potencial de substituição é bijetiva (para evitarmos potenciais constantes).

Enunciaremos agora os principais resultados deste trabalho:

Teorema 1.8 *Para todo $\omega \in \Omega_\zeta$ o espectro do operador H_ω tem medida de Lebesgue zero.*

Um fator em $\mathcal{A}^*$ é chamado de *palíndromo* (esta noção foi introduzida neste mesmo contexto em [21]) se ele é o mesmo quando lido de trás para frente; por exemplo, *arara*. Um palíndromo menos trivial é dado pela frase[2]

socorram me subino onibus em marrocos

Uma *seqüência palindrômica* é um elemento de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ que contém palíndromos de comprimentos arbitrariamente grandes. Um subconjunto compacto, T-invariante e minimal em $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ é chamado de palindrômico se ele contém uma seqüência palindrômica. Lembremos que um *conjunto genérico* é um G_δ denso (intersecção enumerável de abertos densos em espaços métricos completos).

Teorema 1.9 *Se Ω_ζ é palindrômico, ou se $\zeta(a)$ é um palíndromo, então existe um conjunto genérico $\Upsilon \subset \Omega_\zeta$ de forma que para todo $\omega \in \Upsilon$ o operador H_ω tem espectro singular contínuo puro com medida de Lebesgue zero.*

Teorema 1.10 *Se $A_1 + A_{N+1} \geq 4$ ou $A_j \geq 4$ para algum $1 \leq j \leq N+1$, então existe um conjunto mensurável $\Xi \subset \Omega_\zeta$, com $\mu(\Xi) = 1$, de forma que para todo $\omega \in \Xi$ o operador H_ω tem espectro puramente singular contínuo com medida de Lebesgue zero.*

Teorema 1.11 *Para o caso particular da substituição $\varrho : a \mapsto aabaa; b \mapsto b$, para todo $\omega \in \Omega_\varrho$ o operador H_ω tem espectro puramente singular contínuo com medida de Lebesgue zero.*

Observamos que o Teorema 1.11 acima melhora sensivelmente os resultados de [16] e [17] para esta substituição não-primitiva, e acrescenta mais um exemplo ao restrito grupo de substituições com resultados uniformes.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: no Capítulo 2 demonstramos os Teoremas 1.8, 1.9 e 1.10; no Capítulo 3 demonstramos o Teorema 1.11 e apresentamos alguns problemas abertos para nossa classe de substituições, que consideramos interessantes.

Encerraremos este primeiro capítulo com uma seção apresentando um breve resumo histórico envolvendo operadores de Schrödinger discretos, unidimensionais, com potenciais peneperiódicos que assumem um número finito de valores.

[2]Mais uma colaboração do Prof. Giancarlo Pellegrino

1.2 Pequena Nota Histórica

Em 1983 [24] e [31] propuseram, independentemente, um operador de Schrödinger H_f da forma (1.1), com potencial de Fibonacci v_f dado por $v_f(n) = \lambda([(n+1)\tau] - [n\tau]), \tau = (\sqrt{5}-1)/2$ em que $[\cdot]$ denota a função maior inteiro e $\lambda \neq 0$. Simulações numéricas baseadas na aplicação traço, indicavam para H_f espectro de Cantor (fechado, com interior vazio e sem pontos isolados) com medida de Lebesgue zero. Algumas dessas conjecturas foram sendo demonstradas ao longo da década, mas a caracterização definitiva do espectro de H_f (singular contínuo puro, com medida de Lebesgue zero para todo $\lambda \neq 0$) foi obtida em 1989, por Sütő [37]. Nesse trabalho Sütő baseou-se principalmente nos resultados de Kotani [26] (ausência de espectro absolutamente contínuo para quase todo elemento no hull de uma seqüência aperiódica que assume um número finito de valores) para obter $\sigma_{ac}(H_f) = \emptyset$, e em propriedades particulares do potencial v_f ($v_f(n) = v_f(n+k), 0 \leq k \leq n$ para infinitos n e limitação uniforme para a aplicação traço) para introduzir a técnica conhecida por Gordon 2-blocos, usada para excluir autovalores.

Uma Generalização do resultado de Sütő para potenciais Sturmianos (Fibonacci é um caso particular) surgiu no mesmo ano devida a Bellissard e outros [6]. A partir desses exemplos de operadores com espectro singular contínuo puro, vários outros casos de operadores com potenciais peneperiódicos foram estudados, dentre eles alguns obtidos de substituições primitivas [3, 4, 15]. Em 1993 Bovier e Ghez [7], [8] generalizaram os resultados de Sütő [37] para algumas substituições primitivas, obtendo mais uma série de exemplos de operadores com espectro singular contínuo puro.

Até essa época as únicas técnicas conhecidas para excluir autovalores dos operadores que estamos tratando, eram os argumentos Gordon 3-blocos (introduzido em [14]) e Gordon 2-blocos (introduzido em [36]). Em 1995 Hof/Knill/Simon [21] introduziram uma nova técnica para excluir autovalores baseada na ocorrência de palíndromos. Uma vantagem dessa técnica é que ela não depende da análise da aplicação traço. Os resultados de [21] combinados com o Teorema *Wonderland* [35] (enunciado na pág. 23) permitem excluir autovalores num conjunto genérico no hull. Com essa nova técnica, foram obtidos novos de exemplos de potenciais de substituição cujos operadores apresentam espectro singular contínuo puro. A notável exceção na

classe das substituições primitivas continuou sendo a substituição de Rudin-Shapiro, para a qual nenhuma técnica até o momento permite excluir espectro pontual [2].

O primeiro resultado de operadores com espectro singular contínuo puro para potenciais num conjunto de medida total no hull, pelo que sabemos, foi obtido em 1998 por Damanik [9], para a substituição duplicação de período. Em 1999, Last/Simon em [28] demonstraram que o espectro absolutamente contínuo é o mesmo para operadores com potenciais cujo hull associado é minimal. Este resultado combinado com o resultado de Kotani [26] permite excluir espectro absolutamente contínuo uniformemente para potenciais ergódicos aperiódicos, que assumem um número finito de valores e cujo hull é minimal. A obtenção de resultados uniformes (para todo elemento do hull) depende agora da obtenção de resultados uniformes para a parte singular do espectro, ou excluir autovalores uniformemente ou excluir espectro contínuo (que não parece ser o caso para o tipo de operadores que estamos tratando). Resultados uniformes foram obtidos, até o momento, apenas para potenciais Sturmianos [12] e Quase-Sturmianos [13] e, para substituições, apenas para duplicação de período [11] (no caso primitivo) e no exemplo apresentado no Capítulo 3 deste trabalho (caso não-primitivo).

Capítulo 2

Espectro Singular Contínuo com Medida Nula para Potenciais na Classe ζ

Neste capítulo mostraremos que, para algumas substituições aperiódicas na classe ζ, o espectro dos operadores associados tem medida de Lebesgue zero e é singular contínuo em subconjuntos "grandes"do hull. Para mostrar que o espectro é singular contínuo, usaremos a mesma estratégia que tem sido aplicada para operadores com potenciais primitivos do tipo (1.1): exclusão de espectro absolutamente contínuo (Seção 2.1) via resultados de Kotani [26] (baseado na aperiodicidade de potenciais que assumem um número finito de valores) e um resultado de Last/Simon [28] (baseado na minimalidade de (Ω, T)); exclusão de espectro pontual (Seção 2.2) em que as técnicas usadas são as introduzidas por Hof/Knill/Simon [21] (baseada na ocorrência de palíndromos) e as introduzidas por Delyon/Petritis [14] e Sütő [36] (baseadas em repetições consecutivas de palavras via argumentos de Gordon). Ainda nessa seção demonstraremos os Teoremas 1.9 e 1.10. Na Seção 2.3 mostraremos que a medida de Lebesgue do espectro é zero usando um resultado recente devido a Lenz [29], baseado nas propriedades ergódicas de Ω_ζ e, fortemente, no trabalho de Furman [18].

2.1 Espectro Singular

A exclusão do espectro absolutamente contínuo para operadores da forma (1.1), com potenciais assumindo um número finito de valores, é feita para todos os

elementos do hull sob as seguintes condições: potencial aperiódico e (Ω, T) ergódico e minimal. Mais precisamente, devido aos seguintes resultados:

Teorema 2.1 (Kotani [26]) *Para potenciais aperiódicos que assumem um número finito de valores, se (Ω, T, μ) é ergódico, então*

$$\mu(\{\omega \in \Omega : \sigma_{ac}(H_\omega) = \emptyset\}) = 1.$$

Teorema 2.2 (Last-Simon [28]) *Se (Ω, T) é minimal, então*

$$\sigma_{ac}(H_\omega) = \sigma_{ac}(H_{\omega'}), \quad \text{para quaisquer} \quad \omega, \omega' \in \Omega.$$

Observemos que o teorema acima estende o resultado da Proposição 1.5 para $\sigma_{ac}(H_\omega)$, mas a extensão para $\sigma_{sc}(H_\omega)$ e $\sigma_p(H_\omega)$ pode não valer [23].

O resultado técnico central desta seção é a seguinte proposição:

Proposição 2.3 O sistema dinâmico (Ω_ζ, T) é estritamente ergódico.

A proposição acima, juntamente com os Teoremas 2.1 e 2.2, permite-nos demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 2.4 *$\sigma_{ac}(H_\omega) = \emptyset$, para todo $\omega \in \Omega_\zeta$ (lembrando que $A_j \geq 2$ para algum j).*

Demonstração: Pela Proposição 2.3, Ω_ζ é estritamente ergódico e, portanto, pelo Teorema 2.2, $\sigma_{ac}(H_\omega)$ é o mesmo para todos os elementos do hull Ω_ζ. Por outro lado, pelo Teorema 2.1, existem potenciais $\omega \in \Omega$ com $\sigma_{ac}(H_\omega) = \emptyset$. Assim, $\sigma_{ac}(H_\omega) = \emptyset$, para todo $\omega \in \Omega_\zeta$. □

Antes de demonstrarmos a Proposição 2.3 introduziremos algumas notações. Um fator Q em ω, com $|Q| = k$ será chamado de k-bloco . Dados fatores P e Q em ω, $\#_P(Q)$ denotará o número de ocorrências de P em Q; por exemplo, $\#_{aa}(aabaaa) = 3$.

O ponto central da demonstração da Proposição 2.3 é mostrar que o limite

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\#_{\zeta^n(a)}(|\zeta^{n+j}(a)|-\text{bloco})}{|\zeta^{n+j}(a)|}$$

existe, é positivo e independente do $|\zeta^{n+j}(a)|-$bloco considerado; isso implica que (Ω_ζ, T) é unicamente ergódico ([32], Seção 4.5). Para a estimativa acima precisamos caracterizar o crescimento dos comprimentos $|\zeta^n(a)|$

bem como as ocorrências dos fatores $\zeta^n(a)$ em η. Apresentaremos tais estimativas nos Lemas 2.5 e 2.6 a seguir. Definimos $f_{N+1} = \sum_{i=1}^{N+1} A_i$ e $h_N = \sum_{i=1}^{N} B_i$; a j-ésima potência de f_{N+1} será denotada por f_{N+1}^j, e a razão $R_j = (f_{N+1}^j - 1)/(f_{N+1} - 1)$—observemos que $f_{N+1} \geq 3$.

Lema 2.5 *As iteradas da substituição ζ satisfazem*

(a) $|\zeta^j(a)| = f_{N+1}^j + h_N R_j$

(b) $\#_a(\zeta^j(a)) = f_{N+1}^j$.

Demonstração: *(a)* É imediato que $|\zeta(a)| = f_{N+1} + h_N$ e

$$\begin{aligned} |\zeta^2(a)| &= f_{N+1}(f_{N+1} + h_N) + h_N \\ &= f_{N+1}^2 + h_N(f_{N+1} + 1); \end{aligned}$$

por indução obtemos

$$\begin{aligned} |\zeta^j(a)| &= f_{N+1}^j + h_N[f_{N+1}^{j-1} + \cdots + 1] \\ &= f_{N+1}^j + h_N R_j. \end{aligned}$$

(b) Demonstra-se por indução. □

Definimos C_A e C_{B_k} por

$$\#_{\zeta^n(a)}(\zeta^n(a)\zeta^n(a)) = 2 + C_A$$

$$\#_{\zeta^n(a)}(\zeta^n(a)\underbrace{b...b}_{B_k}\zeta^n(a)) = 2 + C_{B_k}, \quad 1 \leq k \leq N.$$

Lema 2.6 *Se $C_A > 0$, então $C_{B_q} = 0 \ \ \forall 1 \leq q \leq N$. Reciprocamente, se $C_{B_q} > 0$ para algum q, então $C_A = 0$.*

Demonstração: Se $C_A > 0$ existe $2 \leq j \leq N$ de forma que

$$\underbrace{a...a}_{A_j - A_{N+1}}\ \underbrace{b...b}_{B_j}\underbrace{a...a}_{A_{j+1}}\cdots\ \underbrace{a...a}_{A_{N+1}+A_1}\ \cdots\underbrace{b...b}_{B_{j-1}}\ \underbrace{a...a}_{A_j - A_1} = \underbrace{a...a}_{A_1}\underbrace{b...b}_{B_1}\underbrace{a...a}_{A_2}\cdots\underbrace{b...b}_{B_N}\underbrace{a...a}_{A_{N+1}};$$

então

$$A_k = \begin{cases} A_{k+j-1} & k+j-1 < N+1 \\ A_1 + A_{N+1} & k+j-1 = N+1 \\ A_{k+j-1-N} & k+j-1 > N+1 \end{cases} \quad 2 \leq k \leq N, \tag{2.1}$$

e

$$B_m = \begin{cases} B_{j+m-1} & k+j-1 \leq N \\ B_{j+m-1-N} & k+j-1 > N \end{cases} \quad 1 \leq m \leq N. \tag{2.2}$$

Se $C_{B_q} > 0$ para algum q existe $2 \leq i \leq N$ com

$$\underbrace{a...a}_{A_i}\underbrace{b...b}_{B_i}\underbrace{a...a}_{A_{i+1}} \cdots \underbrace{a...a}_{A_{N+1}}\underbrace{b...b}_{B_q}\underbrace{a...a}_{A_1} \ldots \underbrace{b...b}_{B_{i-2}}\underbrace{a...a}_{A_{i-1}} = \underbrace{a...a}_{A_1}\underbrace{b...b}_{B_1}\underbrace{a...a}_{A_2} \cdots \underbrace{b...b}_{B_N}\underbrace{a...a}_{A_{N+1}}$$

então

$$A_l = \begin{cases} A_{l+i-1} & l+i-1 \leq N+1 \\ A_{l+i-1-(N+1)} & l+i-1 > N+1 \end{cases} \quad 1 \leq l \leq N, \tag{2.3}$$

e

$$B_m = \begin{cases} B_{m+i-1} & m+i-1 < N+1 \\ B_q & m+i-1 = N+1 \\ B_{m+i-1-(N+1)} & m+i-1 > N+1 \end{cases} \quad 1 \leq m \leq N. \tag{2.4}$$

Se as condições (2.1) e (2.3) são satisfeitas simultaneamente temos (o número sobre o sinal de igual indica a equação que foi usada)

$$(A_1 + A_{N+1}) \overset{(2.1)}{=} A_{N-j+2} \overset{(2.3)}{=} A_{N-j+i+1} \overset{(2.1)}{=} A_i \overset{(2.3)}{=} A_1$$

se $j \geq i$, e

$$(A_1 + A_{N+1}) \overset{(2.1)}{=} A_{N-j+2} \overset{(2.3)}{=} A_{i-j} \overset{(2.1)}{=} A_{i-1} \overset{(2.3)}{=} A_{N+1}$$

se $j < i$. Como $A_{N+1} > 0$ e $A_1 > 0$, as igualdades acima nos levam a contradições em ambos os casos, concluindo a demonstração do lema. Observamos que os maiores valores possíveis para C_A e C_{B_q} são $(N-1)$ e N, respectivamente (e cada um deles ocorre para escolhas adequadas de ζ_N). □

Demonstração de Proposição 2.3: Iniciaremos a demonstração mostrando que (Ω_ζ, T) é unicamente ergódico. Pelo Lema 2.6 é suficiente considerar dois casos:

(i) $\#_{\zeta^n(a)}(\zeta^n(a)\zeta^n(a)) = 2 + C_A, \quad \#_{\zeta^n(a)}(\zeta^n(a)B_k\zeta^n(a)) = 2;$

(ii) $\#_{\zeta^n(a)}(\zeta^n(a)\zeta^n(a)) = 2, \quad \#_{\zeta^n(a)}(\zeta^n(a)B_k\zeta^n(a)) = 2 + C_{B_k}.$

Observemos que podem ocorrer $C_A = C_{B_k} = 0$, para todo k.

No caso (i), pelo Lema 2.5,

$$\#_{\zeta^n(a)}(\zeta^{n+j}(a)) = f_{N+1}^j + (f_{N+1} - (N+1))C_A R_j,$$

e contando as ocorrências de $\zeta^n(a)$ em $|\zeta^{n+j}(a)|$ − blocos encontramos

$$f^j_{N+1} + (f_{N+1} - (N+1))C_A R_j - C_A - 1 \leq \#_{\zeta^n(a)}(|\zeta^{n+j}(a)|-\text{bloco}) \leq f^j_{N+1} + (f_{N+1} - (N+1))C_A R_j + C_A - 1,$$

de modo que

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty} \frac{\#_{\zeta^n(a)}(|\zeta^{n+j}(a)|-\text{bloco})}{|\zeta^{n+j}(a)|} &= \lim_{j\to\infty} \frac{f^j_{N+1} + (f_{N+1} - (N+1))C_A R_j}{f^{j+n}_{N+1} + h_N R_{j+n}} \\ &= \frac{f_{N+1} + (f_{N+1} - (N+1))C_A - 1}{f^n_{N+1}[f_{N+1} + h_N - 1]} > 0.\end{aligned}$$

No caso (ii) existe um inteiro $M_k \geq 0$, que depende de N, de modo que (M_k leva em conta a existência de $B_l = B_k$ for $k \neq l$)

$$\#_{\zeta^n(a)}(\zeta^{n+j}(a)) = f^j_{N+1} + M_k R_j.$$

Novamente contando as ocorrências obtemos

$$\begin{aligned} f^j_{N+1} + M_k R_j - C_{B_k} - 1 &\leq \#_{\zeta^n(a)}(|\zeta^{n+j}(a)|-\text{bloco}) \\ &\leq f^j_{N+1} + M_k R_j + C_{B_k} - 1,\end{aligned}$$

de forma que

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty} \frac{\#_{\zeta^n(a)}(|\zeta^{n+j}(a)|-\text{bloco})}{|\zeta^{n+j}(a)|} &= \lim_{j\to\infty} \frac{f^j_{N+1} + M_k R_j}{f^{j+n}_{N+1} + h_N R_{j+n}} \\ &= \frac{f_{N+1} + M_k - 1}{f^n_{N+1}[f_{N+1} + h_N - 1]} > 0.\end{aligned}$$

(Se existem outros $C_{B_q} \neq 0$, $B_q \neq B_l$ para $k \neq l$, basta substituirmos M_k por $\sum_q M_q$ na média acima, somando sobre os q's com $B_q \neq B_l$). Portanto, (Ω_ζ, T) é unicamente ergódico (como comentado na página 14).

Mostraremos agora que (Ω_ζ, T) é minimal. Dado um fator $B \in \eta$ existe $m \in \mathbb{N}$ de forma que $B \subset \zeta^m(a)$. Agora, $\zeta^m(a)$ ocorre em η em saltos limitados por $K_B = \max\{B_1, B_2, \cdots, B_N\} + |\zeta^m(a)|$; isso implica que η é peneperiódica (Proposição 1.3) e, pela Proposição 1.4, (Ω_ζ, T) é minimal. Portanto, (Ω_ζ, T) é estritamente ergódico. □

2.2 Ausência de Espectro Pontual

Com o Teorema 2.4 excluímos o espectro absolutamente contínuo uniformemente no hull Ω_ζ. A exclusão de autovalores é a etapa mais delicada da análise espectral dos operadores da forma (1.1) com potenciais de substituição, e é o ponto que restringe o grau de generalidade dos resultados quanto ao tipo espectral. Nesta seção mostraremos que os principais argumentos dos trabalhos [9, 14, 21], referentes à exclusão do espectro pontual, podem ser adaptados para as substituições na classe ζ.

O ponto de partida para a análise do espectro pontual de operadores da forma (1.1) é a sua *equação de autovalores*

$$H_\omega u = Eu, \tag{2.5}$$

com $E \in \mathbb{R}$. Explicitando a equação acima em termos de suas componentes obtemos

$$u_{n+1} + u_{n-1} + \omega_n u_n = Eu_n \tag{2.6}$$

ou, vetorialmente, $U_n = \tau_E(\omega, n)U_{n-1}$, em que

$$U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} \text{ e } \tau_E(\omega, n) = \begin{pmatrix} E - \omega_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Desta forma, para toda condição inicial U_0, sempre podemos determinar uma solução de (2.5) via

$$U_n = M_E(\omega, n)U_0$$

em que,

$$M_E(\omega, n) = \begin{cases} \tau_E(\omega, n) \times \cdots \times \tau_E(\omega, 1) & n \geq 1 \\ I & n = 0 \\ \tau_E^{-1}(\omega, n+1) \times \cdots \times \tau_E^{-1}(\omega, 0) & n \leq -1 \end{cases}$$

Denominaremos as matrizes $\tau_E(\omega, n)$, bem como os produtos $M_E(\omega, n)$, *matrizes de transferência*. O estudo do comportamento de $\|M_E(\omega, n)\|$ é importante na análise espectral dos operadores (1.1), pois permite relacionar o comportamento das soluções de (2.5) com o espectro de H_ω.

Passemos às preliminares da demonstração do Teorema 1.10. A proposição abaixo consiste em um dos principais resultados na análise do espectro pontual dos operadores da forma (1.1) e formaliza o que chamamos algumas

vezes de argumento de Gordon 3-blocos . Apesar de ser um resultado bem conhecido, apresentaremos sua demonstração devido à sua simplicidade e elegância.

Proposição 2.7 ([14]) *Suponhamos que para um dado potencial ω existe uma seqüência $n_k \to \infty$ de modo que*

$$\omega_{j-n_k} = \omega_j = \omega_{j+n_k},$$

para todo $1 \leq j \leq n_k$. Então, para todo $E \in \mathbb{C}$, a equação (2.5) não possui solução em $l^2(\mathbb{Z})$.

Demonstração: Observemos inicialmente que, da hipótese sobre o potencial ω, as matrizes de transferência $M_E(n)$ satisfazem (omitindo a dependência em ω):

$$M_E^2(n_k) = (\tau_E(n_k) \times \cdots \times \tau_E(1))^2 = \tau_E(2n_k) \times \cdots \times \tau_E(1) = M_E(2n_k) \qquad \text{e}$$

$$M_E(n_k) \times M_E(-n_k) = \tau_E(n_k) \times \cdots \times \tau_E(1) \times \tau_E^{-1}(1-n_k) \times \cdots \times \tau_E^{-1}(0) = I.$$

Pelo Teorema de Cayley-Hamilton, para todo n_k,

$$M_E^2(n_k) - \mathrm{tr}M_E(n_k) \cdot M_E(n_k) + I = 0 \tag{2.7}$$

em que "tr$(\cdot)$"representa o traço da matriz e I é a matriz identidade. Consideremos dois casos:

(i) $|\mathrm{tr}M_E(n_k)| \leq 1$. Aplicando (2.7) à condição inicial U_0 tem-se

$$U_{2n_k} - \mathrm{tr}M_E(n_k) \cdot U_{n_k} + U_0 = 0.$$

Pela desigualdade triangular,

$$\|U_0\| \leq \|U_{2n_k}\| + |\mathrm{tr}M_E(n_k)| \cdot \|U_{n_k}\| \leq \|U_{2n_k}\| + \|U_{n_k}\|$$

e, portanto,

$$\max\{\|U_{2n_k}\|, \|U_{n_k}\|\} \geq \frac{1}{2}\|U_0\|. \tag{2.8}$$

(ii) $|\mathrm{tr}M_E(n_k)| \geq 1$. Aplicando (2.7) a U_{-n_k} e dividindo por $\mathrm{tr}M_E(n_k)$ obtemos,

$$C_k U_{n_k} - U_0 + C_k U_{-n_k} = 0, \quad C_k = \frac{1}{\mathrm{tr}M_E(n_k)}.$$

Novamente pela desigualdade triangular,

$$\|U_0\| \leq |C_k|(\|U_{n_k}\| + \|U_{-n_k}\|) \leq \|U_{n_k}\| + \|U_{-n_k}\|.$$

Assim,

$$\max\{\|U_{n_k}\|, \|U_{-n_k}\|\} \geq \frac{1}{2}\|U_0\|. \tag{2.9}$$

De (2.8) e (2.9) segue que, independentemente do valor de $|\mathrm{tr}M_E(n_k)|$,

$$\max\{\|U_{-n_k}\|, \|U_{n_k}\|, \|U_{2n_k}\|\} \geq \frac{1}{2}\|U_0\|$$

e portanto, para todo $E \in \mathbb{R}$ com condição inicial $U_0 \neq 0$, a solução u correspondente não é de quadrado somável, ou seja, não está em $l^2(\mathbb{Z})$. □

Com base na proposição acima, nossa idéia é mostrar que os conjuntos mensuráveis

$$B(n) \equiv \{\omega \in \Omega_\zeta : \omega_{(k-|\zeta^n(a)|)} = \omega_k = \omega_{(k+|\zeta^n(a)|)}, 1 \leq k \leq |\zeta^n(a)|\},$$

satisfazem

$$\mu(\limsup_{n\to\infty} B(n)) > 0,$$

e que $\limsup_{n\to\infty} B(n)$ está contido no conjunto $T-$invariante

$$\mathcal{C}_p = \{\omega \in \Omega_\zeta : \sigma_p(H_\omega) = \emptyset\}.$$

Com isso, pela ergodicidade demonstrada na Proposição 2.3, $\mu(\mathcal{C}_p) = 1$.

Consideremos os conjuntos

$$J(n) \equiv \{\text{fatores distintos de } \eta \text{ da forma } vvv \text{ com } |v| = |\zeta^n(a)|\}.$$

Os Lemas seguintes serão usados para estimar as médias ergódicas que usaremos para mostrar que $\mu(B(n)) > 0$.

Lema 2.8 *Se $(A_1 + A_{N+1}) \geq 4$ ou $A_j \geq 4$ para algum $2 \leq j \leq N$, então para todo $n \geq 1$, $\#J(n)$ (cardinalidade de $J(n)$) satisfaz*

$$B_1 + A_2|\zeta^{n-1}(a)| \leq \#J(n) \leq |\zeta^n(a)|.$$

Demonstração: A ocorrência de $aaaa$ em η garante a existência de blocos

$$\zeta^n(a)\zeta^n(a)\zeta^n(a)\zeta^n(a)$$

que contêm todos os blocos da forma vvv, com $|v| = |\zeta^n(a)|$. Assim, vamos considerar permutações cíclicas de $\zeta^n(a)$ para determinar o número de blocos distintos da forma vvv. Para cada bloco $u_1u_2\cdots u_l$ seja

$$P(u_1u_2\cdots u_l) = u_2u_3\cdots u_lu_1.$$

Assim,

$$\#J(n) = \min\{i \geq 1 : \zeta^n(a) = P^i(\zeta^n(a))\} \leq |\zeta^n(a)|.$$

Para uma substituição na classe ζ, aplicando P sucessivamente a $\zeta(a)$, a primeira ocorrência possível de $\zeta(a)$ é (vide exemplos no final da demonstração)

$$\underbrace{a...a}_{A_2-A_{N+1}}\ \underbrace{b...b}_{B_2}\cdots\ \underbrace{a...a}_{A_1+A_{N+1}}\ \underbrace{b...b}_{B_1}\ \underbrace{a...a}_{A_2-A_1}.$$

Assim, $B_1 + A_2 \leq \#J(1) \leq |\zeta(a)|$. Pela definição da substituição, essa propriedade se estende a qualquer inteiro positivo n

$$B_1 + A_2|\zeta^{n-1}(a)| \leq \#J(n) \leq |\zeta^n(a)|.$$

Por exemplo, se os B_j são todos distintos ou $A_j \neq A_1 + A_{N+1}, \forall 2 \leq j \leq N$, obtemos $\#J(n) = |\zeta^n(a)|$; enquanto que no caso em que todos os B_j são iguais e $A_j = A_1 + A_{N+1}, \forall 2 \leq j \leq N$, obtemos $\#J(n) = B_1 + A_2|\zeta^{n-1}(a)|$. □

Lema 2.9 *Se vvv ocorre em η com $|v| = |\zeta^n(a)|$, então*

$$\#_{vvv}\zeta^{n+j}(a) \geq \#_{aaaa}\zeta^j(a) = f_{N+1}^{j-1}\sum_{\{i:A_i\geq 4\}}(A_i - 3) + R_{j-1}E_N\sum_{i=1}^{N+1}(A_i - 1),$$

sendo

$$E_N = \begin{cases} 0 & \text{se } A_1 + A_{N+1} < 4 \\ 1 & \text{se } A_1 = A_{N+1} = 2 \\ 3 & \text{se } \min\{A_1, A_{N+1}\} \geq 3 \\ \min\{A_1, A_{N+1}\} & \text{outros casos} \end{cases}$$

Demonstração: Pela construção dos blocos vvv com $|v| = |\zeta^n(a)|$, na demonstração do Lema 2.8, temos

$$\#_{vvv}\zeta^{n+j}(a) \geq \#_{\zeta^n(aaaa)}\zeta^{n+j}(a) = \#_{aaaa}\zeta^j(a).$$

Assim, $\#_{aaaa}\zeta(a) = \sum_{\{i:A_i\geq 4\}}(A_i - 3)$, e

$$\#_{aaaa}\zeta^2(a) = f_{N+1}\sum_{\{i:A_i\geq 4\}}(A_i-3) + E_N\sum_{i=1}^{N+1}(A_i-1).$$

Usando argumentos de indução obtemos

$$\begin{aligned}\#_{aaaa}\zeta^j(a) &= f_{N+1}^{j-1}\sum_{\{i:A_i\geq 4\}}(A_i-3) + [f_{N+1}^{j-2}+\cdots+1]E_N\sum_{i=1}^{N+1}(A_i-1)\\ &= f_{N+1}^{j-1}\sum_{\{i:A_i\geq 4\}}(A_i-3) + R_{j-1}E_N\sum_{i=1}^{N+1}(A_i-1).\end{aligned}$$

□

A σ-álgebra de Borel em (Ω_ζ, T) é gerada pelos cilindros

$$[u_0\cdots u_{l-1}]_{[m,\cdots,m+l-1]} \equiv \{\omega\in\Omega_\zeta : \omega_{m+i} = u_i, 0\leq i\leq l-1\}.$$

Como Ω_ζ é estritamente ergódico, tem-se que a única medida de probabilidade $T-$invariante μ satisfaz ([33], Seção V.4)

$$d(u_0\cdots u_{l-1}) \equiv \mu([u_0\cdots u_{l-1}]_{[m,\cdots,m+l-1]}) = \lim_{n\to\infty}\frac{\#_{u_0\cdots u_{l-1}}\zeta^n(a)}{|\zeta^n(a)|}.$$

Demonstração do Teorema 1.10: Pelo Lema 2.9, para todo fator em η da forma vvv com $|v| = |\zeta^n(a)|$

$$\begin{aligned}d(vvv) &= \lim_{j\to\infty}\frac{\#_{vvv}\zeta^{n+j}(a)}{|\zeta^{n+j}(a)|}\\ &\geq \lim_{j\to\infty}\frac{\#_{aaaa}\zeta^j(a)}{|\zeta^{n+j}(a)|}\\ &= \lim_{j\to\infty}\frac{f_{N+1}^{j-1}\sum_{\{i:A_i\geq 4\}}(A_i-3) + R_{j-1}E_N\sum_{i=1}^{N+1}(A_i-1)}{f_{N+1}^{n+j}+R_{n+j}h_N}\\ &= \frac{d_N}{f_{N+1}^{n+1}(f_{N+1}+h_N-1)},\end{aligned}$$

em que $d_N = [f_{N+1}-1]\sum_{\{i:A_i\geq 4\}}(A_i-3) + E_N\sum_{i=1}^{N+1}(A_i-1)$. Como o conjunto $B(n)$ é a união finita de cilindros disjuntos $[vvv]_{I_n}$, com $vvv\in J(n)$,

em que $I_n = [1 - |\zeta^n(a)|, 2|\zeta^n(a)|]$,

$$\begin{aligned}\mu(B(n)) &= \sum_{vvv \in J(n)} \mu([vvv]_{I_n}) \\ &= \sum_{vvv \in J(n)} d(vvv) \\ &\geq [B_1 + A_2(f_{N+1}^{n-1} + h_N R_{n-1})] d(vvv)\end{aligned}$$

Substituindo $d(vvv)$ por sua expressão encontrada acima,

$$\limsup_{n\to\infty} \mu(B(n)) \geq \frac{A_2(f_{N+1} + h_N - 1)d_N}{f_{N+1}^4 - 2f_{N+1}^3 + f_{N+1}^2 + (f_{N+1}^2 h_N)(f_{N+1} - 1)} > 0.$$

Seguindo os argumentos de [9, 14], vem que $\limsup B(n) \subseteq \mathcal{C}_p$, que o conjunto $\mathcal{C}_p$ é $T-$invariante, μ é ergódica, e

$$\mu(C_p) \geq \mu(\limsup B(n)) \geq \limsup \mu(B(n)) > 0.$$

Concluímos que $\sigma_p(H_\omega) = \emptyset$ μ-q.t.p. em Ω_ζ (um conjunto $T-$invariante em (Ω_ζ, T) tem medida μ nula ou total). Que o espectro tem medida de Lebesgue zero, segue de um resultado geral para substituições na classe ζ (Teorema 1.8) que será demonstrado na próxima seção. □

Observamos que $\Omega_\zeta \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ é completo na topologia definida pela métrica d definida em $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ (vide pág. 3) e a convergência em ω implica na convergência forte dos operadores H_ω associados (ver demonstração da Proposição 1.5). Assim, o espaço dos operadores auto-adjuntos, limitados, $H(\Omega_\zeta) \equiv \{H_\omega : \omega \in \Omega_\zeta\}$ é regular, ou seja, é completo e a convergência na topologia métrica implica na convergência forte dos operadores. Enunciamos abaixo o importante resultado de Simon [35] conhecido como Teorema *Wonderland*.

Teorema 2.10 (Wonderland, [35]) *Seja X um espaço regular de operadores auto-adjuntos. Os conjuntos $C_p = \{H \in X : \sigma_p(H) = \emptyset\}$ e $C_{ac} = \{H \in X : \sigma_{ac}(H) = \emptyset\}$ são G_δ em X. Assim, se estes conjuntos são densos em X, então $C_{sc} = \{H \in X : \sigma_{sc}(H) = \emptyset\}$ é um G_δ denso em X.*

A demonstração do Teorema 1.9 decorre diretamente do Teorema 2.4 e da proposição abaixo (que é essencialmente um resultado de [21]):

Proposição 2.11 *Se Ω_ζ é palindrômico, ou se $\zeta(a)$ é um palíndromo, então existe um conjunto genérico $\Upsilon \subset \Omega_\zeta$ de forma que $\sigma_p(H_\omega) = \emptyset$ para todo $\omega \in \Upsilon$.*

Demonstração: Se $\zeta(a)$ é um palíndromo, então para qualquer palíndromo w, $\zeta(w)$ é também um palíndromo. Assim, em η ocorrem palíndromos de comprimentos arbitrariamente grandes e, portanto, Ω_ζ é palindrômico. Pela minimalidade de (Ω_ζ, T), existe um conjunto mensurável e denso $S \subset \Omega_\zeta$ de forma que $\sigma_p(H_\omega) = \emptyset$, para todo $\omega \in S$ (Proposição 2.1 e Teorema 5.1 de [21]). Como pelo Teorema 2.4 $\sigma_{ac}(H_\omega) = \emptyset$ para todo $\omega \in \Omega_\zeta$, aplicando o Teorema 2.10, concluímos que $\sigma_{sc}(H_\omega) = \emptyset$ para ω em um conjunto genérico $\Upsilon \subset \Omega_\zeta$. □

Demonstração do Teorema 1.9: Basta combinarmos o Teorema 2.4, a Proposição 2.11 e o Teorema 1.8. □

2.3 Medida Nula para o Espectro

Nesta seção, usando resultados de Lenz [29], mostraremos que o espectro dos operadores H_ω tem medida de Lebesgue zero, para todo ω em Ω_ζ. Os argumentos baseiam-se em uma versão uniforme para o Teorema Ergódico Multiplicativo de Oseledec, devida a Furman [18].

Para uma função contínua $A : \Omega \to GL(2, \mathbb{R})$, $\omega \in \Omega$, e $n \in \mathbb{Z}$, definimos $A(\omega, n)$ por:

$$A(\omega, n) = \begin{cases} A(T^{n-1}\omega) \times \cdots \times A(\omega) & n \geq 1 \\ I & n = 0 \\ A^{-1}(T^n\omega) \times \cdots \times A^{-1}(T^{-1}\omega) & n \leq -1 \end{cases}$$

Definição 2.12 [18] *Seja (Ω, T) estritamente ergódico. Uma aplicação contínua $A : (\Omega, T) \to GL(2, \mathbb{R})$ é dita uniforme se o limite*

$$\Lambda(A) = \lim_{|n| \to \infty} \frac{1}{|n|} \log \|A(\omega, n)\|$$

existe para todo $\omega \in \Omega$ e a convergência é uniforme em Ω.

Fixados $E \in \mathbb{R}$ e $\omega \in \Omega$ definimos o *expoente de Lyapunov*

$$\gamma(E, \omega) = \lim_{|n| \to \infty} \frac{1}{|n|} \log \|M_E(\omega, n)\|,$$

quando o limite existe. A função $\gamma(E,\omega)$ indica a razão de (de)crescimento exponencial das soluções de (2.5). Definindo, para cada $E \in \mathbb{R}$, $M_E : \Omega \to SL(2,\mathbb{R})$ por

$$M_E(\omega) = \begin{pmatrix} E-\omega_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

temos que M_E é uma aplicação contínua e a média $\Lambda(M_E)$ é a mesma que define $\gamma(E,\omega)$. Para cada E, a existência de $\gamma(E,\omega)$ uniformemente em Ω, ou seja, a uniformidade de M_E (segundo a Definição 2.12) está diretamente relacionada com o espectro de H_ω como mostra o seguinte

Teorema 2.13 ([29], Teorema 1) *Seja (Ω,T) estritamente ergódico sobre um alfabeto finito. Então são equivalentes:*

(i) A função M_E é uniforme para todo $E \in \mathbb{R}$.

(ii) $\sigma(H_\omega) = \{E \in \mathbb{R} : \gamma(E,\omega) = 0\}$ para todo $\omega \in \Omega$.

Neste caso, o expoente de Lyapunov é contínuo. Se (Ω,T) é aperiódico, então o espectro de H_ω é um conjunto de Cantor (ou seja, fechado, com interior vazio e sem pontos isolados) de medida de Lebesgue zero, para todo $\omega \in \Omega$.

Também é um resultado de [29] que a seguinte condição sobre (Ω,T) implica em (i) no teorema acima:

$$(\mathbf{PW}):\ \text{existe } C>0 \text{ com } \liminf_{|B|\to\infty} \frac{\#_v(B)}{|B|}|v| \geq C,\ \text{para todo } v \text{ em } \mathcal{W},$$

em que $\mathcal{W}$ é o conjunto de todos os fatores finitos (não-vazios) que ocorrem em elementos de Ω. Assim

Teorema 2.14 ([29], Teorema 2) *Se (Ω,T) satisfaz (PW), então a aplicação M_E é uniforme para cada $E \in \mathbb{R}$.*

Pelos Teoremas 2.13 e 2.14, para demonstrar o Teorema 1.8 basta mostrarmos que toda substituição (aperiódica) na classe ζ satisfaz a condição PW. Observamos que devido à métrica d definida em $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, se u é recorrente, então $\mathcal{W}$ é o conjunto de todos os fatores finitos que ocorrem em u ([33], Seção IV.2).

Proposição 2.15 *Toda substituição na classe ζ satisfaz a condição (PW).*

Demonstração: Consideremos inicialmente o caso $v = b$. Para fatores B em η com $|B| \to \infty$, podemos tomar $k \to \infty$ de modo que $\zeta^k(a) \subset B \subset \zeta^{k+2}(a)$. Desta forma (usando a notação introduzida na Seção 2.1)

$$\liminf_{|B|\to\infty} \frac{\#_v(B)}{|B|}|v| \geq \liminf_{k\to\infty} \frac{\#_v(\zeta^k(a))}{|\zeta^{k+2}(a)|} = \frac{h_N}{f_{N+1}^2(f_{N+1}+h_N-1)} \equiv P_1 > 0.$$

Para todos os outros fatores v em η, existe $j \in \mathbb{N}$ de forma que $\zeta^j(a) \subset v \subset \zeta^{j+2}(a)$ e, como no caso acima, podemos tomar $k \to \infty$ de modo que $\zeta^k(a) \subset B \subset \zeta^{k+2}(a)$. Assim, para $|B|$ grande,

$$\begin{aligned}
\frac{\#_v(B)}{|B|}|v| &\geq \frac{\#_{\zeta^{j+2}(a)}(\zeta^k(a))}{|\zeta^{k+2}(a)|}|\zeta^j(a)| \\
&\geq \frac{\overset{\circ}{\#}_{\zeta^{j+2}(a)}(\zeta^k(a))}{|\zeta^{k+2}(a)|}|\zeta^j(a)| \\
&= \frac{\#_a(\zeta^{k-j-2}(a))}{|\zeta^{k+2}(a)|}|\zeta^j(a)|,
\end{aligned}$$

em que $\overset{\circ}{\#}$ denota ocorrências disjuntas. Em particular, existe o limite

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \frac{\#_a(\zeta^{k-j-2}(a))}{|\zeta^{k+2}(a)|}|\zeta^j(a)| &= \frac{1}{f_{N+1}^4} - \frac{h_N}{f_{N+1}^{j+4}(f_{N+1}+h_N-1)} \\
&\geq \frac{1}{f_{N+1}^4} - \frac{h_N}{f_{N+1}^4(f_{N+1}+h_N-1)} \equiv P_2 > 0.
\end{aligned}$$

Portanto, para todo fator v (não-vazio) de η,

$$\liminf_{|B|\to\infty} \frac{\#_v(B)}{|B|}|v| \geq \min\{P_1, P_2\} > 0,$$

concluindo a demonstração da proposição. □

Demonstração do Teorema 1.8: Combinando a Proposição 2.15 com o Teorema 2.14 temos que M_E é uniforme para todo $E \in \mathbb{R}$. Pela Proposição 2.3, (Ω_ζ, T) é estritamente ergódico e, portanto, pelo Teorema 2.13 $\sigma(H_\omega)$ é um conjunto de Cantor com medida de Lebesgue zero. □

Capítulo 3

Um Resultado Uniforme e Problemas Abertos

Uma grande dificuldade na análise do espectro pontual de operadores da forma (1.1) é a ausência de resultados gerais *à la* Kotani (Teorema 2.1) e Last-Simon (Teorema 2.2), que juntos excluem espectro absolutamente contínuo para todo elemento no hull. Como vimos no capítulo anterior, a análise do espectro pontual é feita com base nas características particulares de cada substituição e, por vezes, de cada elemento do hull. Neste capítulo, baseando-nos nos trabalhos [9, 12, 13], apresentaremos um caso de substituição na classe ζ para o qual o operador associado possui espectro singular contínuo puro para todo elemento do hull Ω_ζ.

3.1 Exemplo de Resultado Uniforme

Nesta seção mostraremos que para a substituição $\varrho(a) = aabaa, \varrho(b) = b$, os operadores H_ω associados possuem espectro singular contínuo puro, para todo ω em Ω_ϱ. Como o resultado uniforme só foi obtido para esta substituição particular, não estamos utilizando a notação geral "ζ"para designá-la. Como nos casos tratados em [9, 12, 13], a demonstração baseia-se no conceito de partições, combinadas com argumentos de Gordon 3-blocos (Proposição 2.7) e Gordon 2-blocos que apresentamos na Proposição 3.1 abaixo. Como introduzido anteriormente, tr$M$ denotará o traço da matriz M.

Proposição 3.1 [36] *Seja ω um potencial para o qual existe uma seqüência $k_n \to \infty$ de modo que $\omega_j = \omega_{j+k_n}$, para todo $1 \leq j \leq k_n$. Dado $E \in \mathbb{R}$, se*

existe $0 < C_E < \infty$ *satisfazendo* $|\mathrm{tr}M_E(\omega, k_n)| \leq C_E$, $\forall k_n$, *então* E *não é autovalor de* H_ω.

Demonstração: Dado $E \in \mathbb{R}$ suponhamos que u seja solução de (2.5) com condição inicial normalizada U_0 (i.e., $|u_0|^2 + |u_1|^2 = 1$). Usando Cayley-Hamilton e a hipótese sobre o potencial,

$$U_{2k_n} - \mathrm{tr}M_E(\omega, k_n) \cdot U_{k_n} + U_0 = 0$$

e assim,

$$\|U_{2k_n}\| + |\mathrm{tr}M_E(\omega, k_n)| \cdot \|U_{k_n}\| \geq \|U_0\| = 1.$$

Logo, $\max\{\|U_{k_n}\|, \|U_{2k_n}\|\} \geq \frac{1}{2}\min\{1, \frac{1}{C_E}\}$ e portanto $u \notin l^2(\mathbb{Z})$.

□

Na proposição acima a mesma conclusão é claramente válida se $\omega_{-k_n-j} = \omega_{-j}$, $0 \leq j \leq k_n - 1$, ou seja, o argumento é simétrico. Além disso a repetição dos blocos pode ocorrer em qualquer posição, desde que esteja fixada. Uma forte restrição à aplicação desta proposição é a dificuldade em se obter a constante C_E que limita os traços das matrizes de transferência $M_E(\omega, k_n)$. Em toda esta seção vamos denotar por ϱ a substituição $a \mapsto aabaa$; $b \mapsto b$ e por $\bar{\eta}$ e η, respectivamente, a seqüência de substituição e a seqüência de substituição bilateral correspondentes.

Para $\bar{\eta}$ temos

$$\bar{\eta} = \varrho^k(a)\varrho^k(a)\varrho^k(b)\varrho^k(a)\varrho^k(a)\varrho^k(a)\varrho^k(a)\varrho^k(b)\varrho^k(a)\varrho^k(a)\varrho^k(b)\cdots,$$

para todo $k \geq 0$, o mesmo ocorrendo para η, já que ambos são pontos fixos de ζ. Por exemplo, para $k = 1, 2$

$$\cdots \underbrace{\underbrace{\underbrace{a\,a\,b\,a\,a}_{\varrho(a)}\ \underbrace{a\,a\,b\,a\,a}_{\varrho(a)}\ \underbrace{b}_{\varrho(b)}\ \underbrace{a\,a\,b\,a\,a}_{\varrho(a)}\ \underbrace{a\,a\,b\,a\,a}_{\varrho(a)}}_{\varrho^2(a)}\cdot\underbrace{\underbrace{a\,a\,b\,a\,a}_{\varrho(a)}\ \underbrace{a\,a\,b\,a\,a}_{\varrho(a)}\ \underbrace{b}_{\varrho(b)}\ \underbrace{a\,a\,b\,a\,a}_{\varrho(a)}\ \underbrace{a\,a\,b\,a\,a}_{\varrho(a)}}_{\varrho^2(a)}}\cdots,$$

ou seja, para cada $k \in \mathbb{N}$, podemos "decompor" η em fatores $\varrho^k(a)$ e $\varrho^k(b)$. O mesmo vale para qualquer substituição na classe ζ e motiva a definição de partições dada abaixo.

Definição 3.2 *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *fixado, a* $n-$*partição de um elemento* $\omega \in \Omega_\zeta$ *é uma seqüência de pares* $(I_j^n, z_j^n)_{j\in\mathbb{Z}}$ *em que*

$$I_j^n = \{m_j, \cdots, m_{|z_j^n|-1}\} \subset \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad z_j^n \in \{\zeta^n(a), \zeta^n(b)\} = \{\zeta^n(a), b\}$$

com $0 \in I_0^n$ e $\omega_{m_j}\omega_{m_j+1}\cdots\omega_{m_j+|z_j^n|-1} = z_j^n$, *para todo* $j \in \mathbb{Z}$. z_j^n *é chamado de bloco da partição e* I_j^n *é a posição do bloco* z_j^n.

Observamos que a $0-$partição de um elemento $\omega \in \Omega$, pode ser identificada com a própria seqüência ω (neste caso, $I_j^0 = \{j\}$ e $z_j^0 = \omega_j$).

Exemplifiquemos no caso de

$$\eta = \cdots a\,a\,b\,a\,a\,a\,a\,b\,a\,a\,b\,a\,a\,b\,a\,a\,a\,a\,b\,a\,a \cdot a\,a\,b\,a\,a\,a\,a\,b\,a\,a\,b\,a\,a\,b\,a\,a\,a\,a\,b\,a\,a\cdots$$

alguns pares da 1-partição (I_j^1, z_j^1)

$$I_0^1 = \{-4,-3,-2,-1,0\}, \quad z_0^1 = \varrho(a);$$

$$I_1^1 = \{1,2,3,4,5\}, \qquad z_1^1 = \varrho(a);$$

$$I_3^1 = \{11\}, \qquad z_2^1 = \varrho(b);$$

e para a 2-partição

$$I_{-3}^2 = \{-42\}, \qquad z_{-3}^2 = \varrho^2(b);$$

$$I_0^2 = \{-20,\cdots,0\}, \qquad z_0^2 = \varrho^2(a);$$

$$I_5^2 = \{65,\cdots,85\}, \qquad z_1^2 = \varrho^2(a).$$

Proposição 3.3 *Para cada* $n \geq 0$, *existe uma única* $n-$*partição para cada* $\omega \in \Omega_\zeta$.

Demonstração: Para todo n, como $\varrho^n(\eta) = \eta$, existe uma única $n-$partição para η, o mesmo ocorrendo para todos os transladados $T^j\eta$. Além disso, todo ω em Ω_ϱ admite uma única $0-$partição (que é a própria ω). Devido à métrica d definida em $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, para $\omega = \lim_{j\to\infty} T^{n_j}\eta$ temos que para todo $N \in \mathbb{N}$, existe n_k em que para todo $n_j \geq n_k$ de modo que $\omega_l = \eta_{n_j+l}, |l| \leq N$, ou seja, ω e $T^{n_j}\eta$ coincidem no intervalo $\{-N,\cdots,N\} \subset \mathbb{Z}$. Como as posições dos z^1 blocos são unicamente determinadas pelas posições dos z^0 blocos da $0-$partição de ω (por exemplo $s_0\,s_0\,b\,s_0\,s_0 = s_1$), a existência e unicidade da $1-$partição dos $T^{n_j}\eta$ para todo j implica na existência e unicidade da $1-$partição de ω. De modo análogo constrói-se, de maneira única, as demais partições de ω. □

Introduziremos agora algumas notações que serão usadas na demonstração do Teorema 1.11. Para $\omega \in \Omega_\varrho$, denotaremos os blocos de sua $n-$partição, $\varrho^n(a)$ e $\varrho^n(b)$, por s_n e b, respectivamente. Usaremos os símbolos $\hat{s_n}$ e $\hat{b}$ para indicar a posição do bloco z_0^n na $n-$partição. Um bloco formado apenas pela letra b em uma $n-$partição é dito *isolado para a* $(n+1)-$*partição* quando ele se mantém como um bloco z_j^{n+1} ao passarmos à $(n+1)-$partição. Por exemplo, o $\mathbf{b}$ abaixo é isolado para a $1-$partição

$$\cdots \underbrace{a\,a\,b\,a\,a}_{s_1}\,\underbrace{a\,a\,b\,a\,a}_{s_1}\,\mathbf{b}\,\underbrace{a\,a\,b\,a\,a}_{s_1}\,\underbrace{a\,a\,b\,a\,a}_{s_1}\cdots$$

Explicitaremos agora algumas propriedades dos elementos de Ω_ϱ (que se estendem aos blocos s_n e b) como preparação para o Teorema 1.11.

- o fator bb não ocorre em elementos de Ω_ϱ;
- a só ocorre na forma aa ou $aaaa$;
- em $baab$, um dos b é isolado para a $1-$partição.

A demonstração do teorema será feita com base na análise de todos os casos possíveis para o z_0^n bloco da $n-$partição de $\omega \in \Omega_\varrho$. Partindo-se de z_0^n, há um número finito de possibilidades (que são as mesmas para cada $n-$partição) para a disposição de z_j^n-blocos adjacentes e, portanto, pelo menos uma delas deve ocorrer infinitas vezes. Lembramos que nosso objetivo é mostrar que para todo $\omega \in \Omega_\varrho$, e todo $E \in \sigma(H_\omega)$ a equação (2.5) não possui solução em $l^2(\mathbb{Z})$; em cada caso abaixo será usada a Proposição 2.7 ou a Proposição 3.1.

Demonstração do Teorema 1.11:

caso 1: $z_0^n = b$.

Subdividimos este caso nos dois seguintes:

caso 1.1: $\mathbf{b}$ é isolado para a $(n+1)-$partição, ou seja, $z_0^{n+1} = b$. Neste caso, passando à $(n+1)-$partição obtemos (lembrando que o termo de índice zero é a primeira posição à esquerda do ponto)

$$\cdots \overbrace{\underbrace{s_n\,s_n\,b\,s_n\,s_n}\,\hat{\mathbf{b}}}^{s_{n+1}} \cdot \overbrace{\underbrace{s_n\,s_n\,b\,s_n\,s_n}}^{s_{n+1}} \cdots .$$

Se isto ocorre para infinitos n's, obtemos uma seqüência (k_n), com $k_n = 2|\varrho^n(a)| + 1$, para a qual $\omega_{-k_n-j} = \omega_{-j} = \omega_{k_n-j},\ 0 \leq j \leq k_n - 1$. A Pro-

posição 2.7 (refletida na origem), garante que para todo E, a equação (2.5) não possui solução em $l^2(\mathbb{Z})$, ou seja, H_ω não possui autovalores.

caso 1.2: b não é isolado para $(n+1)-$partição, ou seja, $z_0^{n+1} = s_{n+1}$. Neste caso temos as seguintes possibilidades:

caso 1.2.1: $z_{-1}^{n+1} = b$ ou $z_1^{n+1} = b$ (observemos que não ocorre o caso $z_{-1}^{n+1} = b = z_1^{n+1}$ pois bab não ocorre em ω). Supondo $z_1^{n+1} = b$,

$$\overbrace{s_n\, s_n\, b\, s_n\, s_n}^{s_{n+1}}\ \overbrace{\underbrace{s_n\, s_n\, \hat{b}}\cdot\underbrace{s_n\, s_n}\,\mathbf{b}}^{\hat{s}_{n+1}}\ \overbrace{\underbrace{s_n\, s_n\, b}\, s_n\, s_n}^{s_{n+1}}.$$

Usamos novamente a Proposição 2.7 com $(k_n = 2|\varrho^n(a)|+1)$. O caso $z_{-1}^{n+1} = b$ é análogo.

caso 1.2.2: $z_{-1}^{n+1} = s_{n+1} = z_1^{n+1}$. Assim, $z_{-2}^{n+1} = s_{n+1}$ ou $z_2^{n+1} = s_{n+1}$ (não simultaneamente pois $aaaaa$ não ocorre em ω). Supondo $z_2^{n+1} = s_{n+1}$,

$$\overbrace{s_n\, s_n\, b\underbrace{s_n\, s_n}}^{s_{n+1}}\ \overbrace{\underbrace{s_n\, s_n\, \hat{b}}\ \underbrace{s_n\, s_n}}^{\hat{s}_{n+1}}\ \overbrace{\underbrace{s_n\, s_n\, b}\ \underbrace{s_n\, s_n}}^{s_{n+1}}\ \overbrace{\underbrace{s_n\, s_n\, b}\, s_n\, s_n}^{s_{n+1}}$$

e podemos aplicar a Proposição 2.7 com $(k_n = 4|\varrho^n(a)| + 1)$. Análogo para $z_{-2}^{n+1} = s_{n+1}$.

caso 2: $z_0^n = s_n$.

Dividimos este caso nos seguintes:

caso 2.1: $z_{-1}^n = s_n = z_1^n$. Análogo ao caso 1.2.2 acima, exceto que agora $(k_n = |\varrho^n(a)|)$ em que $\omega_1 \cdots \omega_{|\varrho^n(a)|}$ é uma permutação cíclica de s_n.

caso 2.2: $b\hat{s}_n s_n b$. Neste caso, um dos b's é isolado para a $(n+1)-$partição. Suponhamos que seja o b à esquerda. Passando à $(n+1)-$partição obtemos

$$\overbrace{\underbrace{s_n\, s_n\, b}\ \underbrace{s_n\, s_n}}^{s_{n+1}}\, b\, \overbrace{\underbrace{\hat{s}_n\ s_n\, b}\, s_n\ s_n}^{\hat{s}_{n+1}}$$

e usamos novamente a Proposição 2.7 (refletida na origem) com $(k_n = 2|\varrho^n(a)| + 1)$. O argumento é simétrico para essa posição do b isolado. Trata-se da mesma forma o caso $bs_n\hat{s}_n b$.

caso 2.3: $b\,\hat{s}_n\, s_n\, s_n\, s_n\, b$. Passando à $(n+1)-$partição, obtemos $\hat{s}_{n+1}s_{n+1}$ e temos os seguintes casos a considerar:

caso 2.3.1: $z_{-1}^{n+1} = s_{n+1}$, que recai no caso 2.1 acima.

caso 2.3.2: $z_{-1}^{n+1} = b = z_2^{n+1}$, que é o caso 2.2 acima.

caso 2.3.3: $z_{-1}^{n+1} = b$ e $z_2^{n+1} = s_{n+1}$, que é caso 2.3 para a $(n+1)-$partição.

Assim, o único caso que falta analisar é quando $z_{-1}^n = b$ e $z_0^n = z_1^n = z_2^n = z_3^n = s_n$, para todo $n \geq n_0$, algum $n_0 \in \mathbb{N}$ (e o seu "simétrico", i.e. $b\, s_n\, s_n\, s_n\, \hat{s}_n\, b$). Explicitamente,

$$b\, \underbrace{s_n\, s_n\, b\, \hat{s}_n\, s_n}_{\hat{s}_{n+1}}\, \underbrace{s_n\, s_n\, b\, s_n\, s_n}_{s_{n+1}}\, \underbrace{s_n\, s_n\, b\, s_n\, s_n}_{s_{n+1}}\, \underbrace{s_n\, s_n\, b\, s_n\, s_n}_{s_{n+1}}\, b.$$

Essa "quebra"na repetição tripla de blocos em torno da posição zero em $\mathbb{Z}$, devido à a ocorrência do bloco b à esquerda de $z_0^n = s_n$, não nos permite aplicar a Proposição 2.7 como nos casos anteriores. Observemos que este é um caso possível para um elemento $\omega \in \Omega_\varrho$. Por outro lado, para cada $n-$partição, há pelo menos três repetições do mesmo fator (uma permutação cíclica de s_n) à direita da posição zero e pelo menos duas repetições de uma permutação de $\varrho^n(a)\varrho^n(a)b$ à esquerda. Em particular temos $\omega_j = \omega_{-j+k_n}$, com $k_n = 2|\varrho^n(a)| + 1, 1 \leq j \leq k_n$ e, portanto, uma alternativa é tentar usar a Proposição 3.1. Para isso, precisamos estudar o comportamento de $|\mathrm{tr}M_E(\omega, k_n)|$ quando $n \to \infty$. Uma maneira de relacionar $\mathrm{tr}M_E(\omega, k_n)$ com a substituição ϱ é através de um sistema dinâmico denominado *aplicação traço* que descreveremos brevemente. A construção a seguir vale para substituições em geral e referências importantes sobre este assunto são [7, 25, 30].

Para $\bar{\eta} = \varrho^\infty(a)$ e cada $E \in \mathbb{R}$ fixado, identificando $\bar{\eta}$ com o correspondente potencial de substituição, definimos

$$x_n = \mathrm{tr}M_E(\varrho^n(aa)); \;\; y_n = \mathrm{tr}M_E(\varrho^n(aab)); \;\; z_n = \mathrm{tr}M_E(\varrho^n(aabaa)), \quad (3.1)$$

com $x_0 = \mathrm{tr}M_E(aa)$, $y_0 = \mathrm{tr}M_E(aab)$, e $z_0 = \mathrm{tr}M_E(aabaa)$, em que

$$M_E(\varrho^n(q)) = M_E(\eta, |\varrho^n(q)|) = \tau_E(\eta, |\varrho^n(q)|) \cdots \tau_E(\eta, 1), \; q = aa, aab, aabaa.$$

Combinando (3.1) com a seguinte relação em [25] (A, B e C matrizes 2×2 com determinante igual a 1)

$$\mathrm{tr}(ABAC) = \mathrm{tr}(AB) \cdot \mathrm{tr}(AC) + \mathrm{tr}(BC) - \mathrm{tr}B \cdot \mathrm{tr}C$$

obtemos o sistema dinâmico, denominado aplicação traço associada a ϱ,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (x_n y_n - c)^2 - 2 \\ y_{n+1} &= (x_n y_n - c)(y_n^2 - 2) - c, \text{ em que } c = x_0 y_0 - z_0. \end{aligned}$$

Em particular, como $\varrho(a)$ é um palíndromo, a aplicação traço para a esquerda é a mesma. Além disso, basta definirmos a aplicação traço para a seqüência de substituição $\bar{\eta}$ pois, no caso que estamos tratando, os fatores que se repetem em ω são permutações cíclicas de $\varrho^n(a)$, para as quais o traço é invariante. Para aplicarmos a Proposição 3.1 bastaria encontrarmos, para $E \in \sigma(H_\omega)$, uma constante C_E satisfazendo $|\mathrm{tr}M_E(\omega, k_n)| < C_E, \forall\ k_n$. No entanto, isto não foi possível.

A forma que encontramos para contornar este problema foi a seguinte. Introduzimos uma decomposição de η em blocos da forma $\alpha = aab$ e $\beta = aa$ e com isso pudemos relacionar a substituição ϱ com a substituição duplicação de período ξ_{dp} (vide pág. 2). Por exemplo, para os primeiros termos de $\bar{\eta}$ temos

$$\bar{\eta} = \underbrace{a\,a\,b}_{\alpha}\ \underbrace{a\,a}_{\beta}\ \underbrace{a\,a\,b}_{\alpha}\ \underbrace{a\,a\,b}_{\alpha}\ \underbrace{a\,a\,b}_{\alpha}\ \underbrace{a\,a}_{\beta}\ \underbrace{a\,a\,b}_{\alpha}\ \underbrace{a\,a}_{\beta}\ a\cdots$$

A seqüência em $\{\alpha, \beta\}^{\mathbb{N}}$ acima é a seqüência de substituição $\bar{u}_{dp}$, gerada pela substituição duplicação de período ($\alpha \mapsto \alpha\beta;\ \beta \mapsto \alpha\alpha$).

O próximo lema estabelece uma relação, obtida por indução, entre as substituições ϱ e ξ_{dp}, com a qual poderemos identificar partições adequadas de η e u_{dp}.

Lema 3.4 *Fazendo a identificação $aab = \alpha$ e $aa = \beta$ obtemos as relações*

$$\xi_{dp}^{2n-1}(\alpha) = \varrho^n(a) \quad \text{e} \quad \xi_{dp}^{2n-1}(\beta) = \varrho^n(a)b;$$
$$\xi_{dp}^{2n}(\alpha) = \varrho^n(a)\varrho^n(a)b \quad \text{e} \quad \xi_{dp}^{2n}(\beta) = \varrho^n(a)\varrho^n(a).$$

Uma vantagem desta identificação é que os pares

$$(t_n(E) = \mathrm{tr}M_E(|\xi_{dp}^n(\alpha)|), r_n = \mathrm{tr}M_E(|\xi_{dp}^n(\beta)|))$$

satizfazem a aplicação traço da duplicação de período [4]

$$t_{n+1} = t_n r_n - 2,\ \ r_{n+1} = t_n^2 - 2$$

e, da mesma forma que em [4], segue que para E no espectro de H_η existe n_0 com

$$|t_n(E)| \leq 2, \forall\ n \geq n_0. \tag{3.2}$$

Isto nos permitirá aplicar o argumento de Gordon 2-blocos ao caso 2.3.3 acima.

Reescrevendo o caso 2.3.3 em termos da $(2n-1)-$partição em u_{dp} ($v_n = \xi_{dp}^n(\alpha)$ e $w_n = \xi_{dp}^n(\beta)$), obtemos

$$\cdots \underbrace{s_n\, b}_{w_{2n-1}}\ \underbrace{s_n}_{v_{2n-1}}\ \underbrace{s_n\, b}_{w_{2n-1}}\ \underbrace{s_n}_{v_{2n-1}}\ \underbrace{s_n\, b}_{w_{2n-1}}\ \underbrace{\hat{s}_n}_{\hat{v}_{2n-1}}\ \underbrace{s_n}_{v_{2n-1}}\ \underbrace{s_n}_{v_{2n-1}}\ \underbrace{s_n\, b}_{w_{2n-1}}\ \underbrace{s_n}_{v_{2n-1}}\ \underbrace{s_n}_{v_{2n-1}}\ \cdots .$$

Passando à $(2n)-$partição em u_{dp}, obtemos

$$\cdots v_{2n}\, v_{2n}\, v_{2n}\, \hat{w}_{2n}\, v_{2n}\, w_{2n} \cdots$$

e, portanto, usando (3.2) conseguimos uma seqüência (k_n), a qual pode ser calculada explicitamente como $k_n = 2|\varrho^n(a)| + 1$, que satisfaz as hipóteses da Proposição 3.1, e portanto H_η não possui autovalores.

Procedemos a mesma análise para o caso $b\, s_n\, s_n\, s_n\, \hat{s}_n\, b$. Com isso, concluímos a demonstração do teorema. □

3.2 Comentários Finais e Problemas Abertos

Nesta seção apresentaremos algumas observações com respeito aos resultados obtidos e comentaremos alguns problemas em aberto que julgamos interessantes.

Operadores de Schrödinger discretos unidimensionais contam com um aparato técnico importante na sua análise espectral, que são as matrizes de transferência. Sistemas discretos cuja dimensão é maior ou igual a dois não dispõem deste recurso.

A generalização dos nossos resultados para o caso $\zeta(b) = b \cdots b$, com mais de um fator, não é direta pois (Ω_ζ, T) deixa de ser estritamente ergódico.

Há substituições na classe ζ para as quais nossos resultados referentes à exclusão de espectro pontual não se aplicam. É o caso, por exemplo, da substituição $\zeta : a \mapsto abaabba; b \mapsto b$. No entanto, para esta substituição podemos aplicar os Teoremas 1.8 e 2.4, obtendo espectro singular com medida de Lebesgue zero.

Sempre que $A_1 + A_{N+1} = 3$, podemos aplicar argumentos de Gordon 3-blocos e, pelos Teoremas 2.1 e 2.2, excluir espectro pontual para η e seus transladados. Assim, seguirá que ocorre espectro singular contínuo puro num conjunto genérico no respectivo hull. Ainda fica em aberto se isto valerá num conjunto de medida invariante total, o que ocorre se $A_1 + A_{N+1} \geq 4$.

Casos similares a 2.3.3 no Teorema 1.11 podem ocorrer para outras substituições na classe ζ. Aparentemente não há uma generalização trivial do argumento usado para ϱ, exceto nos casos

$$a \mapsto aa \underbrace{b \cdots b}_{B_1} aa,$$

em que também é possível adaptar a demonstração do Teorema 1.11 e obter resultados uniformes no hull.

Seria interessante uma caracterização, quanto ao tipo espectral, das medidas de autocorrelação das próprias seqüências de substituição aperiódicas na classe ζ. Não há resultados nesta direção.

Finalmente, estimar a dimensão de Hausdorff do espectro dos operadores de Schrödinger com potenciais na classe ζ é, certamente, um dos problemas abertos mais interessantes neste contexto, particularmente devido à sua relação com a dinâmica quântica, pois indica a razão do decaimento da

probabilidade média de retorno a uma condição inicial dada; relaciona-se também com a taxa de crescimento do momento como função do tempo (veja [27] e referências lá citadas). Parece-nos que novas técnicas devem ser introduzidas para abordar satisfatoriamente este tipo de problema no caso das substituições aqui tratadas.

Referências Bibliográficas

[1] Axel, F., Gratias, D. (eds.): Beyond Quasicrystals. Berlim: Les Editions de Physique/Springer-Verlag, 1995

[2] Baake, M.: A Note on Palindromicity. Lett. Math. Phys. **49**, 217–227 (1999)

[3] Bellissard, J.: Spectral properties of Schrödinger's operator with Thue-Morse potential. Em: Luck, J.-M., Moussa, P., Waldschmidt, M. (eds.): Number Theory and Physics, Springer Proceedings in Physics, Vol. **47**. Berlim: Springer, 1990, p. 140–150

[4] Bellissard, J., Bovier, A., Ghez, J.-M.: Spectral properties of a tight binding Hamiltonian with period doubling potential. Commun. Math. Phys. **135**, 379–399 (1991)

[5] Bellissard, J., Bovier, A., Ghez, J.-M.: Gap labeling theorems for one dimensional discrete Schrödinger operators. Rev. Math. Phys. **4**, 1–37 (1992)

[6] Bellissard, J., Iochum, B., Scoppola, E. e Testard, D.: Spectral properties of one dimensional quasi-crystals. Commun. Math. Phys. **125**, 527–543 (1989)

[7] Bovier, A., Ghez, J.-M.: Spectral properties of one-dimensional Schrödinger operators with potentials generated by substitutions. Commun. Math. Phys. **158**, 45–66 (1993)

[8] Bovier, A., Ghez, J.-M.: Erratum to Ref. [7]. Commun. Math. Phys. **166**, 431–432 (1994)

[9] Damanik, D.: Singular continuous spectrum for the period doubling Hamiltonian on a set of full measure. Commun. Math. Phys. **196**, 477–483 (1998)

[10] Damanik, D.: Singular continuous spectrum for a class of substitution Hamiltonians. Lett. Math. Phys. **46** 303–311 (1998)

[11] Damanik, D.: Uniform singular continuous spectrum for the period doubling Hamiltonian. Ann. Henri Poincaré **2** (1), 101–108 (2001)

[12] Damanik, D., Lenz, D.: Uniform spectral properties of one dimensional quasicrystals, I. Absence of eigenvalues. Commun. Math. Phys. **207**, 687–696 (1999)

[13] Damanik, D., Lenz, D.: Uniform spectral properties of one dimensional quasicrystals, IV. Quasi-Sturmian Potentials. Preprint mp-arc 01-190

[14] Delyon, F., Petritis, D.: Absence of localization in a class of Schrödinger operators with quasiperiodic potential. Commun. Math. Phys. **103**, 441–444 (1986)

[15] Delyon, F., Peyrière, J.: Recurrence of the eigenstates of a Schrödinger operator with automatic potential. J. Stat. Phys. **64**, 363–368 (1991)

[16] de Oliveira, C. R., Lima, M. V.: A nonprimitive substitution Schrödinger operator with generic singular continuous spectrum. Rep. Math. Phys. **45**, 431–436 (2000)

[17] de Oliveira, C. R., Lima, M. V.: Singular continuous spectrum for a class of nonprimitive substitution Schrödinger operators. A ser publicado em Proc. Amer. Math. Soc. **130** (1), 145–156 (2002)

[18] Furman, A.: On the multiplicative ergodic theorem for uniquely ergodic systems. Ann. Inst. Poincaré – Prob. Stat **33** (6), 797–815 (1997)

[19] Geerse, C. P. M., Hof, A.: Lattice gas models on self-similar aperiodic tilings. Rev. Math. Phys. **3**, 163-221 (1991)

[20] Hof, A.: Some remarks on discrete aperiodic Schrödinger operators. J. Stat. Phys. **72**, 1353–1374 (1993)

[21] Hof, A., Knill, O., Simon, B.: Singular continuous spectrum for palindromic Schrödinger operators. Commun. Math. Phys. **174**, 149–159 (1995)

[22] Iochum, B., Testard, D.: Power law growth for the resistance in the Fibonacci model. J. Stat. Phys. **65**, 715–723 (1991)

[23] Jitomirskaya, S., Simon, B.: Operators with singular continuous spectrum. III. Almost periodic Schrödinger operators. Comm. Math. Phys. **165**, 201–205 (1994)

[24] Kohmoto, M., Oono, Y.: Cantor Spectrum for an Almost Periodic Schrödinger Equation and a Dynamical Map. Phys. Lett. **102**A: 145–148 (1984).

[25] Kolár M., Nori, F.: Trace maps of general substitutional sequences. Phys. Rev. B. **42**(1), 1062–1065 (1990)

[26] Kotani, S.: Jacobi matrices with random potential taking finitely many values. Rev. Math. Phys. **1**, 129–133 (1989)

[27] Last, Y.: Quantum dynamics and decompositions of singular continuous spectra. J. Funct. Anal. **142**, 406–445 (1996)

[28] Last, Y., Simon, B.: Eigenfunctions, transfer matrices, and absolutely continuous spectrum of one-dimensional Schrödinger operators. Invent. Math. **135**, 329–367 (1999)

[29] Lenz, D.: Singular spectrum of Lebesgue measure zero for one-dimensional quasycrystals. Preprint math-ph/0106012 (2001)

[30] Liu, Q.H., Tan, B., Wen, Z. X., Wu, J.: Measure zero spectrum of a class of Schrödinger operators. Preprint mp-arc 01-189

[31] Ostlund, S.; Pandit, R.; Rand, D.; Schnellnhuber, H.J., Siggia, E.D.: Schrödinger Equation with an Almost Periodic Potential. Phys. Rev. Lett. **50**: 1873–1876 (1983)

[32] Petersen, K.: Ergodic Theory, Cambridge: University Press, 1983

[33] Queffélec, M.: Substitution Dynamical Systems – Spectral Analysis, Lecture Notes in Mathematics **1294**. Berlim: Springer-Verlag, 1987

[34] Reed, M., Simon, B.: Methods of Modern Mathematical Physics, volume I: Functional Analysis. São Diego: Academic Press, 1978

[35] Simon, B.: Operators with singular continuous spectrum: I. General operators. Ann. Math. **141**, 131–145 (1995)

[36] Sütő, A.: The spectrum of a quasiperiodic Schrödinger operator. Commun. Math. Phys. **111**, 409–415 (1987)

[37] Sütő, A.: Singular Continuous Spectrum on a Cantor Set of Zero Lebesgue Measure for the Fibonacci Hamiltonian. J. Stat. Phys. **56**, 525–531 (1989)

[38] Walters, P.: An introduction to ergodic theory. Nova Iorque: Springer-Verlag, 1982

Índice Remissivo

A_j, 7

B_j, 7

$H(\Omega_\zeta)$, 23

k-bloco, 14

$M_E(\omega, n)$, 18

$\#_P(Q)$, 14

$\bar{\eta}$, 7

$\gamma(E, \omega)$, 25

$\mathcal{A}$, 2

Ω, 4

$\sigma(H_\omega)$, 6

$\overset{\circ}{\#}$, 26

$\tau_E(\omega, n)$, 18

ζ, 7

ζ_N, 7

$\mathcal{A}^*$, 2

aplicação traço, 32

bloco isolado, 30

cilindros, 22
classe ζ, 7
condição PW, 26
conjunto genérico, 10

Duplicação de Período, 2

equação de autovalores, 18
ergódica, 6
espectro uniforme, 7
estritamente ergódico, 6
expoente de Lyapunov, 25

fatores, 2
Fibonacci, 2

Gordon 2-blocos, 27
Gordon 3-blocos, 19

hull, 4

matriz de substituição, 3
matrizes de transferência, 18

medida invariante, 5
minimal, 4

órbita, 4

palíndromo, 10
partição, 28
peneperiódica, 5
potencial, 1
potencial de substituição, 6
primitiva, 3
PW, 25

recorrente, 4
regular, 23

seqüência de substituição, 3
seqüência de substituição bilateral, 4
seqüência palindrômica, 10
shift, 4
substituições, 2

Thue-Morse, 3

unicamente ergódico, 6