# Involuções Comutantes Fixando Dois Espaços Projetivos Pares

Rogério de Oliveira

## Agradecimentos

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para que este trabalho fosse realizado.

Agradeço:

A todos os alunos da pós-graduação, professores e funcionários do Departamento de Matemática da UFSCar, por proporcionarem um agradável local de trabalho;

Aos professores Biasi, Oziride, Adalberto e João Sampaio e à minha irmã Paula;

Ao Professor Pedro, por aceitar me orientar e pelo problema proposto;

Ao Professor Robert E. Stong, da Virginia University at Charlottesville, pela colaboração vital no que se refere à classificação das involuções fixando $RP(2) \cup RP(4j+2)$, do Capítulo 5;

À Sônia, por cuidar de mim e de nossos filhos, durante este período.

## Abstract

A question that arises in equivariant bordism is the classification, up to bordism, of the smooth actions $(M^m, \Phi)$ of the group $G = Z_2^k$ on closed smooth $m$-dimensional manifolds $M^m$, with a given condition on the fixed point set of $\Phi$. Here, $Z_2^k$ is considered as the group generated by $k$ commuting involutions $T_1, T_2, \ldots, T_k$, and the fixed point set of $\Phi$ is $F = \bigcap_{i=1}^{k} F_{T_i}$, where $F_{T_i}$ is the set of points fixed by $T_i$.

In this direction, our aim in this work is to obtain the classification in question when the fixed point set is the disjoint union $RP(r) \cup RP(s)$, where $RP(r)$ denotes the $r$-dimensional real projective space, $r$ and $s$ are even, $r < s$ and $2r \neq s$. This classification is described in terms of the set of equivariant bordism classes of involutions with the same fixed point set. The explicit determination of this latter set is still an open problem; in order to partially bypass this gap, we additionally give an explicit description of this set when $(r, s) = (2, 2p)$, where $p$ is odd.

# Sumário


Capítulo 1. Introdução 5

Capítulo 2. Preliminares 13

2.1. Introdução 13

2.2. Bordismo de Variedades 14

2.3. Bordismo de Espaços Topológicos 16

2.4. Bordismo de Fibrados 18

2.5. Bordismo de Ações 20

2.6. Grupos de $Z_2$-Bordismo 22

2.7. Seqüência exata de Conner e Floyd 25

Capítulo 3. Bordismo de $(Z_2)^k$-Ações 29

3.1. Introdução 29

3.2. Bordismo Simultâneo de Fibrados 29

3.3. "Fixed Data" de $Z_2^k$-Ações 34

3.4. Duas Ações Especiais 39

Capítulo 4. $Z_2^k$-ações Fixando $RP(2m) \cup RP(2n)$ 45

4.1. Introdução 45

4.2. "Fixed data" de $Z_2^k$-ações Fixando $RP(2m) \cup RP(2n)$ 45

4.3. Classificação de $Z_2^k$-ações Fixando $RP(2m) \cup RP(2n)$ 58

Capítulo 5. Involuções Fixando $RP(2) \cup RP(4j+2)$ 67

5.1. Introdução 67

5.2. "Fixed Data" de Involuções Fixando $RP(2) \cup RP(4j+2)$ 68

5.3. Classificação de Involuções Fixando $RP(2) \cup RP(4j+2)$ 78

Apêndice A. Informações Adicionais 87

Apêndice. Referências Bibliográficas 93

CAPíTULO 1

# Introdução

Em seu monumental trabalho "Differentiable Periodic Maps" [**C-F**], P. Conner e E. Floyd introduziram a estratégia de se estudar propriedades de aplicações periódicas diferenciáveis em variedades fechadas $C^\infty$ através de técnicas de bordismo. Em linhas gerais, eles introduziram o conceito de *G-bordismo* ou *bordismo equivariante*, onde $G$ é um grupo de Lie arbitrário: dois pares $(M^m, \Phi)$, $(V^m, \Psi)$ (onde $M^m$, $V^m$ são variedades fechadas $C^\infty$ e $\Phi$, $\Psi$ são ações $C^\infty$ de $G$ em $M^m$ e $V^m$, respectivamente) são ditos $G$-bordantes se, e somente se, existe variedade $C^\infty$ $W^{m+1}$ com bordo e ação $C^\infty$ $\Theta$ de $G$ em $W^{m+1}$ tal que $\partial W^{m+1} = M^m \cup V^m$ e $\Theta\,|_{M^m \cup V^m} = \Phi \cup \Psi$. Isto determina o grupo de bordismo de ordem 2 $\mathfrak{I}_m(G)$, constituído pelas classes de bordismo $[M^m, \Phi]$, com adição dada pela união disjunta, o qual possui também uma estrutura de $\mathfrak{N}_*$-módulo, onde $\mathfrak{N}_*$ é o anel de bordismo não-orientado de Thom.

Se $M^m$ é variedade fechada $C^\infty$ e $\Phi$ é uma ação $C^\infty$ do grupo de Lie $G$ em $M^m$, então é bem conhecido o fato de que cada componente conexa de $F_\Phi = \{x \in M^m \mid \Phi(g, x) = x, \forall g \in G\}$ é uma subvariedade fechada de $M^m$, com as possibilidades de dimensões para tais variedades variando de 0 (um ponto de $M^m$) a $m$ (uma componente conexa de $M^m$). Neste contexto, aparece naturalmente e é de grande interesse a seguinte questão: fixados $G$ e $F = \bigcup_{i=0}^{n} F^i$, onde $F^i$ denota uma união disjunta finita arbitrária de variedades fechadas $i$-dimensionais, é possível encontrar variedade fechada $C^\infty$ $M$ e uma ação $\Phi$ de $G$ em $M$ tal que $F_\Phi = F$? Adicionalmente, é possível classificar tais ações a menos de difeomorfismos equivariantes? Evidentemente, da mesma forma que a classificação de variedades $M^m$ a menos de difeomorfismos para $m \geq 3$ é um problema praticamente inacessível, com mais razões isto também acontece na classificação em questão (por exemplo, duas ações na mesma variedade podem não ser equivariantemente difeomorfas). Desta maneira, a relação de equivalência mais branda introduzida por Conner e Floyd, dada pelo bordismo equivariante, é uma abordagem mais plausível na busca de respostas para a questão atrás formulada e, de fato, mostrou-se efetiva em alguns casos particulares interessantes. Sumarizando, fixados $G$ e $F = \bigcup_{i=0}^{n} F^i$, objetiva-se determinar as eventuais classes de $\alpha \in \mathfrak{I}_m(G)$, $m \geq n$, as quais contêm um representante $(M, \Phi)$ tal que $F_\Phi = F$.

Nesta linha de raciocínio, Conner e Floyd estudaram extensivamente em [**C-F**] o caso $G = Z_2$, ou seja, os pares $(M^m, T)$, onde $T : M^m \to M^m$ é uma involução $C^\infty$. Concernente a

este caso, um dos principais resultados de **[C-F]** nos diz que a classe de bordismo equivariante $[M^m, T]$ é completamente determinada pela classe de bordismo de $\eta \to F_T$, onde $\eta$ é o fibrado normal de $F$ em $M^m$. Desta forma, fixada $F$, a junção de informações sobre a K-teoria real de $F$ com o fato de que o bordismo de fibrados é determinado por números de Whitney, torna plausível a análise, a menos de bordismo equivariante, dos pares $(M^m, T)$ com $F_T = F$. Sob este prisma, e posteriormente ao trabalho de Conner e Floyd, vários autores atacaram casos particulares dessa questão, como em **[St3]** ($F = RP(2n)$), **[St2]** (onde $F$ é uma união arbitrária de produto de círculos), **[Ro]** (onde $F$ é uma união de dois espaços projetivos reais), **[To]** ($F$ =união de espaços projetivos, todos com a mesma dimensão ímpar) **[H-T2]** (onde $F$ é uma união arbitrária de espaços projetivos com dimensões ímpares), **[K-S]** (onde $F$ tem dimensão constante igual a $n$ e $m \geq 2n$), **[Pe8]** (onde $F = S^p \times S^q \cup \{ponto\}$) e **[Pe4]** (onde $F$ é a união de um produto arbitrário de esferas com um ponto). Em **[C-F]**, Conner e Floyd já haviam resolvido, através de seus métodos, os casos $F = S^n \cup \{ponto\}$ e quando $F$ é uma união de pontos; esses dois casos particulares trazem, como conseqüência, alguns interessantes resultados de Topologia Diferencial, a saber:

i) um ponto, ou mais geralmente, um número ímpar de pontos, não pode ser fixado por uma involução (com exceção da identidade atuando no conjunto de pontos);

ii) um número par de pontos pode ser fixado por uma involução com qualquer codimensão e, nesse caso, a involução borda equivariantemente;

iii) a união disjunta de uma esfera $n$-dimensional com um ponto não pode ser fixada por nenhuma involução, a menos que $n = 1, 2, 4$ ou 8; e para cada um de tais $n$, existe uma única involução, a menos de bordismo equivariante, fixando $S^n \cup \{ponto\}$, a qual tem codimensão $n$.

Tais resultados surpreendentes justificam o interesse, demonstrado posteriormente, na busca de soluções referentes a outros casos particulares.

Também em **[C-F]**, Conner e Floyd iniciaram, embora de maneira superficial, o estudo do caso $G = Z_2 \oplus Z_2 \oplus \cdots \oplus Z_2$ ($k$ cópias), ou seja, a análise do bordismo dos objetos $(M^m, \Phi)$, $\Phi = (T_1, T_2, \ldots, T_k)$, onde cada $T_i : M^m \to M^m$ é uma involução $C^\infty$ e $T_i \circ T_j = T_j \circ T_i$, $\forall i, j = 1, 2, \ldots, k$. Assim, os autores em questão obtiveram a classificação completa para o caso particular $k = 2$ e quando $F$ é a união de pontos, apesar de não estabelecerem nenhuma relação geral, em termos de bordismo, entre $(M^m, \Phi)$ e o conjunto de pontos fixos de $\Phi$ mais o fibrado normal.

Posteriormente, em seu importante trabalho **[St]**, R. E. Stong estendeu os resultados de Conner e Floyd para $k > 1$, introduzindo a *seqüência exata de bordismo de* $(Z_2^k, q)$*-variedades-fibrados*; uma conseqüência deste resultado é que a classe de bordismo equivariante de uma ação $(M^m, \Phi)$, $\Phi = (T_1, T_2, \ldots, T_k)$, é completamente determinada pela classe de bordismo simultâneo do "fixed data" de $\Phi$. Especificamente, seja $F = F_\Phi$ e $\eta \to F$ o fibrado normal de $F$ em $M^m$. Para cada seqüência $\rho = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$, onde $a_i = \pm 1$, existe um subfibrado $\varepsilon_\rho \to F$ de $\eta$ caracterizado pelo fato de que cada $T_i$ atua em $\varepsilon_\rho$ como $a_i$. Então $\eta \cong \bigoplus_\rho \varepsilon_\rho$, onde $\rho$ percorre todas as possíveis $2^k - 1$ seqüências acima descritas, com exceção de $(1, 1, 1, \ldots, 1)$; assim, o "fixed data" de $\Phi$ é definido como sendo o objeto $(F; \{\varepsilon_\rho\}_{\rho \neq (1,\ldots,1)})$, ou seja, $F$ acompanhado da lista de $2^k - 1$ fibrados $\{\varepsilon_\rho\}_\rho$. Em outras palavras, o resultado de Stong nos diz que $(M^m, \Phi)$ borda equivariantemente se, e somente se, a lista $\{\varepsilon_\rho\}_\rho$ borda simultaneamente. Agora, como o bordismo simultâneo de uma lista de fibrados é determinado por números característicos, o resultado em questão abriu perspectivas para o ataque a questões com mesma natureza das acima mencionadas para $k > 1$. Nesta direção, o primeiro resultado a surgir na literatura foi **[Ca]**: se $(M, \Phi)$ é uma ação de $Z_2^k$ fixando o espaço projetivo $RP(2n)$, então $(M, \Phi)$ é equivariantemente bordante a uma certa ação, denominada "twist", de $Z_2^k$ em $RP(2n) \times \cdots \times RP(2n)$ ($2^t$ cópias, $1 \leq t \leq k$). Este resultado generalizou o trabalho **[St3]**, onde havia sido provado que, se $(M, T)$ é uma involução fixando $RP(2n)$, então $(M, T)$ é equivariantemente bordante à involução "twist" $(RP(2n) \times RP(2n), S)$, $S(x, y) = (y, x)$.

Tendo como motivação o fato de que o resultado de Capobianco tinha sido obtido utilizando-se fortemente o fato de que o caso $k = 1$ era conhecido, P. Pergher iniciou estudos na direção de se analisar, para uma $F$ fixada, até que ponto a classificação para $k = 1$ produz informações sobre a classificação para $k > 1$. Tais estudos culminaram em uma série de resultados, os quais podem ser situados dentro do seguinte contexto geral: fixada uma $F = \bigcup_{i=0}^n F^i$ não-bordo, seja $\mathcal{A}_k$ a coleção formada por todas as classes de bordismo $\beta \in \mathfrak{I}_m(Z_2^k)$, $m \leq n$, tal que $\beta$ possui um representante $(M^n, \Phi)$ com $F_\Phi = F$. Sendo $F$ não-bordo, sabe-se que $\mathcal{A}_1$ é sempre finita **[K-S]**. Inicialmente questiona-se, em linha gerais, até que ponto $\mathcal{A}_1$ determina $\mathcal{A}_k$, $k > 1$. Com tal generalidade, porém, nada pode ser feito: de fato, existe uma ação de $Z_2^2$ em $RP(2)$ fixando três pontos, enquanto que, por outro lado, nenhuma involução pode fixar três pontos. Fugindo dessa generalidade, os resultados de P. Pergher podem ser colocados, então, dentro de um contexto mais específico. De fato, seja $(V, T)$ uma involução com "fixed data" $\eta \to F$. Em **[Pe8]** e **[Pe6]**, P. Pergher usou uma certa operação denotada por $\sigma\Gamma_t^k$, onde $1 \leq t \leq k$ e $\sigma : Z_2^k \to Z_2^k$ é um automorfismo, de tal sorte que $\sigma\Gamma_t^k(V, T)$ é uma $Z_2^k$-ação $((V)^{2^{t-1}}, \Phi)$ definida

no produto cartesiano de $2^{t-1}$ cópias de $V$, a qual fixa $F$ e cujo "fixed data" possui $2^{t-1}$ cópias de $\eta \to F$, $2^{t-1}-1$ cópias do fibrado tangente $\tau F \to F$ e $2^k - 2^t$ cópias do fibrado nulo $0 \to F$. A maneira como cada tal fibrado está situado no "fixed data" de $\Phi$, em termos das seqüências $\rho = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$, depende do automorfismo $\sigma$; por exemplo, se $\sigma$ é a identidade, então $\varepsilon_\rho = \eta$ caso $\rho = (-1, a_2, a_3, \ldots, a_t, 0, 0, ..., 0)$, $\varepsilon_\rho = \tau F$ caso $\rho = (1, a_2, a_3, \ldots, a_t, 0, 0, ..., 0)$ e $\varepsilon_\rho = 0$ caso algum $a_i = -1$ com $i > t$. Mais ainda, em particular, a definição de $\sigma\Gamma_t^k$ é de tal sorte que $\sigma\Gamma_t^k$*(involução "twist")*$= Z_2^k$*-ação "twist"*. Isto produz, a partir da involução $(V, T)$ fixando $F$, uma família de ações de $Z_2^k$ fixando $F$, a saber, $\{\sigma\Gamma_t^k(V,T), \sigma \in Aut(Z_2^k), 1 \leq t \leq k\}$. Mas esta coleção ainda pode, eventualmente, ser ampliada. De fato, em [**Pe9**], P. Pergher provou o seguinte teorema de estabilidade para ações de $Z_2^k$, generalizando o mesmo teorema concernente a $k = 1$, provado por Conner e Floyd em [**C-F**]: seja $(M, \Phi)$ ação de $Z_2^k$ com "fixed data" $(F, \{\varepsilon_\rho\}_\rho)$ e suponha que para algum $\rho_0$, $\varepsilon_{\rho_0}$ possua uma secção, ou seja, decomponha-se como $\varepsilon_{\rho_0} = \varepsilon'_{\rho_0} \oplus R$, onde $R \to F$ é o fibrado trivial unidimensional. Então a lista $(F, \{\mu_\rho\}_\rho)$, onde $\mu_\rho = \varepsilon_\rho$ se $\rho \neq \rho_0$ e $\mu_{\rho_0} = \varepsilon'_{\rho_0}$, é ainda o "fixed data" de alguma $Z_2^k$-ação $(N, \Psi)$ (evidentemente $dim(N) = dim(M) - 1$). Em outras palavras, a partir da $Z_2^k$-ação $(M, \Phi)$ fixando $F$ pode-se, eventualmente, produzir uma família de ações de $Z_2^k$ fixando $F$ através da remoção iterada de secções de $\varepsilon_\rho$, para cada $\rho$. Mais ainda, se $(M, \Phi)$ é uma ação de $Z_2^k$ obtida a partir de alguma $\sigma\Gamma_t^k(V,T)$ através de remoção de secções, então a classe de bordismo equivariante de $(M, \Phi)$ é completamente determinada pela classe de bordismo equivariante de $(V, T)$, ou seja, a associação $(V, T) \to (M, \Phi)$ é bem definida com respeito a bordismo.

Aplicando-se a discussão acima para cada elemento de $\mathcal{A}_1$ obtém-se uma bem definida coleção $\mathfrak{B}_k \subset \mathcal{A}_k$; ou seja, os elementos de $\mathfrak{B}_k$ são obtidos a partir dos elementos de $\mathcal{A}_1$ através das operações $\sigma\Gamma_t^k(V,T)$ e de remoção de secções. O contexto mais específico que inclui os resultados de P. Pergher caracteriza-se, então, pela seguinte formulação: para quais $F$ é verdade que $\mathfrak{B}_k = \mathcal{A}_k$, para $k > 1$?

O resultado de [**Ca**], atrás mencionado, nos diz que $\mathfrak{B}_k = \mathcal{A}_k$ caso $F = RP(2n)$; por outro lado, se $F = \{$*três pontos*$\}$ isto é falso. Embora este exemplo não invalide a possibilidade de ocorrência de outras $F$ com 3 ou mais componentes conexas tal que o resultado seja verdadeiro, é razoável questionar inicialmente com que grau de generalidade o fato é válido para $F$ com uma ou duas componentes.

Concernente ao caso em que $F$ possui uma única componente, em [**K-S**] é provado que se $(M^m, T)$ é uma involução fixando $F = F^n$, com dimensão constante igual a $n$, então $(M^m, T)$ é bordante à involução $(F^n \times F^n, twist)$ caso $m = 2n$, e $(M^m, T)$ borda equivariantemente

caso $m > 2n$. Logo em seguida, em [**K-S2**], os mesmos autores conjecturaram a seguinte generalização do fato acima, para $k > 1$: se $(M^m, \Phi)$ é uma ação de $Z_2^k$ fixando $F^n$ conexa, então $(M^m, \Phi)$ é bordante à ação $Z_2^k$-"twist" sobre $(F^n)^{2^k} = F^n \times F^n \times \cdots \times F^n$ caso $m = 2^k n$, e $(M^m, \Phi)$ borda equivariantemente caso $m > 2^k n$. Recentemente, em [**Pe5**], P. Pergher provou tal conjectura e, à luz da notação atrás estabelecida, este fato pode ser colocado da seguinte forma: sejam $\mathcal{A}_k^m = \mathcal{A}_k \cap \mathfrak{I}_m(Z_2^k)$ e $\mathfrak{B}_{k,s} \subset \mathfrak{B}_k$ a subcoleção de $\mathfrak{B}_k$ constituída pelas classes de bordismo de ações de $Z_2^k$ obtidas a partir de $\mathcal{A}_1^s$ através de operações $\sigma\Gamma_t^k(V,T)$ e de remoção de secções; então, se $F = F^n$ é conexa, temos que $\bigcup_{m \geq 2^{kn}} \mathcal{A}_k^m = \bigcup_{s \geq 2n} \mathfrak{B}_{k,s}$. Isso classifica, a menos de bordismo, as $Z_2^k$-ações $(M^m, \Phi)$ com $F_\Phi = F$ conexa e com $m \geq 2^k n$. Para $m < 2^k n$, e com esta generalidade, ainda trata-se de um problema em aberto (com exceção da situação na qual algum dos fibrados do "fixed data" de $\Phi$ possua dimensão maior que $n$; neste caso, como subproduto de [**Pe5**], a ação borda equivariantemente). No que se refere a particulares $F^n$, os únicos casos conhecidos são $F^n = RP(2s)$ ou $CP(2s)$, quando $\mathcal{A}_k = \mathfrak{B}_k$.

Passando ao caso em que $F$ possui duas componentes, a situação mais simples a considerar, evidentemente, é quando uma de tais componentes é um ponto. Em outras palavras, questiona-se até que ponto $\mathcal{A}_1$ determina $\mathcal{A}_k$ quando $F = V^n \cup \{ponto\}$, onde $V^n$ é uma variedade fechada conexa $n$-dimensional com $n \geq 1$. Conner e Floyd tinham obtido $\mathcal{A}_1$ para $V^n = S^n$ em [**C-F**], enquanto D. Royster determinou $\mathcal{A}_1$ para $V^n = RP(n)$ em [**Ro**].

Em [**Pe6**] iniciou-se o estudo discutido acima nos casos $V^n = S^n$ e $V^n = S^p \times S^q$, calculando $\mathcal{A}_1$ para $V^n = S^p \times S^q$ e utilizando o cálculo de $\mathcal{A}_1$ para $V^n = S^n$, de Conner e Floyd; P. Pergher mostrou que $\mathcal{A}_k = \mathfrak{B}_k$ em ambos os casos. É importante observar que, para cada $n$ (para cada $(p,q)$), tal que existe involução fixando $S^n \cup \{ponto\}$ ($S^p \times S^q \cup \{ponto\}$), a coleção $\mathcal{A}_1$ é unitária e, portanto, o fibrado normal $\eta \to S^n$ ($\eta \to S^p \times S^q$), correspondente ao único elemento de $\mathcal{A}_1$, não possui secções; desta forma, a obtenção de $\mathfrak{B}_k$ não passa pelo processo de remoção de secções nestes casos.

Uma boa parte dos procedimentos utilizados em [**Pe8**] mostraram-se gerais e, com isso em mãos, P. Pergher obteve em [**Pe6**], para qualquer $V^n$, uma descrição do "fixed data" de uma ação de $Z_2^k$ fixando $V^n \cup \{ponto\}$ em termos do bordismo individual de cada fibrado; com efeito, foi mostrado que tal "fixed data" possui, para algum $1 \leq t \leq k$, $2^k - 2^t$ fibrados nulos, $2^{t-1} - 1$ fibrados bordantes ao fibrado tangente $\tau V^n \to V^n$ e $2^{t-1}$ fibrados bordantes a fibrados normais $\eta \to V^n$ correspondentes a elementos de $\mathcal{A}_1$. Isso indica uma forte semelhança entre tal "fixed data" e o de uma ação do tipo $\sigma\Gamma_t^k(V,T)$, onde $[V,T] \in \mathcal{A}_1$, uma vez que foi mostrado também em [**Pe6**] que a distribuição dos fibrados no "fixed data", em termos das seqüências

$(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, é similar à distribuição dos fibrados correspondentes no "fixed data" de alguma ação $\sigma\Gamma_t^k(V,T)$.

Em particular, quando $\mathcal{A}_1$ é unitária, digamos $\mathcal{A}_1 = \{[V,T]\}$, isso significa que se uma $Z_2^k$ -ação $(M^m, \Phi)$ fixa $V^n \cup \{ponto\}$, então o "fixed data" de $\Phi$ é individualmente bordante ao "fixed data" $\sigma\Gamma_t^k(V,T)$, para algum $1 \leq t \leq k$ e algum $\sigma \in Aut(Z_2^k)$. Isso não classifica tais ações, uma vez que bordismo individual não implica em bordismo simultâneo de fibrados. A partir de tal resultado, e com cálculos adicionais de números característicos, ainda em [**Pe6**], foi resolvido o caso $V^n = RP(n)$ com $n$ ímpar, quando $\mathcal{A}_k = \mathfrak{B}_k$ e $\mathcal{A}_1$ é unitária (portanto, o processo de remoção de secções não ocorre).

Posteriormente, em [**Pe2**], foi resolvido o primeiro caso em que $\mathcal{A}_1$ não é unitária e o processo de remoção de secções é necessário; a saber, o caso $k = 2$ e $V^n = RP(n)$ com $n$ par. Tal caso foi obtido mediante a junção do resultado de [**Pe6**], com o teorema de estabilidade para $k = 2$ (também provado em [**Pe2**]), e com cálculos adicionais de números característicos; neste caso foi mostrado que $\mathcal{A}_2 = \mathfrak{B}_2$.

Em [**Pe9**], os resultados de [**Pe2**] foram generalizados para qualquer $k$; em outras palavras, o teorema de estabilidade foi estendido para todo $k$ e foi mostrado que $\mathcal{A}_k = \mathfrak{B}_k$ para $V^n = RP(n)$ com $n$ par.

Recentemente, em [**Pe7**], os resultados de [**Pe6**] foram essencialmente completados. Especificamente, foi mostrado que, para uma ação $(M^m, \Phi)$ fixando $V^n \cup \{ponto\}$, os $2^{t-1}$ fibrados do "fixed data" de $\Phi$ que são bordantes a fibrados normais $\eta \to V^n$, correspondentes a elementos de $\mathcal{A}_1$, pertencem todos à mesma classe de estabilidade; em outras palavras, o "fixed data" de $\Phi$ é individualmente bordante ao "fixed data" de um elemento de $\mathfrak{B}_k$. Ao mesmo tempo, foi mostrado que esse bordismo é, na realidade, simultâneo, o que significa que, para qualquer $V^n$, é verdade que $\mathcal{A}_k = \mathfrak{B}_k$ para todo $k$. Isso classifica, a menos de bordismo, as $Z_2^k$ -ações $(M^m, \Phi)$ com $F_\Phi = V^n \cup \{ponto\}$, módulo a obtenção de $\mathcal{A}_1$. Como casos particulares, ainda em [**Pe7**], foram obtidas as classificações explícitas quando $V^n$ é um produto arbitrário de esferas ($\mathcal{A}_1$ tinha sido obtido em [**Pe4**]) e quando $V^n$ é uma variedade arbitrária com $n$ ímpar ($\mathcal{A}_1$ foi determinado em [**Ro**]).

O objetivo deste trabalho é iniciar estudos concernentes ao fenômeno acima discutido, para o caso em que $F$ possui duas componentes conexas, ambas com dimensão maior que zero. Especificamente, analisaremos o caso $F = RP(2m) \cup RP(2n)$, com $0 < m < n$ e $2m \neq n$. O principal resultado é que, para tal $F$, também é verdade que $\mathcal{A}_k = \mathfrak{B}_k$ para todo $k$. Tal estudo segue as linhas desenvolvidas em [**Pe6**] e em [**Pe7**]. Inicialmente, imitamos as técnicas de [**Pe6**]

para obtermos uma descrição em termos de bordismo individual dos fibrados do "fixed data" de uma tal ação; salientamos que a obtenção de tal descrição mostrou-se consideravelmente mais complexa do que a obtenção da correspondente descrição desenvolvida para $V^n \cup \{ponto\}$ em **[Pe6]**, a qual é suavizada pelo fato de que nenhuma involução pode fixar um único ponto. Além disso, de fundamental importância foi a obtenção do Teorema 4.2.18, o qual reduz nossos estudos ao caso em que as ações são efetivas (essa abordagem simplificaria substancialmente o material de **[Pe6]**, no qual a possibilidade de ocorrência de involuções identidade em $\Phi$ tornou-se um sério complicador).

A seguir, adaptamos as técnicas desenvolvidas em **[Pe7]** para mostrar que os subfibrados normais $\eta \to RP(2m) \cup \mu \to RP(2n)$, que fazem parte do "fixed data" da ação, correspondentes à involução fixando $RP(2m) \cup RP(2n)$, pertencem todos à mesma classe de estabilidade e, adicionalmente, que o bordismo inicialmente individual é, na realidade, simultâneo. Esse é o material do Capítulo 4.

Para aplicarmos a classificação obtida no Capítulo 4 e exibir explicitamente os possíveis modelos das ações em discussão, devemos conhecer $\mathcal{A}_1$ para algum $F = RP(2m) \cup RP(2n)$. Assim, para exemplificar tal classificação, no Capítulo 5 obtemos $\mathcal{A}_1$ no caso particular $F = RP(2) \cup RP(2n)$, $n$ ímpar. Enfatizamos que o cálculo de $\mathcal{A}_1$ para $F = RP(2m) \cup RP(2n)$ é um problema ainda em aberto (Royster determinou $\mathcal{A}_1$ para $F = RP(r) \cup RP(s)$ em **[Ro]** para todos os pares $(r, s)$ com exceção do caso $r = 2m$, $s = 2n$, $m, n > 0$; recentemente encontramos, na literatura, referência sobre a resolução do caso particular $2m = 2n$). A obtenção de $\mathcal{A}_1$ para $F = RP(2) \cup RP(2n)$, $n$ ímpar é feita com o uso dos Teoremas de Conner e Floyd e com cálculos extensivos de números característicos; algumas técnicas que permeiam tais cálculos foram extraídos de **[P-S]**. Agradecemos o Prof. R. E. Stong por ter nos fornecido os principais passos para a obtenção de tal $\mathcal{A}_1$. O fato de que $2n \neq 2 \cdot 2$ quando $n > 1$ é ímpar, em junção com o resultado do Capítulo 4, nos fornece a classificação explícita das ações de $Z_2^k$ que fixam $RP(2) \cup RP(2n)$, $n > 1$ ímpar.

Nosso trabalho é constituído ainda pelos Capítulos 2 e 3, os quais são devotados aos pré-requisitos necessários para o desenvolvimento dos capítulos subseqüentes. O Capítulo 2 é constituído pelos pré-requisitos mais básicos, mais especificamente, é uma coletânea de tópicos fundamentais da teoria de bordismo equivariante desenvolvida por Conner e Floyd. No capítulo 3 reunimos tópicos mais específicos e próximos do material desenvolvido nos capítulos seguintes, versando sobre o bordismo de ações de $Z_2^k$. Em particular, explicamos o Teorema de Stong (que implica que o bordismo equivariante da ação é determinado pelo bordismo simultâneo do "fixed

data") e esmiuçamos uma série de fatos encontrados em trabalhos de P. Pergher relacionados com o trabalho ora desenvolvido.

Finalmente, no Apêndice, destacamos alguns resultados utilizados nos Capítulos 4 e 5 que não foram citados nos pré-requisitos por não estarem diretamente relacionados com os assuntos tratados nos Capítulos 2 e 3.

CAPíTULO 2

# Preliminares

## 2.1. Introdução

Neste capítulo apresentaremos noções básicas da teoria de bordismo equivariante, conforme desenvolvida por Conner e Floyd em **[C-F]**. Admitiremos que o leitor tenha noções de homologia, cohomologia, teoria de fibrados e classes de Stiefel-Whitney.

Quando falarmos em variedade, aplicação ou ação estaremos subentendendo uma variedade, aplicação ou ação $C^\infty$.

Uma variedade $M$ terá um número finito de componentes conexas, não necessariamente de mesma dimensão. Usaremos $M^n$ para denotar uma variedade tal que cada componente conexa possui dimensão $n$.

Da mesma forma, um fibrado $\zeta \to M$ será, eventualmente, uma união disjunta finita de fibrados, não necessariamente de mesma dimensão, sobre as componentes conexas de $M$, não necessariamente de mesma dimensão. Usaremos $\zeta^k \to M$ para denotar um fibrado quando a restrição deste fibrado a cada componente conexa de $M$ possui fibra de dimensão $k$.

Para uma variedade $M$, o símbolo $\partial M$ denotará o bordo de $M$.

Dados um fibrado $\zeta \to M$ e uma aplicação $f : N \to M$, denotaremos por $f!(\zeta)$ o fibrado induzido por $f$ ("pullback").

Diremos que $\zeta \to M$ é o fibrado nulo se a fibra sobre cada componente de $M$ for o espaço vetorial trivial $\{0\}$.

Para um fibrado $\zeta \to M$, o símbolo $w_i(\zeta)$ denotará sua classe de Stiefel-Whitney de dimensão $i$; $W(\zeta)$ denotará a classe total de Stiefel-Whitney de $\zeta$. Quando $\zeta$ for o fibrado tangente de $M$ denotaremos por $w_i(M)$ (ou simplesmente $w_i$, quando não houver possibilidade de confusão) e $W(M)$, respectivamente.

$BO(k)$ será o espaço classificante para fibrados vetoriais $k$-dimensionais.

$H_m(X)$ e $H^m(X)$ denotarão, respectivamente, os grupos de homologia e cohomologia com coeficientes em $Z_2$.

Denotaremos por $[M]_2$ a classe fundamental de homologia.

$RP(n)$ será o espaço projetivo real de dimensão $n$.

$Id$ será a aplicação identidade.

Quando não houver citação, os detalhes omitidos poderão ser obtidos de **[C-F]**. As seções seguintes serão apresentadas em uma estrutura semelhante que ressaltará a analogia entre as definições, notações e estruturas algébricas dos objetos em questão.

## 2.2. Bordismo de Variedades

DEFINIÇÃO 2.2.1. Variedade que borda:

Dizemos que uma variedade fechada $M$ borda se, e somente se, existe variedade compacta $W$ tal que $\partial W = M$.

DEFINIÇÃO 2.2.2. Variedades bordantes:

Dizemos que duas variedades fechadas $M_1$ e $M_2$ são bordantes se, e somente se, a união disjunta $M_1 \cup M_2$ borda.

LEMA 2.2.3. *A relação de bordismo de variedades é uma relação de equivalência no conjunto das classes de difeomorfismo de variedades.*

NOTAÇÃO 2.2.4. Adotaremos as seguintes notações:

- $[M] \longrightarrow$ a classe de equivalência a que $M$ pertence, denominada classe de bordismo não-orientado de $M$;
- $\mathfrak{N}_n \longrightarrow$ o conjunto das classes de bordismo de variedades de dimensão $n$, denominado grupo de bordismo não-orientado $n$-dimensional (veremos, a seguir, sua estrutura de grupo);
- $\mathfrak{N}_* \longrightarrow$ o conjunto de todas as classes de bordismo, denominado *anel de bordismo não-orientado* (veremos, a seguir, sua estrutura de anel).

LEMA 2.2.5. *A operação* $[M_1] + [M_2] = [M_1 \cup M_2]$ *(união disjunta) dá uma estrutura de grupo abeliano a* $\mathfrak{N}_*$*, sendo* $\mathfrak{N}_n$ *um subgrupo. A operação* $[M_1] \cdot [M_2] = [M_1 \times M_2]$ *completa uma estrutura de anel graduado comutativo com unidade em* $\mathfrak{N}_*$*.*

OBSERVAÇÃO 2.2.6. Note que:

- $\mathfrak{N}_* = \bigoplus_0^\infty \mathfrak{N}_i$;
- $[M] = 0$ se, e somente se, $M$ borda, e como $[M] = [M \cup \emptyset]$ usaremos, por convenção, que $[\emptyset] = 0$;
- $[M] = 1$ se, e somente se, $M$ está na mesma classe de bordismo da variedade constituída por apenas um ponto;

- $M_1^{n_1}$ e $M_2^{n_2}$ com $n_1 \neq n_2$ são bordantes se, e somente se, $M_1^{n_1}$ e $M_2^{n_2}$ bordam;
- Para qualquer variedade $M$ teremos que $[M] + [M] = [M \cup M]$ borda, pois $\partial(M \times [0,1]) = M \cup M$ e, portanto, toda classe de bordismo de variedades tem ordem 2 com respeito à adição.

DEFINIÇÃO 2.2.7. Números de Stiefel-Whitney:

Os inteiros módulo 2 $w_{p_1}^{r_1} w_{p_2}^{r_2} \cdots w_{p_s}^{r_s}[M]_2$ são chamados números de Stiefel-Whitney de $M$ (lembrando que $w_{p_i} = w_{p_i}(M)$ é a $p_i$-ésima classe de Stiefel-Whitney de $M$ e que $[M]_2$ é a classe fundamental de homologia com coeficientes em $Z_2$).

É claro que, se $M^n$ é uma variedade $n$-dimensional e $\sum j_i r_i \neq n$ então $w_{r_1}^{j_1} w_{r_2}^{j_2} \cdots w_{r_s}^{j_s}[M^n]_2 = 0$. Assim, associada a uma variedade $M$, existe uma coleção de inteiros módulo 2, obtida ao considerarmos os diferentes monômios $w_{r_1}^{j_1} w_{r_2}^{j_2} \cdots w_{r_s}^{j_s}$. Dizemos que duas variedades $M$ e $M'$ possuem os mesmos números de Stiefel-Whitney se $w_{r_1}^{j_1}(M) \cdots w_{r_s}^{j_s}(M)[M]_2 = w_{r_1}^{j_1}(M') \cdots w_{r_s}^{j_s}(M')[M']_2$ para qualquer monômio.

TEOREMA 2.2.8. *Se $\partial B = M$ então todos os números de Stiefel-Whitney de $M$ são nulos.* **[Po]**

TEOREMA 2.2.9. *Se todos os números de Stiefel-Whitney de uma variedade fechada $M$ forem nulos então existe $B$, variedade com bordo, tal que $\partial B = M$ (ou seja, $M$ borda).* **[Th]**

Estes dois teoremas implicam no

COROLÁRIO 2.2.10. *As variedades $M_1$ e $M_2$ pertencem à mesma classe de bordismo se, e somente se, possuem os mesmos números de Stiefel-Whitney.*

Em outras palavras, um elemento de $\mathfrak{N}_*$ é completamente caracterizado pelos números de Stiefel-Whitney de qualquer um de seus representantes. Usando esta informação e lembrando que $W(RP(n)) = (1+\alpha)^{n+1}$, onde $\alpha$ é o gerador de $H^1(RP(n))$, é possível verificar o seguinte

EXEMPLO 2.2.11. $RP(n)$ borda se, e somente se, $n$ é ímpar.

TEOREMA 2.2.12. *$\mathfrak{N}_*$ é uma álgebra polinomial graduada sobre $Z_2$ com um gerador em cada dimensão $n \neq 2^j - 1$ ($n \geq 0$).* **[Th]**

Uma coleção de variedades, representando os citados geradores, foi apresentada por **[Th]**, para $n$ par (os espaços projetivos reais $RP(n)$) e por **[Do]** para as dimensões restantes (variedades do tipo $\frac{S^i \times CP(k)}{(s,z) \sim (-s,\bar{z})}$, com $i$ e $k$ apropriados, onde $CP(k)$ é o espaço projetivo complexo e $\overline{z}$ é o complexo conjugado).

Geometricamente, o teorema acima significa que qualquer variedade fechada $M$ é bordante a uma união disjunta de variedades, cada uma delas sendo um produto cartesiano envolvendo as variedades acima citadas. Por exemplo, qualquer variedade de dimensão 4 ou é bordante a $RP(4)$, ou $RP(2) \times RP(2)$ ou $RP(4) \cup RP(2) \times RP(2)$.

## 2.3. Bordismo de Espaços Topológicos

DEFINIÇÃO 2.3.1. Variedade singular:

Fixado um espaço topológico $X$, uma variedade singular em $X$ é um par $(M, f)$ consistindo de uma variedade fechada $M$ e uma função contínua $f : M \to X$.

DEFINIÇÃO 2.3.2. Variedade singular que borda:

Dizemos que uma variedade singular $(M, f)$ borda se, e somente se, existe variedade compacta $W$ e uma função contínua $F : W \to X$ tal que $\partial W = M$ e $F \mid_M = f$.

DEFINIÇÃO 2.3.3. Variedades singulares bordantes:

Dizemos que duas variedades singulares $(M_1, f_1)$ e $(M_2, f_2)$ são bordantes se, e somente se, a união disjunta $(M_1 \cup M_2, f_1 \cup f_2)$ borda (onde $f_1 \cup f_2 \mid_{M_i} = f_i$).

LEMA 2.3.4. *A relação de bordismo de variedades singulares é uma relação de equivalência na coleção de variedades singulares.*

NOTAÇÃO 2.3.5. Adotaremos as seguintes notações:

- $[M, f] \longrightarrow$ a classe de equivalência a que $(M, f)$ pertence, denominada classe de bordismo de $f$;
- $\mathfrak{N}_n(X) \longrightarrow$ o conjunto das classes de bordismo de variedades singulares de dimensão $n$ (veremos, a seguir, sua estrutura de grupo);
- $\mathfrak{N}_*(X) \longrightarrow$ o conjunto de todas as classes de bordismo, denominado *grupo de bordismo não-orientado de* $X$ (veremos, a seguir, sua estrutura de $\mathfrak{N}_*$-módulo).

LEMA 2.3.6. *A operação* $[M_1, f_1] + [M_2, f_2] = [M_1 \cup M_2, f_1 \cup f_2]$ *(união disjunta) dá uma estrutura de grupo abeliano a* $\mathfrak{N}_*(X)$*, sendo* $\mathfrak{N}_n(X)$ *um subgrupo. A operação* $[M_1] \cdot [M_2, f] = [M_1 \times M_2, g]$*, onde* $g(m_1, m_2) = f(m_2)$ *completa uma estrutura de* $\mathfrak{N}_*$*-módulo graduado em* $\mathfrak{N}_*(X)$.

TEOREMA 2.3.7. *Se* $X$ *é um CW complexo finito então* $\mathfrak{N}_*(X)$ *é um* $\mathfrak{N}_*$*-módulo livre graduado, isomorfo a* $H_*(X) \otimes \mathfrak{N}_*$. **[C-F**, pg 55]

OBSERVAÇÃO 2.3.8. Note que:

- $\mathfrak{N}_*(X) = \bigoplus_0^\infty \mathfrak{N}_i(X)$;
- $[M, f] = 0$ se, e somente se, $(M, f)$ borda; por exemplo, se $N$ borda e $c : N \to X$ é uma função constante então $[N, c] = 0$;
- $(M_1^{n_1}, f_1)$ e $(M_2^{n_2}, f_2)$ com $n_1 \neq n_2$ são bordantes se, e somente se, $(M_1^{n_1}, f_1)$ e $(M_2^{n_2}, f_2)$ bordam;
- Para qualquer variedade singular $(M, f)$ teremos que $[M, f] + [M, f] = [M \cup M, f \cup f]$ borda, pois se $F : M \times [0, 1] \to X$ é tal que $F(m, r) = f(m)$ então $\partial(M \times [0, 1], F) = (M \cup M, f \cup f)$; portanto, toda classe de bordismo de variedades singulares tem ordem 2 com respeito à adição.
- Se $\{ponto\}$ é a variedade 0-dimensional constituída de apenas um ponto, existe um isomorfismo natural $\mathfrak{N}_*(\{ponto\}) \cong \mathfrak{N}_*$.
- Se $\Phi : X \to Y$ é uma função contínua entre espaços topológicos, existe o homomorfismo induzido $\Phi_* : \mathfrak{N}_*(X) \to \mathfrak{N}_*(Y)$, definido por $\Phi_*[M, f] = [M, \Phi \circ f]$; $\Phi_*$ é também um homomorfismo de grau zero de $\mathfrak{N}_*$-módulos graduados.

DEFINIÇÃO 2.3.9. Números característicos de uma variedade singular:

Seja $(M, f) \in \mathfrak{N}_*(X)$. Para cada classe de cohomologia $h \in H^m(X)$ o inteiro módulo 2 $w_{p_1}^{r_1} w_{p_2}^{r_2} \cdots w_{p_s}^{r_s} f^*(h)[M]_2$, onde $f^* : H^m(X) \to H^m(M)$ é a induzida em cohomologia, é chamado número característico de $(M, f)$ (ou de $f$).

É claro que, se $M^n$ é uma variedade $n$-dimensional e $m + \sum r_i p_i \neq n$ então $w_{p_1}^{r_1} w_{p_2}^{r_2} \cdots w_{p_s}^{r_s} f^*(h)[M^n]_2 = 0$.

Assim, associada a uma variedade singular $(M, f)$, existe uma coleção de inteiros módulo 2 obtida ao considerarmos os diferentes monômios $w_{p_1}^{r_1} w_{p_2}^{r_2} \cdots w_{p_s}^{r_s}$ e diferentes elementos de $H^*(X)$. Dizemos que duas variedades singulares $(M, f)$ e $(M', f')$ possuem os mesmos números característicos se $w_{p_1}^{r_1}(M) \cdots w_{p_s}^{r_s}(M) f^*(h)[M]_2 = w_{p_1}^{r_1}(M') \cdots w_{p_s}^{r_s}(M') f^*(h)[M']_2$ para quaisquer monômio e $h \in H^*(X)$.

TEOREMA 2.3.10. *Se $X$ é um CW complexo finito então $[M, f] = 0$ em $\mathfrak{N}_*(X)$ se, e somente se, todos os números característicos de $(M, f)$ se anulam.* [**C-F**, pg 54]

COROLÁRIO 2.3.11. *Duas variedades singulares são bordantes se, e somente se, possuem os mesmos números característicos.*

Observação 2.3.12. Note que os números característicos de $f$ coincidem com os números de Stiefel-Whitney de $M$ quando tomamos $h = 1 \in H^0(X)$. Em particular, quando $X = \{ponto\}$ é a variedade 0-dimensional constituída de apenas um ponto, teremos que os números de Stiefel-Whitney de $f$ coincidem exatamente com os números característicos de $M$ (o que nos daria uma forma indireta de verificar a observação feita acima de que $\mathfrak{N}_*\{ponto\} \cong \mathfrak{N}_*$).

## 2.4. Bordismo de Fibrados

Definição 2.4.1. Fibrado que borda:

Se $M$ é uma variedade fechada, dizemos que um fibrado vetorial $\zeta \to M$ borda se, e somente se, existe um fibrado $\varepsilon \to W$, onde $W$ é uma variedade compacta com $\partial W = M$ e tal que $\varepsilon\,|_M = \zeta$.

Observação 2.4.2. Note que se $\zeta \to M$ borda então $M$ borda.

Definição 2.4.3. Fibrados bordantes:

Dois fibrados sobre variedades fechadas $\zeta \to M$ e $\lambda \to N$ são bordantes se, e somente se, a união disjunta $\zeta \to M \cup \lambda \to N$ borda.

Lema 2.4.4. *A relação de bordismo de fibrados é uma relação de equivalência na coleção de fibrados sobre variedades fechadas.*

Notação 2.4.5. Adotaremos as seguintes notações:

- $[\zeta \to M]$ ou $[\zeta] \longrightarrow$ a classe de equivalência a que $\zeta \to M$ pertence, denominada classe de bordismo de $\zeta$;
- $\mathfrak{N}_{n;k} \longrightarrow$ o conjunto das classes de bordismo de fibrados de dimensão $k$ sobre variedades de dimensão $n$ (veremos, a seguir, sua estrutura de grupo);
- $\mathfrak{N}_{*;k} \longrightarrow$ o conjunto de todas as classes de bordismo de fibrados $k$-dimensionais, denominado *grupo de bordismo de fibrados* de dimensão $k$ (veremos, a seguir, sua estrutura de $\mathfrak{N}_*$-módulo);
- $\mathfrak{N}_{*;*} \longrightarrow$ o conjunto de todas as classes de bordismo de fibrados.

Lema 2.4.6. *A operação* $[\zeta_1 \to M_1] + [\zeta_2 \to M_2] = [\zeta_1 \to M_1 \cup \zeta_2 \to M_2]$ *(união disjunta) dá uma estrutura de grupo abeliano a* $\mathfrak{N}_{*;k}$*, sendo* $\mathfrak{N}_{n;k}$ *um subgrupo. A operação* $[M_1] \cdot [\zeta \to M_2] = [p_2!(\zeta) \to M_1 \times M_2]$*, onde* $p_2 : M_1 \times M_2 \to M_2$ *é a projeção, completa uma estrutura de* $\mathfrak{N}_*$*-módulo graduado em* $\mathfrak{N}_{*;k}$*.*

TEOREMA 2.4.7. *Seja $BO(k)$ o espaço universal classificante para fibrados vetoriais reais $k$-dimensionais. Então $\mathfrak{N}_{*;k} \cong \mathfrak{N}_*(BO(k))$.*

DEMONSTRAÇÃO. Dada classe $[\zeta \to M]$, seja $f$ uma aplicação classificante $f : M \to BO(k)$; definimos $\Phi[\zeta \to M] = [M, f]$. Para demonstrar o teorema verifica-se que a associação $\Phi : \mathfrak{N}_{*;k} \to \mathfrak{N}_*(BO(k))$, assim dada, é bem definida e um isomorfismo. □

NOTAÇÃO 2.4.8. De agora em diante usaremos $\mathfrak{N}_*(BO(k))$ e $\mathfrak{N}_n(BO(k))$ para nos referirmos aos grupos de bordismo de fibrados.

OBSERVAÇÃO 2.4.9. Note que:

- $\mathfrak{N}_*(BO(k)) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathfrak{N}_i(BO(k))$;
- $\mathfrak{N}_*(BO(*)) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathfrak{N}_*(BO(i))$;
- $[\zeta \to M] = 0$ se, e somente se, $[\zeta \to M]$ borda; por exemplo, se $N$ borda e $R^n \to N$ é o fibrado trivial $n$-dimensional então $[R^n \to N] = 0$;
- $[\zeta_1^{k_1} \to M^{n_1}]$ e $[\zeta_2^{k_2} \to M^{n_2}]$ com $n_1 \neq n_2$ e/ou $k_1 \neq k_2$ são bordantes se, e somente se, $[\zeta_1^{k_1} \to M^{n_1}]$ e $[\zeta_2^{k_2} \to M^{n_2}]$ bordam;
- Para qualquer fibrado sobre variedade fechada $\zeta \to M$ teremos que $[\zeta \to M] + [\zeta \to M] = [\zeta \to M \cup \zeta \to M]$ borda, pois se $p : M \times [0,1] \to M$ é a projeção então $\partial(p!(\zeta) \to (M \times [0,1])) = (\zeta \to M \cup \zeta \to M)$; portanto, toda classe de bordismo de variedades singulares tem ordem 2 com respeito à adição;
- É claro que $\mathfrak{N}_*(BO(0)) \cong \mathfrak{N}_*$.

Segundo o Teorema 2.3.10, um elemento $[\zeta \to M]$ de $\mathfrak{N}_*(BO(k))$ é determinado por seus números característicos. Como vimos, se $f$ é uma aplicação classificante para $\zeta$, para cada classe de cohomologia $h \in H^m(BO(k))$ teremos o número característico $w_{p_1}^{r_1} w_{p_2}^{r_2} \cdots w_{p_s}^{r_s} f^*(h)[BO(k)]_2$. Mas $H^*(BO(k))$ é a álgebra polinomial $Z_2[v_1, v_2 \ldots, v_k]$, onde $v_i \in H^i(BO(k))$ é a i-ésima classe de Stiefel-Whitney do fibrado universal $\gamma^k \to BO(k)$. Assim, um monômio básico $h \in H^m(BO(k))$ pode ser escrito como $h = v_{u_1}^{q_1} v_{u_2}^{q_2} \ldots v_{u_s}^{q_s}$ e, portanto, $f^*(h) = \overline{v}_{u_1}^{q_1} \overline{v}_{u_2}^{q_2} \ldots \overline{v}_{u_s}^{q_s}$, onde $\overline{v}_{u_i} = w_{u_i}(\zeta) \in H^{u_i}(M)$ é a $u_i$-ésima classe de Stiefel-Whitney de $\zeta$. Temos, então, a seguinte

DEFINIÇÃO 2.4.10. Números característicos de um fibrado:

Os inteiros módulo 2 $w_{p_1}^{r_1} w_{p_2}^{r_2} \cdots w_{p_s}^{r_s} \overline{v}_{u_1}^{q_1} \overline{v}_{u_2}^{q_2} \ldots \overline{v}_{u_s}^{q_s} [M]_2$ são chamados números característicos do fibrado $\zeta$.

É claro que $w_{p_1}^{r_1}w_{p_2}^{r_2}\cdots w_{p_s}^{r_s}\overline{v}_{u_1}^{q_1}\overline{v}_{u_2}^{q_2}\ldots\overline{v}_{u_s}^{q_s}[M]_2 = 0$ se $M^n$ é uma variedade $n$-dimensional e $\sum r_i p_i + \sum q_j u_j \neq n$.

Assim, associado a um fibrado $\zeta \to M$, existe uma coleção de inteiros módulo 2 obtida ao considerarmos os diferentes monômios $w_{p_1}^{r_1}w_{p_2}^{r_2}\cdots w_{p_s}^{r_s}\overline{v}_{u_1}^{q_1}\overline{v}_{u_2}^{q_2}\ldots\overline{v}_{u_s}^{q_s}$. Dizemos que dois fibrados $\zeta \to M$ e $\zeta' \to M'$ possuem os mesmos números característicos se

$$w_{p_1}^{r_1}(M)\cdots w_{p_s}^{r_s}(M)\overline{v}_{u_1}^{q_1}(\zeta)\ldots\overline{v}_{u_s}^{q_s}(\zeta)[M]_2 = w_{p_1}^{r_1}(M')\cdots w_{p_s}^{r_s}(M')\overline{v}_{u_1}^{q_1}(\zeta')\ldots\overline{v}_{u_s}^{q_s}(\zeta')[M']_2$$

para qualquer monômio.

Como vimos acima, um elemento do grupo de bordismo de fibrados pode ser visto como um elemento de um grupo de bordismo de variedades singulares. Assim, obtemos um corolário do Teorema 2.3.10, análogo ao Corolário 2.3.11:

Corolário 2.4.11. *Dois fibrados são bordantes se, e somente se, possuem os mesmos números característicos.*

Observação 2.4.12. Note que os números característicos de $[\zeta \to M]$ coincidem com os números de Stiefel-Whitney de $M$ quando $\zeta$ é trivial. Em particular, se $[\zeta \to M]$ é um elemento do grupo de bordismo de fibrados 0-dimensionais então os seus números característicos coincidem com os números de Stiefel-Whitney de $M$ (o que está de acordo com a observação feita acima de que $\mathfrak{N}_*(BO(0)) \cong \mathfrak{N}_*$).

## 2.5. Bordismo de Ações

Definição 2.5.1. Ação:

Sejam $G$ um grupo de Lie e $M$ uma variedade. Uma ação $\Psi$ de $G$ em $M$, que denotaremos por $(M, \Psi)$, é uma aplicação $\Psi : G \times M \to M$ tal que:

i) $\Psi(e, m) = m$ se $e$ é o elemento neutro de $G$.

ii) $\Psi(g_1, (\Psi(g_2, m)) = \Psi(g_1 g_2, m)$.

Definição 2.5.2. Ação efetiva:

Dizemos que uma ação $(M, \Psi)$ é efetiva se $\{g \in G \mid \Psi(g, m) = m, \forall m \in M\} = \{e\}$, ou seja, se o único elemento de $G$ que atua como identidade é o elemento neutro.

Definição 2.5.3. Ação livre:

Dizemos que uma ação $(M, \Psi)$ é livre se $\Psi(g, m) = m \Rightarrow g = e$, para todo $m \in M$, ou seja, se o único elemento de $G$ que fixa $m$ é o elemento neutro, para todo $m \in M$.

Definição 2.5.4. Subconjunto invariante

Seja uma ação $(M, \Psi)$. Dizemos que $A \subset M$ é invariante sob $G$ se $\Psi(G \times A) \subset A$.

Como as definições de bordismo de ações e bordismo de ações livres diferem somente pelo fato de considerarmos ações sem restrição no primeiro caso e apenas ações livres no segundo, apresentaremos as definições simultaneamente:

DEFINIÇÃO 2.5.5. Ação (livre) que borda equivariantemente:

Se $M$ é uma variedade fechada, dizemos que uma ação (livre) $(M, \Psi)$ borda equivariantemente se, e somente se, existe variedade compacta $W$ e uma ação (livre) $(W, \Upsilon)$ tal que $\partial W = M$ e $\Upsilon \mid_M = \Psi$.

DEFINIÇÃO 2.5.6. Ações (livres) equivariantemente bordantes:

Dizemos que duas ações (livres) $(M_1, \Psi_1)$ e $(M_2, \Psi_2)$, sobre variedades fechadas, são equivariantemente bordantes se, e somente se, a união disjunta $(M_1 \cup M_2, \Psi_1 \cup \Psi_2)$ borda como ação (livre) (onde $\Psi_1 \cup \Psi_2 \mid_{M_i} = \Psi_i$).

LEMA 2.5.7. *A relação de bordismo de ações (livres) é uma relação de equivalência na coleção de ações (livres) $C^\infty$ sobre variedades fechadas.*

NOTAÇÃO 2.5.8. Adotaremos as seguintes notações:

- $[M, \Psi] \longrightarrow$ a classe de equivalência a que $(M, \Psi)$ pertence, entre as classes de bordismo de ações;
- $[M, \Psi]_L \longrightarrow$ a classe de equivalência a que $(M, \Psi)$ pertence, entre as classes de bordismo de ações livres;
- $\mathfrak{I}_n(G) \longrightarrow$ o grupo de classes de bordismo de ações do grupo $G$ em variedades de dimensão $n$;
- $\mathfrak{N}_n(G) \longrightarrow$ o grupo de classes de bordismo de ações livres do grupo $G$ em variedades de dimensão $n$;
- $\mathfrak{I}_*(G) \longrightarrow$ o conjunto de todas as classes de bordismo de ações do grupo $G$, denominado *grupo de $G$-bordismo irrestrito não-orientado*;
- $\mathfrak{N}_*(G) \longrightarrow$ o conjunto de todas as classes de bordismo de ações livres do grupo $G$, denominado *grupo de $G$-bordismo principal não-orientado.*

LEMA 2.5.9. *A operação $[M_1, \Psi_1] + [M_2, \Psi_2] = [M_1 \cup M_2, \Psi_1 \cup \Psi_2]$ ($[M_1, \Psi_1]_L + [M_2, \Psi_2]_L = [M_1 \cup M_2, \Psi_1 \cup \Psi_2]_L$) dá uma estrutura de grupo abeliano a $\mathfrak{I}_*(G)$ ($\mathfrak{N}_*(G)$), sendo $\mathfrak{I}_n(G)$ ($\mathfrak{N}_n(G)$) um subgrupo. A operação $[M_1] \cdot [M_2, \Psi] = [M_1 \times M_2, \Upsilon]$ ($[M_1] \cdot [M_2, \Psi]_L = [M_1 \times M_2, \Upsilon]_L$), onde $\Upsilon : G \times M_1 \times M_2 \to M_1 \times M_2$ é tal que $\Upsilon(g, (m_1, m_2)) = (m_1, \Psi(g, m_2))$, completa uma estrutura de $\mathfrak{N}_*$-módulo graduado em $\mathfrak{I}_*(G)$ ($\mathfrak{N}_*(G)$).*

Observação 2.5.10. Note que:

- $\mathfrak{I}_*(G) = \bigoplus_0^\infty \mathfrak{I}_i(G)$;
- $\mathfrak{N}_*(G) = \bigoplus_0^\infty \mathfrak{N}_i(G)$;
- $[M, \Psi] = 0$ se, e somente se, $(M, \Psi)$ borda; por exemplo, se $M$ borda e $\Psi$ é uma ação do grupo $G$ em $M$ onde $\Psi(g, x) = x$, para todo elemento $g \in G$ e todo $x \in M$, então $[M, \Psi] = 0$;
- $[M, \Psi]_L = 0$ se, e somente se, $(M, \Psi)$ borda; por exemplo, se $N$ borda e $(M, \Psi)$ é uma ação livre do grupo $G$ em $M$ então $[N] \cdot [M, \Psi]_L = 0$ (isto pode ser visto pela estrutura de $\mathfrak{N}_*$-módulo);
- $(M_1^{n_1}, \Psi_1)$ e $(M_2^{n_2}, \Psi_2)$ com $n_1 \neq n_2$ são bordantes se, e somente se, $(M_1^{n_1}, \Psi_1)$ e $(M_2^{n_2}, \Psi_2)$ bordam (tanto para bordismo de ações quanto para bordismo de ações livres);
- Para qualquer ação (livre) $(M, \Psi)$ teremos que $[M, \Psi] + [M, \Psi] = [M \cup M, \Psi \cup \Psi]$ ($[M, \Psi]_L + [M, \Psi]_L = [M \cup M, \Psi \cup \Psi]_L$) borda, pois tomando a ação $(M \times [0, 1], \Upsilon)$ onde $\Upsilon : G \times M \times [0, 1] \to M \times [0, 1]$ é tal que $\Upsilon(g, (m, r)) = (\Psi(g, m), r)$ então $\partial(M \times [0, 1], \Upsilon) = (M \cup M, \Psi \cup \Psi)$; portanto, toda classe de bordismo de ações (livres) tem ordem 2 com respeito à adição.

Nas próximas seções analisaremos com mais detalhes, como casos particulares, os grupos de $Z_2$-bordismo principal e irrestrito. Isto nos ajudará a estudar, no próximo capítulo, os grupos de $Z_2 \oplus Z_2 \oplus \cdots \oplus Z_2$-bordismo.

## 2.6. Grupos de $Z_2$-Bordismo

Definição 2.6.1. Involução

Uma involução $T$ em uma variedade $M$ é uma aplicação $T : M \to M$ com $T \circ T = Id$.

Observação 2.6.2. Note que uma involução $T$ define uma ação $\Psi$ de $Z_2$ em $M$, já que podemos identificar $\{Id, T\}$ mais a operação de composição com o grupo $Z_2$. Assim, $(M, \Psi)$ é uma $Z_2$-ação onde $\Psi : G \times M \to M$ é tal que $\Psi(Id, m) = m$ e $\Psi(T, m) = T(m)$. Usaremos simplesmente $(M, T)$ para indicar a $Z_2$-ação $(M, \Psi)$.

Definição 2.6.3. Conjunto de pontos fixos de uma involução:

Dada uma involução ($Z_2$-ação) $(M, T)$, o conjunto $F_T = \{x \in M \mid T(x) = x\}$ é chamado conjunto de pontos fixos da involução.

DEFINIÇÃO 2.6.4. Involução sem pontos fixos:

Dizemos que $(M, T)$ é uma involução sem pontos fixos quando $F_T = \emptyset$.

OBSERVAÇÃO 2.6.5. Observe que dizer que $(M, T)$ é uma involução sem pontos fixos é equivalente a dizer que a $Z_2$-ação $(M, T)$ é livre.

Reescreveremos as definições e notações feitas na seção anterior, agora, para o caso particular em que $G = Z_2$. A estrutura algébrica já está subentendida. Como na seção anterior, trataremos simultaneamente de involuções e de involuções sem pontos fixos, correspondendo a $Z_2$-ações e $Z_2$-ações livres, respectivamente.

DEFINIÇÃO 2.6.6. Involução (sem pontos fixos) que borda

Se $M$ é uma variedade fechada, dizemos que uma involução (sem pontos fixos) $(M, T)$ borda se, e somente se, existe variedade compacta $W$ e uma involução (sem pontos fixos) $(W, S)$ tal que $\partial W = M$ e $S\,|_M = T$.

DEFINIÇÃO 2.6.7. Involuções (sem pontos fixos) que bordam.

Dizemos que duas involuções (sem pontos fixos) $(M_1, T_1)$ e $(M_2, T_2)$, sobre variedades fechadas, são bordantes se, e somente se, a união disjunta $(M_1 \cup M_2, T_1 \cup T_2)$ borda como involução (sem pontos fixos) (onde $T_1 \cup T_2\,|_{M_i} = T_i$).

LEMA 2.6.8. *A relação de bordismo de involuções (sem pontos fixos) é uma relação de equivalência na coleção de involuções (sem pontos fixos) $C^\infty$ sobre variedades fechadas.*

NOTAÇÃO 2.6.9. Adotaremos as seguintes notações:

- $[M, T] \longrightarrow$ a classe de equivalência a que $(M, T)$ pertence, entre as classes de bordismo de involuções;
- $[M, T]_L \longrightarrow$ a classe de equivalência a que $(M, T)$ pertence, entre as classes de bordismo de involuções sem pontos fixos;
- $\mathfrak{I}_n(Z_2) \longrightarrow$ o grupo de classes de bordismo de involuções em variedades de dimensão $n$;
- $\mathfrak{N}_n(Z_2) \longrightarrow$ o grupo de classes de bordismo de involuções sem pontos fixos em variedades de dimensão $n$;
- $\mathfrak{I}_*(Z_2) \longrightarrow$ o conjunto de todas as classes de bordismo de involuções, denominado *grupo de $Z_2$-bordismo irrestrito não-orientado*;

- $\mathfrak{N}_*(Z_2) \longrightarrow$ o conjunto de todas as classes de bordismo de involuções sem pontos fixos, denominado *grupo de $Z_2$-bordismo principal não-orientado.*

DEFINIÇÃO 2.6.10. Fibrado linha canônico associado a uma involução sem pontos fixos:

Dada uma involução sem pontos fixos $(M, T)$, considere o quociente $\frac{M}{T}$, que também é uma variedade fechada. Definimos o fibrado linha canônico associado a $T$ como sendo $\xi \to \frac{M}{T}$, onde o espaço total de $\xi$ é $\frac{M\times R}{(m,r)\sim(T(m),-r)}$.

TEOREMA 2.6.11. *A associação $[M, T]_L \to [\xi \to \frac{M}{T}]$ define um isomorfismo de $\mathfrak{N}_*$-módulos entre $\mathfrak{N}_*(Z_2)$ e $\mathfrak{N}_*(BO(1))$.* [**C-F**, pg 71]

Assim, comparar duas classes de involuções sem pontos fixos se resume em comparar duas classes de fibrados unidimensionais e, para isso, segundo o Corolário 2.4.11, basta compararmos os números característicos. Seja $W(\xi) = 1 + c$. Isto nos leva a formular a seguinte

DEFINIÇÃO 2.6.12. Números de involução:

Os inteiros módulo 2 $w_{p_1}^{r_1} w_{p_2}^{r_2} \cdots w_{p_s}^{r_s} c^q [\frac{M}{T}]_2$ são chamados números de involução de $(M, T)$, onde $w_{p_i}$ são as classes do fibrado tangente de $\frac{M}{T}$.

OBSERVAÇÃO 2.6.13. $H^*(BO(1))$ é a álgebra polinomial $Z_2[v_1]$, onde $v_1 \in H^1(BO(1))$ é a primeira classe de Stiefel-Whitney do fibrado universal $\gamma^1 \to BO(1)$. Tomemos $f : \frac{M}{T} \to BO(1)$ uma aplicação classificante para $\xi$. Então $c = f^*(v_1) \in H^1(\frac{M}{T})$.

DEFINIÇÃO 2.6.14. Classe característica de uma involução:

A classe $c \in H^1(\frac{M}{T})$ será chamada de classe característica da involução $(M, T)$.

Temos, portanto, outro corolário do Teorema 2.3.10:

COROLÁRIO 2.6.15. *Duas involuções sem pontos fixos são bordantes se, e somente se, possuem os mesmos números de involução.*

TEOREMA 2.6.16. *$\mathfrak{N}_*(Z_2)$ é um $\mathfrak{N}_*$-módulo livre graduado, com um gerador em cada dimensão. Suponha que $\{(X^n, T)\}_n$ seja uma coleção de involuções sem pontos fixos tal que, para cada $n \geq 0$, o número de involução $c^n \left[\frac{X^n}{T}\right]_2$ de $(X^n, T)$ é não-nulo. Então $\{[X^n, T]_L\}_n$ é uma base homogênea para o $\mathfrak{N}_*$-módulo livre graduado $\mathfrak{N}_*(Z_2)$. Em particular, se $S^n$ é a n-esfera e $A : S^n \to S^n$ é a antípoda, temos que $\{[S^n, A]_L, n = 1, 2, .....\}$ é uma base para o $\mathfrak{N}_*$-módulo livre $\mathfrak{N}_*(Z_2)$.* [**C-F**, pg 74]

Observação 2.6.17. A primeira afirmação deste teorema decorre de 2.3.7. O teorema acima nos diz que para cada elemento $[M^n, T]_L \in \mathfrak{N}_n(Z_2)$ existe uma única expressão $[M^n, T]_L = \sum_{i=0}^{n} [V^i][S^{n-i}, A]_L$.

Se $(M, T)$ é uma involução onde $F_T \neq \emptyset$ então não é necessariamente verdade que $\frac{M}{T}$ seja uma variedade fechada (por exemplo, se $M = S^1 \subset R^2$ e $T$ é a reflexão em uma coordenada então $\frac{M}{T}$ é o disco $D^1$). Assim, a ferramenta que utilizaremos para comparar duas involuções em $\mathfrak{I}_*(Z_2)$ não pode ser a mesma que utilizamos acima para comparar duas involuções em $\mathfrak{N}_*(Z_2)$. Esta ferramenta irá decorrer de um resultado de **[C-F]** que, devido à sua importância, iremos discuti-lo na próxima seção, separadamente. Este resultado é a

## 2.7. Seqüência exata de Conner e Floyd

Seja o fibrado vetorial $\eta \to V = \cup \eta_i^{k_i} \to V_i^{n_i}$, onde $V$ é uma variedade fechada e $i$ indexa as componentes conexas de $V$. Existe o fibrado em esferas associado $S(\eta) \to V = \cup S(\eta_i^{k_i}) \to V_i^{n_i}$ com fibra $S^{k_i - 1}$ sobre $V_i$. Se $k_i \geq 1$, o espaço total $S(\eta_i^{k_i})$ é uma variedade fechada $(n_i + k_i - 1)$-dimensional. Se $k_i = 0$, ou seja, se $\eta_i^{k_i}$ é o fibrado nulo, então $S(\eta_i^{k_i}) = \emptyset$. Se ao menos um dos $\eta_i^{k_i}$ é não nulo, existe uma involução sem pontos fixos $A : S(\eta) \to S(\eta)$ atuando como antipodal em cada fibra (uma vez que $A$ comuta com qualquer elemento do grupo ortogonal $O(k)$). Temos então a

Definição 2.7.1. Fibrado involução:

Dizemos que $(S(\eta), A)$ é o fibrado involução associado a $\eta$.

Definição 2.7.2. Fibrado projetivo:

O fibrado $RP(\eta) \to V$, com espaço total $RP(\eta) = \frac{S(\eta)}{A}$ e projeção $p$, é chamado de fibrado projetivo associado a $\eta$ (observe que a fibra sobre $V_i$ é $RP(k_i - 1)$ se $k_i \geq 1$).

Teorema 2.7.3. *Dada involução $(M, T)$, cada componente conexa do conjunto de pontos fixos $F_T = \{x \in M \mid T(x) = x\}$ é subvariedade fechada de alguma componente conexa de $M$. Além disso, $F_T$ é constituído de um número finito de componentes conexas.* **[M-Z]**

Para facilitar, diremos que uma involução $(M, T)$ fixa $\eta \to F_T$ significando que $\eta \to F_T$ é o fibrado normal do conjunto de pontos fixos $F_T$ em $M$.

Teorema 2.7.4. *Se $(M, T)$ fixa $\eta \to F_T$, seja $R \to F_T$ o fibrado trivial unidimensional sobre cada componente de $F_T$. Então $RP(\eta \oplus R)$ é uma variedade fechada e $[M] = [RP(\eta \oplus R)]$ em $\mathfrak{N}_*$.* **[C-F**, pg 72]

Dada uma involução $(M^n, T)$, para cada $k$, $0 \leq k \leq n$, teremos os fibrados normais $\eta^{n-k} \to F^k$, onde $F^k \subset M^n$ é a união das componentes $k$-dimensionais de $F_T$. Então $(M^n, T)$ fixa

$$\begin{array}{ccc} \eta & & \eta^{n-k} \\ \downarrow & = \bigcup_{k=0}^{n} & \downarrow \\ F_T & & F^k \end{array} .$$

Sendo $\mathfrak{M}_n = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathfrak{N}_{n-k}(BO(k))$, então $[\eta \to F_T] \in \mathfrak{M}_n$.

Fazendo $\mathfrak{M}_* = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathfrak{M}_i$ teremos que, se $(M, T)$ é uma involução (agora sem restrição às dimensões das componentes conexas) fixando $\eta \to F_T$ então $[\eta \to F_T] \in \mathfrak{M}_*$.

Definimos $j_* : \mathfrak{I}_*(Z_2) \to \mathfrak{M}_*$ como $j_*[M, T] = [\eta \to F_T]$ se $F_T \neq \emptyset$ e $j_*[M, T] = 0$ se $(M, T)$ é uma involução sem pontos fixos.

Agora, dado um fibrado sobre variedade fechada $\eta \to N$, definimos $\partial : \mathfrak{M}_* \to \mathfrak{N}_*(Z_2)$ como $\partial[\eta \to N] = 0$ se $\eta$ é o fibrado nulo e $\partial[\eta \to N] = [S(\eta), A]_L$ se $\eta$ não é o fibrado nulo, onde $(S(\eta), A)$ é o fibrado involução associado a $\eta$, como definido acima.

Não é difícil de se provar que $j_*$ e $\partial$ são funções bem definidas e homomorfismos de $\mathfrak{N}_*$-módulos graduados, com graus 0 e $-1$, respectivamente. Assim, temos o

Teorema 2.7.5. *A seqüência*

$$0 \to \mathfrak{I}_*(Z_2) \xrightarrow[j_*]{} \mathfrak{M}_* \xrightarrow[\partial]{} \mathfrak{N}_*(Z_2) \to 0$$

*é exata "split".* [**C-F**, pg 78]

Este teorema fornece três informações que, pela importância, apresentaremos como corolários:

Corolário 2.7.6. *Duas involuções são bordantes se, e somente se, os correspondentes fibrados normais aos conjuntos de pontos fixos são bordantes.*

Observação 2.7.7. Este resultado implica que, se $(M, T)$ é uma involução sem pontos fixos então $(M, T)$ borda, já que o conjunto de pontos fixos é vazio.

Corolário 2.7.8. *Para cada $n \geq 0$, $\mathfrak{M}_n \cong \mathfrak{I}_n(Z_2) \oplus \mathfrak{N}_{n-1}(Z_2)$.*

Observação 2.7.9. As dimensões de $\mathfrak{M}_n$ e $\mathfrak{N}_{n-1}(Z_2)$ podem ser determinadas, respectivamente, pelos Teoremas 2.3.7 e 2.6.16. Podemos, portanto, obter as ordens dos grupos $\mathfrak{I}_n(Z_2)$. Por exemplo, pode-se mostrar que as ordens de $\mathfrak{I}_4(Z_2)$, $\mathfrak{I}_5(Z_2)$ e $\mathfrak{I}_6(Z_2)$ são, respectivamente, 128, 512 e 524 288.

Corolário 2.7.10. *Existe uma involução $(M, T)$ fixando fibrado bordante a $\eta \to N$ se, e somente se, $\partial[\eta \to N] = 0$ em $\mathfrak{N}_*(Z_2)$.*

OBSERVAÇÃO 2.7.11. Se $\eta \to N$ é o fibrado nulo então $\partial[\eta \to N] = 0$ e $(N, Id)$ é uma involução fixando $\eta \to N$.

OBSERVAÇÃO 2.7.12. Na verdade, a demonstração do teorema da seqüência exata de Conner e Floyd (que não foi apresentada aqui) diz mais que o próprio teorema. Ela diz que se $\partial[\eta \to N] = 0$ então existe involução $(M, T)$ tal que o fibrado normal ao conjunto de pontos fixos é exatamente $\eta \to N$ (e não apenas bordante a $\eta \to N$, conforme o corolário).

Assim, podemos obter informações sobre a existência de involuções cujo fibrado normal ao conjunto de pontos fixos é um determinado $\eta \to N$. Por exemplo, dado um $\eta \to N$, se $\partial[\eta \to N] \neq 0$ então não existe $(M, T)$ fixando fibrado bordante a $\eta \to N$. Assim, temos um exemplo explícito se $N = \{ponto\}$ (variedade 0-dimensional constituída de apenas um ponto). Qualquer fibrado sobre um ponto é trivial e $\partial[R^n \to \{ponto\}] = [S^{n-1}, A]_L \neq 0$ para $n \geq 1$ e $\partial[R^0 \to \{ponto\}] = 0$. Concluímos que a única involução fixando apenas um ponto é bordante a $(\{ponto\}, Id)$. Em outras palavras, nenhuma involução $(M^n, T)$, com $n \geq 1$, pode fixar um único ponto.

Vimos, então, que calculando $[S(\eta \to V), A]_L$ poderemos obter informações sobre as involuções que fixam $\eta \to V$. Na seção anterior vimos também que uma ferramenta para analisar classes de bordismo de involuções sem pontos fixos é a coleção de números de involução. Os números de involução de $[S(\eta), A]_L$ são do tipo $w_{p_1}^{r_1} w_{p_2}^{r_2} \cdots w_{p_s}^{r_s} c^q [RP(\eta)]_2$, onde $w_{p_i}^{r_i}$ são classes de Whitney de $RP(\eta)$. Para podermos calcular estes números, usaremos o

TEOREMA 2.7.13. *(Borel-Hirzebruch) Sejam $\eta^k \to V$ um fibrado sobre variedade fechada e $c$ a classe característica da involução $(S(\eta^k), T)$. Então $H^*(RP(\eta^k))$ é um $H^*(V)$-módulo livre graduado com base $1, c, c^2, \ldots, c^{k-1}$ e as classes de Stiefel-Whitney de $RP(\eta^k)$ são*

$$w_m(RP(\eta^k)) = \sum_{p+q+r=m} \binom{k-p}{q} p^*(w_r(V) w_p(\eta^k)) c^q.$$

*Além disso,*

$$c^k + p^*(w_1(\eta)) c^{k-1} + p^*(w_1(\eta)) c^{k-2} + \cdots + p^*(w_k(\eta^k)) = 0.$$ **[C-F**, pg 75]

É útil considerarmos a fatoração da classe total de Stiefel-Whitney em um produto de termos lineares. Assim, suponha

$$W(V) = 1 + w_1(V) + w_2(V) + \cdots = (1 + v_1) \cdots (1 + v_m),$$

$$W(\eta) = 1 + w_1(\eta) + w_2(\eta) \cdots = (1 + t_1) \cdots (1 + t_h),$$

onde $v_i$ e $t_i$ são termos de grau 1.

Teremos o

COROLÁRIO 2.7.14. *A classe total de Stiefel-Whitney do fibrado tangente de $RP(\eta)$ pode ser expresso como:*

$$W(RP(\eta)) = (1 + p^*(v_1)) \cdots (1 + p^*(v_m))(1 + c + p^*(t_1)) \cdots (1 + c + p^*(t_h)).$$

CAPíTULO 3

# Bordismo de $(Z_2)^k$-Ações

## 3.1. Introdução

O objetivo deste capítulo é desenvolver os conceitos de bordismo simultâneo de listas de fibrados e de "fixed data" associado a uma ação do grupo $Z_2^k = Z_2 \oplus Z_2 \oplus \cdots \oplus Z_2$ ($k$ cópias) em uma variedade fechada, entendida como uma coleção ordenada $T_1, T_2, \ldots, T_k$ de involuções diferenciáveis comutantes definidas na variedade. Descreveremos o fenômeno (descoberto por R. E. Stong) segundo o qual a classe de bordismo simultâneo do "fixed data" de uma $Z_2^k$-ação determina a classe de bordismo equivariante da mesma. Adicionalmente, apresentaremos a construção de algumas ações especiais de $Z_2^k$. A maior parte das demonstrações apresentadas neste capítulo não é encontrada na literatura.

## 3.2. Bordismo Simultâneo de Fibrados

Definição 3.2.1. Lista de fibrados que borda simultaneamente:

Seja lista de fibrados $(M; \nu_1, \ldots, \nu_s)$ um objeto constituído de uma variedade $M$ e $s$ fibrados ordenados sobre $M$ com dimensões $r_1, r_2, \ldots, r_s$. Dizemos que $(M; \nu_1, \ldots, \nu_s)$ borda simultaneamente se, e somente se, existe variedade com bordo $W$ e fibrados vetoriais $\zeta_1, \cdots, \zeta_s$ sobre $W$ tal que $\partial W = M$ (ou seja, $M$ borda) e, além disso, para cada $1 \leq i \leq s$ temos $\zeta_i \mid_M = \nu_i$.

Definição 3.2.2. Listas de fibrados simultaneamente bordantes:

Dadas duas listas $(M; \nu_1, \ldots, \nu_s)$ e $(N; \chi_1, \ldots, \chi_s)$, dizemos que elas são simultaneamente bordantes se, e somente se, $(M \cup N, \nu_1 \cup \chi_1, \ldots, \nu_s \cup \chi_s)$ (união disjunta) borda.

Observação 3.2.3. É claro que, se $(M; \nu_1, \ldots, \nu_s)$ e $(N; \chi_1, \ldots, \chi_s)$ são simultaneamente bordantes, $M$ e $N$ são conexas e $dim(\nu_i) \neq dim(\chi_i)$ para algum $i$ então $(M; \nu_1, \ldots, \nu_s)$ e $(N; \chi_1, \ldots, \chi_s)$ bordam.

Observação 3.2.4. Note que a definição acima implica que se $(M; \nu_1, \ldots, \nu_s)$ e $(N; \chi_1, \ldots, \chi_s)$ são simultaneamente bordantes então $\nu_i \to M$ é bordante a $\chi_i \to N$ para todo $i$. Mas se $\nu_i \to M$ é bordante a $\chi_i \to N$ para todo $i$ não é necessariamente verdade que ocorra o bordismo simultâneo, como poderá ser visto no exemplo 3.2.17. Isto ocorre porque, na definição acima, todos os fibrados $\zeta_i$ estão sobre a mesma base $W$, e o bordismo entre cada

fibrado separadamente poderia usar uma base diferente para cada $i$. Por isso o bordismo acima é chamado bordismo simultâneo.

Observação 3.2.5. Observe também que o bordismo da definição acima implica que os fibrados totais $\nu_1 \oplus \cdots \oplus \nu_s \to M$ e $\chi_1 \oplus \cdots \oplus \chi_s \to N$ (soma de Whitney) são bordantes (conforme definição do capítulo anterior), ou seja, bordismo simultâneo implica em bordismo dos fibrados resultantes da soma direta. Mas a recíproca não é verdadeira, como pode ser visto no exemplo 3.2.6 abaixo. Dizemos, alternativamente, que a soma direta de fibrados $\nu_1 \oplus \cdots \oplus \nu_s \to M$ e $\chi_1 \oplus \cdots \oplus \chi_s \to N$ são simultaneamente bordantes quando $(M; \nu_1, \ldots \nu_s)$ e $(N; \chi_1, \ldots \chi_s)$ são simultaneamente bordantes.

Exemplo 3.2.6. Seja $\xi_1^1 \to S^1$ o fibrado linha canônico. Então $\xi_1^1 \oplus \xi_1^1 \to S^1$ é bordante a $R^1 \oplus R^1 \to S^1$ já que são isomorfos, mas não são simultaneamente bordantes, pois $\xi_1^1 \to S^1$ não é bordante a $R^1 \to S^1$. Para verificar que $\xi_1^1 \oplus \xi_1^1 \to S^1$ é isomorfo a $R^1 \oplus R^1 \to S^1$ basta notar que $\xi_1^1 \oplus \xi_1^1 \cong \tau S^1 \oplus R^1$, onde $\tau S^1$ é o fibrado tangente a $S^1$ [**Mi**, pg 45]; como $\tau S^1$ é trivial concluímos que $\xi_1^1 \oplus \xi_1^1 \to S^1$ é trivial.

Lema 3.2.7. *O bordismo simultâneo de fibrados é uma relação de equivalência.*

Notação 3.2.8. Adotaremos as seguintes notações:

- $[M, \nu_1, \ldots, \nu_s] \longrightarrow$ a classe de bordismo simultâneo do elemento $(M, \nu_1, \ldots, \nu_s)$;
- $\mathfrak{N}_{n;r_1,r_2,\ldots,r_s} \longrightarrow$ o conjunto das classes de equivalência de bordismo simultâneo de listas de $s$ fibrados ordenados, com dimensões $r_1, r_2, \ldots, r_s$, sobre variedades $n$-dimensionais;
- $\mathfrak{N}_{*;r_1,r_2,\ldots,r_s} \longrightarrow$ o conjunto das classes de equivalência de bordismo simultâneo de listas de $s$ fibrados ordenados, com dimensões $r_1, r_2, \ldots, r_s$, sobre qualquer variedade.

Teorema 3.2.9. *Existe aplicação $\wp$ bijetora que associa a cada classe de $\mathfrak{N}_{*;r_1,r_2,\ldots,r_s}$ um elemento de $\mathfrak{N}_*(BO(r_1) \times BO(r_2) \times \cdots \times BO(r_s))$ e, portanto, podemos introduzir uma estrutura de $\mathfrak{N}_*$-módulo em $\mathfrak{N}_{*;r_1,r_2,\ldots,r_s}$ induzida por $\wp$. Ou seja, com esta estrutura, $\mathfrak{N}_{*;r_1,r_2,\ldots,r_s}$, que chamaremos de grupo de bordismo simultâneo, torna-se um $\mathfrak{N}_*$-módulo isomorfo a $\mathfrak{N}_*(BO(r_1) \times BO(r_2) \times \cdots \times BO(r_s))$ (sendo $\wp$ um isomorfismo).*

Demonstração. Dado $\alpha = [M; \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s] \in \mathfrak{N}_{n;r_1,r_2,\ldots,r_s}$, seja $f = (f_1, f_2, \cdots, f_s) : M \to BO(r_1) \times BO(r_2) \times \cdots \times BO(r_s)$, onde cada $f_i : M \to BO(r_i)$ é uma aplicação classificante para $\eta_i$. Definimos $\wp(\alpha) = [M^n, f] \in \mathfrak{N}_n(BO(r_1) \times BO(r_2) \times \cdots \times BO(r_s))$.

Sejam $\alpha_1 = (M; \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s)$ e $\alpha_2 = (V; \chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_s)$ e considere $f = (f_1, f_2, \cdots, f_s)$, onde cada $f_i : M \to BO(r_i)$ é uma aplicação classificante para $\eta_i$, e $g = (g_1, g_2, \cdots, g_s)$, onde cada $g_i : V \to BO(r_i)$ é uma aplicação classificante para $\chi_i$. Então:

i) $\wp$ é bem definida: se $\alpha_1$ e $\alpha_2$ pertencem à mesma classe, existe $(W; \zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_s)$ que estabelece o bordismo simultâneo. Tome $h = (h_1, h_2, \cdots, h_s)$, onde cada $h_i : W \to BO(r_i)$ é uma aplicação classificante para $\zeta_i$; assim, pela definição de bordismo de espaços topológicos, teremos que $(M, h\mid_M)$ é bordante a $(V, h\mid_V)$. Então $[M, f] = [M, h\mid_M] = [V, h\mid_V] = [V, g]$, ou seja, $\wp[M; \eta_1, \cdots, \eta_s] = \wp[V; \chi_1, \cdots, \chi_s]$ e, portanto, $\wp$ é bem definida.

ii) $\wp$ é injetora: suponha $\wp[\alpha_1] = \wp[\alpha_2]$, ou seja, $[M, f] = [V, g]$, então, pela definição de bordismo de espaços topológicos, teremos que existe $W$ com $\partial W = M \cup V$ e $h = (h_1, h_2, \cdots, h_s) : W \to BO(r_1) \times BO(r_2) \times \cdots \times BO(r_s)$ tal que $h\mid_M = f$ e $h\mid_V = g$. Então fazendo $\zeta_i = h_i!(\gamma^{r_i})$, onde $\gamma^{r_i}$ é o fibrado universal, teremos que $(W; \zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_s)$ estabelece o bordismo simultâneo e, portanto, $[\alpha_1] = [\alpha_2]$.

iii) $\wp$ é sobrejetora: dado $[M, f] = [M, f_1, \ldots, f_s] \in \mathfrak{N}_*(BO(r_1) \times \cdots \times BO(r_s))$ considere o fibrado $f_1!\gamma^{r_1} \oplus \cdots \oplus f_s!\gamma^{r_s} \to M$. Teremos que $\wp[M, f_1!\gamma^{r_1}, \cdots, f_s!\gamma^{r_s}] = [M, f]$

Portanto, $\wp$ é uma bijeção e o teorema está provado. □

Observação 3.2.10. Observe que:

$[M; \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s] + [V; \chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_s] = \wp^{-1}(\wp[M; \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s] + \wp[V; \chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_s]) =$

$= \wp^{-1}([M, f] + [V, g]) = \wp^{-1}[M \cup V, f \cup g]$

e como $\wp[M \cup V; \eta_1 \cup \chi_1, \cdots, \eta_s \cup \chi_s] = [M \cup V, f \cup g]$, teremos que

$[M; \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s] + [V; \chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_s] = [M \cup V; \eta_1 \cup \chi_1, \cdots, \eta_s \cup \chi_s]$,

como era de se esperar.

Além disso, em relação à estrutura de $\mathfrak{N}_*$-módulo de $\mathfrak{N}_{*;r_1,r_2,\ldots,r_s}$, temos:

$[W] \cdot [M, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s] = \wp^{-1}([W]\wp[M, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s]) = \wp^{-1}([W] \cdot [M, f])$

e como $\wp[W \times M, p_2!(\eta_1), \cdots, p_2!(\eta_s)] = [W \times M, f \circ p_2] = [W] \cdot \wp[M, f]$, onde $p_2$ é a projeção da segunda coordenada, teremos que

$[W] \cdot [M, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s] = [W \times M, p_2!(\eta_1), \cdots, p_2!(\eta_s)]$,

como também era de se esperar.

Como já vimos no Corolário 2.3.11, $[M, f]$ é determinada pelos seus números característicos e, portanto, $[M; \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s]$ também o será pelos números correspondentes através da associação $\wp$. Já vimos em 2.3.9 como são, de uma forma geral, os números característicos de $[M, f]$. Estudaremos com mais detalhes o caso que nos interessa aqui, ou seja, os números

característicos de um elemento $[M, f] \in \mathfrak{N}_*(BO(r_1) \times BO(r_2) \times \cdots \times BO(r_s))$. Consideremos os seguintes fatos:

FATO 3.2.11. *Teorema de Küneth. Suponha que os anéis de $Z_2$-cohomologia dos espaços topológicos $X$, $Y$ sejam polinomialmente gerados por $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ e $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ respectivamente. Então $H^*(X \times Y)$ é polinomialmente gerado por $\alpha_i \times \beta_j$, $i = 1, 2, ..., q$, $j = 1, 2, ..., p$, onde $\times$ significa o produto cross.*

FATO 3.2.12. *$H^*(BO(r))$ é uma álgebra polinomial sobre $Z_2$ gerada por elementos $v_1, v_2, \ldots, v_r$, sendo que $v_i \in H^i(BO(r))$ e $v = 1 + v_1 + v_2 + \cdots + v_r$ é a classe total de Stiefel-Whitney do fibrado universal $\gamma^r \to BO(r)$.*

FATO 3.2.13. *Como vimos na Definição 2.3.9, um número característico de $[M, f] \in \mathfrak{N}_*(\prod_{i=1}^t BO(r_i))$ é da forma $wf^*(h_p)[M]_2$, sendo que $w = w_{j_1} w_{j_2} \cdots w_{j_k}$ é um produto de classes de $M$ (isto é, classes de Stiefel-Whitney do fibrado tangente $\tau M^n \to M^n$) e $h_p \in H^*(\prod_{i=1}^t BO(r_i))$; sem perda de generalidade podemos tomar $h_p$ como um gerador aditivo de $H^p(\prod_{i=1}^t BO(r_i))$, uma vez que o produto cup é aditivo; ou seja, $h_p = (v_{i_1})_1 \times (v_{i_2})_2 \times \cdots \times (v_{i_t})_t$ sendo que $i_1 + i_2 + \cdots + i_t = p$, e $(v_{i_j})_j \in H^{i_j}(BO(r_j))$.*

Assim, considerando as afirmações acima e utilizando a associação $\wp$, obtemos os números característicos para uma dada classe $[M; \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s]$. Ou seja,

$$wf^*(h_p) = w(f_1, f_2, \cdots, f_t)^*((v_{i_1})_1 \times (v_{i_2})_2 \times \cdots \times (v_{i_t})_t) =$$
$$= wf_1^*(v_{i_1})_1 f_2^*(v_{i_2})_2 \cdots f_t^*(v_{i_t})_t$$

e como $f_j^*(v_{i_j})_j$ é a $i_j$-ésima classe do fibrado $\eta_j \to M$ teremos, fazendo $(\overline{v}_{i_j})_j = f^*(v_{i_j})_j$, que um número de Whitney de $[M^n; \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_s]$ será dado por $w(\overline{v}_{i_1})_1 (\overline{v}_{i_2})_2 \cdots (\overline{v}_{i_t})_t$ sendo que $(\overline{v}_{i_j})_j$ é uma $i_j$-ésima classe do fibrado $\eta_j \to M^n$ (já que $f_j$ é aplicação classificante para $\eta_j$).

EXEMPLO 3.2.14. Sejam $\eta_1 \to M^n$, $\eta_2 \to M^n$, $W(M^n) = 1 + w_1 + \cdots + w_n$, $W(\eta_1) = 1 + v_1 + \cdots + v_r$ e $W(\eta_2) = 1 + u_1 + \cdots + u_s$.

Então os números de Whitney que determinam o bordismo simultâneo de $[M^n; \eta_1, \eta_2]$ são todos os números do tipo $w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_k} v_{j_1} v_{j_2} \cdots v_{j_l} u_{l_1} u_{l_2} \cdots u_{l_m} [M^n]_2$ de tal forma que $\sum i_p + \sum j_p + \sum l_p = n$.

OBSERVAÇÃO 3.2.15. Observe que entre estes números estão os do tipo $w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_k} v_{j_1} v_{j_2} \cdots v_{j_l} [M^n]_2$ que são exatamente os números de Whitney que determinam a classe de bordismo do fibrado $\eta_1 \to M^n$, como visto no Corolário 2.4.11 (analogamente, $w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_k} u_{l_1} u_{l_2} \cdots u_{l_m} [M^n]_2$

determinam a classe de $\eta_2 \to M^n$). Ou seja, o bordismo simultâneo implica no bordismo de cada fibrado da soma direta, como já mencionado em 3.2.4.

Observação 3.2.16. Observe também que entre esses números (ou em combinação linear deles) estão os do tipo $w_{i_1}w_{i_2}\cdots w_{i_k}s_{j_1}s_{j_2}\cdots s_{j_l}[M^n]_2$ sendo que $s_{j_i} = W_i(\eta_1 \oplus \eta_2)$. Então o bordismo simultâneo implica no bordismo do fibrado total, como mencionado em 3.2.5.

Exemplo 3.2.17. Sejam $\xi_1^1 \to S^1$ o fibrado linha canônico e $R \to S^1$ o fibrado trivial.

Consideremos os seguintes fibrados:

$\eta = p_1!(\xi_1^1) \to S^1 \times S^1$,

$\chi = p_2!(\xi_1^1) \to S^1 \times S^1$,

onde $p_1$e $p_2$ são as projeções. Mostraremos que $\eta$ e $\chi$ bordam, mas $\eta \oplus \chi$ não borda simultaneamente.

Chamando de $\beta_1 \times 1$ e $1 \times \beta_2$ os geradores de $H^1(S^1 \times S^1)$ respectivamente associados a primeira e segunda cópia de $S^1$, sabemos que $W(\xi_1^1) = 1 + \alpha$, $\alpha \in H^1(S^1)$, e que $p_1^*(\alpha) = \beta_1 \times 1$ e $p_2^*(\alpha) = 1 \times \beta_2$.

Como $W(\eta) = 1 + p_1^*(\alpha) = 1 + \beta_1 \times 1$ e $W(S^1 \times S^1) = 1$ teremos que os números de Whitney de $[S^1 \times S^1, \eta]$ serão:

$w_1^2(\eta)[S^1 \times S^1]_2 = (\beta_1^2 \times 1)[S^1 \times S^1]_2 = 0[S^1 \times S^1]_2 = 0$

$w_1(\eta)w_1(S^1 \times S^1)[S^1 \times S^1]_2 = (\beta_1 \times 1) \cdot 0[S^1 \times S^1]_2 = 0[S^1 \times S^1]_2 = 0$

$w_1^2(S^1 \times S^1)[S^1 \times S^1]_2 = 0[S^1 \times S^1]_2 = 0$

$w_2(S^1 \times S^1)[S^1 \times S^1]_2 = 0[S^1 \times S^1]_2 = 0$

Agora, $W(\chi) = 1 + p_2^*(\alpha) = 1 + 1 \times \beta_2$ e, portanto, os números de Whitney de $[S^1 \times S^1, \chi]$ serão:

$w_1^2(\chi)[S^1 \times S^1]_2 = (1 \times \beta_2^2)[S^1 \times S^1]_2 = 0[S^1 \times S^1]_2 = 0$

$w_1(\chi)w_1(S^1 \times S^1)[S^1 \times S^1]_2 = (1 \times \beta_2)(\beta_1 \times 1 + 1 \times \beta_2)[S^1 \times S^1]_2 = 0[S^1 \times S^1]_2 = 0$

Observe que foram omitidos dois números, pois são exatamente iguais aos dois últimos de $[S^1 \times S^1, \eta]$ (já que não envolvem classes do fibrado). Assim, os fibrados $\eta$ e $\chi$ bordam, pois os números de Whitney são todos nulos.

Mas o número de Whitney de $[S^1 \times S^1, \eta, \chi]$

$w_1(\eta)w_1(\chi)[S^1 \times S^1]_2 = (\beta_1 \times \beta_2)[S^1 \times S^1]_2 = 1$,

e, portanto, $\eta \oplus \chi$ não borda simultaneamente.

Observe que $w_2(\eta \oplus \chi) = w_1(\eta)w_1(\chi)$ e, portanto, o número de Whitney de $[S^1 \times S^1, \eta \oplus \chi]$

$w_2(\eta \oplus \chi)[S^1 \times S^1]_2 = 1$.

Então $\eta \oplus \chi$ não borda, o que também nos deixa concluir que $\eta \oplus \chi$ não borda simultaneamente.

## 3.3. "Fixed Data" de $Z_2^k$-Ações

LEMA 3.3.1. *Seja $S : R^n \to R^n$ uma involução linear. Os conjuntos $F_1 = \{u \in R^n \mid S(u) = u\}$ e $F_2 = \{v \in R^n \mid S(v) = -v\}$ são subespaços vetoriais de $R^n$ e, além disso, $R^n = F_1 \oplus F_2$.*

DEMONSTRAÇÃO. É claro que $F_1$ e $F_2$ são subespaços e que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$. Agora, para todo $w \in R^n$ podemos escrever $w = u+v$ onde $u = (w+S(w))/2$ e $v = (w-Sw)/2$. Como $S \circ S = Id$ teremos que $S(u) = u$ e $S(v) = -v$ e, portanto, $u \in F_1$ e $v \in F_2$. Assim, $R^n = F_1 \oplus F_2$. □

Suponha que em $R^n$ tenhamos $k$ involuções lineares comutantes $S_1, S_2, \cdots, S_k : R^n \to R^n$. Para cada inteiro $0 \leq j \leq 2^k - 1$ seja $B_j = b_1 b_2 \cdots b_{k-1} b_k$ a representação binária de $j$ com $k$ algarismos. Considere a coleção de $2^k$ seqüências $A_j = (a_1, a_2, \cdots, a_k)$ sendo $a_i = (-1)^{b_i}$. Nestas condições teremos o

LEMA 3.3.2. *$\varepsilon_{A_j} = \{v \in R^n \mid S_i(v) = a_i v, 1 \leq i \leq k\}$, para cada $0 \leq j \leq 2^k - 1$, é um subespaço vetorial de $R^n$ e, além disso, $R^n = \bigoplus_{0 \leq j \leq 2^k - 1} \varepsilon_{A_j}$.*

DEMONSTRAÇÃO. A prova será feita usando indução sobre k. Para $k = 1$ já está feito no Lema 3.3.1. Suponha, então, que seja verdade para $k$. Dado $k + 1$ transformações lineares comutantes $S_1, S_2, \cdots, S_{k+1} : R^n \to R^n$ temos, pela hipótese de indução, que, para as transformações lineares $S_1, S_2, \cdots, S_k : R^n \to R^n$, o teorema é verdadeiro. Sabemos, também pela hipótese de indução, que para um fixado $A_p = (a_1, a_2, \cdots, a_k)$ teremos que $\varepsilon_{A_p}$ é subespaço de $R^n$ e, portanto, isomorfo a $R^m$ para algum $m$. Sejam $(A_p, 1) = (a_1, a_2, \cdots, a_k, 1)$ e $(A_p, -1) = (a_1, a_2, \cdots, a_k, -1)$. Supondo que $S_{k+1}$ seja invariante sobre $\varepsilon_{A_p}$ aplicamos, então, o Lema 3.3.1 para $\varepsilon_{A_p}$ e $S_{k+1}$. Assim $\varepsilon_{(A_p,1)}$ e $\varepsilon_{(A_p,-1)}$ são subespaços de $\varepsilon_{A_p}$ e, portanto, de $R^n$ e, além disso, $\varepsilon_{A_p} = \varepsilon_{(A_p,1)} \oplus \varepsilon_{(A_p,-1)}$. Como isto vale para todo $A_j$, $R^n = (\oplus_{0 \leq j \leq 2^k-1} \varepsilon_{(A_j,1)}) \oplus (\oplus_{0 \leq j \leq 2^k-1} \varepsilon_{(A_j,-1)})$. Resta mostrar, portanto, que $S_{k+1}$ é invariante sobre $\varepsilon_{A_p}$. Se $v \in \varepsilon_{A_p}$ então $S_i$ atua em $v$ como $a_i$ e, portanto, $S_i S_p(v) = S_p S_i(v) = S_p a_i(v) = a_i S_p(v)$, ou seja, $S_i$ atua em $S_p(v)$ como $a_i$ e, assim, $S_p(v) \in \varepsilon_{A_p}$. Isto encerra a demonstração. □

OBSERVAÇÃO 3.3.3. Note que, considerando $(S_1, S_2, \cdots, S_{k+1})$ como uma ação linear de $Z_2 \oplus Z_2 \oplus \cdots \oplus Z_2$ em $R^n$, teremos que $\varepsilon_{A_0} = \{v \in R^n \mid S_i(v) = v, 1 \leq i \leq k\}$ é o conjunto de pontos fixos desta ação, enquanto que $\bigoplus_{1 \leq j \leq 2^k - 1} \varepsilon_{A_j}$ é o fibrado normal de $\varepsilon_{A_0}$ em $R^n$.

NOTAÇÃO 3.3.4. De agora em diante consideraremos:

- $(G, M, \Phi) = (M, T_1, T_2, \cdots, T_k) \longrightarrow$ uma ação $\phi : G \times M \to M$ do grupo $G = \{T_1, \cdots, T_k \mid T_i^2 = 1 : T_iT_j = T_jT_i\} \cong Z_2^k$, ou seja, os elementos básicos $T_i$ são involuções sobre $M$ que comutam duas a duas.
- $F_{(M,T_i)} \longrightarrow$ o conjunto de pontos fixos da involução $T_i$, ou seja, $F_{(M,T_i)} = \{x \in M \mid T_i(x) = x\}$ (usaremos apenas $F_{T_i}$ quando a variedade estiver subentendida);
- $F_\Phi \longrightarrow$ o conjunto de pontos fixos da ação $\Phi$, ou seja, $F_\Phi = \bigcap_{i=1}^k F_{T_i}$;
- $(\tau M)_x \longrightarrow$ o espaço tangente a $M$ em $x$;
- $\tau M \longrightarrow$ o fibrado tangente a $M$, ou seja, $\tau M = \bigcup_{x \in M} (\tau M)_x$.

Observação 3.3.5. Se $\sigma : G \to G$ é um automorfismo então $(M, \Psi) = (M, T_1, T_2, \cdot \cdot \cdot, T_k)$ e $(M, \Phi) = (M, \sigma T_1, \sigma T_2, \cdots, \sigma T_k)$ são ações diferentes. Assim, quando damos uma ação $(M, T_1, T_2, \cdots, T_k)$ estamos dando ao mesmo tempo uma base ordenada $(T_1, T_2, \cdots, T_k)$ para $G$ (que significa associar o elemento $T_1$ ao elemento $(-1, 1, 1, \ldots 1) \in Z_2^k$, o elemento $T_2$ ao elemento $(1, -1, 1, \ldots 1) \in Z_2^k$, e assim por diante). Quando tivermos duas ações nesta situação diremos que elas diferem por uma mudança de base de $G$.

Sejam, agora, uma ação $(M, \Phi) = (M, T_1, T_2, \cdots, T_k)$ e um ponto $x \in F_\Phi$ fixado. Para cada $T_i$, temos a sua derivada em $x$, que define uma transformação linear $T_i'(x) : (\tau M)_x \to (\tau M)_x$. Então:

$T_i \circ T_i = Id \Rightarrow (T_i \circ T_i)'(x) = Id'(x) = Id \Rightarrow$

$\Rightarrow T_i'(T_i(x)) \circ T_i'(x) = Id \Rightarrow T_i'(x) \circ T_i'(x) = Id$

e também:

$T_i \circ T_j = T_j \circ T_i \Rightarrow (T_i \circ T_j)'(x) = (T_j \circ T_i)'(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow T_i'(T_j(x)) \circ T_j'(x) = T_j'(T_i(x)) \circ T_i'(x) \Rightarrow T_i'(x) \circ T_j'(x) = T_j'(x) \circ T_i'(x), \forall i, j.$

Portanto, para cada $x \in F_\Phi$, temos uma ação linear de $G' = \{T_1'(x), \cdots, T_k'(x)\} \cong Z_2^k$ em $(\tau M)_x$ (ou uma representação linear de $G$ em $(\tau M)_x$).

Usando, então, o argumento do Lema 3.3.2 para cada $x \in F_\Phi$, concluímos que $\tau M \mid_{F_\Phi} \cong \bigoplus_{0 \le j \le 2^k - 1} \varepsilon_{A_j}$, $A_j$ percorrendo todas as seqüências $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$, $a_i = \pm 1$. Por outro lado, sabemos que $\tau M \mid_{F_\Phi} \cong \eta \oplus \tau F_\Phi$, onde $\eta \to F_\Phi$ é o fibrado normal de $F_\Phi$ em $M$. Também sabemos, por **[C-F**, pg 73], que para cada $x \in F_\Phi$ existe um pequeno disco $D_\epsilon(0)$ em torno de $0 \in (\tau M)_x$, invariante sob a ação $G'$, o qual é rebatido equivariantemente pela exponencial em um disco $B_\epsilon(x)$ em torno de $x$, invariante sob $G$ (em outras palavras, $(B_\epsilon(x), T_1, T_2, \ldots, T_k)$ é equivariantemente difeomorfo a $(D_\epsilon(0), T_1'(x), T_2'(x), \ldots, T_k'(x))$. Como $(\varepsilon_{A_0})_x = (\varepsilon_{(1,1,\ldots,1)})_x = \{v \in (\tau M)_x \mid T_i'(x)v = v, \forall i\}$, concluímos que $D_\varepsilon(0) \cap (\varepsilon_{A_0})_x$ é rebatido pela exponencial

em uma carta local de $F_\Phi$ em torno de $x$, ou seja, $(\varepsilon_{A_0})_x = (\tau F_\Phi)_x$. Juntando isto com $\eta \oplus \tau F_\Phi \cong \bigoplus_{0\leq j\leq 2^k-1} \varepsilon_{A_j}$, teremos que o fibrado normal $\eta$ de $F_\Phi$ em $M$ decompõe-se em uma soma direta

$$\eta \cong \bigoplus_{1\leq j\leq 2^k-1} \varepsilon_{A_j}$$

de $2^k - 1$ subfibrados, $A_j$ varrendo todas as seqüências $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$, $a_i = \pm 1$, exceto $(1, 1, \ldots, 1)$. Além disso, cada $\varepsilon_{A_j}$ é caracterizado como sendo o subfibrado de $\eta$ no qual cada $T_i'$ atua como $a_i$.

Usando o rebatimento exponencial equivariante acima mencionado, com $x \in F_\Phi$ variando, temos, então, uma descrição local da ação de $G$ em uma vizinhança tubular $\mathfrak{V}$ de $F_\Phi$, invariante sob $G$ e com raio suficientemente pequeno de maneira que a exponencial seja um difeomorfismo equivariante $(D(\eta), G') \to (\mathfrak{V}, G)$. Em geral identificamos $\eta$ com $\mathfrak{V}$ e, desta forma, um elemento $x \in \mathfrak{V}$ pode ser visto como uma $2^k - 1$-upla $(x_{A_1}, x_{A_2}, \cdots, x_{A_{2^k-1}})$ e cada $T_i \in G$ atua em $x$ como $(x_{A_1}, x_{A_2}, \cdots, x_{A_{2^k-1}}) \longrightarrow (a_i(A_1)x_{A_1}, a_i(A_2)x_{A_2}, \cdots, a_i(A_{2^k-1})x_{A_{2^k-1}})$, onde $a_i(A_j)$ é a i-ésima coordenada da seqüência $A_j$.

Os fatos acima motivam a seguinte

Definição 3.3.6. "Fixed data":

Associado a $(M, T_1, T_2, \cdots, T_k)$, temos o seu "fixed data"

$$(F_\Phi, (\varepsilon_{A_j})_{1\leq j\leq 2^k-1}) = (F_\Phi, \varepsilon_{A_1}, \varepsilon_{A_2}, \cdots, \varepsilon_{A_{2^k-1}}),$$

sendo que $A_j$ percorre todas as seqüências $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$, $a_i = \pm 1$, exceto $(1, 1, \cdots, 1)$.

Observação 3.3.7. Observe que se $F_\Phi = \bigcup_i F_i$ é a decomposição de $F_\Phi$ em suas componentes conexas então $(F_i, \varepsilon_{A_1} \mid_{F_i}, \varepsilon_{A_2} \mid_{F_i}, \cdots, \varepsilon_{A_{2^k-1}} \mid_{F_i})$ é um elemento do grupo de bordismo $\mathfrak{N}_{*;r_1,r_2,\ldots,r_{2^k-1}}$, onde $r_j = dim(\varepsilon_{A_j} \mid_{F_i})$. Observe também que escolhendo outra base para o grupo $G$ teremos outro "fixed data". Assim, se duas ações diferem por uma mudança de base (conforme comentamos em 3.3.5) então seus "fixed data" são diferentes. Mas é fácil ver que esta diferença ocorre apenas na ordem da lista de fibrados do "fixed data". Quando isto ocorrer diremos que os "fixed data" diferem por uma mudança de base de $G$.

Agora citaremos a conexão entre os conceitos de bordismo de $Z_2^k$-ações e bordismo simultâneo. Esta conexão é decorrente de **[St]**. De acordo com este trabalho, temos os grupos de bordismo $\mathfrak{I}_{m;n_1,n_2,\ldots,n_q}(Z_2^k, q)$ constituídos pelas classes de bordismo de objetos

$(M, \Phi, \eta_1, \Phi_1, \eta_2, \Phi_2, \ldots, \eta_q, \Phi_q)$, onde $M$ é uma variedade fechada $m$-dimensional, $\Phi$ é uma $Z_2^k$-ação diferenciável em $M$, cada $\eta_i$, $i = 1, 2, \ldots, q$, é um fibrado vetorial real de dimensão $n_i$ sobre $M$, e $\Phi_i$ é uma $Z_2^k$-ação no espaço total $E(\eta_i)$ por aplicações fibradas recobrindo a ação de $\Phi$ em $M$. Temos, também, os grupos de bordismo $\mathfrak{N}_{m;n_1,n_2,\ldots,n_q}(Z_2^k, q)$ com a mesma descrição, exceto pela exigência adicional de que a primeira involução $T_1$ de $Z_2^k = \langle T_1, T_2, \ldots, T_k\rangle$ atue sem pontos fixos. Conectando tais grupos temos a seqüência exata de Stong:

$$0 \to \mathfrak{I}_{m;n_1,\ldots,n_q}(Z_2^k, q) \xrightarrow[F]{} \bigoplus \mathfrak{I}_{m';m''n_1',n_1'',\ldots,n_q',n_q''}(Z_2^{k-1}, 2q+1) \xrightarrow[S]{}$$

$$\xrightarrow[S]{} \mathfrak{N}_{m-1;n_1,\ldots,n_q}(Z_2^k, q) \to 0$$

onde a somatória é considerada sobre todas as seqüências com $m' + m'' = m$ e $n_i' + n_i'' = n_i$. A descrição de $F$ e $S$ é dada na Proposição 3 de [**St**, pg 784].

Observe que o primeiro grupo da seqüência acima tem a mesma natureza das parcelas da soma direta do segundo grupo. Desta forma, considerando a soma de vários monomorfismos do tipo $F$ sobre o segundo grupo, obtemos um monomorfismo $(F, F, ..., F)$ tendo como domínio o segundo grupo. Este processo pode ser iterado $k$ vezes. Após tal iteração, obtemos um monomorfismo que será a composição dos vários monomorfismos assim obtidos. Usando este princípio e tomando como grupo de partida o grupo de bordismo $\mathfrak{I}_m(Z_2^k, 0) = \mathfrak{I}_m(Z_2^k)$, ou seja, o grupo de bordismo de variedades $m$-dimensionais com ações de $Z_2^k$ (com 0 fibrados sobre ela) obtemos um monomorfismo

$$F : \mathfrak{I}_m(Z_2^k) \xrightarrow[F]{} \bigoplus_{r+s_1+\cdots+s_{2^k-1}=m} \mathfrak{I}_{r;s_1,s_2,\ldots,s_{2^k-1}}(Z_2^0, 2^k - 1)$$

onde cada parcela do contradomínio coincide com o grupo atrás definido de bordismo simultâneo. Conforme acima, este monomorfismo é uma composição de várias somas de monomorfismos de tipo $F$ da seqüência de Stong. Ocorre que a imagem de $[M, \Phi] = [M, T_1, T_2, \ldots T_k]$ por este monomorfismo é exatamente a classe de bordismo simultâneo do "fixed data" de $[M, \Phi]$. Como decorrência dessas considerações, temos o importante

Teorema 3.3.8. *Duas $Z_2^k$-ações são bordantes se, e somente se, seus "fixed data" forem simultaneamente bordantes.*

Corolário 3.3.9. *Se $(M, \Phi)$ é uma $Z_2^k$-ação tal que $F_\Phi = \emptyset$ então $(M, \Phi)$ borda (em particular, se $\Phi$ é uma ação livre então $(M, \Phi)$ borda).*

Dada $(M, T_1, T_2, \cdot\cdot\cdot, T_k)$, outra maneira de indexar o "fixed data" $(F_\Phi, \varepsilon_{A_i})$ é através da coleção de homomorfismos $\rho : Z_2^k \to Z_2 = \{-1, 1\}$ não triviais. De fato, para cada seqüência $A = (a_1, a_2, \cdot\cdot\cdot, a_k)$, temos o homomorfismo $\rho_A : Z_2^k \to Z_2$ dado por $\rho_A(T_i) = a_i$ e estendido por linearidade. A associação $A \to \rho_A$ é, por construção, injetora. Por outro lado, dado um

homomorfismo $\rho_A : Z_2^k \to Z_2$ não-nulo, a seqüência $A = (a_1, a_2, \cdots, a_k)$ definida por $a_i = \rho_A(T_i)$ é tal que $A \to \rho_A$ (portanto a associação é sobrejetora). Assim, temos uma correspondência biunívoca entre a coleção de seqüências não nulas e a coleção de homomorfismos não triviais. A associação $A \to \rho_A$ induz, assim, uma associação $\varepsilon_A \to \varepsilon_{\rho_A}$ e, se definirmos $\varepsilon_{\rho_A}$ como o subfibrado tal que $T_i$ atua como $\rho_A(T_i)$ teremos que $\varepsilon_A = \varepsilon_{\rho_A}$. Pode-se ver uma seqüência como uma forma de se definir um homomorfismo ou vice-versa.

Observe que, dado $\rho : Z_2^k \to Z_2$ não-nulo, teremos que $Núcleo(\rho) \cong Z_2^{k-1}$ (pois $\rho$ é sobrejetor). Podemos, então, considerar a ação restrição $(Núcleo(\rho), M, \Psi) = (Núcleo(\rho), M, \Phi\mid_{Núcleo(\rho)})$. Teremos, então, o

TEOREMA 3.3.10. *Seja $\varepsilon$ o fibrado normal de $F_\Phi$ em $F_\Psi$. Então $\varepsilon = \varepsilon_\rho$.*

DEMONSTRAÇÃO. Basta mostrar que cada $T_i$ atua como $\rho(T_i)$ em cada fibra do fibrado normal de $F_\Phi$ em $F_\Psi$, que chamaremos de $\eta$ (observe que $\eta$ pode, eventualmente, ser uma união de fibrados se $F_\Phi$ não for conexa). Tomando $T_p$ arbitrariamente:

a) Suponha $T_p \in Núcleo(\rho)$. Então $\rho(T_p) = 1$; como $T_p = Id$ em $F_\Psi$, em particular, $T_p$ atua como $1 = \rho(T_p)$ em $\eta$ (ou, mais precisamente, em uma vizinhança tubular adequada de $F_\Phi$ em $F_\Psi$).

b) Suponha $T_p \notin Núcleo(\rho)$. Note que $T_p(F_\Psi) \subset F_\Psi$, ou seja, $F_\Psi$ é invariante por $T_p$. De fato, se $x \in F_\Psi$ então, para qualquer $S \in Núcleo(\rho)$ teremos $S(x) = x \Rightarrow ST_p(x) = T_pS(x) = T_p(x)$ e, portanto, $T_p(x) \in F_\Psi$. Assim, podemos considerar a involução $(F_\Psi, T_p)$, cujo conjunto de pontos fixos é $F_{T_p}$. Como

$$F_{T_p} = \{x \in F_\Psi \mid T_p(x) = x\} =$$
$$= \{x \in \{x \in M \mid T_i(x) = x, i \neq p\} \mid T_p(x) = x\} =$$
$$= \{x \in M \mid T_i(x) = x, \forall i\} = F_\Phi$$

teremos, conforme os comentários que antecederam a definição de "fixed data" (3.3.6), que $T_p$ atua, em uma pequena vizinhança tubular de $F_\Phi$, como antipodal, ou seja, como $-1 = \rho(T_p)$, e o teorema está provado. □

Nosso objetivo, agora, é estabelecer uma relação entre o "fixed data" de uma $Z_2^k$-ação e o "fixed data" da ação restrição a um subgrupo $(k-1)$-dimensional de $Z_2^k$. Seja $(G, M, \Phi) = (M, T_1, T_2, \cdots, T_k)$ e fixe $H \subset G$, um subgrupo qualquer de dimensão $k-1$. Sabemos que $H$ está associado a um subfibrado $\varepsilon_{\rho_H}$ (ou $\varepsilon_{A_H}$) do "fixed data" de $\Phi$, sendo que $Núcleo(\rho_H) = H$ (ou à seqüência $A_H = (a_1, a_2, \cdots, a_k)$, caracterizada por $a_i = \rho_H(T_i)$). Podemos escrever $G = H \oplus Z_2(T)$, sendo que $T$ é qualquer involução tal que $T \notin H$ e, em particular, como

existe $T_p \in \{T_1, T_2, \cdots, T_k\}$, $T_p \notin H$, podemos escrever $G = H \oplus Z_2(T_p)$. Então $\rho_H(H) = 1$ e $\rho_H(T_p) = -1$. Escolha uma base para $H$ e considere a ação restrição $(H, M, \Psi) = (H, M, \Phi \mid_H)$ com "fixed data" $(F_\Psi, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{2^{k-1}-1})$. Fixe $\eta_j \to F_\Psi$ (observe que $\eta_j \mid_{F_\Phi} \to F_\Phi$ é um subfibrado do fibrado normal de $F_\Phi$ em $M$) associado a um homomorfismo $\theta_j : H \to Z_2$ (e a uma seqüência $C_j = (c_1, \cdots, c_{k-1})$). Agora, $\theta_j$ dá origem a dois homomorfismos $\rho_1, \rho_{-1} : G = H \oplus Z_2(T_p) \to Z_2$, definidos pelas relações: $\rho_1 \mid_H = \rho_{-1} \mid_H = \theta_j$, $\rho_1(T_p) = 1$ e $\rho_{-1}(T_p) = -1$. Nessas condições teremos o

TEOREMA 3.3.11. *Sobre $F_\Phi$ teremos que $\eta_j \mid_{F_\Phi} = \varepsilon_{\rho_1} \oplus \varepsilon_{\rho_{-1}}$.*

DEMONSTRAÇÃO. É claro que $\varepsilon_{\rho_1} \oplus \varepsilon_{\rho_{-1}} \subset \eta_j \mid_{F_\Phi}$, já que em $\varepsilon_{\rho_1}$ e $\varepsilon_{\rho_{-1}}$, se $T \in H$, $T$ atua como $\theta_j(T) = \rho_1(T) = \rho_{-1}(T)$.

Por outro lado, se $v \in \eta_j \mid_{F_\Phi}$, por definição do "fixed data", $T(v) = \theta_j(T)v$ e, assim, $TT_p(v) = T_pT(v) = T_p\theta_j(T)(v) = \theta_j(T)T_p(v)$ e, portanto, $T_p(v) \in \eta_j \mid_{F_\Phi}$, ou seja, $\eta_j \mid_{F_\Phi}$ é invariante por $T_p$. Como $\eta_j \mid_{F_\Phi}$ é isomorfo a $R^m$, para algum $m$, podemos aplicar o Lema 3.3.1. Então, $\eta_j \mid_{F_\Phi} = \mu_1 \oplus \mu_{-1}$, sendo que $T_p$ atua como 1 em $\mu_1$ e como $-1$ em $\mu_{-1}$. Então $v = v_1 + v_{-1}$, onde $v_1 \in \mu_1$ e $v_{-1} \in \mu_{-1}$. Mas $v_1 \in \varepsilon_{\rho_1}$ e $v_{-1} \in \varepsilon_{\rho_{-1}}$ e, portanto, $v \in \varepsilon_{\rho_1} \oplus \varepsilon_{\rho_{-1}}$, isto é, $\varepsilon_{\rho_1} \oplus \varepsilon_{\rho_{-1}} \supset \eta_j \mid_{F_\Phi}$. □

## 3.4. Duas Ações Especiais

Nosso objetivo, nesta seção, será a construção de algumas ações especiais de $Z_2^k$ em variedades. Em geral, tais ações serão obtidas a partir de uma involução via um processo iterativo. A importância destas ações será vista nos teoremas de classificação que obteremos nos Capítulos 4 e 5.

DEFINIÇÃO 3.4.1. Ação "twist" (ou $Z_2$-"twist"):

Dada variedade $M$, definimos uma involução sobre $M \times M$ por $T_1(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$. Então $(M \times M, T_1)$ é uma $Z_2$-ação que será chamada "twist"(ou $Z_2$-"twist").

TEOREMA 3.4.2. *O "fixed data" do "twist" é $(F_{twist}, \tau M)$, onde $F_{twist} = diagonal(M \times M) = \triangle(M \times M) \cong M$.*

DEMONSTRAÇÃO. $F_{twist} = \{(x, y) \in M \times M \mid (x, y) = (y, x)\} = \triangle(M \times M)$. Seja $\eta \to \triangle(M \times M) = \triangle$ o fibrado normal. Sabemos que $\tau(M \times M) \cong \tau M \oplus \tau M$ e que $\tau(M \times M) \mid_\triangle \cong \eta \oplus \tau\triangle$. Considere o subfibrado $\theta \to \triangle$ de $\tau(M \times M) \mid_\triangle$ tal que a fibra sobre $(x, x)$ são os vetores da forma $(-w, w) \in \tau(M \times M)_{(x,x)}$. Como $\tau\triangle$ é o subfibrado de $\tau(M \times M) \mid_\triangle$ cuja fibra

sobre $(x,x)$ são os vetores da forma $(v,v) \in \tau(M\times M)_{(x,x)}$, temos que $\tau(M\times M)\mid_{\triangle} \cong \theta \oplus \tau\triangle$. Assim, $\eta$ é equivalente a $\theta$, que por sua vez é equivalente a $\tau M \to M$. □

DEFINIÇÃO 3.4.3. Ação $Z_2^k$-"twist" (para $k \geq 1$):

Definiremos uma $Z_2^k$-ação sobre $(M)^{2^k}$(produto cartesiano de $2^k$ cópias de $M$), que chamaremos de $Z_2^k$-"twist", indutivamente. Para $k=1$ já definimos em 3.4.1. Suponha conhecido o $Z_2^{k-1}$-"twist", ou seja, temos $((M)^{2^{k-1}}, T_1, \cdots, T_{k-1})$. Observando que $(M)^{2^k} = (M)^{2^{k-1}} \times (M)^{2^{k-1}}$, sejam $T_i' : (M)^{2^{k-1}} \times (M)^{2^{k-1}} \to (M)^{2^{k-1}} \times (M)^{2^{k-1}}$, $1 \leq i \leq k-1$, dadas por $T_i' = T_i \times T_i$ e $T_k' : (M)^{2^{k-1}} \times (M)^{2^{k-1}} \to (M)^{2^{k-1}} \times (M)^{2^{k-1}}$ dada por $T_k'(x,y) = (y,x)$. O $Z_2^k$-"twist" será a $Z_2^k$-ação $((M)^{2^k}, T_1', \cdots, T_k')$.

OBSERVAÇÃO 3.4.4. A definição subentende que todas as $T_i'$ sejam involuções comutantes, para que possam constituir uma $Z_2^k$-ação. $T_k'$ é obviamente uma involução e é fácil ver que $T_i'$, $1 \leq i \leq k-1$, é uma involução, já que é, indutivamente, um produto de involuções. Para verificar que são comutantes, basta notar que, se $(\alpha,\beta) \in M \times M$,

$T_i' \circ T_k'(\alpha,\beta) = (T_i \times T_i) \circ T_k'(\alpha,\beta) = (T_i \times T_i)(\beta,\alpha) = (T_i(\beta), T_i(\alpha)) =$

$= T_k' \circ (T_i(\alpha), T_i(\beta)) = T_k' \circ (T_i \times T_i)(\alpha,\beta) = T_k' \circ T_i'(\alpha,\beta).$

e, se $i,j < k$,

$T_i' \circ T_j' = (T_i \times T_i) \circ (T_j \times T_j) = (T_iT_j \times T_iT_j) =$

$= (T_jT_i \times T_jT_i) = (T_j \times T_j) \circ (T_i \times T_i) = T_j' \circ T_i'.$

Nosso próximo passo é determinar o "fixed data" da $Z_2^k$-"twist". Primeiro, temos o

LEMA 3.4.5. $F_{Z_2^k - twist} = \triangle(M)^{2^k} = \{(m,m,...,m) \mid m \in M\}$.

DEMONSTRAÇÃO. A prova será feita usando indução sobre $k$. Para $k=1$ já está feito no Teorema 3.4.2. Suponha verdade para $k-1$, ou seja, o conjunto de pontos fixos da $Z_2^{k-1}$-"twist" $((M)^{2^{k-1}}, T_1, \cdots, T_{k-1})$ é $\triangle(M)^{2^{k-1}}$. Então, se $\Upsilon$ é a ação $((M)^{2^k}, T_1', \cdots, T_{k-1}')$ temos que $F_\Upsilon = \triangle(M)^{2^{k-1}} \times \triangle(M)^{2^{k-1}}$, ou seja, $F_\Upsilon = \{(x_1,..,x_{2^{k-1}}, y_{2^{k-1}+1},...,y_{2^k}) \in (M)^{2^k} \mid x_i = x_j \forall i,j; y_p = y_q \forall p,q\}$. Por outro lado, $F_{T_k'} = \{(x_1,...,x_{2^{k-1}}, y_{2^{k-1}+1},...,y_{2^k}) \in (M)^{2^k} \mid x_i = y_{i+2^{k-1}} \forall i\}$. Mas $F_{Z_2^k - twist} = F_\Upsilon \cap F_{T_k'}$ e, portanto, $F_{Z_2^k - twist} = \{(x_1,...,x_{2^{k-1}}, x_{2^{k-1}+1},...,x_{2^k}) \in (M)^{2^k} \mid x_i = x_j \forall i,j\} = \triangle(M)^{2^k}$. □

LEMA 3.4.6. *Sejam $(M,\Phi)$ e $(N,\Psi)$ $Z_2^k$-ações com "fixed data" $(F_\Phi, \{\nu_{\rho_i}\}_i)$ e $(F_\Psi, \{\mu_{\rho_i}\}_i)$, respectivamente. Então o "fixed data" da ação produto $(M\times N, \Phi\times\Psi)$ é $(F_\Phi \times F_\Psi, \{\nu_{\rho_i} \times \mu_{\rho_i}\}_i) = (F_\Phi \times F_\Psi, \{p_1!(\nu_{\rho_i}) \oplus p_2!(\mu_{\rho_i})\}_i)$, onde $p_1 : F_\Phi \times F_\Psi \to F_\Phi$, $p_2 : F_\Phi \times F_\Psi \to F_\Psi$ são as projeções.*

DEMONSTRAÇÃO. Considere $(M,\Phi) = (M, T_{\Phi_1}, \ldots, T_{\Phi_k})$ e $(N,\Psi) = (M, T_{\Psi_1}, \ldots, T_{\Psi_k})$. É claro que $F_\Phi \times F_\Psi$ é o conjunto de pontos fixos de $\Phi \times \Psi$. Seja $\varepsilon_{\rho_p}$ um fibrado do "fixed data" de $(M \times N, \Phi \times \Psi)$, ou seja, $\varepsilon_{\rho_p}$ é o fibrado onde cada $T_{\Phi_i} \times T_{\Psi_i}$ atua como $\rho_p(T_{\Phi_i} \times T_{\Psi_i})$.

Agora, basta notar que $\varepsilon_{\rho_p} = p_1!(\nu_{\rho_p}) \oplus p_2!(\mu_{\rho_p})$, já que em $\nu_{\rho_p}$, e somente em $\nu_{\rho_p}$, $T_{\Phi_i}$ atua como $\rho_p(T_{\Phi_i})$; e em $\mu_{\rho_p}$, e somente em $\mu_{\rho_p}$, $T_{\Psi_i}$ atua como $\rho_p(T_{\Psi_i})$. □

Finalmente, temos o

TEOREMA 3.4.7. *O "fixed data" do $Z_2^k$-"twist" é $(M, \tau M, \tau M, \cdots, \tau M)$ ($2^k - 1$ cópias de $\tau M$).*

DEMONSTRAÇÃO. Faremos a prova usando indução.

Para $k = 1$ já está feito no Teorema 3.4.2.

Suponha verdadeiro para $k-1$, ou seja, o "fixed data" do $Z_2^{k-1}$-"twist" $((M)^{2^{k-1}}, T_1, \cdots, T_{k-1})$ é $(M, \tau M, \tau M, \cdots, \tau M)$ ($2^{k-1}-1$ cópias de $\tau M$) . Para facilitar a notação, seja $\Omega_p$ o $Z_2^p$-"twist". Seja $F_{\Omega_{k-1}\times\Omega_{k-1}}$ o conjunto de pontos fixados pela $Z_2^{k-1}$-ação $\Omega_{k-1} \times \Omega_{k-1} = (T'_1, \cdots, T'_{k-1})$. Temos que $F_{\Omega_{k-1}\times\Omega_{k-1}} = M \times M \subset (M)^{2^{k-1}} \times (M)^{2^{k-1}}$ (aqui, $M$ é $\triangle(M)^{2^{k-1}} \subset (M)^{2^{k-1}}$) e, pela hipótese de indução e pelo Lema 3.4.6, temos que o "fixed data" de $\Omega_{k-1} \times \Omega_{k-1}$ é $(F_{\Omega_{k-1}\times\Omega_{k-1}}, \{\nu_{A_j}\}_j) = (M \times M, \tau M \times \tau M, \cdots, \tau M \times \tau M)$. Usaremos, agora, o Teorema 3.3.11, sabendo que $\langle T'_1, \cdots, T'_{k-1}\rangle$ desempenhará o papel de $H$. Para um fixado $j$ temos, então, $\nu_{A_j} = \tau M \times \tau M \to M \times M$ e, portanto, $\nu_{A_j}\,|_{F_{\Omega_k}} = \tau M \oplus \tau M \to M$ (já sabemos pelo Lema 3.4.5 que $M = \triangle(M)^{2^k}$ é o conjunto de pontos fixos de $\Omega_k$). Além disso, identificando $T'_k$ com sua derivada ou, equivalentemente, considerando o fibrado normal como uma vizinhança tubular adequada, teremos $T'_k : \tau M \oplus \tau M \to \tau M \oplus \tau M$, $T'_k(v,w) = (w,v)$. Agora, considerando $\Omega_{k-1}$ a restrição de $\Omega_k$ ao subgrupo $\langle T'_1, \cdots, T'_{k-1}\rangle$, para cada $A_j = (a_1, \ldots, a_{k-1})$, seja $\nu_{A_j}\,|_{F_{\Omega_k}} = \varepsilon_{(A_j,1)} \oplus \varepsilon_{(A_j,-1)}$, como no Teorema 3.3.11. Então, o "fixed data" de $\Omega_k$ será formado pelos fibrados $\varepsilon_{(1,\ldots,1,-1)}$, $\{\varepsilon_{(A_j,1)}\}_j$, $\{\varepsilon_{(A_j,-1)}\}_j$, onde $\varepsilon_{(A_j,-1)}$ é o subfibrado de $\nu_{A_j}\,|_{F_{\Omega_k}}$ onde $T'_k$ atua como 1 e $\varepsilon_{(A_j,-1)}$ é o subfibrado de $\nu_{A_j}\,|_{F_{\Omega_k}}$ onde $T'_k$ atua como -1. Assim, $\varepsilon_{(A_j,1)}$ é o subfibrado de $\tau M \oplus \tau M \to M$ formado pelos vetores $(v,v)$, ou seja, $\varepsilon_{(A_j,1)}$ é equivalente a $\tau M$; enquanto $\varepsilon_{(A_j,-1)}$ é o subfibrado de $\tau M \oplus \tau M \to M$ formado pelos vetores $(v,-v)$, ou seja, $\varepsilon_{(A_j,-1)}$ também é equivalente a $\tau M$. Finalmente, de acordo com o Teorema 3.3.10, $\varepsilon_{(1,\ldots,1,-1)}$ é o fibrado normal de $\triangle(M)^{2^k}$ em $\triangle(M)^{2^{k-1}} \times \triangle(M)^{2^{k-1}}$, que é equivalente ao caso $k = 1$ e, portanto, $\varepsilon_{(1,\ldots,1,-1)} \cong \tau M$. Assim, todos os fibrados do "fixed data" de $\Omega_k$ são equivalentes a $\tau M$, como queríamos demonstrar. □

Introduziremos, agora, outra ação especial de $Z_2^k$, a qual é construída a partir de uma involução $(M,T)$. Na realidade, a $Z_2^k$-"twist" é um caso particular desta, com $(M,T) = (N \times N, Twist)$ sendo a $Z_2$-"twist".

DEFINIÇÃO 3.4.8. Dada uma involução $(M,T)$ com fixed data $\eta \to F$, definimos uma $Z_2^k$-ação sobre $(M)^{2^{k-1}}$ a partir de $(M,T)$, a qual denotaremos por $\Gamma_k^k(M,T)$, indutivamente:

i) $\Gamma_1^1(M,T) = (M,T)$.

ii) Para $k > 1$, suponha definido $\Gamma_{k-1}^{k-1}(M,T) = ((M)^{2^{k-2}}, T_1, ..., T_{k-1})$. Observando que $(M)^{2^{k-1}} = (M)^{2^{k-2}} \times (M)^{2^{k-2}}$, sejam $T_i' : (M)^{2^{k-2}} \times (M)^{2^{k-2}} \to (M)^{2^{k-2}} \times (M)^{2^{k-2}}$ dadas por $T_i' = T_i \times T_i$, para $1 \leq i \leq k-1$, e $T_k' : (M)^{2^{k-2}} \times (M)^{2^{k-2}} \to (M)^{2^{k-2}} \times (M)^{2^{k-2}}$ dada por $T_k'(x,y) = (y,x)$. Definimos $\Gamma_k^k(M,T) = ((M)^{2^{k-1}}, T_1', ..., T_{k-1}', T_k')$.

OBSERVAÇÃO 3.4.9. Na verdade $\Gamma_k^k = ((M)^{2^{k-1}}, T \times T \cdots \times T, Z_2^{k-1} - twist)$. Isto é uma ação de $Z_2^k$, uma vez que as involuções em questão são comutantes. De fato, como $T_i'$ para $2 \leq i \leq k$ são involuções do $Z_2^{k-1}$-"twist", basta notar que $T_1' = T \times T \cdots \times T$ comuta com estas involuções do $Z_2^{k-1}$-"twist". Mas isto é verdade, já que para $2 \leq i \leq k$ cada $T_i'$ é apenas uma troca de coordenadas.

TEOREMA 3.4.10. *Os fibrados do "fixed data" de $\Gamma_k^k(M,T)$ tem a seguinte descrição: para cada representação $A = (a_1, a_2, ..., a_k)$ (tomando $(T_1', ..., T_{k-1}', T_k')$ como acima descrito):*

*i) se $a_1 = -1$ ($2^{k-1}$ representações deste tipo) então $\varepsilon_A = \eta$ (onde $\eta \to F$ é o "fixed data" de $(M,T)$).*

*ii) se $a_1 = 1$ ($2^{k-1} - 1$ representações deste tipo) então $\varepsilon_A = \tau F$.*

DEMONSTRAÇÃO. Faremos a prova por indução. Para $k = 1$ é óbvio, já que $\Gamma_1^1(M,T) = (M,T)$. Suponha que o teorema seja verdadeiro para $k-1$. Então, pelo Lema 3.4.6 temos que o "fixed data" de $\Gamma_{k-1}^{k-1}(M,T) \times \Gamma_{k-1}^{k-1}(M,T) = ((M)^{2^{k-2}} \times (M)^{2^{k-2}}, T_1 \times T_1, ..., T_{k-1} \times T_{k-1})$ será $(F \times F, \tau F \times \tau F, ..., \tau F \times \tau F, \eta \times \eta, ..., \eta \times \eta)$, onde os $2^{k-2}$ fibrados iniciais são $\tau F \times \tau F$ e os $2^{k-2}-1$ restantes são $\eta \times \eta$, além de que os $2^{k-2}$ fibrados iniciais são correspondentes às representações $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1})$ tais que $a_1 = -1$ (ou seja, $T_1 \times T_1$ atua nestes fibrados como $-1$), enquanto os $2^{k-2}-1$ fibrados restantes são correspondentes às representações $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1})$ tais que $a_1 = 1$ (ou seja, $T_1 \times T_1$ atua nestes fibrados como 1). Observando, pela definição de $\Gamma_k^k(M,T)$, que $\Gamma_{k-1}^{k-1}(M,T) \times \Gamma_{k-1}^{k-1}(M,T)$ é uma restrição de $\Gamma_k^k(M,T) = ((M)^{2^{k-1}}, T_1 \times T_1, ..., T_{k-1} \times T_{k-1}, T_k')$ e usando o Teorema 3.3.11 vemos que cada $\eta \times \eta \to F \times F$ restrito a $F \subset F \times F$ (vendo $F$ como a diagonal de $F \times F$) vai se quebrar em dois subfibrados $\varepsilon_{A_1} \oplus \varepsilon_{A_{-1}} \to F$, onde $T_k'$ atua como

1 em $\varepsilon_{A_1}$ e como $-1$ em $\varepsilon_{A_{-1}}$. Como $T'_k(x,y) = (y,x)$ em $(M)^{2^{k-2}} \times (M)^{2^{k-2}}$, restringindo $T'_k$ a $F_{\Gamma^{k-1}_{k-1}(M,T)\times\Gamma^{k-1}_{k-1}(M,T)} = F \times F$ teremos que $\varepsilon_{A_1}$ será composto pelos vetores $(v,w) \in \eta \times \eta$ tais que $(v,w) = T'_k(v,w) = (w,v)$, ou seja, $\varepsilon_{A_1}$ é o subfibrado de $\eta \times \eta$ formado pelos vetores do tipo $(v,v)$ e, portanto, $\varepsilon_{A_1}$ é uma cópia de $\eta$. Analogamente, teremos que $\varepsilon_{A_{-1}}$ será composto pelos vetores $(v,w)$ tais que $-(v,w) = T'_k(v,w) = (w,v)$, ou seja, $\varepsilon_{A_1}$ é o subfibrado de $\eta \times \eta$ formado pelos vetores do tipo $(v,-v)$ e, portanto, $\varepsilon_{A_{-1}}$também é uma cópia de $\eta$.

Da mesma forma, $\tau F \times \tau F$ vai se quebrar em dois subfibrados $\varepsilon_{B_1} \oplus \varepsilon_{B_{-1}} \to F$, onde $T'_k$ atua como 1 em $\varepsilon_{B_1}$ e como $-1$ em $\varepsilon_{B_{-1}}$. Como $T'_k(x,y) = (y,x)$ em $(M)^{2^{k-2}} \times (M)^{2^{k-2}}$ (e em particular em $F \times F$) teremos que $\varepsilon_{B_1}$ será composto pelos vetores $(v,w)$ tais que $(v,w) = T'_k(v,w) = (w,v)$, ou seja, $\varepsilon_{B_1}$ é o subfibrado de $\tau F \times \tau F$ formado pelos vetores do tipo $(v,v)$ e, portanto, $\varepsilon_{B_1}$ é uma cópia de $\tau F$. Analogamente, teremos que $\varepsilon_{B_{-1}}$ será composto pelos vetores $(v,w)$ tais que $(v,w) = T'_k(v,w) = -(w,v)$, ou seja, $\varepsilon_{B_1}$ é o subfibrado de $\tau F \times \tau F$ formado pelos vetores do tipo $(v,-v)$ e, portanto, $\varepsilon_{B_{-1}}$também é uma cópia de $\tau F$. Finalmente, o fibrado $\varepsilon_{(1,1,1,\ldots,1,-1)}$ é o "fixed data" normal de $(F \times F, T'_k)$ e, portanto, $\varepsilon_{(1,1,1,\ldots,1,-1)} = \tau F$. Resumindo, cada um dos $2^{k-2}$ fibrados $\eta\times\eta$ quebra-se em dois fibrados $\eta$, totalizando $2\cdot 2^{k-2} = 2^{k-1}$; cada um dos $2^{k-2}-1$ fibrados $\tau F\times\tau F$ quebra-se em dois fibrados $\tau F$, totalizando $2\cdot(2^{k-2}-1) = 2^{k-1}-2$ que somado ao fibrado $\varepsilon_{(1,1,1,\ldots,1,-1)}$ nos dá $2^{k-1}-1$ fibrados $\tau F$. Além disso, em cada cópia de $\eta$ assim obtida $T_1 \times T_1$ atua como $-1$ (porque assim atuava em $\eta\times\eta$) enquanto, analogamente, $T_1 \times T_1$ atua como 1 em cada cópia de $\tau F$. Isto encerra a prova. □

Teorema 3.4.11. *Seja $(G,M,\Phi) = (M,T_1,T_2,\cdots,T_k)$ uma $Z_2^k$-ação com "fixed data" $(F_\Phi,\varepsilon_{A_1},\ldots,\varepsilon_{A_{2^k-1}})$. Então o "fixed data" da $Z_2^{k+1}$-ação $(H,M^n,\Psi) = (M^n,T_1,T_2,\cdots,T_k,Id)$, onde $Id$ é a identidade, é $(F_\Psi,\varepsilon_{B_1},\ldots,\varepsilon_{B_{2^{k+1}-1}}) = (F_\Phi,\varepsilon_{A_1},0,\varepsilon_{A_2},0,\ldots,\varepsilon_{A_{2^k-1}},0,0)$ ($2^k$ fibrados nulos acrescentados aos $2^k-1$ fibrados do "fixed data" de $\Phi$), ou seja, se $B_i = (A_i,-1)$ ou $B_i = (1,1,\ldots,1,-1)$ então $\varepsilon_{B_i}$ é o fibrado nulo, enquanto que se $B_i = (A_i,1)$ então $\varepsilon_{B_i} = \varepsilon_{A_i}$.*

Demonstração. É óbvio que $F_\Phi = F_\Psi$. Temos que o fibrado $\varepsilon_{B_1} = \varepsilon_{(1,1,\ldots,1,-1)}$ do "fixed data" de $\Psi$ é o fibrado normal de $F_\Psi$ em $F_\Phi = F_\Psi$, que é o fibrado nulo sobre $F_\Psi$. Além disso, cada fibrado do "fixed data" de $\Phi$ se quebra, como no Teorema 3.3.11, da seguinte forma: $\varepsilon_{A_j} = \varepsilon_{(A_j,1)} \oplus \varepsilon_{(A_j,-1)}$. Mas $\varepsilon_{(A_j,-1)}$ é o fibrado onde $Id$ atua como $-1$ e, portanto, é o fibrado nulo. Então $\varepsilon_{A_j} = \varepsilon_{(A_j,1)} \oplus 0$, ou seja, cada um dos $2^{k-1}-1$ fibrados $\varepsilon_{A_j}$ dá origem a um fibrado nulo, o que totaliza $2^{k-1}-1$ fibrados nulos. Adicionado a $\varepsilon_{B_1} = \varepsilon_{(1,1,\ldots,1,-1)}$ teremos $2^{k-1}$ fibrados nulos no "fixed data" de $\Psi$ (além dos eventualmente já existentes no "fixed data"

de $\Phi$). Além disso, pela forma como os fibrados nulos foram coletados, eles correspondem exatamente às representações descritas no enunciado do teorema. □

Aplicando o Teorema 3.4.11 repetidas vezes, obtemos o

COROLÁRIO 3.4.12. *Seja* $(G, M^n, \Phi) = (M, T_1, T_2, \cdot\ \cdot\ \cdot, T_k)$ *uma* $Z_2^k$*-ação com "fixed data"* $(F_\Phi, \varepsilon_{A_1}, ..., \varepsilon_{A_{2^k-1}})$. *Então o "fixed data" da* $Z_2^{k+s}$*-ação* $(H, M, \Psi) = (M, T_1, T_2, \cdot\ \cdot\ \cdot, T_k, Id, ..., Id)$, *onde foram acrescentadas s identidades, é* $(F_\Psi, \varepsilon_{B_1}, \ldots, \varepsilon_{B_{2^{k+s}-1}}) = (F_\Phi, \varepsilon_{A_1}, 0, \ldots, 0, \varepsilon_{A_2}, 0, \ldots, 0, \varepsilon_{A_{2^k-1}}, 0, ..., 0, 0)$ *(*$(2^s-1)$ *fibrados nulos acrescentados ao lado de cada* $\varepsilon_{A_i}$ *e mais o fibrado nulo* $\varepsilon_{(1,1,...,1,-1)}$*, totalizando* $(2^k-1)(2^s-1)+1$ *fibrados nulos acrescentados ao "fixed data" de* $\Phi$*), ou seja, se* $B_i = (A_i, b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots, b_{k+s})$, *com* $b_{k+i} = -1$ *para algum* $1 \leq i \leq s$ *ou* $B_i = (1, 1, \ldots, 1, -1)$ *então* $\varepsilon_{B_i}$ *é o fibrado nulo, enquanto que se* $B_i = (A_i, 1, 1, \ldots, 1)$ *então* $\varepsilon_{B_i} = \varepsilon_{A_i}$.

OBSERVAÇÃO 3.4.13. Observe que se $A = (a_1, a_2, ..., a_k)$ e para algum $i$ tivermos $a_i = -1$ e $T_i = Id$ então $\varepsilon_A = 0$ (fibrado nulo).

Aplicando o Corolário 3.4.12 às ações $\Gamma_k^k$, previamente definidas, obtemos novas ações:

DEFINIÇÃO 3.4.14. Ação $\Gamma_t^k$:

Dada uma involução $(M, T)$ com fixed data $\eta \to F$ e um inteiro $1 \leq t \leq k$ definimos uma $Z_2^k$-ação $\Gamma_t^k$ sobre $M^{2^{t-1}}$ da seguinte forma: se $\Gamma_t^t(M, T) = ((M)^{2^{t-1}}, T_1, T_2, ..., T_t)$ fazemos $\Gamma_t^k(M, T) = ((M)^{2^{t-1}}, T_1, T_2, ..., T_t, Id, Id, ..., Id)$ ($k - t$ identidades acrescentadas à $\Gamma_t^t$).

Pelo Teorema 3.4.10 e pelo Corolário 3.4.12, concluímos o

TEOREMA 3.4.15. *O "fixed data" de* $\Gamma_t^k(M, T)$ *tem a seguinte descrição: para cada representação* $A = (a_1, a_2, ..., a_k)$ *(lembrando que* $T_1 = T \times T \cdots \times T$*):*

*i) se* $a_j = 1$ *para* $j > t$ *e se* $a_1 = -1$ *(*$2^{t-1}$ *representações deste tipo) então* $\varepsilon_A = \eta$ *(lembrando que* $\eta \to F$ *é o "fixed data" de* $(M, T)$*).*

*ii) se* $a_j = 1$ *para* $j > t$ *e se* $a_1 = 1$ *(*$2^{t-1} - 1$ *representações deste tipo) então* $\varepsilon_A = \tau(F)$.

*iii) se* $a_j = -1$ *para algum* $j > t$ *(*$(2^k - 2^t)$ *representações deste tipo) então* $\varepsilon_A = 0$.

OBSERVAÇÃO 3.4.16. As ações $\Gamma_t^k$ acima descritas foram usadas por P. Pergher em **[Pe8]**, **[Pe6]**, **[Pe1]** e **[Pe9]**. As informações acima pormenorizadas a respeito do "fixed data" também foram utilizadas nestes trabalhos, embora nenhuma demonstração a respeito tenha sido apresentada nos mesmos.

CAPíTULO 4

# $Z_2^k$-ações Fixando $RP(2m) \cup RP(2n)$

## 4.1. Introdução

Neste capítulo objetivamos classificar, a menos de bordismo equivariante, as ações $(M, \Phi)$ de $G = Z_2^k$ cujo conjunto de pontos fixos é a união disjunta $RP(2m) \cup RP(2n)$, onde $0 < 2m < 2n$ e $2m \neq n$ (o caso $2m = 0$, ou seja, $F_\Phi = \{ponto\} \cup RP(2n)$, foi completamente resolvido por P. Pergher em [**Pe6**] e [**Pe7**]). Como ficará claro no desenvolvimento do capítulo, o caso relevante ocorre quando $M$ é conexa, uma vez que se $M$ é desconexa, ou caímos no caso $M$ conexa ou teremos a situação já descrita por F. Capobianco em [**Ca**]. A classificação em questão será descrita em termos das classes de bordismo equivariante de involuções que fixam $RP(2m) \cup RP(2n)$. Mostraremos que, se $0 < 2m < 2n$ e $2m \neq n$, então toda tal $(M, \Phi)$ é equivariantemente bordante a uma ação obtida a partir de uma ação do tipo $\Gamma_k^k(W, T)$ após uma mudança de base de $G$ e após uma conveniente "remoção de secções", onde $(W, T)$ é alguma involução fixando $RP(2m) \cup RP(2n)$. A remoção de secções é uma técnica decorrente do teorema de estabilidade para ações de $Z_2^k$, recentemente provado por P. Pergher em [**Pe9**], a qual permite a obtenção de $Z_2^k$-ações removendo-se secções (ou seja, fibrados triviais unidimensionais) que porventura existam nos fibrados do "fixed data" de uma prévia $Z_2^k$-ação.

Enfatizamos que as técnicas e resultados deste capítulo não são suficientes para a abordagem do caso $n = 2m$, o qual ficou em aberto; neste caso particular permanece a possibilidade de ocorrência de ações "exóticas", ou seja, ações não obtidas pelo processo acima descrito.

## 4.2. "Fixed data" de $Z_2^k$-ações Fixando $RP(2m) \cup RP(2n)$

TEOREMA 4.2.1. *Sejam $(G, M, \Phi)$ uma $Z_2^k$-ação com "fixed data" $(F_\Phi, \{\varepsilon_{\rho_i}\}_{1 \leq i \leq 2^k - 1})$ e um subgrupo $\Xi \subset Hom(G, Z_2)$, $\Xi = \{\rho_a \mid a \in A\}$. Então existem subgrupos $G_1$ e $G_2$ tais que $G = G_1 \oplus G_2$ e os fibrados do "fixed data" de $(G_1, F_{\Phi|_{G_2}}, \Phi\,|_{G_1})$ são exatamente os fibrados $\varepsilon_{\rho_a}$ onde $\rho_a$ é um homomorfismo não-nulo de $\Xi$.*

DEMONSTRAÇÃO. Tome $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r, \theta_1, \ldots, \theta_{k-r})$ uma base para $Hom(G, Z_2)$ tal que $\Xi = \langle \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r \rangle$. Seja $(\varphi_1^*, \varphi_2^*, \ldots, \varphi_r^*, \theta_1^*, \ldots, \theta_{k-r}^*)$ a base dual, ou seja, $\varphi_i^* \in Hom(Hom(G, Z_2), Z_2)$ e $\theta_i^* \in Hom(Hom(G, Z_2), Z_2)$. Como, naturalmente,

$G \cong Hom(Hom(G, Z_2), Z_2)$, podemos associar uma base $(T_1, \ldots, T_r, S_1, \ldots, S_{k-r})$ em $G$, a qual satisfará as relações:

$$\varphi_j(T_i) = \varphi_i^*(\varphi_j) = \begin{cases} -1, & \text{se } i = j \\ 1, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$\varphi_j(S_i) = \varphi_i^*(\theta_j) = 1$$

$$\theta_j(T_i) = \theta_i^*(\varphi_j) = 1$$

$$\theta_j(S_i) = \theta_i^*(\theta_j) = \begin{cases} -1, & \text{se } i = j \\ 1, & \text{se } i \neq j \end{cases}.$$

Sejam $G_1 = \langle T_1, \ldots, T_r \rangle$ e $G_2 = \langle S_1, \ldots, S_{k-r} \rangle$.

Dado $\varepsilon_\rho$, se $\rho \in \Xi$ então $\rho = \varphi_{i_1} \ldots \varphi_{i_n}$ e, portanto, $\rho(S) = 1$ para todo $S \in G_2$ (pois $\rho(S_i) = 1$ para todo $S_i$ da base de $G_2$). Assim $\varepsilon_\rho$ é um dos fibrados do "fixed data" de $(G_1, F_{\Phi|_{G_2}}, \Phi\,|_{G_1})$.

Por outro lado, se $\rho \notin \Xi$, $\rho = \varphi_{i_1} \ldots \varphi_{i_n} \theta_{j_1} \ldots \theta_{j_m}$ onde $m \geq 1$, ou seja, escrevendo $\rho$ em função dos elementos da base, existe a ocorrência de ao menos um dos $\theta_i$. Teremos que $\rho(S_{j_1}) = -1$. Portanto, $\varepsilon_\rho$ é subfibrado do fibrado normal de $F_{\Phi|_{G_2}}$, ou seja, não é um dos fibrados do "fixed data" de $(G_1, F_{\Phi|_{G_2}}, \Phi\,|_{G_1})$.

Concluímos que $\varepsilon_\rho$ é um dos fibrados do "fixed data" de $(G_1, F_{\Phi|_{G_2}}, \Phi\,|_{G_1})$ se, e somente se, $\rho \in \Xi$, como queríamos demonstrar. □

TEOREMA 4.2.2. *Se $(M, T)$ é uma variedade conexa com involução fixando $RP(2m) \cup RP(2n)$, $0 < m < n$ e $\varepsilon(2m) \to RP(2m) \cup \varepsilon(2n) \to RP(2n)$ é o fibrado normal então $\varepsilon(2m)$ não é bordante a $\tau RP(2m)$ e $\varepsilon(2n)$ não é bordante a $\tau RP(2n)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Suponha que $\varepsilon(2m)$ seja bordante a $\tau RP(2m)$. Como vimos no Teorema 3.4.2, $(RP(2m) \times RP(2m), twist)$ fixa $\tau RP(2m) \to RP(2m)$. Uma vez que $\tau RP(2m) \cup \varepsilon(2m)$ borda, pelo Corolário A.0.8 teremos que a involução $(M, T) \cup (RP(2m) \times RP(2m), twist)$ é equivariantemente bordante a uma involução $(N, S)$ fixando fibrado bordante a $\varepsilon(2n) \to RP(2n)$. Portanto, pelo Teorema A.0.9, concluímos que $\varepsilon(2n)$ é bordante $\tau RP(2n)$. Então $2m + 2m = dim(\varepsilon(2m)) + dim(RP(2m)) = dim(\varepsilon(2n)) + dim(RP(2n)) = 2n + 2n$ pois $M$ é conexa, contrariando a hipótese de que $m \neq n$. Contradição análoga obtemos supondo $\varepsilon(2n)$ bordante a $\tau RP(2n)$. □

Como vimos na Definição 2.5.2, uma ação $(G, M, \Phi)$ é efetiva quando o único elemento de $G$ que atua como o homeomorfismo identidade é o elemento neutro de $G$. Se $G = \langle T_1, T_2, \ldots, T_k \rangle$ isto significa que $T_i \neq Id$, $\forall i$.

TEOREMA 4.2.3. *Se $(G, M, \Phi)$ não é efetiva então existe $\rho \in Hom(G, Z_2)$ tal que o fibrado $\varepsilon_\rho$ do "fixed data" de $\Phi$ é nulo.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $(G, M, \Phi)$ não é efetiva então existe subgrupo $H \cong Z_2^{k-1}$ tal que $G = H \oplus \langle Id \rangle$ e, portanto, associado a $H$ temos um homomorfismo $\rho \in Hom(G, Z_2)$ tal que $H = Núcleo(\rho)$. Como $F_{\Phi|_H} = F_\Phi$ e $\varepsilon_\rho$ é o fibrado normal de $F_\Phi$ em $F_{\Phi|_H}$, temos que $\varepsilon_\rho$ é um fibrado nulo. □

OBSERVAÇÃO 4.2.4. Veremos, adiante, que se $M$ é conexa e $(G, M, \Phi)$ fixa $RP(2m) \cup RP(2n)$, $0 < m < n$ e $2m \neq n$ então vale a recíproca do teorema acima.

NOTAÇÃO 4.2.5. De agora em diante adotaremos as seguintes notações:

- $(G, M, \Phi)$ uma $Z_2^k$-ação fixando $RP(2m) \cup RP(2n)$ com "fixed data" $(\bigoplus_\rho \varepsilon(2m)_\rho \to RP(2m)) \cup (\bigoplus_\rho \varepsilon(2n)_\rho \to RP(2n))$.
- $\mathcal{A} = \{[W_i^{n_i}, S_i]\}$ a coleção de classes de bordismo de involuções contendo um representante $(W_i^{n_i}, S_i)$, com $W_i^{n_i}$ conexa, fixando $RP(2m) \cup RP(2n)$; observamos que, pela versão forte do Teorema de Boardman[1] apresentado em **[K-S]**, $\mathcal{A}$ é finita, e isso decorre do fato de que, como $2m < 2n$, $RP(2m) \cup RP(2n)$ não borda. Para cada $i$, denotemos por $\eta(2m)_i \to RP(2m) \cup \eta(2n)_i \to RP(2n)$ o "fixed data" de $(W_i^{n_i}, S_i)$.
- $M(2m)$ a componente de $M$ que contém $RP(2m)$.
- $M(2n)$ a componente de $M$ que contém $RP(2n)$.
- $F(2m)_\rho$ a componente de $F_{\Phi|_{Núcleo(\rho)}}$ que contém $RP(2m)$.
- $F(2n)_\rho$ a componente de $F_{\Phi|_{Núcleo(\rho)}}$ que contém $RP(2n)$.

TEOREMA 4.2.6. *As únicas possibilidades para os fibrados do "fixed data" de $(G, M, \Phi)$ são:*

*a) $\varepsilon_\rho = \varepsilon(2m)_\rho \cup \varepsilon(2n)_\rho$ é bordante a $\eta(2m)_i \cup \eta(2n)_i$ para algum $i$;*

*b) $\varepsilon_\rho = \varepsilon(2m)_\rho \cup \varepsilon(2n)_\rho$ é bordante a $\tau RP(2m) \cup \tau RP(2n)$;*

*c) $\varepsilon_\rho = \varepsilon(2m)_\rho \cup \varepsilon(2n)_\rho$ é bordante a $\tau RP(2m) \cup 0$;*

*d) $\varepsilon_\rho = \varepsilon(2m)_\rho \cup \varepsilon(2n)_\rho$ é bordante a $0 \cup \tau RP(2n)$;*

*e) $\varepsilon_\rho = \varepsilon(2m)_\rho \cup \varepsilon(2n)_\rho$ é bordante a $0 \cup 0$.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $F(2m)_\rho = F(2n)_\rho$ tomamos $T \notin Núcleo(\rho)$ e teremos que $(F(2m)_\rho, T)$ é uma variedade com involução fixando $RP(2m) \cup RP(2n)$. Como vimos no Teorema 3.3.10,

[1]Teorema: Se $(M, T)$ é uma variedade com involução fixando $\eta \to F$ tal que $dim(M) > \frac{5}{2} dim(F)$ então $(M, T)$ borda (portanto $\eta \to F$ borda e, em particular, $F$ borda).

$\varepsilon_\rho$ é o fibrado normal de $F_\Phi$ em $F_{\Phi|_{Núcleo(\rho)}}$. Assim, $\varepsilon_\rho$ é bordante a $\eta(2m)_i \cup \eta(2n)_i$ para algum $i$, obtendo o caso a).

Se $F(2m)_\rho \neq F(2n)_\rho$, tomando $T \notin Núcleo(\rho)$, teremos que $(F(2m)_\rho, T)$ fixa $RP(2m)$ e $(F(2n)_\rho, T)$ fixa $RP(2n)$. Assim, pelo Teorema A.0.9, concluímos que $\varepsilon(2m)_\rho$ é nulo ou bordante a $\tau RP(2m)$ e, analogamente, $\varepsilon(2n)_\rho$ é nulo ou bordante a $\tau RP(2n)$. Assumindo todas estas possibilidades obtemos os casos b), c), d) e e). □

Observação 4.2.7. Observe que, usando o Teorema 4.2.2, concluímos que se $\varepsilon(2m)_\rho$ é bordante a $\tau RP(2m)$ (ou se $\varepsilon(2n)_\rho$ é bordante a $\tau RP(2n)$) então $F(2m)_\rho \neq F(2n)_\rho$.

Teorema 4.2.8. *Seja $0 < m < n$ e suponha que $F(2m)_\rho \neq F(2n)_\rho$ para todo $\rho \in Hom(G, Z_2)$. Então se $\varepsilon(2m)_{\rho_{k_1}}$ é nulo e $\varepsilon(2m)_{\rho_{k_2}}$ é bordante a $\tau RP(2m)$ teremos que $\varepsilon(2m)_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$ é nulo. Da mesma forma, se $\varepsilon(2n)_{\rho_{k_1}}$ é nulo e $\varepsilon(2n)_{\rho_{k_2}}$ é bordante a $\tau RP(2n)$ então $\varepsilon(2n)_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$ é nulo.*

Demonstração. Seja $(x, y) = (2m, 2n)$ ou $(x, y) = (2n, 2m)$.

Como $\rho_{k_1}\rho_{k_2}$, $\rho_{k_1}$ e $\rho_{k_2}$ são os homomorfismos não-triviais de um subgrupo de $Hom(G, Z_2)$ teremos, pelo Teorema 4.2.1, que existe $G_1$ e $G_2$ tais que $\varepsilon_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$, $\varepsilon_{\rho_{k_1}}$ e $\varepsilon_{\rho_{k_2}}$ são os fibrados do "fixed data" de $(G_1, F_{\Phi|_{G_2}}, \Phi\mid_{G_1})$. É claro que $G_1 \cong Z_2^2$, já que temos três fibrados no "fixed data" (e $G_2 \cong Z_2^{k-2}$). Assim, temos que $(G_1, F_{\Phi|_{G_2}}, \Phi\mid_{G_1})$ é uma $Z_2^2$-ação fixando $RP(2m) \cup RP(2n)$, onde os fibrados do "fixed data" são $\varepsilon_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$, $\varepsilon_{\rho_{k_1}}$ e $\varepsilon_{\rho_{k_2}}$(cuja ordem depende da escolha de uma base para $G_1$). Como $F(2m)_\rho \neq F(2n)_\rho$ para todo $\rho \in Hom(G, Z_2)$, todos os fibrados sobre $RP(x)$ são bordantes a $\tau RP(x)$ ou nulos, como vimos na demonstração do Teorema 4.2.6. Suponha, por absurdo, que $\varepsilon(x)_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$ seja bordante a $\tau RP(x)$. Teríamos construído uma $Z_2^2$-ação fixando $RP(2m) \cup RP(2n)$ onde os fibrados do "fixed data", restritos a $RP(x)$ são: dois deles bordantes a $\tau RP(x)$ e o outro é nulo. Mostraremos que isto não é possível dentro das nossas hipóteses.

De Fato, seja $F$ a componente de $F_{\Phi|_{G_2}}$ contendo $RP(x)$. Se $F$ não contém $RP(y)$ então $(F, \Phi\mid_{G_1})$ é uma $Z_2^2$-ação fixando somente $RP(x)$. Pelo Teorema A.0.10, o número de fibrados do "fixed data" de $(F, \Phi\mid_{G_1})$ bordantes a $\tau RP(x)$ é 0, 1 ou 3; absurdo. Segue que $F$ também contém $RP(y)$. Em outras palavras, $(G_1, F, \Phi\mid_{G_1})$ é uma $Z_2^2$-ação, com $F$ conexa, fixando $RP(2m) \cup RP(2n)$ onde, como já dissemos, os fibrados do "fixed data", restritos a $RP(x)$ são: dois deles bordantes a $\tau RP(x)$ e o outro é nulo. Segundo o Teorema 4.2.6, teríamos que os fibrados do "fixed data", restritos a $RP(y)$ seriam bordantes a $\tau RP(y)$ ou nulos, ou seja, teríamos quatro alternativas:

a) Os três fibrados sobre $RP(y)$ são nulos - Se isto ocorresse, teríamos $M = RP(y) = F$, o que é absurdo.

b) Um fibrado é bordante a $\tau RP(y)$ e os outros dois são nulos - Suponha que isto ocorra e seja $\varepsilon(y)_\rho$ o fibrado bordante $\tau RP(y)$. Então o fibrado normal de $F_{\Phi|_{Núcleo(\rho)}}$ em $M$ é nulo, ou seja, $M = F_{\Phi|_{Núcleo(\rho)}}$. Mas isto significa que existe involução $T$ em $G_1$ fixando $F$, isto é, existe involução $T$ em $G$ tal que $F \subset F_T$, contrariando a hipótese de que $F(2m)_\rho \neq F(2n)_\rho$ para todo $\rho \in Hom(G, Z_2)$.

c) Dois fibrados são bordantes a $\tau RP(y)$ e o outro é nulo - Neste caso teríamos que $dim(F) = dim(RP(2m)) + 2dim(\tau RP(2m)) = dim(RP(2n)) + 2dim(\tau RP(2n)) \Longrightarrow m = n$, contrariando a hipótese do teorema.

d) Os três fibrados são bordantes a $\tau RP(y)$ - denotemos estes fibrados por $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \to RP(y)$. Pelo Teorema A.0.12, $(RP(y); \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ é simultaneamente bordante a $(RP(y); \tau RP(y), \tau RP(y), \tau RP(y))$ que é o "fixed data" de $(RP(y) \times RP(y), Z_2^2 - twist)$. Pelo Corolário A.0.8, concluímos que existe $Z_2^2$-ação fixando $RP(x)$ com dois fibrados do "fixed data" bordantes a $\tau RP(x)$ e o outro nulo, contradizendo o Teorema A.0.10.

Concluímos que $\varepsilon(x)_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$ é nulo. □

TEOREMA 4.2.9. *Seja $0 < m < n$, $2m \neq n$ e suponha que $F(2m)_\rho = F(2n)_\rho$ para algum $\rho \in Hom(G, Z_2)$. Então se $\varepsilon(2m)_{\rho_{k_1}}$ é nulo e $\varepsilon(2m)_{\rho_{k_2}}$ é bordante a $\tau RP(2m)$ teremos que $\varepsilon(2m)_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$ é nulo. Da mesma forma, se $\varepsilon(2n)_{\rho_{k_1}}$ é nulo e $\varepsilon(2n)_{\rho_{k_2}}$ é bordante a $\tau RP(2n)$ então $\varepsilon(2n)_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$ é nulo.*

DEMONSTRAÇÃO. A diferença deste teorema para o anterior é que, agora, estamos admitindo a existência de fibrados bordantes a $\eta(x)_i$.

Mostra-se que $\varepsilon(x)_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$ não pode ser bordante a $\tau RP(x)$ como no teorema anterior (pois dos fibrados envolvidos nenhum é bordante a $\eta(x)_i$).

Adicionalmente, neste caso, devemos mostrar também que $\varepsilon(x)_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$ não pode ser bordante a $\eta(x)_i$. Usando argumento semelhante ao do teorema anterior, existem subgrupos $G_1 \cong Z_2^2$, $Z_2^k \cong G_1 \oplus G_2$ sendo que $(RP(2m) \cup RP(2n); \varepsilon_{\rho_{k_1}}, \varepsilon_{\rho_{k_1}}, \varepsilon_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}})$ é o "fixed data" de $(G_1, F_{\Phi|_{G_2}}, \Phi\mid_{G_1})$. Suponha, por absurdo, que $\varepsilon(x)_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$ seja bordante a $\eta(x)_i$. Seja $F$ a componente de $F_{\Phi|_{G_2}}$ contendo $RP(x)$. Se $F$ não contém $RP(y)$ então $(F, \Phi\mid_{G_1})$ é uma $Z_2^2$-ação fixando $RP(x)$. Então, pelo Teorema A.0.10, cada fibrado do "fixed data" de $(F, \Phi\mid_{G_1})$ será bordante a $\tau RP(x)$ ou nulo, contrariando nossa hipótese. Portanto $F$ também contém $RP(y)$. Então, como no teorema anterior, teríamos uma $Z_2^2$-ação $(G_1, F, \Psi) = (G_1, F, \Phi\mid_{G_1})$ sobre $F$

conexa fixando $RP(2m) \cup RP(2n)$ sendo que os fibrados do "fixed data" restritos a $RP(x)$ são: um nulo, um bordante a $\tau RP(x)$ e o outro bordante a $\eta(x)_i$. Dada uma $Z_2^2$-ação com esta descrição teríamos, segundo o Teorema 4.2.6, três alternativas para os fibrados do "fixed data" restritos a $RP(y)$:

a) Um fibrado bordante $\eta(y)_i$ e os outros dois nulos - Suponha que isto ocorra e seja $\varepsilon(y)_\rho$, $\rho \in Hom(G_1, Z_2)$, o fibrado bordante $\eta(y)_i$. Então o fibrado normal de $F_{\Psi|_{Núcleo(\rho)}}$ em $F$ é nulo (pois este fibrado é a soma de Whitney dos dois fibrados que, por hipótese, são nulos), ou seja, $F = F_{\Psi|_{Núcleo(\rho)}}$. Mas isto significa que dois dos fibrados sobre $RP(x)$ também são nulos, absurdo.

b) Um fibrado bordante a $\eta(y)_i$, um bordante a $\tau RP(y)$ e o outro nulo - Se isto ocorresse teríamos que $dim(F) = x + x + dim(\eta(x)_i) = y + y + dim(\eta(y)_i)$.

Como $x + dim(\eta(x)_i) = y + dim(\eta(y)_i) = dim(W_i^{n_i}) = n_i$ (lembrando que o $[W_i^{n_i}, S_i] \in \mathcal{A}$) concluímos que $x = y$, ou seja, $m = n$, contradizendo a hipótese do teorema.

c) Um fibrado bordante $\eta(y)_i$ e dois fibrados bordantes a $\tau RP(y)$ - Neste caso $dim(F) = x + x + dim(\eta(x)_i) = 2y + y + dim(\eta(y)_i)$ e, como $x + dim(\eta(x)_i) = y + dim(\eta(y)_i)$ teremos que $x = 2y$. Como $m < n$, a única possibilidade é $x = 2n$, $y = 2m$ e $2m = n$, contradizendo a hipótese do teorema.

Segue que $\varepsilon(x)_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$ é nulo. □

Observação 4.2.10. Os dois teoremas acima têm enunciados semelhantes e poderiam ser fundidos em um único teorema, mas optamos por dividi-lo para ressaltar que a hipótese $m \neq 2n$ só é necessária para o caso em que $F(2m)_\rho = F(2n)_\rho$ para algum $\rho \in Hom(G, Z_2)$.

Teorema 4.2.11. *Seja $0 < m < n$ e $2m \neq n$. Se $\varepsilon(2m)_{\rho_{k_1}}$ é nulo e $\varepsilon(2m)_{\rho_{k_2}}$ é bordante a $\eta(2m)_i$, para algum $i$, então $\varepsilon(2m)_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$ é nulo. Da mesma forma, se $\varepsilon(2n)_{\rho_{k_1}}$ é nulo e $\varepsilon(2n)_{\rho_{k_2}}$ é bordante a $\eta(2n)_i$, para algum $i$, então $\varepsilon(2n)_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$ é nulo.*

Demonstração. Suponha que $\varepsilon(x)_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$ seja bordante a $\tau RP(x)$. Então, como no teorema anterior (observe que neste caso, como $\varepsilon(2m)_{\rho_{k_2}}$ é bordante a $\eta(2m)_i$, então $F(2m)_{\rho_{k_2}} = F(2n)_{\rho_{k_2}}$), teríamos uma $Z_2^2$-ação fixando $RP(2m) \cup RP(2n)$ onde os fibrados do "fixed data", restritos a $RP(x)$ são: um nulo, um bordante a $\tau RP(x)$ e o outro bordante a $\eta(x)_i$. Mas este é exatamente um caso que vimos ser impossível no teorema anterior.

Suponha, então, que $\varepsilon(x)_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$ seja bordante a $\eta(x)_j$ (onde $i$ e $j$ podem ser iguais ou não). Então, como no teorema anterior, teríamos uma $Z_2^2$-ação sobre uma variedade conexa $F$ fixando $RP(2m) \cup RP(2n)$ onde os fibrados do "fixed data", restritos a $RP(x)$ são: um nulo, um bordante

a $\eta(x)_i$ e o outro bordante a $\eta(x)_j$. Dada uma $Z_2^2$-ação com esta descrição teríamos, segundo o Teorema 4.2.6, duas alternativas para os fibrados do "fixed data" restritos a $RP(y)$:

a) Um fibrado bordante a $\eta(y)_i$, um fibrado bordante a $\eta(y)_j$ e o outro fibrado nulo - Neste caso teríamos:

$dim(F) = x + dim(\eta(x)_i) + dim(\eta(x)_j) = y + dim(\eta(y)_i) + dim(\eta(y)_j)$.

Como $x + dim(\eta(x)_i) = y + dim(\eta(y)_i)$ e $x + dim(\eta(x)_j) = y + dim(\eta(y)_j)$ concluímos que $x = y$ contrariando a hipótese do teorema.

b) Um fibrado bordante a $\eta(y)_i$, um fibrado bordante a $\eta(y)_j$ e o outro fibrado bordante a $\tau RP(y)$ - Neste caso teríamos:

$dim(F) = x + dim(\eta(x)_i) + dim(\eta(x)_j) =$

$= y + y + dim(\eta(y)_i) + dim(\eta(y)_j)$.

Como $x + dim(\eta(x)_i) = y + dim(\eta(y)_i)$ e $x + dim(\eta(x)_j) = y + dim(\eta(y)_j)$ concluímos que $x = 0$, contrariando a hipótese do teorema.

Concluímos que $\varepsilon(x)_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$ é nulo. □

TEOREMA 4.2.12. *Seja $0 < m < n$ e $2m \neq n$. Se $\varepsilon(2m)_{\rho_{k_1}}$ é bordante a $\tau RP(2m)$ e $\varepsilon(2m)_{\rho_{k_2}}$ é bordante a $\eta(2m)_i$, para algum $i$, então $\varepsilon(2m)_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$ é bordante a $\eta(2m)_j$, para algum $j$ (eventualmente $i \neq j$). Da mesma forma, se $\varepsilon(2n)_{\rho_{k_1}}$ é bordante a $\tau RP(2n)$ e $\varepsilon(2n)_{\rho_{k_2}}$ é bordante a $\eta(2n)_i$, para algum $i$, então $\varepsilon(2n)_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$ é bordante a $\eta(2n)_j$, para algum $j$ (eventualmente $i \neq j$).*

DEMONSTRAÇÃO. Como nos teoremas anteriores, temos que existe $G_1$ e $G_2$ tais que $(G_1, F_{\Phi|_{G_2}}, \Phi\mid_{G_1})$ é uma $Z_2^2$-ação fixando $RP(2m) \cup RP(2n)$, onde os fibrados do "fixed data" são $\varepsilon_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$, $\varepsilon_{\rho_{k_1}}$ e $\varepsilon_{\rho_{k_2}}$. Como um desses fibrados é bordante a $\eta(x)_i$, argumentação já feita nos teoremas anteriores nos diz que a componente $F$ de $F_{\Phi|_{G_2}}$ contendo $RP(x)$ contém também $RP(y)$ e, portanto, $(G_1, F, \Phi\mid_{G_1})$ é uma $Z_2^2$-ação fixando $RP(2m) \cup RP(2n)$. Vimos no Teorema 4.2.9 que não podemos ter uma tal $Z_2^2$-ação onde os fibrados do "fixed data" restritos a $RP(x)$ são: um nulo, outro bordante a $\tau RP(x)$ e o outro bordante a $\eta(x)_i$. Então $\varepsilon(x)_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$ não pode ser nulo.

Basta verificarmos, para demonstrar o teorema, que $\varepsilon_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$ também não pode ser bordante a $\tau RP(x)$. Suponha então, por absurdo, que $\varepsilon_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$seja bordante a $\tau RP(x)$. Então $(G_1, F_{\Phi|_{G_2}}, \Phi\mid_{G_1})$ é uma $Z_2^2$-ação tal que os fibrados do "fixed data", restritos a $RP(x)$ são: um bordante a $\eta(x)_i$ e dois bordantes a $\tau RP(x)$. Segundo o Teorema 4.2.6, teríamos três hipóteses para os fibrados sobre $RP(y)$:

a) Um bordante a $\eta(y)_i$ e dois bordantes a $\tau RP(y)$: neste caso teríamos que

$dim(F) = x + 2x + dim(\eta(x)_i) = y + 2y + dim(\eta(y)_i)$.

Como $x + dim(\eta(x)_i) = y + dim(\eta(y)_i)$, concluímos que $x = y$, contrariando a hipótese do teorema.

b) Um bordante a $\eta(y)_i$, outro bordante a $\tau RP(y)$ e o outro nulo: neste caso:

$dim(F) = x + 2x + dim(\eta(x)_i) = y + y + dim(\eta(y)_i)$.

Portanto, $2x = y$. Isto só seria possível se $x = 2m = n$ e $y = 2n$, contrariando a hipótese do teorema.

c) Um bordante a $\eta(y)_i$ e dois nulos: neste caso:

$dim(F) = x + 2x + dim(\eta(x)_i) = y + dim(\eta(y)_i)$.

Então $x = 0$, contrariando a hipótese do teorema.

Concluímos que $\varepsilon(x)_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$ só pode ser bordante a $\eta(x)_j$, para algum $j$. □

TEOREMA 4.2.13. *Seja $0 < m < n$. Se $\varepsilon(2m)_{\rho_{k_1}}$ é bordante a $\eta(2m)_i$, para algum $i$, e $\varepsilon(2m)_{\rho_{k_2}}$ é bordante a $\eta(2m)_j$, para algum $j$ (eventualmente $i \neq j$), então $\varepsilon(2m)_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$ é bordante a $\tau RP(2m)$. Da mesma forma, se $\varepsilon(2n)_{\rho_{k_1}}$ é bordante a $\eta(2n)_i$, para algum $i$, e $\varepsilon(2n)_{\rho_{k_2}}$ é bordante a $\eta(2n)_j$, para algum $j$, teremos que $\varepsilon(2n)_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$ é bordante a $\tau RP(2n)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Novamente, temos que existe $G_1$ e $G_2$ tais que $(G_1, F_{\Phi|_{G_2}}, \Phi\mid_{G_1})$ é uma $Z_2^2$-ação fixando $RP(2m) \cup RP(2n)$, onde os fibrados do "fixed data" são $\varepsilon_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$, $\varepsilon_{\rho_{k_1}}$ e $\varepsilon_{\rho_{k_2}}$. Vimos no Teorema 4.2.11 que não podemos ter uma tal $Z_2^2$-ação onde os fibrados do "fixed data" restritos a $RP(x)$ são: um bordante a $\eta(x)_i$, para algum $i$, outro bordante a $\eta(x)_j$, para algum $j$, e o outro nulo. Então $\varepsilon(x)_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$ não pode ser nulo.

Basta verificarmos, para demonstrar o teorema, que $\varepsilon_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$ também não pode ser bordante a $\eta(x)_k$, para algum $k$. Suponha então, por absurdo, que $\varepsilon_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$ seja bordante a $\eta(x)_k$, para algum $k$ (eventualmente $k$, $i$ e $j$ distintos). A mesma argumentação feita no teorema anterior nos diz que a componente $F$ que contém $RP(y)$ também contém $RP(x)$ e, portanto, $(G_1, F, \Phi\mid_{G_1})$ é uma $Z_2^2$-ação fixando $RP(2m) \cup RP(2n)$ tal que os fibrados do "fixed data", restritos a $RP(x)$, são: um bordante a $\eta(x)_i$, para algum $i$, outro bordante a $\eta(x)_j$, para algum $j$, e o outro bordante a $\eta(x)_k$, para algum $k$. Assim teríamos, sobre $RP(y)$, segundo o Teorema 4.2.6, um fibrado bordante a $\eta(y)_i$, outro bordante a $\eta(y)_j$ e o outro bordante a $\eta(y)_k$. Então

$$dim(F) = x + dim(\eta(x)_i) + dim(\eta(x)_j) + dim(\eta(x)_k) = \tag{4.2.1}$$

$$= y + dim(\eta(y)_i) + dim(\eta(y)_j) + dim(\eta(y)_k).$$

Como $x+dim(\eta(x)_i) = y+dim(\eta(y)_i)$, $x+dim(\eta(x)_j) = y+dim(\eta(y)_j)$ e $x+dim(\eta(x)_k) = y + dim(\eta(y)_k)$, somando estas expressões obtemos:

$$3x + dim(\eta(x)_i) + dim(\eta(x)_j) + dim(\eta(x)_k) = \tag{4.2.2}$$

$$= 3y + dim(\eta(y)_i) + dim(\eta(y)_j) + dim(\eta(y)_k).$$

Subtraindo 4.2.1 de 4.2.2 obtemos $2x = 2y$, o que contradiz a hipótese do teorema.

Concluímos que $\varepsilon(x)_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$ só pode ser bordante a $\tau RP(x)$. □

OBSERVAÇÃO 4.2.14. Os teoremas acima nos dão informação sobre $\varepsilon(x)_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$ conhecendo-se $\varepsilon(x)_{\rho_{k_1}}$ e $\varepsilon(x)_{\rho_{k_2}}$ mas, como $\rho_{k_1}(\rho_{k_1}\rho_{k_2}) = \rho_{k_2}$, assim como $\rho_{k_2}(\rho_{k_1}\rho_{k_2}) = \rho_{k_1}$, observe que estes teoremas também podem ser usados para dar informação sobre $\varepsilon(x)_{\rho_{k_1}}$ conhecendo-se $\varepsilon(x)_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$ e $\varepsilon(x)_{\rho_{k_2}}$, assim como dar informação sobre $\varepsilon(x)_{\rho_{k_2}}$ conhecendo-se $\varepsilon(x)_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$ e $\varepsilon(x)_{\rho_{k_1}}$.

Utilizando a observação acima obtemos os corolários abaixo.

COROLÁRIO 4.2.15. *Seja $0 < m < n$ e $2m \neq n$. Então se $\varepsilon(2m)_{\rho_{k_1}}$ e $\varepsilon(2m)_{\rho_{k_2}}$ são bordantes a $\tau RP(2m)$, teremos que $\varepsilon(2m)_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$ é bordante a $\tau RP(2m)$. Da mesma forma, se $\varepsilon(2n)_{\rho_{k_1}}$ e $\varepsilon(2n)_{\rho_{k_2}}$ são bordantes a $\tau RP(2n)$, teremos que $\varepsilon(2n)_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$ é bordante a $\tau RP(2n)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Pelos Teoremas 4.2.8 e 4.2.9 sabemos que $\varepsilon(2m)_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$ não pode ser nulo e pelo Teorema 4.2.12 sabemos que $\varepsilon(2m)_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$ não pode ser bordante a $\eta(2m)_i$. □

COROLÁRIO 4.2.16. *Seja $0 < m < n$ e $2m \neq n$. Então se $\varepsilon(2m)_{\rho_{k_1}}$ e $\varepsilon(2m)_{\rho_{k_2}}$ são não-nulos, teremos que $\varepsilon(2m)_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$ é não-nulo. Da mesma forma, se $\varepsilon(2n)_{\rho_{k_1}}$ e $\varepsilon(2n)_{\rho_{k_2}}$ são não-nulos então $\varepsilon(2n)_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$ é não-nulo.*

DEMONSTRAÇÃO. Basta aplicar os Teoremas 4.2.8, 4.2.9 e 4.2.11. □

O próximo teorema esclarece porque no estudo de $Z_2^2$-ações $(M, \Phi)$ fixando $RP(2m) \cup RP(2n)$ o caso relevante é quando $M$ é conexa, conforme mencionado na Introdução.

TEOREMA 4.2.17. *Seja $(G, M, \Phi)$ tal que $M(2m) \neq M(2n)$, ou seja, $RP(2m)$ e $RP(2n)$ estão contidos em componentes diferentes de $M$. Então $(G, M, \Phi)$ é bordante a $((RP(2m))^{2^p}, Z_2^p - twist, Id, \ldots, Id) \cup ((RP(2n))^{2^q}, Z_2^q - twist, Id, \ldots, Id)$ onde $0 \leq p \leq k$, $0 \leq q \leq k$ e as identidades são acrescentadas até obtermos uma $Z_2^k$-ação.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $N$ é uma componente de $M$ diferente de $M(2m)$ e $M(2n)$ então $\Phi$ atua em $M$ sem pontos fixos. Pelo Corolário 3.3.9, $(N, \Phi)$ borda equivariantemente. Aplicando o Teorema A.0.10 a $(M(2m), \Phi)$ e $(M(2n), \Phi)$, concluímos o teorema.

O caso em que $RP(2m)$ e $RP(2n)$ estão contidas em componentes diferentes de $M$ está, portanto, resolvido. Se supusermos que $RP(2m)$ e $RP(2n)$ estão contidas na mesma componente de $M$, ou seja, que $M(2m) = M(2n)$, teremos que $\Phi$ é uma ação sem pontos fixos nas outras componentes de $M$. Analisando cada componente separadamente teremos que aquelas que não têm pontos fixos bordam equivariantemente, pelo Corolário 3.3.9. Assim, basta analisarmos a componente que contém $RP(2m) \cup RP(2n)$ e, portanto, podemos supor $M$ conexa.

□

TEOREMA 4.2.18. *Seja $M$ conexa, $0 < m < n$ e $2m \neq n$. Então existem $G_1$ e $G_2$ tais que $G = G_1 \oplus G_2$, $M = F_{\Phi|_{G_2}}$ e os fibrados do "fixed data" de $(G_1, M, \Phi\mid_{G_1})$ são exatamente os fibrados não-nulos $(\varepsilon(2m)_\rho \cup \varepsilon(2n)_\rho \neq 0 \cup 0)$ do "fixed data" de $(G, M, \Phi)$. Além disso, $(G_1, M, \Phi\mid_{G_1})$ é efetiva e se $T \in G_2$ então $T$ atua em $M$ como a involução identidade.*

DEMONSTRAÇÃO. Segundo o Corolário 4.2.16, o conjunto de homomorfismos $\rho \in Hom(G, Z_2)$ tais que $\varepsilon(x)_\rho$ é não-nulo, mais o homomorfismo nulo, constituem um subgrupo $\Xi(x) \subset Hom(G, Z_2)$. Então, pelo Teorema 4.2.1, existem $G(x)_1$ e $G(x)_2$ tais que $G = G(x)_1 \oplus G(x)_2$ e os fibrados do "fixed data" de $(G(x)_1, F_{\Phi|_{G(x)_2}}, \Phi\mid_{G(x)_1})$ são exatamente os fibrados $\varepsilon_{\rho_a}$, onde $\rho_a$ é um homomorfismo não-nulo de $\Xi(x)$. Como os fibrados restantes sobre $RP(x)$ são todos nulos teremos que $F(x)_{\Phi|_{G(x)_2}} = M$, onde $F(x)_{\Phi|_{G(x)_2}}$ é a componente de $F_{\Phi|_{G(x)_2}}$ que contém $RP(x)$. Portanto $F(x)_{\Phi|_{G(x)_2}} = F_{\Phi|_{G(x)_2}} = M$ e, além disso, como para qualquer $T \in G(x)_2$ vale $F(x)_{\Phi|_{G(x)_2}} \subset F_T$, certamente $F_T = M$, o que implica que $T$ atua como identidade em $M$. Temos, então, que $(G(x)_1, M, \Phi\mid_{G(x)_1})$ é uma $Z_2^r$-ação ($r = dim(G(x)_1)$) fixando $RP(2m) \cup RP(2n)$ e tal que todos os fibrados do "fixed data" restritos a $RP(x)$ são não-nulos (portanto esta $Z_2^r$-ação é efetiva, segundo o Teorema 4.2.3).

Aplicamos, agora, o mesmo raciocínio para a $Z_2^r$-ação $(G(x)_1, M, \Phi\mid_{G(x)_1}) = (M, \Psi)$ com relação aos fibrados não-nulos sobre $RP(y)$. Assim, o conjunto de homomorfismos $\rho \in Hom(G(x)_1, Z_2)$ tais que $\varepsilon(y)_\rho$ é não-nulo, mais o homomorfismo nulo, constituem um subgrupo $\Xi(y) \subset Hom(G(x)_1, Z_2)$. Então, pelo Teorema 4.2.1, existem $G(y)_1$ e $G(y)_2$ tais que $G(x)_1 = G(y)_1 \oplus G(y)_2$ e os fibrados do "fixed data" de $(G(y)_1, F_{\Psi|_{G(y)_2}}, \Psi\mid_{G(y)_1})$ são exatamente os fibrados $\varepsilon_{\rho_a}$ onde $\rho_a$ é um homomorfismo não-nulo de $\Xi(y)$. Como os fibrados restantes sobre $RP(y)$ são todos nulos teremos que $F(y)_{\Psi|_{G(y)_2}} = M$, onde $F(y)_{\Psi|_{G(y)_2}}$ é a componente de $F_{\Psi|_{G(y)_2}}$ que contém $RP(y)$. Portanto $F(y)_{\Psi|_{G(y)_2}} = F_{\Psi|_{G(y)_2}} = M$ e, além disso, qualquer $T \in G(y)_2$ atua como identidade em $M$. Mas se $T \in G(y)_2 \subset G(x)_1$ atua como a identidade

em $M$ e $(G(x)_1, M, \Phi\mid_{G(x)_1})$ é efetiva então $T = e \in G(x)_1$, ou seja, $G(y)_2 = \{e\}$ é trivial. Concluímos que $G(y)_1 = G(x)_1$ e, portanto, fazendo $G_1 = G(y)_1 = G(x)_1$ e $G_2 = G(x)_2$ concluímos o teorema. □

Observação 4.2.19. Observe que consideramos um fibrado do "fixed data" não-nulo se $\varepsilon(2m)_\rho \cup \varepsilon(2n)_\rho \neq 0 \cup 0$, isto é, um fibrado $\varepsilon(2m)_\rho \cup \varepsilon(2n)_\rho = 0 \cup \tau RP(2n)$, por exemplo, obviamente é não-nulo. Mas a demonstração do teorema nos diz ainda que este exemplo não ocorre se $M$ é conexa (ou se $M(2m) = M(2n)$), $0 < m < n$ e $2m \neq n$; ou seja, como subproduto da demonstração temos que $\varepsilon(x)_\rho$ é nulo se, e somente se, $\varepsilon(y)_\rho$ é nulo. Além disso, concluímos da demonstração que se $M$ é conexa, $0 < m < n$, $2m \neq n$ e se $(G, M, \Phi)$ é efetiva então nenhum fibrado do "fixed data" é nulo, como comentamos em 4.2.4. Como já sabemos que se $\varepsilon(x)_\rho$ é bordante a $\eta(x)_i$ então $\varepsilon(y)_\rho$ é bordante a $\eta(y)_i$, concluímos também que se $\varepsilon(x)_\rho$ é bordante a $\tau RP(x)$ então $\varepsilon(y)_\rho$ é bordante a $\tau RP(y)$. Com esta observação, podemos reformular o Corolário 4.2.15 e o Corolário 4.2.16:

Corolário 4.2.20. *Seja $M$ conexa, $0 < m < n$ e $2m \neq n$. Suponha $\varepsilon(x)_{\rho_{k_1}}$ e $\varepsilon(x)_{\rho_{k_2}}$ bordantes a $\tau RP(x)$. Então $\varepsilon(x)_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$ é bordante a $\tau RP(x)$ e $\varepsilon(y)_{\rho_{k_1}}$, $\varepsilon(y)_{\rho_{k_2}}$ e $\varepsilon(y)_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$ são bordantes a $\tau RP(y)$.*

Corolário 4.2.21. *Seja $M$ conexa, $0 < m < n$ e $2m \neq n$. Suponha $\varepsilon(x)_{\rho_{k_1}}$ e $\varepsilon(x)_{\rho_{k_2}}$ não-nulos. Então $\varepsilon(x)_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$, $\varepsilon(y)_{\rho_{k_1}}$, $\varepsilon(y)_{\rho_{k_2}}$ e $\varepsilon(y)_{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}$ são não-nulos.*

Observação 4.2.22. Suponha $Z_2^k$ decomposto como $Z_2^k = H \oplus J$, e sejam $(Z_2^k, M_1, \Phi_1)$ e $(Z_2^k, M_2, \Phi_2)$ duas $Z_2^k$-ações tais que $H$ atua efetivamente em $M_1$ segundo $\Phi_1$ e efetivamente em $M_2$ segundo $\Phi_2$. Então é fácil ver (utilizando o Corolário 3.4.12) que $(Z_2^k, M_1, \Phi_1)$ e $(Z_2^k, M_2, \Phi_2)$ são equivariantemente bordantes se, e somente se, $(H, M_1, \Phi_1\mid_H)$ e $(H, M_2, \Phi_2\mid_H)$ são equivariantemente bordantes. Esta observação junto com o Teorema 4.2.18 nos diz que o estudo da classificação, a menos de bordismo equivariante, das $Z_2^k$-ações $(Z_2^k, M, \Phi)$ com $F_\Phi = RP(2m) \cup RP(2n)$, $0 < m < n$, $2m \neq n$ e $M$ conexa, pode ser reduzido ao caso em que tais ações são efetivas. É o que faremos a partir de agora.

Teorema 4.2.23. *Seja $M$ conexa, $0 < m < n$, $2m \neq n$ e $(G, M, \Phi)$ efetiva. Então $F(2m)_\rho = F(2n)_\rho$ para algum $\rho \in Hom(G, Z_2)$.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $F(2m)_\rho \neq F(2n)_\rho$ para todo $\rho \in Hom(G, Z_2)$. Então, como $(G, M, \Phi)$ é efetiva, todos os fibrados do "fixed data" são bordantes a $\tau RP(2m) \cup \tau RP(2n)$. Já que o "fixed data" de uma $Z_2^k$-ação possui $2^k - 1$ fibrados teríamos que

$dim(M) = 2m + (2^k - 1)dim(\tau RP(2m)) = 2n + (2^k - 1)dim(\tau RP(2n)) \Longrightarrow 2^k(2m) = 2^k(2n)$, o que seria possível somente se $m = n$, contrariando a hipótese do teorema. □

TEOREMA 4.2.24. *Seja $M$ conexa, $0 < m < n$, $2m \neq n$ e $(G, M, \Phi)$ efetiva. Então o "fixed data" possui $2^{k-1}$ fibrados bordantes a $\eta(2m)_i \cup \eta(2n)_i$ (onde $i$, eventualmente, não é o mesmo para fibrados diferentes) e $2^{k-1} - 1$ fibrados bordantes a $\tau RP(2m) \cup \tau RP(2n)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Vimos, no teorema anterior, que existe $\rho_0 \in Hom(G, Z_2)$ tal que $F(2m)_{\rho_0} = F(2n)_{\rho_0}$ para algum $\rho_0 \in Hom(G, Z_2)$. Então, se $T \notin N\acute{u}cleo(\rho_0)$, temos que $\varepsilon_{\rho_0}$ é o fibrado normal da involução $(N, T)$, onde $N = F(2m)_{\rho_0} = F(2n)_{\rho_0}$, e bordante a $\eta(2m)_i \cup \eta(2n)_i$, para algum $i$. Seja $\mu \to N$ o fibrado normal de $N$ em $M$. Então $\mu \mid_{RP(2m)\cup RP(2n)}$ se decompõe como

$$\mu \mid_{RP(2m)\cup RP(2n)} \cong \bigoplus_{\rho \neq \rho_0, \rho \neq 1} \varepsilon_\rho$$

onde na decomposição acima aparecem todos os fibrados do "fixed data" de $(G, M, \Phi)$ com exceção de $\varepsilon_{\rho_0}$. Denotemos por $\Lambda$ esta coleção de fibrados. Seja $f : Hom(G, Z_2) \to Hom(G, Z_2)$ definida por $f(\rho) = \rho_0\rho$. Observe que $f$ é uma bijeção com $f^{-1} = f$ e $f(1) = \rho_0$. Então $f$ induz uma bijeção $g : \Lambda \to \Lambda$ dada por $g(\varepsilon_\rho) = \varepsilon_{\rho_0\rho}$. Observe que, como a ação é efetiva, todos os elementos de $\Lambda$ são não-nulos e, portanto, $\Lambda = \Omega \cup \Upsilon$, onde $\Omega$ é a coleção de fibrados de $\Lambda$ bordantes a $\tau RP(2m) \cup \tau RP(2n)$ e $\Upsilon$ a coleção de fibrados de $\Lambda$ bordantes a $\eta(2m)_j \cup \eta(2n)_j$ ($j$ podendo ser diferente para elementos diferentes de $\Upsilon$). Portanto os Teoremas 4.2.13 e 4.2.12 nos dizem que $g(\Omega) \subset \Upsilon$ e $g(\Upsilon) \subset \Omega$. Como $g$ é uma bijeção, $g(\Omega) = \Upsilon$ e, levando em conta que $cardinal(\Lambda) = 2^k - 2$ e que $\Omega \cap \Upsilon = \emptyset$, concluímos que $cardinal(\Omega) = cardinal(\Upsilon) = 2^{k-1} - 1$. Observando que $\varepsilon_{\rho_0}$ é bordante a $\eta(2m)_i \cup \eta(2n)_i$ e é o único elemento do "fixed data" de $\Phi$ que não pertence a $\Lambda$, segue o resultado. □

No Capítulo 3 (3.4.8) definimos $\Gamma_k^k(W, T)$, uma ação de $Z_2^k = \langle T_1, T_2, \ldots, T_k \rangle$ definida no produto cartesiano $(W)^{2^{k-1}}$ fixando $F_T =$ o conjunto de pontos fixos da involução $T$ em $W$, e cujo "fixed data" possui $2^{k-1}$ fibrados equivalentes a $\eta$ (onde $\eta \to F_T$ é o "fixed data" de $(W, T)$) e $2^{k-1} - 1$ fibrados equivalentes a $\tau F_T$. Lembramos ainda que $T_1 = T \times \ldots \times T$ ($2^{k-1}$ fatores) e que os fibrados acima estão incluídos no "fixed data" de $\Gamma_k^k(W, T)$ da seguinte maneira, em termos dos homomorfismos não-triviais $\rho \in Hom(G, Z_2)$: se $\rho(T_1) = 1$ então $\varepsilon_\rho$ é equivalente a $\tau F_T$ e se $\rho(T_1) = -1$ então $\varepsilon_\rho$ é equivalente a $\eta$.

Considerando, agora, $(G, M, \Phi)$ uma $Z_2^k$-ação fixando $RP(2m) \cup RP(2n)$, com $0 < m < n$ e $2m \neq n$, e observando a descrição do "fixed data" de $(G, M, \Phi)$, dada pelo Teorema 4.2.24, notamos uma analogia entre o "fixed data" de $(G, M, \Phi)$ e o "fixed data" de uma ação do tipo

$\Gamma_k^k(W,T)$ se estabelecermos uma correspondência entre os fibrados, sem nos preocuparmos com a ordem dos mesmos: $\tau F_T \longrightarrow \tau RP(2m) \cup \tau RP(2n)$ e $\eta \longrightarrow \eta(2m)_i \cup \eta(2n)_i$. Em outras palavras, detectamos um parentesco inicial (relativo aos tipos de fibrados e sua quantidade) entre $(G, M, \Phi)$ e $\Gamma_k^k(W,T)$ se $(W,T)$ é alguma involução fixando $\tau RP(2m) \cup \tau RP(2n)$, através da correspondência acima estabelecida. Mostraremos, a seguir, que esse parentesco é um pouco mais forte, no sentido de ser compatível com a descrição do "fixed data" de $\Gamma_k^k(W,T)$ em termos dos homomorfismos não-triviais $\rho \in Hom(G, Z_2)$.

TEOREMA 4.2.25. *Seja $M$ conexa, $0 < m < n$, $2m \neq n$ e $(G, M, \Phi)$ efetiva. Então, a menos de uma mudança de base de $G$, os fibrados estão incluídos no "fixed data" da mesma forma que os correspondentes fibrados estão incluídos no "fixed data" de uma ação do tipo $\Gamma_k^k(W,T)$, isto é, existe uma base ordenada $(T_1, \ldots, T_k)$ de $G$ tal que se $\rho(T_1) = -1$ então $\varepsilon_\rho$ é bordante a $\eta(2m)_i \cup \eta(2n)_i$, para algum $i$, e se $\rho(T_1) = 1$ então $\varepsilon_\rho$ é bordante a $\tau RP(2m) \cup \tau RP(2n)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Como, evidentemente, dado qualquer elemento não-trivial $T \in G$ podemos completar uma base de $G$ contendo $T$, é suficiente exibir $T \in G$ satisfazendo a descrição, dada no enunciado do teorema, para $T_1$. Segundo o Corolário 4.2.20, o conjunto de homomorfismos $\rho \in Hom(G, Z_2)$ tais que $\varepsilon(2m)_\rho \cup \varepsilon(2n)_\rho$ é bordante a $\tau RP(2m) \cup \tau RP(2n)$, mais o homomorfismo nulo, constituem um subgrupo $\Xi$ de $Hom(G, Z_2)$. Assim, pelo Teorema 4.2.1, existem $G_1$ e $G_2$ tais que $G = G_1 \oplus G_2$ e os fibrados do "fixed data" de $(G_1, F_{\Phi|_{G_2}}, \Phi\mid_{G_1})$ são exatamente os fibrados bordantes a $\tau RP(2m) \cup \tau RP(2n)$. Vimos no teorema anterior que o número desses fibrados é $2^{k-1} - 1$ e, portanto, $dim(G_1) = k - 1$, o que significa que $dim(G_2) = 1$. Então existe $T \in G$ tal que $G_2 = \langle T \rangle$ e os fibrados do "fixed data" de $(G_1, F_T, \Phi\mid_{G_1})$ são exatamente os fibrados bordantes a $\tau RP(2m) \cup \tau RP(2n)$. Lembremos, agora, que $\varepsilon_\rho$ é caracterizado por ser o fibrado em que cada $S \in G$ atua (via derivada) como $\rho(S)$. Como, evidentemente, $T$ atua como identidade em $F_T$, e cada $\varepsilon_\rho$ bordante a $\tau RP(2m) \cup \tau RP(2n)$ pode ser pensado como contido em uma vizinhança tubular de $RP(2m) \cup RP(2n)$ em $F_T$, temos $\rho(T) = 1$ para tais fibrados. Por outro lado, se $\rho(T) = -1$ então $\varepsilon_\rho$ é um subfibrado de $\eta \to F_T$, o fibrado normal de $F_T$ em $M$ e, portanto, $\varepsilon_\rho$ é bordante a $\eta(2m)_i \cup \eta(2n)_i$, para algum $i$, e o teorema está provado. □

Se permitirmos a ocorrência de involuções que atuam como identidades (ou seja, se não supusermos que a ação seja efetiva) temos a seguinte extensão do Teorema 4.2.25.

TEOREMA 4.2.26. *Seja $M$ conexa, $0 < m < n$, $2m \neq n$. Então os fibrados são incluídos no "fixed data" de $(G, M, \Phi)$ da mesma forma que os correspondentes fibrados são incluídos no "fixed data" de uma ação do tipo $\Gamma_t^k(W,T)$, isto é, existem $T, S_1, \ldots S_t \in G$ tal que se $\rho(T) = -1$*

*e $\rho(S_i) = 1$, para todo $i$, então $\varepsilon_\rho$ é bordante a $\eta(2m)_i \cup \eta(2n)_i$, se $\rho(T) = 1$ e $\rho(S_i) = 1$, para todo $i$, então $\varepsilon_\rho$ é bordante a $\tau RP(2m) \cup \tau RP(2n)$ e se $\rho(S_i) = -1$ para algum $i$ então $\varepsilon_\rho$ é nulo.*

DEMONSTRAÇÃO. A prova pode ser obtida sem dificuldades com a junção dos teoremas 4.2.25, 4.2.18 e 3.4.12. □

## 4.3. Classificação de $Z_2^k$-ações Fixando $RP(2m) \cup RP(2n)$

A analogia sugerida pelo Teorema 4.2.25 entre uma $Z_2^k$-ação $(G, M, \Phi)$ efetiva fixando $RP(2m) \cup RP(2n)$, com $0 < m < n$ e $2m \neq n$, e uma ação do tipo $\Gamma_k^k(W, T)$, onde $(W, T)$ é uma involução fixando $RP(2m) \cup RP(2n)$, observada através da relação estabelecida entre os fibrados dos correspondentes "fixed data", está longe de indicar que tais ações são equivariantemente bordantes, a menos de mudança de base, pelas razões que descreveremos a seguir. Inicialmente, usando a notação introduzida no início do capítulo, seja $\mathcal{A} = \{[W_i^{n_i}, S_i]\}$ a coleção de classes de bordismo de involuções contendo um representante $(W_i^{n_i}, S_i)$ fixando $RP(2m) \cup RP(2n)$, com $W_i^{n_i}$ conexa, sendo que, para cada $i$, $\eta_i = (\eta(2m)_i \to RP(2m) \cup \eta(2n)_i \to RP(2n))$ denota o fibrado normal de $RP(2m) \cup RP(2n)$ em $W_i^{n_i}$. Uma vez que o "fixed data" determina a classe de bordismo equivariante da involução, podemos escrever $\mathcal{A} = \{[\eta_1], [\eta_2], \ldots, [\eta_r]\}$ ($\mathcal{A}$ é finita, pois $RP(2m) \cup RP(2n)$ não borda, já que $m \neq n$). Se $\mathcal{A}$ tem mais de um elemento (ou seja, se $r > 1$) então o Teorema 4.2.25 indica a possibilidade de diferentes elementos de $\mathcal{A}$ ocorrerem no "fixed data" de $(M, \Phi)$; se isto ocorrer, não teremos, em princípio, um bordismo individual entre tais fibrados do "fixed data" de $(M, \Phi)$ e os correspondentes fibrados do "fixed data" de uma ação do tipo $\Gamma_k^k(W_p^{n_p}, S_p)$, uma vez que, nesta ação, o único fibrado que ocorre é $\eta_p$. Uma situação muito particular na qual isto seria evitado ocorreria, então, quando $\mathcal{A}$ é unitária, digamos, $\mathcal{A} = \{[\eta]\} = \{[W, S]\}$. Nesse caso, o Teorema 4.2.25 nos diz que existe um bordismo individual entre os fibrados $(M, \Phi)$ e os correspondentes fibrados de $\Gamma_k^k(W, S)$. Porém, como visto no Capítulo 3, bordismo individual não implica em bordismo simultâneo, o que significa que mesmo nesta situação não concluímos diretamente que as ações em questão são bordantes, a menos de mudança de base. Nosso objetivo, a partir de agora, é contornar tais obstáculos a fim de obter uma classificação completa. Para tanto, lançaremos mão de algumas técnicas recentes desenvolvidas por P. Pergher em [**Pe9**], [**Pe5**] e [**Pe7**]; tais técnicas foram desenvolvidas considerando-se $F_\Phi$ =união de um ponto com uma variedade conexa qualquer em [**Pe7**] e $F_\Phi$ =variedade conexa em [**Pe5**]; no entanto mostraram adaptar-se à nossa situação $F_\Phi = RP(2m) \cup RP(2n)$. Por estarem em artigos ainda não publicados ([**Pe5**] e [**Pe7**])

e para facilitar a leitura, vamos reescrever a seguir tais técnicas, sob um ponto de vista um pouco mais geral, o que permitirá o seu uso em outras situações, como o caso em questão $F_\Phi = RP(2m) \cup RP(2n)$.

Inicialmente, mostraremos que a família das classes de bordismo de involuções que fixam uma determinada $F$ não-bordo pode ser particionada em certas classes de equivalência, as quais chamaremos *classes de estabilidade.* Então, seja $F = \cup_{i=0}^{m} F^i$ qualquer variedade não-bordo, onde $F^i$ denota a união das componentes conexas $i$-dimensionais de $F$ e $m$ é a maior das dimensões entre as componentes de $F$; dizer que $F$ não borda é equivalente a dizer que $F^i$ não borda, para algum $i$. Seja $\mathcal{A}$ a coleção de classes de bordismo de involuções contendo um representante $(V, T)$, com $V$ conexa, fixando $F$. Desde que $F$ não borda, a coleção $\mathcal{A}$ é finita, e podemos escrever $\mathcal{A} = \{[\eta_1], [\eta_2], \ldots, [\eta_r]\}$.

Definição 4.3.1. Dizemos que um fibrado $\eta \to M$ possui secção se existe $\mu \to M$ tal que $\eta = \mu \oplus R$.

Teorema 4.3.2. *Existem fibrados $\mu_1 \to F$, $\mu_2 \to F$, . . ., $\mu_l \to F$, $l \leq r$, tais que, para cada $i$, $\mu_i$ é minimal, no sentido de que $\mu_i$ não é bordante a nenhum fibrado sobre $F$ que possua secção, e $\mathcal{A}$ pode ser escrita como $\mathcal{A} = \{[\mu_1], [\mu_1 \oplus R], \ldots, [\mu_1 \oplus R^{t_1}], [\mu_2], \ldots, [\mu_2 \oplus R^{t_2}], [\mu_l], \ldots, [\mu_l \oplus R^{t_l}], \}$.*

Demonstração. A prova é baseada nos seguintes dois resultados:

a) Teorema de estabilidade para involuções: seja $(M, T)$ involução com "fixed data" $\eta \to F$, e suponha que $\eta$ possui uma secção, ou seja, se decompõe como $\eta = \mu \oplus R$. Então existe involução $(V, S)$ com fixed data $\mu \to F$ (decorre de [**C-F**, pg 85]).

b) Existe um $\mathfrak{N}_*$-homomorfismo de grau 1, $\Gamma : \mathfrak{I}_n(Z_2) \to \mathfrak{I}_{n+1}(Z_2)$, definido da seguinte maneira: seja $(M^n, T)$ variedade com involução, e considere a variedade $(n+1)$-dimensional $\frac{M^n \times S^1}{(m,s) \sim (T(m), -s)}$. Sobre esta variedade temos a involução $S([m, s]) = [m, \overline{s}]$, $\overline{s}$ significando a conjugação. Definimos $\Gamma(M^n, T) = \left( \frac{M^n \times S^1}{(m,s) \sim (T(m), -s)}, S \right)$. Se $\eta \to F$ é o "fixed data" de $(M^n, T)$ então o "fixed data" de $\Gamma(M^n, T)$ é $\eta \oplus R \to F \cup R \to M^n$. Se $M^n$ borda então $R \to M^n$ borda como fibrado e, pelo Corolário A.0.8, $\Gamma(M^n, T)$ será bordante a uma involução com "fixed data" $\eta \oplus R \to F$. Este raciocínio pode ser iterado: se $\frac{M^n \times S^1}{(m,s) \sim (T(m), -s)}$ borda então $\Gamma^2(M^n, T) = \Gamma(\Gamma(M^n, T))$ será bordante a uma involução com "fixed data" $\eta \oplus R^2 \to F$, e assim sucessivamente (este é um processo de adição de secções).

Passemos, então, à prova do teorema. Tome $[\eta_j \to F] \in \mathcal{A}$, e seja $(V, T)$ a involução com "fixed data" $\eta_j \to F$. Se $\eta_j \to F$ não é bordante a um fibrado da forma $\eta_j' \oplus R \to F$

coloque $\eta_j = \mu_1$. Caso contrário, existirá involução $(W, S)$ com fixed data $\eta_j' \to F$ (por a)), ou seja, $[\eta_j' \to F] = [W, S] \in \mathcal{A}$. A seguir, se $\eta_j' \to F$ não é bordante a um fibrado da forma $\eta_j'' \oplus R \to F$ coloque $\eta_j' = \mu_1$. Caso contrário, existirá involução com fixed data $\eta_j'' \to F$, ou seja, $[\eta_j'' \to F] \in \mathcal{A}$. Prosseguindo com este raciocínio, e após a eventual remoção de algumas secções, chegaremos a um fibrado $\mu_1 \to F$ o qual é o "fixed data" de alguma involução (portanto $[\mu_1] \in \mathcal{A}$) e não é bordante a algum fibrado da forma $\mu_1' \oplus R \to F$.

Por outro lado, seja $p = dim(\eta_j) - dim(\mu_1)$. Se $[\eta_j] = [V, T]$ e $V$ não borda, coloque $t_1 = p$. Caso contrário, por b), $\Gamma(V, T)$ é bordante a uma involução $[W, S]$ com "fixed data" $\eta_j \oplus R \to F$, ou seja, $[\eta_j \oplus R \to F] = [W, S] \in \mathcal{A}$. A seguir, se $W$ não borda, coloque $t_1 = p+1$. Caso contrário, $\Gamma^2(V, T)$ é bordante a uma involução com "fixed data" $\eta_j \oplus R^2 \to F$, ou seja, $[\eta_j \oplus R^2 \to F] \in \mathcal{A}$. Iterando este raciocínio, e após a eventual adição de secções, concluímos que existe $m \geq 0$ tal que $\Gamma^m(V, T)$ é bordante a uma involução com "fixed data" $\eta_j \oplus R^m \to F$, ou seja, $[\eta_j \oplus R^m \to F] \in \mathcal{A}$, e tal que a variedade subjacente a $\Gamma^m(V, T)$ não borda. Coloquemos $t_1 = p + m$. Observe que $\eta_j \to F$ é bordante a $\mu_1 \oplus R^p \to F$ e, portanto, com a remoção de secções, coletamos as diferentes classes de $\mathcal{A}$ dadas por $[\mu_1]$, $[\mu_1 \oplus R]$, $[\mu_1 \oplus R^2]$, . . . , $[\mu_1 \oplus R^p]$. Por outro lado, $\eta_j$ é bordante a $\mu_1 \oplus R^p$ implica que, para qualquer $0 \leq e \leq m$, temos $\eta_j \oplus R^e$ bordante a $\mu_1 \oplus R^{p+e}$; desta forma, com a adição de secções coletamos as diferentes classes de $\mathcal{A}$ dadas por $[\mu_1 \oplus R^{p+1}]$, $[\mu_1 \oplus R^{p+2}]$, . . . , $[\mu_1 \oplus R^{p+m}] = [\mu_1 \oplus R^{t_1}]$. Se todas tais classes esgotam $\mathcal{A}$, o teorema terminou. Caso contrário, escolhemos $[\eta_l \to F]$ não obtida pelo processo acima e repetimos o argumento. Como $\mathcal{A}$ é finita, o teorema está provado. □

Assim, fixado $F$, temos que a coleção $\mathcal{A}$ se particiona em classes de equivalência de estabilidade, como acima descrito. Nosso próximo objetivo será mostrar que, no caso particular em que $F = RP(2m) \cup RP(2n)$ $(0 < m < n$ e $2m \neq n)$, todos os elementos de $\mathcal{A}$ que ocorrem no "fixed data" da $Z_2^k$-ação pertencem à mesma classe de estabilidade. O teorema a seguir será crucial nesta direção; ele nos permitirá certas computações especiais envolvendo números característicos de soma direta de fibrados.

Seja $(M, \Phi)$ uma ação de $G = Z_2^k$ e $\bigoplus_\rho \varepsilon_\rho \to F$ a restrição do "fixed data" a uma componente conexa $F \subset F_\Phi$. Fixe $\rho_0 \in Hom(G, Z_2)$ não-nulo, e seja $H = Núcleo(\rho_0) \cong Z_2^{k-1}$. Tome $T \notin H$, ou seja, $G = H \oplus \langle T \rangle$. Sabemos que $\varepsilon_{\rho_0} \to F$ é o fibrado normal de $F$ na componente conexa de $F_{\Phi|_H}$ que contém $F$, que denotaremos por $N$. Seja $\bigoplus_\theta \gamma_\theta \to N$ a restrição a $N$ do "fixed data" da $Z_2^{k-1}$-ação $(M, \Phi\,|_H)$, onde $\theta$ percorre todos os homomorfismos não-triviais de $Hom(H, Z_2)$. Cada $\theta \in Hom(H, Z_2)$ não-nulo dá origem a dois homomorfismos $\theta', \theta'' : G \to Z_2$ não-triviais, definidos da seguinte forma: $\theta'\,|_H = \theta''\,|_H = \theta$, $\theta'(T) = 1$ e $\theta''(T) = -1$. Conforme vimos no

Teorema 3.3.11, temos que $\gamma_\theta \mid_F = \varepsilon_{\theta'} \oplus \varepsilon_{\theta''}$. Seja $RP(\varepsilon_{\rho_0}) \overrightarrow{p} F$ o fibrado projetivo associado de $\varepsilon_{\rho_0}$, com projeção $p$, e seja $\xi \to RP(\varepsilon_{\rho_0})$ o fibrado linha usual sobre $RP(\varepsilon_{\rho_0})$. Cada $\varepsilon_\rho \to F$, com $\rho \neq \rho_0$, pode ser considerado como um fibrado sobre $RP(\varepsilon_{\rho_0})$, fazendo-se o "pullback" de $\varepsilon_\rho \to F$ por $p$, ou seja, $p!(\varepsilon_\rho) \to RP(\varepsilon_{\rho_0})$ (omitiremos, adiante, a notação de "pullback" $p!$). Desta forma, para cada $\rho \in Hom(G, Z_2)$ não-nulo e tal que $\rho \neq \rho_0$, podemos considerar o fibrado tensorial $\varepsilon_\rho \otimes \xi \to RP(\varepsilon_{\rho_0})$. Assim, obtemos o objeto $(RP(\varepsilon_{\rho_0}); \xi, \{\varepsilon_{\theta'} \oplus (\varepsilon_{\theta''} \otimes \xi)\}_\theta)$, constituído pela variedade $RP(\varepsilon_{\rho_0})$ e pela lista de fibrados formada por $\xi$ e pelos fibrados $\varepsilon_{\theta'} \oplus (\varepsilon_{\theta''} \otimes \xi)$ com $\theta$ percorrendo todos os homomorfismos não-triviais de $Hom(H, Z_2)$. Conforme vimos no Capítulo 3, tal objeto representa uma classe de bordismo de lista de fibrados (ou uma classe de bordismo simultâneo).

Teorema 4.3.3. *A lista $(RP(\varepsilon_{\rho_0}); \xi, \{\varepsilon_{\theta'} \oplus (\varepsilon_{\theta''} \otimes \xi)\}_\theta)$ borda simultaneamente (e em particular, todos seus números característicos são nulos).*

Demonstração. A prova é geométrica. Temos que $(F_{\Phi|_H}, T)$ é uma involução fixando $F$ e, portanto, existe vizinhança tubular de $F$ em $F_{\Phi|_H}$ invariante sob $T$, a qual pode ser identificada com o fibrado em discos $D(\varepsilon_{\rho_0})$ e tal que $T$ atua em $D(\varepsilon_{\rho_0})$ como $-1$ em cada fibra e, portanto, como a antipodal em cada fibra do fibrado em esferas $S(\varepsilon_{\rho_0})$. Sendo $T$ isometria, $T$ atua também como aplicação fibrada (através da derivada) em cada $\gamma_\theta \to N$, cobrindo a ação de $T$ em $N$. Seja $N_0 = N - int(D(\varepsilon_{\rho_0}))$. Então $N_0$ é uma variedade com bordo $S(\varepsilon_{\rho_0})$. Observe que $T$ não tem pontos fixos em $N_0$ (na qual é também invariante) e, portanto, também não tem pontos fixos em $\gamma_\theta \mid_{N_0}$. Dessa forma, obtemos um objeto $(N_0, \{\gamma_\theta \mid_N\}_\theta; T)$ constituído pela variedade $N_0$, a lista de fibrados $\{\gamma_\theta \mid_{N_0}\}_\theta$ sobre ela e uma involução livre de pontos fixos $T$ atuando em $N_0$ e se levantando (livremente) em cada $\gamma_\theta \mid_{N_0}$. O bordo deste objeto é $(S(\varepsilon_{\rho_0}), \{\gamma_\theta \mid_{S(\varepsilon_{\rho_0})}\}_\theta; T)$. Se $p : S(\varepsilon_{\rho_0}) \to F$ é a projeção, temos que $\gamma_\theta \mid_{S(\varepsilon_{\rho_0})} = p!(\gamma_\theta \mid_F)$; como $\gamma_\theta \mid_F = \varepsilon_{\theta'} \oplus \varepsilon_{\theta''}$, temos que $\gamma_\theta \mid_{S(\varepsilon_{\rho_0})} = p!(\varepsilon_{\theta'}) \oplus p!(\varepsilon_{\theta''})$. Suprimindo a notação de "pullback" temos, então, que o bordo do objeto $(N_0, \{\gamma_\theta \mid_{N_0}\}_\theta; T)$ é o objeto $(S(\varepsilon_{\rho_0}), \{\varepsilon_{\theta'} \oplus \varepsilon_{\theta''}\}_\theta; T)$ sendo que $T$ atua em $\varepsilon_{\theta'}$ como identidade e em $\varepsilon_{\theta''}$ como $-1$. A partir deste bordismo obteremos outro, por passagem ao quociente por $T$. Observe, inicialmente, que $T$ atua em $S(\varepsilon_{\rho_0})$ como a antipodal e, assim, $\frac{S(\varepsilon_{\rho_0})}{T} = RP(\varepsilon_{\rho_0})$. Além disso, $T$ atua em $\varepsilon_{\theta'}$ como identidade e, portanto, $\frac{\varepsilon_{\theta'} \to S(\varepsilon_{\rho_0})}{T} = \varepsilon_{\theta'} \to RP(\varepsilon_{\rho_0})$. Seja $\lambda \to \frac{N_0}{T}$ o fibrado linha associado à involução livre $(N_0, T)$. Então $\lambda \mid_{\partial(\frac{N_0}{T})} = \lambda \mid_{RP(\varepsilon_{\rho_0})} = \xi$. Usando a construção do "fibrado-twist" de [**C-F**][2] e, observando

[2]Seja $(X, T)$ espaço com involução sem pontos fixos, e seja $\eta \overrightarrow{p} \frac{X}{T}$ fibrado vetorial. Seja $\pi : X \to \frac{X}{T}$ a aplicação quociente. Considere o pullback $\pi!\eta = \{(x, r) \in X \times \eta \mid \pi(x) = p(r)\}$. Em $\pi!\eta$ temos a involução sem pontos fixos $S(x, r) = (T(x), -r)$. O "twist" de $\eta$ é então, por definição, o fibrado quociente $\frac{\pi!\eta}{S} \to \frac{X}{T}$. Em [**C-F**],

que $T$ atua como $-1$ em $\varepsilon_{\theta''}$, concluímos que $\frac{\varepsilon_{\theta''}}{T} = \varepsilon_{\theta'} \otimes \xi \to RP(\varepsilon_{\rho_0})$. Dessa forma, o bordo da lista quociente $\left(\frac{N_0}{T}, \lambda, \left\{\frac{\gamma_\theta|_{N_0}}{T}\right\}_\theta\right)$ é a lista $(RP(\varepsilon_{\rho_0}); \xi, \{\varepsilon_{\theta'} \oplus (\varepsilon_{\theta''} \otimes \xi)\}_\theta)$, e o teorema está provado. □

Utilizando notação anterior, seja $(x, y) = (2m, 2n)$ ou $(x, y) = (2n, 2m)$. Estamos, agora, em condições de mostrar o

TEOREMA 4.3.4. *Seja $M$ conexa e $(G, M, \Phi)$ ação efetiva de $Z_2^k$ fixando $RP(2m) \cup RP(2n)$ com $0 < m < n$ e $2m \neq n$. Seja $\bigoplus_\rho \varepsilon_\rho = \bigoplus_\rho (\varepsilon(2m)_\rho \to RP(2m) \cup \varepsilon(2n)_\rho \to RP(2n))$ o "fixed data" de $\Phi$. Sejam $\rho_a, \rho_b : G \to Z_2$ dois homomorfismos não-triviais com $\rho_a \neq \rho_b$ e tais que $[\varepsilon_{\rho_a}], [\varepsilon_{\rho_b}] \in \mathcal{A}$. Suponha $dim(\varepsilon(2x)_{\rho_a}) \leq dim(\varepsilon(2x)_{\rho_b})$ e coloquemos $s = dim(\varepsilon(2x)_{\rho_b}) - dim(\varepsilon(2x)_{\rho_a})$. Então a lista $(RP(x); \varepsilon_{\rho_a}(x), \varepsilon_{\rho_b}(x), \{\varepsilon_\rho(x)\}_{\rho \neq \rho_a, \rho_b})$ é simultaneamente bordante à lista $(RP(x); \varepsilon_{\rho_a}(x), \varepsilon_{\rho_a}(x) \oplus R^s, \{\varepsilon_\rho(x)\}_{\rho \neq \rho_a, \rho_b})$.*

DEMONSTRAÇÃO. Como $\rho_a \neq \rho_b$, $\rho_0 = \rho_a \rho_b : G \to Z_2$ é um homomorfismo não-nulo. Como $[\varepsilon_{\rho_a}], [\varepsilon_{\rho_b}] \in \mathcal{A}$, pelo Teorema 4.2.13, teremos que $\varepsilon_{\rho_0}(x)$ é bordante ao fibrado tangente $\tau RP(x)$. Aplicaremos então, a tal $\rho_0$, a discussão geométrica que precedeu o teorema anterior; teremos que $(RP(\varepsilon_{\rho_0}(x)); \xi, \{\varepsilon_{\theta'}(x) \oplus (\varepsilon_{\theta''}(x) \otimes \xi)\}_\theta)$ borda simultaneamente. Seja, agora, $T \notin H = Núcleo(\rho)$. Então, para cada $S \in H$ vale $1 = \rho_0(S) = \rho_a(S)\rho_b(S)$ e, portanto, $\rho_a(S) = \rho_b(S)$. Assim, $\rho_a \mid_H = \rho_b \mid_H$. Como $G = H \oplus \langle T \rangle$, caso $\rho_a(T) = \rho_b(T)$, teríamos $\rho_a = \rho_b$, absurdo. Segue $\rho_a(T) = 1$ e $\rho_b(T) = -1$, ou o contrário. Por simetria, podemos supor $\rho_a(T) = 1$ e $\rho_b(T) = -1$. Segue que $\varepsilon_{\rho_a}$ e $\varepsilon_{\rho_b}$ estão pareados na lista acima, ou seja, a lista $(RP(\varepsilon_{\rho_0}(x)); \xi, \varepsilon_{\rho_a}(x) \oplus (\varepsilon_{\rho_b}(x) \otimes \xi), \{\varepsilon_{\theta'}(x) \oplus (\varepsilon_{\theta''}(x) \otimes \xi)\}_{(\theta', \theta'') \neq (\rho_a, \rho_b)})$ borda simultaneamente e, portanto, todos seus números característicos são nulos. Para provar o teorema, usaremos tal fato com números característicos originários de certas classes características especiais, que foram introduzidas em **[P-S]** e também usadas em **[Pe5]** e **[Pe7]**.

Seja $W(RP(x)) = 1 + w_1 + w_2 + \cdots + w_x$ a classe de Stiefel-Whitney de $RP(x)$ e, para cada $\rho \in Hom(G, Z_2)$ não-nulo, seja $W(\varepsilon_\rho(x)) = 1 + v_1^\rho + v_2^\rho + \cdots + v_{n_\rho}^\rho$ a classe de Stiefel-Whitney de $\varepsilon_\rho(x) \to RP(x)$, onde $n_\rho = dim(\varepsilon_\rho(x))$. Seja $c \in H^1(RP(\varepsilon_{\rho_0}(x)))$ a primeira classe de Stiefel-Whitney do fibrado linha $\xi \to RP(\varepsilon_{\rho_0}(x))$, ou seja, $W(\xi) = 1 + c$. Pelo Teorema 2.7.13 sabemos que

$$W(RP(\varepsilon_{\rho_0}(x)) = (1 + w_1 + \cdots + w_x)\{(1+c)^{n_{\rho_0}} + (1+c)^{n_{\rho_0}-1} v_1^{\rho_0} +$$
$$+ (1+c)^{n_{\rho_0}-2} v_2^{\rho_0} + \cdots + (1+c) v_{n_{\rho_0}-1}^{\rho_0} + v_{n_{\rho_0}}^{\rho_0}\}$$

---

Conner e Floyd provaram que $\frac{\pi^! \eta}{S} \to \frac{X}{T}$ é equivalente a $\eta \otimes \xi \to \frac{X}{T}$, onde $\xi \to \frac{X}{T}$ é o fibrado linha associado à involução livre $(X, T)$).

e, trocando a notação $(\theta', \theta'')$ por $(\rho', \rho'')$, temos que[3]

$W(\varepsilon_{\rho'}(x) \oplus (\varepsilon_{\rho''}(x) \otimes \xi)) = (1 + v_1^{\rho'} + \cdots + v_{n_{\rho'}}^{\rho'})\{(1+c)^{n_{\rho''}} + (1+c)^{n_{\rho''}-1} v_1^{\rho''} +$

$+(1+c)^{n_{\rho''}-2} v_2^{\rho''} + \cdots + (1+c) v_{n_{\rho''}-1}^{\rho''} + v_{n_{\rho''}}^{\rho''}\}.$

A nulidade de todos os números de Whitney da lista acima significa que qualquer classe de cohomologia $L \in H^{2x-1}(RP(\varepsilon_{\rho_0}(x)))$ dada por um produto de classes $w_i(RP(\varepsilon_{\rho_0}(x)))$, $w_j(\varepsilon_{\rho'}(x) \oplus (\varepsilon_{\rho''}(x) \otimes \xi))$ e $c$, quando avaliada na classe fundamental de homologia $[RP(\varepsilon_{\rho_0}(x))]_2$, dá zero. Usaremos tal fato introduzindo as classes características especiais atrás mencionadas, as quais serão polinomiais nas classes $w_i(RP(\varepsilon_{\rho_0}(x)))$, $w_j(\varepsilon_{\rho'}(x) \oplus (\varepsilon_{\rho''}(x) \otimes \xi))$ e $c$.

Para cada $r \geq 0$, coloquemos $W[r] = 1 + w[r]_0 + w[r]_2 + \cdots = \frac{W(RP(\varepsilon_{\rho_0}(x)))}{(1+c)^{n_{\rho_0}-r}}$, ou seja,

$W[r] = (1 + w_1 + \cdots + w_x)\{(1+c)^r + (1+c)^{r-1} v_1^{\rho_0} +$

$+(1+c)^{r-2} v_2^{\rho_0} + \cdots + (1+c) v_{r-1}^{\rho_0} + v_r^{\rho_0} + (1+c)^{-1} v_{r+1}^{\rho_0} +$

$+(1+c)^{-2} v_{r+2}^{\rho_0} + \cdots + (1+c)^{r-n_{\rho_0}} v_{n_{\rho_0}}^{\rho_0}\}.$

Como $\frac{1}{1+c} = 1 + c + c^2 + c^3 + \cdots$, certamente cada classe $w[r]_j$ é uma polinomial com todos seus termos ($j$-dimensionais) sendo produtos de classes $w_l(RP(\varepsilon_{\rho_0}))$ e $c$. Temos, agora, as seguintes propriedades cruciais concernentes a tais classes:

$w[r]_{2r} = w_r c^r +$ termos envolvendo $c^i$ com $i < r$,

$w[r]_{2r+1} = (w_{r+1} + v_{r+1}^{\rho_0}) c^r +$ termos envolvendo $c^i$ com $i < r$ e

$w[r]_{2r+2} = v_{r+1}^{\rho_0} c^{r+1} +$ termos envolvendo $c^i$ com $i < r+1$.

As propriedades acima podem ser verificadas através de coleta de termos por inspeção e observando os seguintes fatos: $(1+c)^r + (1+c)^{r-1} v_1^{\rho_0} + (1+c)^{r-2} v_2^{\rho_0} + \cdots + (1+c) v_{r-1}^{\rho_0} + v_r^{\rho_0}$ é igual a $c^r$ mais termos envolvendo $c^i$ com $i < r$, enquanto $(1+c)^{-1} v_{r+1}^{\rho_0} + (1+c)^{-2} v_{r+2}^{\rho_0} + \cdots + (1+c)^{r-\rho_0} v_{n_{\rho_0}}^{\rho_0}$ é tal que todo seu monômio é divisível por $v_{r+1}^{\rho_0}$ ou por uma classe com dimensão maior que $r+1$ oriunda da cohomologia de $RP(x)$.

Da mesma forma, introduzimos (para cada $\rho'$) as classes $W_{\rho'}[r] = 1 + w_\rho[r]_0 + w_\rho[r]_2 + \cdots = \frac{W(\varepsilon_{\rho'}(x) \oplus (\varepsilon_{\rho''}(x) \otimes \xi)}{(1+c)^{n_{\rho''}-r}}$, ou seja,

$W_{\rho'}[r] = (1 + v_1^{\rho'} + \cdots + v_{n_{\rho'}}^{\rho'})\{(1+c)^r + (1+c)^{r-1} v_1^{\rho''} +$

$+(1+c)^{r-2} v_2^{\rho''} + \cdots + (1+c) v_{r-1}^{\rho''} + v_r^{\rho''} + (1+c)^{-1} v_{r+1}^{\rho''} +$

$+(1+c)^{-2} v_{r+2}^{\rho''} + \cdots + (1+c)^{r-n_{\rho''}} v_{n_{\rho''}}^{\rho''}\},$

observando que cada $w_{\rho'}[r]_j$ é uma polinomial com todos seus termos ($j$-dimensionais) sendo produtos de classes $w_l(\varepsilon_{\rho'}(x) \oplus (\varepsilon_{\rho''}(x) \otimes \xi))$ e $c$.

[3]Se $\xi \to V$ é um fibrado linha com classe característica $W(\xi) = 1 + c$ e $\eta^p \to V$ é um fibrado vetorial $p$-dimensional sobre $V$, com classe $W(\eta^p) = 1 + v_1 + \cdots + v_p$ então $W(\eta^p \otimes \xi) = \sum_{j=0}^{p} (1+c)^j v_{p-j}$. [**C-F**, pg 114]

Por serem da mesma natureza algébrica que as classes $W[r]$ temos, exatamente da mesma forma, as propriedades especiais:

$w_{\rho'}[r]_{2r} = v_r^{\rho'} c^r +$ termos envolvendo $c^i$ com $i < r$,

$w_{\rho'}[r]_{2r+1} = (v_{r+1}^{\rho'} + v_{r+1}^{\rho''})c^r +$ termos envolvendo $c^i$ com $i < r$ e

$w_{\rho'}[r]_{2r+2} = v_{r+1}^{\rho''} c^{r+1} +$ termos envolvendo $c^i$ com $i < r+1$.

Para trabalhar com números característicos associados a somas diretas de fibrados, introduzamos algumas notações convenientes. Se $\omega = (i_1, i_2, \ldots, i_s)$ é uma seqüência de naturais, seja $|\omega| = i_1 + i_2 + \ldots + i_s$. Para cada classe $v = 1 + v_1 + v_2 + \cdots + v_p$, coloquemos $v_\omega = v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_s}$ o produto das classes $v_i$ indexadas pelos naturais de $\omega$. Assim, um número característico genérico da lista $(RP(x); \{\varepsilon_\rho\}_\rho)$ será obtido da seguinte maneira: tomamos seqüencias $\omega = (i_1, i_2, \ldots, i_s)$ e $\omega_\rho = (i_1^\rho, i_2^\rho, \ldots, i_s^\rho)$, onde $\rho$ é um homomorfismo não-nulo de $Hom(G, Z_2)$, com $|\omega| + \sum_\rho |\omega_\rho| = x$; redefinimos formalmente (para facilitar a notação) $W(RP(x)) = w$, $W(\varepsilon_\rho) = v^\rho$, e teremos o número genérico $w_\omega \prod_\rho v_{\omega_\rho}^\rho [RP(x)]_2$ associado à lista $(RP(x); \{\varepsilon_\rho\}_\rho)$.

Considerando, agora, as seqüências $\omega = (i_1, i_2, \ldots, i_s)$, $\omega_\rho = (i_1^\rho, i_2^\rho, \ldots, i_s^\rho)$, e um número natural $l$ tal que $|\omega| + \sum_\rho |\omega_\rho| + l = x$ podemos construir a classe

$X = (\prod_{i \in \omega} w[i]_{2i}) \cdot (\prod_{i \in \omega_{\rho_0}} w[i-1]_{2i}) \cdot$

$\cdot \prod_{\rho' \neq \rho_a} \{(\prod_{i \in \omega_{\rho'}} w_{\rho'}[i]_{2i}) \cdot (\prod_{i \in \omega_{\rho''}} w_{\rho'}[i-1]_{2i})\} \cdot$

$\cdot (\prod_{i \in \omega_{\rho_a}} w_{\rho_a}[i]_{2i}) \cdot (\prod_{i \in \omega_{\rho_b}} w_{\rho_a}[i-1]_{2i}) \cdot w_{\rho_a}[l-1]_{2l-1}$.

Observe que $X \in H^{2x-1}(RP(\varepsilon_{\rho_0}(x)))$ e, por causa das propriedades especiais descritas para as classes $W[r]$ e $W_{\rho'}[r]$, a classe $X$ pode ser escrita como

$X = w_\omega v_{\omega_{\rho_0}}^{\rho_0} v_{\omega_{\rho_a}}^{\rho_a} v_{\omega_{\rho_b}}^{\rho_b} \cdot \prod_{\rho' \neq \rho_a} v_{\omega_{\rho'}}^{\rho'} \cdot \prod_{\rho' \neq \rho_b} v_{\omega_{\rho''}}^{\rho''} (v_l^{\rho_a} + v_l^{\rho_b}) c^{x-1} +$

$+$ termos envolvendo $c^i$ com $i < x-1$.

Por ser uma classe característica associada à lista $(RP(\varepsilon_{\rho_0}(x)); \xi, \varepsilon_{\rho_a}(x) \oplus (\varepsilon_{\rho_b}(x) \otimes \xi), \{\varepsilon_{\theta'}(x) \oplus (\varepsilon_{\theta''}(x) \otimes \xi)\}_{(\theta', \theta'') \neq (\rho_a, \rho_b)})$ temos que $X[RP(\varepsilon_{\rho_0}(x))]_2 = 0$.

Pela descrição acima, cada monômio de $X$ possui ou a forma $B_x c^{x-1}$, onde $B_x$ é uma classe oriunda da $x$-cohomologia de $RP(x)$, ou a forma $B_t c^i$, onde $B_t$ provém da $t$-cohomologia de $RP(x)$ e $i < x-1$. Como $t + i = 2x-1$ e $i < x-1$, certamente $t > x$; então $B_t = 0$. Por outro lado, pela fórmula do Teorema A.0.13, temos que os monômios da forma $B_x c^{x-1}$ satisfazem $B_x c^{x-1}[RP(\varepsilon_{\rho_0})]_2 = B_x[RP(x)]_2$. Isso implica que

$0 = X[RP(\varepsilon_{\rho_0})]_2 = w_\omega v_{\omega_{\rho_0}}^{\rho_0} v_{\omega_{\rho_a}}^{\rho_a} v_{\omega_{\rho_b}}^{\rho_b} \cdot \prod_{\rho' \neq \rho_a} v_{\omega_{\rho'}}^{\rho'} \cdot \prod_{\rho' \neq \rho_b} v_{\omega_{\rho''}}^{\rho''} (v_l^{\rho_a} + v_l^{\rho_b})[RP(x)]_2,$

ou ainda

$w_\omega v_{\omega_{\rho_0}}^{\rho_0} v_{\omega_{\rho_a}}^{\rho_a} v_{\omega_{\rho_b}}^{\rho_b} \cdot \prod_{\rho' \neq \rho_a} v_{\omega_{\rho'}}^{\rho'} \cdot \prod_{\rho' \neq \rho_b} v_{\omega_{\rho''}}^{\rho''} v_l^{\rho_a} [RP(x)]_2 =$

$= w_\omega v_{\omega_{\rho_0}}^{\rho_0} v_{\omega_{\rho_a}}^{\rho_a} v_{\omega_{\rho_b}}^{\rho_b} \cdot \prod_{\rho' \neq \rho_a} v_{\omega_{\rho'}}^{\rho'} \cdot \prod_{\rho' \neq \rho_b} v_{\omega_{\rho''}}^{\rho''} v_l^{\rho_b} [RP(x)]_2$.

A igualdade acima nos diz que, em um número característico genérico de $(RP(\varepsilon_{\rho_0}(x)); \xi, \varepsilon_{\rho_a}(x) \oplus (\varepsilon_{\rho_b}(x) \otimes \xi), \{\varepsilon_{\theta'}(x) \oplus (\varepsilon_{\theta''}(x) \otimes \xi)\}_{(\theta',\theta'') \neq (\rho_a,\rho_b)})$, qualquer classe $v_l^{\rho_a}$ do fibrado $\varepsilon_{\rho_a}(x) \to RP(x)$ pode ser trocada pela correspondente classe $v_l^{\rho_b}$ do fibrado $\varepsilon_{\rho_b}(x) \to RP(x)$, sem mudar o valor do número característico. Em particular, isto significa que, caso $l > dim(\varepsilon_{\rho_a})$, qualquer classe $v_l^{\rho_b}$ do fibrado $\varepsilon_{\rho_b}(x) \to RP(x)$ pode ser trocada pela classe nula. Desta forma, os números característicos da lista $(RP(x); \varepsilon_{\rho_a}(x), \varepsilon_{\rho_b}(x), \{\varepsilon_\rho(x)\}_{\rho \neq \rho_a,\rho_b})$ são iguais aos correspondentes números característicos da lista $(RP(x); \varepsilon_{\rho_a}(x), \varepsilon_{\rho_a}(x) \oplus R^s, \{\varepsilon_\rho(x)\}_{\rho \neq \rho_a,\rho_b})$ e, portanto, tais listas são simultaneamente bordantes, como queríamos demonstrar. □

Antes de provar o teorema final do capítulo, que nos dará a classificação desejada, necessitamos do seguinte

LEMA 4.3.5. *Seja $(G, M, \Phi)$ uma ação efetiva de $Z_2^k$ com "fixed data" $\bigoplus_\rho \varepsilon_\rho \to F$ e suponha que, para algum homomorfismo não-nulo $\rho_0 \in Hom(G, Z_2)$, $\varepsilon_{\rho_0} \to F$ se decomponha como $\varepsilon'_{\rho_0} \oplus R \to F$ (sendo que esta decomposição está subentendida sobre todas as componentes de $F$). Então a soma de Whitney $\bigoplus_\rho \mu_\rho \to F$, onde $\mu_\rho = \varepsilon_\rho$ se $\rho \neq \rho_0$ e $\mu_{\rho_0} = \varepsilon'_{\rho_0}$, é ainda o "fixed data" de uma ação de $Z_2^k$.*

DEMONSTRAÇÃO. Este é o teorema de estabilidade para ações de $Z_2^k$, provado por P. Pergher em [**Pe5**]. □

Estamos, agora, em condições de provar o principal teorema do trabalho.

TEOREMA 4.3.6. *Seja $M$ conexa e $(G, M, \Phi)$ ação efetiva de $Z_2^k$ fixando $RP(2m) \cup RP(2n)$ com $0 < m < n$ e $2m \neq n$. Então $(G, M, \Phi)$ é equivariantemente bordante a uma $Z_2^k$-ação obtida a partir de $\Gamma_k^k(W, T)$, a menos de uma mudança de base de $G$ e uma conveniente remoção de secções (dada pelo lema anterior), onde $(W, T)$ é uma involução fixando $RP(2m) \cup RP(2n)$ (ou seja, $(W, T) \in \mathcal{A}$).*

DEMONSTRAÇÃO. Como antes, coloquemos $(x, y) = (2m, 2n)$ ou $(x, y) = (2n, 2m)$ e seja $\bigoplus_\rho \varepsilon_\rho(x) \to RP(x)$ o "fixed data" de $(G, M, \Phi)$ restrito a $RP(x)$. Pelo Teorema 4.2.25, a lista $(RP(x); \{\varepsilon_\rho(x)\}_\rho)$ pode ser escrita como $(RP(x); \{\eta_\rho\}, \{\mu_\rho\})$, onde a lista $\{\eta_\rho\}$ contém $2^{k-1}$ fibrados normais de involuções fixando $RP(2m) \cup RP(2n)$, enquanto a lista $\{\mu_\rho\}$ é constituída de $2^{k-1} - 1$ fibrados $x$-dimensionais cada um deles bordante ao fibrado tangente $\tau RP(x) \to RP(x)$. Além disso, tais fibrados estão incluídos em $\bigoplus_\rho \varepsilon_\rho(x) \to RP(x)$ da mesma forma que os correspondentes fibrados estão incluídos em uma ação do tipo $\Gamma_k^k(W, T)$ após conveniente mudança

de base, onde $(W, T)$ é alguma involução fixando $RP(2m) \cup RP(2n)$ (Teorema 4.2.25). Pelo Lema A.0.11, cada $\mu_\rho$ satisfaz $W(\mu_\rho) = (1+\alpha)^{x+1}$, ou seja, $w_i(\mu_p) = w_i(\tau RP(x))$ para qualquer $1 \leq i \leq x$. Desta forma, a lista $(RP(x); \{\eta_\rho\}, \{\mu_\rho\})$ possui os mesmos números característicos que a lista $(RP(x); \{\eta_\rho\}, \{\tau RP(x)\})$ onde, agora, $\{\tau RP(x)\}$ representa a sublista formada por $2^{k-1} - 1$ fibrados iguais a $\tau RP(x) \to RP(x)$. Portanto, tais listas são simultaneamente bordantes. Escolhamos, agora, $\eta_{\rho_0} \in \{\eta_\rho\}$ satisfazendo $dim(\eta_{\rho_0}) \leq dim(\eta_\rho)$ para todo $\eta_\rho \in \{\eta_\rho\}$. Para cada $\eta_\rho \in \{\eta_\rho\}$ com $\eta_\rho \neq \eta_{\rho_0}$, coloquemos $h_\rho = dim(\eta_\rho) - dim(\eta_{\rho_0})$. Aplicando o Teorema 4.3.4 iteradamente $2^{k-1} - 1$ vezes, concluímos que a lista $(RP(x); \{\eta_\rho\}, \{\tau RP(x)\})$ é simultaneamente bordante à lista $(RP(x); \eta_{\rho_0}, \{\gamma_\rho\}, \{\tau RP(x)\})$, onde $\{\gamma_\rho\}$ é a lista obtida a partir da lista $\{\eta_\rho\}$ excluindo $\eta_{\rho_0}$ e substituindo cada $\eta_\rho$ restante por $\gamma_\rho = \eta_{\rho_0} \oplus R^{h_\rho}$. Por facilidade de notação, consideramos $\eta_{\rho_0}$ incluído na lista $\{\gamma_\rho\}$ escrevendo $h_{\rho_0} = 0$ e $\gamma_{\rho_0} = \eta_{\rho_0} \oplus R^{h_\rho} = \eta_{\rho_0}$, e chegamos à lista $A = (RP(x); \{\gamma_\rho\}, \{\tau RP(x)\})$.

Seja $z = max\{h_\rho\}$. Então temos uma involução $(W, T)$ fixando $RP(2m) \cup RP(2n)$ tal que o fibrado normal de $RP(x)$ em $W$ é $\eta_{\rho_0} \oplus R^z$. Considere a $Z_2^k$-ação $\Gamma_k^k(W, T)$ já considerada com a mudança de base acima mencionada. Então o "fixed data" de $\Gamma_k^k(W, T)$ restrito a $RP(x)$ é a lista $(RP(x); \{\eta_{\rho_0} \oplus R^z\}, \{\tau RP(x)\})$, onde $\{\eta_{\rho_0} \oplus R^z\}$ contém $2^{k-1}$ cópias de $\eta_{\rho_0} \oplus R^z$ e $\{\tau RP(x)\}$ contém $2^{k-1} - 1$ cópias de $\tau RP(x)$. Aplicando, agora, o Lema 4.3.5 iteradamente ($\sum_{\gamma_\rho}(z - h_p)$ vezes) sobre o "fixed data" de $\Gamma_k^k(W, T)$, ou seja, removendo um número conveniente de secções dos fibrados $\eta_{\rho_0} \oplus R^z$ do "fixed data" de $\Gamma_k^k(W, T)$, obtemos uma lista que é o "fixed data" de uma ação de $Z_2^k$ e é exatamente igual à lista $A$. Portanto, o "fixed data" desta última ação é simultaneamente bordante ao "fixed data" de $(G, M, \Phi)$, e isto encerra o teorema. □

CAPíTULO 5

# Involuções Fixando $RP(2) \cup RP(4j+2)$

## 5.1. Introdução

No capítulo anterior mostramos que as classes de bordismo equivariante de ações de $Z_2^k$ que fixam $RP(2m) \cup RP(2n)$, $0 < m < n$ e $2m \neq n$, são determinadas pela coleção $\mathcal{A}$ formada pelas classes de bordismo equivariante de involuções com o mesmo conjunto de pontos fixos; em outras palavras, a classificação para $k = 1$ determina a classificação para qualquer $k \geq 1$. A importância deste resultado, na direção de se obter uma classificação completa, reside no fato de que a análise do "fixed data" de involuções é drasticamente mais simples que a correspondente análise para ações de $Z_2^k$, uma vez que o bordismo usual de fibrados é substituído pelo bordismo simultâneo. No entanto, evidentemente, nosso resultado não fornece uma classificação explícita, uma vez que, para tanto, seria necessário o conhecimento explícito do caso $k = 1$. Nesse particular, em **[Ro]** D. Royster estudou o bordismo de involuções fixando $RP(r) \cup RP(s)$, dividindo sua análise nos seguintes 5 casos:

a) $r = 0$, $s =$ímpar;

b) $r = 0$, $s =$par;

c) $r$ e $s$ ímpares;

d) $r$ par e $s$ ímpar;

e) $r$ e $s$ pares.

Os casos a), b), c) e d) foram completamente resolvidos por D. Royster, enquanto que o caso e) (que é o caso que nos interessa) ficou em aberto e, na realidade, permanece em aberto até hoje, com exceção dos casos particulares $r = 0$, $s =$par (ítem b)) e $r$ e $s$ pares com $r = s$ **[H-T]**. O objetivo deste capítulo final é resolver outro interessante caso particular deste problema, com $r = 2$ e $s = 2p$, $p$ ímpar; alternativamente, $r = 2$ e $s = 4j + 2$, $j \geq 0$. O caso $j = 0$, ou seja, $(r, s) = (2, 2)$, estará incluído em nossas computações, embora, como observado acima, já exista na literatura. Se $j \geq 1$, certamente $2 < 4j + 2$ e $2 \cdot 2 = 4 \neq 4j + 2$ (ou seja, se $(r, s) = (2, 4j + 2) = (2m, 2n)$ então $0 < m < n$ e $2m \neq n$) e, portanto, em junção com o resultado do Capítulo 4, a solução deste problema fornecerá, como conseqüência imediata, a classificação explícita das classes de bordismo equivariante de ações de $Z_2^k$ cujo conjunto de pontos fixos é $RP(2) \cup RP(4j + 2)$, $j \geq 1$.

Agradecemos o Prof. Robert E. Stong por ter nos indicado todas as etapas principais das computações necessárias para solucionar o caso em questão.

## 5.2. "Fixed Data" de Involuções Fixando $RP(2) \cup RP(4j+2)$

Sejam $(M^m, T)$ uma involução sobre uma variedade fechada fixando $F_T = RP(2) \cup RP(4j+2)$, e $\eta \to RP(2) \cup \mu \to RP(4j+2)$ o fibrado normal de $F_T$ em $M^m$. Pelo Corolário 2.7.10, temos que $[S(\eta), A]_L = [S(\mu), A]_L \in \mathfrak{N}_{m-1}(Z_2)$, onde $S(-)$ é o respectivo fibrado em esferas e $A$ é a antípoda em cada fibra. Pelo Corolário 2.6.15, as classes $[S(\eta), A]_L$ e $[S(\mu), A]_L$ são determinadas pelos números característicos dos fibrados linha canônicos sobre $S(\eta)/A = RP(\eta)$ e $S(\mu)/A = RP(\mu)$, respectivamente, ou seja, se $[S(\eta), A]_L$ e $[S(\xi), A]_L$ são bordantes então os respectivos números característicos devem ser iguais.

Vimos em 2.7.13 que a $Z_2$-cohomologia $H^*(RP(\eta))$ é um $H^*(RP(2))$-módulo livre sobre $1, c, \ldots, c^{dim(\eta)-1}$ onde $c$ é a primeira classe de Stiefel-Whitney do fibrado linha sobre $RP(\eta)$. A estrutura do anel é determinada pela relação

$c^{dim(\eta)} + c^{dim(\eta)-1} w_1(\eta) + c^{dim(\eta)-2} w_2(\eta) + \cdots + w_{dim(\eta)}(\eta) = 0.$

Da mesma forma, a cohomologia $H^*(RP(\mu))$ é um $H^*(RP(4j+2))$-módulo livre sobre $1, d, \ldots, d^{dim(\mu)-1}$ onde $d$ é a primeira classe de Stiefel-Whitney do fibrado linha sobre $RP(4j+2)$. A estrutura do anel é determinada pela relação

$d^{dim(\mu)} + d^{dim(\mu)-1} w_1(\mu) + c^{dim(\mu)-2} w_2(\mu) + \cdots + w_{dim(\mu)}(\mu) = 0.$

Pela estrutura do anel de Grothendieck de $RP(n)$, ou seja, pela estrutura de $K$-teoria de $KO(RP(n))$, sabemos que a classe total de Stiefel-Whitney de um fibrado sobre $RP(n)$ é $(1+\omega)^l$, para algum inteiro $l \geq 0$, onde $\omega$ é o gerador de $H^1(RP(n))$. Adicionalmente, suponha $l = 2^{r_1} + 2^{r_2} + \cdots + 2^{r_t}$, $0 \leq r_1 < r_2 < \cdots < r_t$, a partição diádica de $l$, e sejam $s$ tal que $2^s \leq n < 2^{s+1}$ e $b$ tal que $r_b \leq s < r_{b+1}$ (portanto, $2^{r_b} \leq n < 2^{r_{b+1}}$). Assim, se $i > b$ então $(1+\omega)^{2^{r_i}} = 1 + \omega^{2^{r_i}} = 1$ e

$(1+\omega)^l = (1+\omega)^{2^{r_1}} \cdots (1+\omega)^{2^{r_t}} = (1+\omega)^{2^{r_1}} \cdots (1+\omega)^{2^{r_b}} (1+\omega)^{2^{r_{b+1}}} \cdots (1+\omega)^{2^{r_t}} =$

$= (1+\omega)^{2^{r_1}} \cdots (1+\omega)^{2^{r_b}} = (1+\omega)^{2^{r_1} + 2^{r_2} + \cdots + 2^{r_b}}.$

Agora, $2^{s+1} - 1 = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{s-1} + 2^s$ e, portanto, $2^{r_1} + 2^{r_2} + \cdots + 2^{r_b} \leq 2^{s+1} - 1$. Segue que podemos sempre supor $l \leq 2^{s+1} - 1$ onde $s$ é tal que $2^s \leq n < 2^{s+1}$.

Assim, seja $W(\eta) = (1+\alpha)^p$ onde $\alpha \in H^1(RP(2))$ e $W(\mu) = (1+\beta)^q$ onde $\beta \in H^1(RP(4j+2))$. Conforme a discussão anterior, temos que $p \leq 2^{t+1} - 1$, onde $t$ é tal que $2^t \leq 2 < 2^{t+1}$, ou seja $t = 1$ e, portanto, $p \leq 3$. Da mesma forma, $q \leq 2^{s+1} - 1$, onde $s$ é tal que $2^s \leq 4j+2 < 2^{s+1}$ (ou $2^s < 4j+2 < 2^{s+1}$ se $j > 0$, pois $4j+2$ não pode ser da forma $2^s$ neste caso).

NOTAÇÃO 5.2.1. Se $p$ é um inteiro, usaremos a notação $\overline{p} = p(mod\ 2)$.

Seja $\frac{1}{W(-)} = \widetilde{W}(-) = \widetilde{w}_0(-) + \widetilde{w}_1(-) + \cdots$ a classe de Stiefel-Whitney dual, definida por $W(\mu)\widetilde{W}(\mu) = 1$. Então, segundo A.0.16, teremos que:

$\widetilde{W}(\eta) = \frac{1}{(1+\alpha)^p} = 1 + \overline{\begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}}\alpha + \overline{\begin{pmatrix} p+1 \\ 2 \end{pmatrix}}\alpha^2$, ($\alpha^i = 0$ se $i > 2$ pois $\alpha \in H^1(RP(2))$), para $p \geq 1$ e

$\widetilde{W}(\eta) = \frac{1}{(1+\alpha)^p} = 1$, para $p = 0$.

Analogamente,

$\widetilde{W}(\mu) = \frac{1}{(1+\beta)^q} = 1 + \overline{\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix}}\beta + \overline{\begin{pmatrix} q+1 \\ 2 \end{pmatrix}}\beta^2 + \overline{\begin{pmatrix} q+2 \\ 3 \end{pmatrix}}\beta^2 + \cdots$, para $q \geq 1$ e

$\widetilde{W}(\mu) = \frac{1}{(1+\beta)^q} = 1$, para $q = 0$.

Observe que, para $q \geq 1$, podemos dizer que $\widetilde{w}_k(\mu) = \overline{\begin{pmatrix} q-1+k \\ k \end{pmatrix}}\beta^k$.

Pelo Teorema 2.7.13, sabendo que $W(RP(2)) = (1+\alpha)^3 = 1+\alpha+\alpha^2$ e que $W(RP(4j+2)) = (1+\beta)^{4j+3} = 1 + \beta + \beta^2 + \cdots$ teremos que:

$W(RP(\eta)) = (1 + \alpha + \alpha^2)[(1+c)^{m-2} + \overline{p}\alpha(1+c)^{m-3} + \cdots]$ e

$W(RP(\mu)) = (1 + \beta + \beta^2 + \cdots)[(1+c)^{m-4j-2} + \overline{q}\beta(1+c)^{m-4j-3} + \cdots]$.

Usaremos, agora, as classes características $W[r]$ introduzidas no capítulo anterior, as quais, conforme observado, conduzem a números característicos.

Assim, para $m > 4j+2$, seja $W[r](RP(-)) = \frac{W(RP(-))}{(1+c)^{m-4j-2-r}}$.

Teremos:

$W[r](RP(\eta)) = w[r]_0(RP(\eta)) + w[r]_1(RP(\eta)) + \cdots =$

$= (1 + \alpha + \alpha^2)[(1+c)^{4j+r} + \overline{p}\alpha(1+c)^{4j+r-1} + \cdots]$

e

$W[r](RP(\mu)) = w[r]_0(RP(\mu)) + w[r]_1(RP(\mu)) + \cdots =$

$= (1 + \beta + \beta^2 + \cdots)[(1+c)^r + \overline{q}\beta(1+c)^{r-1} + \cdots]$.

Usando essas informações provaremos os teoremas abaixo:

TEOREMA 5.2.2. *Sejam $(M^m, T)$ uma involução sobre uma variedade fechada fixando $F_T = RP(2) \cup RP(2)$, e $\eta \to RP(2) \cup \mu \to RP(2)$ o fibrado normal de $F_T$ em $M^m$. Então $(M^m, T)$ borda.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $m = 2$ teríamos $(M^m, T) = (RP(2), Id) \cup (RP(2), Id) \cup (N, S)$ onde $(N, S)$ é livre de pontos fixos e, por 2.7.7, $(N, S)$ borda. Portanto, $(M^m, T)$ borda.

Suponha, então, $m > 2$.

Para $r = 0$, teremos:

$w[0]_1(RP(\eta)) = (\overline{p}+1)\alpha$ e

Se $m = 2$ teríamos $(M^m, T) = (RP(2), Id) \cup (RP(2), Id) \cup (N, S)$ onde $(N, S)$ é livre de pontos fixos e, por 2.7.7, $(N, S)$ borda. Portanto, $(M^m, T)$ borda.

Suponha, então, $m > 2$.

Para $r = 0$, teremos:

$w[0]_1(RP(\eta)) = (\overline{p}+1)\alpha$ e

$w[0]_1(RP(\mu)) = (\overline{q}+1)\beta$.

Seja o número de Whitney determinado por $w[0]_1^2 c^{m-1-2}$.

Assim, aplicando a fórmula de A.0.13, e como $m-1-2 = dim(\eta)-1$ e $m-1-2 = dim(\mu)-1$ obtemos:

$w[0]_1^2(RP(\eta))c^{m-1-2}[RP(\eta)]_2 = (\overline{p}+1)\alpha^2 c^{m-1-2}[RP(\eta)]_2 =$

$= (\overline{p}+1)\alpha^2 \widetilde{w}_0(\eta)[RP(2)]_2 = (\overline{p}+1)\alpha^2[RP(2)]_2 = (\overline{p}+1)$

e

$w[0]_1^2(RP(\mu))c^{m-1-2}[RP(\mu)]_2 = (\overline{q}+1)\beta^2 c^{m-1-2}[RP(\mu)]_2 =$

$= (\overline{q}+1)\beta^2 \widetilde{w}_0(\mu)[RP(2)]_2 = (\overline{q}+1)\beta^2[RP(2)]_2 = (\overline{q}+1)$.

Por hipótese, como mencionamos acima, os respectivos números característicos devem ser iguais. Então:

$w[0]_1^2(RP(\eta))c^{m-1-2}[RP(\eta)]_2 = w[0]_1^2(RP(\mu))c^{m-1-2}[RP(\mu)]_2$.

Portanto:

(I) $\overline{p}+1 = \overline{q}+1 \Rightarrow p \equiv q(mod\ 2)$.

Considere, agora, os números de Whitney determinados por $c^{m-1}$. Por A.0.13 teremos que

$c^{m-1}[RP(\eta)]_2 = \widetilde{w}_{m-1-dim(\eta)+1}(\eta)[RP(2)]_2 = \widetilde{w}_2(\eta)[RP(2)]_2$ e

$c^{m-1}[RP(\mu)]_2 = \widetilde{w}_{m-1-dim(\mu)+1}(\mu)[RP(2)]_2 = \widetilde{w}_2(\mu)[RP(2)]_2$.

Temos que $\widetilde{w}_2(\eta) = \overline{\begin{pmatrix} p+1 \\ 2 \end{pmatrix}\alpha^2}$ se $p \geq 1$ e $\widetilde{w}_2(\eta) = 0$ se $p = 0$.

Temos, também, que $\widetilde{w}_2(\mu) = \overline{\begin{pmatrix} q+1 \\ 2 \end{pmatrix}\beta^2}$ se $q \geq 1$ e $\widetilde{w}_2(\mu) = 0$ se $q = 0$.

Assim, como $p \leq 3$ e $q \leq 3$, já que $\eta$ e $\mu$ são fibrados sobre $RP(2)$, teremos que:

Tabela 1

| $p =, q =$ | $c^{m-1}[RP(-)]$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 1 |
| 3 | 0 |

Por (I) temos que $p \equiv q(mod\ 2)$. Assim $p = q$, ou seja, as classes características de $\eta$ e $\mu$ são iguais. Portanto, $\eta \cup \mu$ borda e, por 2.7.6, $(M^m, T)$ borda. □

TEOREMA 5.2.3. *Sejam $(M^m, T)$ uma involução sobre uma variedade fechada fixando $F_T = RP(2) \cup RP(4j+2)$, $j > 0$, e $\eta \to RP(2) \cup \mu \to RP(4j+2)$ o fibrado normal de $F_T$ em $M^m$. Então $W(\eta) = (1+\alpha)^3$ e $W(\mu) = (1+\beta)^3$.*

DEMONSTRAÇÃO. Se $m = 4j+2$ teríamos

$(M^m, T) = (RP(4j+2), Id) \cup (N, S)$

onde $(N, S)$ fixa $RP(2)$ e, pelo Teorema A.0.9, $dim(N) = 4$. Mas, como $dim(N) = dim(M)$, teríamos $4j+2 = 4$; que é absurdo. Então podemos assumir também $m > 4j+2$, ou $m-1 \geq 4j+2$ .

Seja o número de Whitney $w[0]_1^{4j+2}(-)c^{m-1-(4j+2)}[RP(-)]$.

Como $j > 0$, $m-1-(4j+2) < dim(\eta)-1$ e $m-1-(4j+2) = dim(\xi)-1$, então teremos, aplicando a fórmula de A.0.13:

$w[0]_1^{4j+2}(\eta)c^{m-1-(4j+2)}[RP(\eta)]_2 = 0,$

e

$w[0]_1^{4j+2}(\mu)c^{m-1-(4j+2)}[RP(\mu)]_2 = w[0]_1^{4j+2}(\mu)\widetilde{w}_0(\mu)[RP(4j+2)]_2 =$

$= (\overline{q}+1)\beta^{4j+2}[RP(4j+2)]_2 = (\overline{q}+1).$

Como os números característicos devem ser iguais, concluímos que:

(II) $\overline{q}+1 = 0 \Rightarrow q$ é ímpar.

Considerando o número $w[0]_1^2 c^{m-1-2}$ e como $m-1-2 = dim(\eta)-1$ e $m-1-2 \geq dim(\xi)-1$, teremos:

$w[0]_1^2(\eta)c^{m-1-2}[RP(\eta)]_2 = w[0]_1^2(\eta)\widetilde{w}_0(\eta)[RP(2)]_2 = (\overline{p}+1)\alpha^2[RP(2)]_2 = (\overline{p}+1)$ e

$w[0]_1^2(\mu)c^{m-1-2}[RP(\mu)]_2 = (\overline{q}+1)\beta^2 c^{m-1-2}[RP(\mu)]_2 = 0$, por (II).

Portanto, $\overline{p}+1 = 0$ e $p$ é ímpar. Assim, temos que

(III) $p$ e $q$ são ímpares.

Quadrados de Steenrood de classes características são polinomiais nas classes características[1] e, portanto, conduzem a números característicos. Com isso em mente, e usando as propriedades de $S_q$, consideremos a tabela[2]:

| Tabela 2 | $(\eta)$ | $(\mu)$ |
|---|---|---|
| $w[1]_2(-)$ | $\alpha c + \overline{\binom{p}{2}}\alpha^2$ | $\beta c + \overline{\binom{q}{2}}\beta^2$ |
| $Sq^1 w[1]_2(-)$ | $\alpha^2 c + \alpha c^2$ | $\beta^2 c + \beta c^2$ |
| $Sq^1 w[1]_2(-) + cw[1]_2(-)$ | $\left[\overline{\binom{p}{2}} + 1\right]\alpha^2 c$ | $\left[\overline{\binom{q}{2}} + 1\right]\beta^2 c$ |

Suponha $\overline{\binom{p}{2}} = 0$.

Como $p \leq 3$ é ímpar (por III), teremos que $p = 1$. Temos, com isso, que:

(IV) $\widetilde{W}(\eta) = \frac{1}{1+\alpha} = 1 + \alpha + \alpha^2$, ou seja, $\widetilde{w}_0(\eta) = 1$, $\widetilde{w}_1(\eta) = \alpha$ e $\widetilde{w}_2(\eta) = \alpha^2$.

Além disso, concluímos também que $Sq^1 w[1]_2(\eta) + cw[1]_2(\eta) = \alpha^2 c$. Considere os números característicos determinados pela classe $(Sq^1 w[1]_2 + cw[1]_2)c^{m-1-3}$. Teremos, aplicando novamente A.0.13:

$(Sq^1 w[1]_2(\eta) + cw[1]_2(\eta))c^{m-1-3}[RP(\eta)]_2 = (\alpha^2 c)c^{m-4}[RP(\eta)]_2 = \alpha^2[RP(2)]_2 = 1$ e

$$(Sq^1 w[1]_2(\mu) + cw[1]_2(\mu))c^{m-1-3}[RP(\mu)]_2 = \left\{\left[\overline{\binom{q}{2}} + 1\right]\beta^2 c\right\} c^{m-4}[RP(\mu)]_2 =$$

$$= \left[\overline{\binom{q}{2}} + 1\right]\beta^2 c^{m-3}[RP(\mu)]_2 = \left[\overline{\binom{q}{2}} + 1\right]\beta^2 \widetilde{w}_{4j}(\mu)[RP(4j+2)]_2$$

Como os números característicos devem ser iguais, concluímos que $\overline{\binom{q}{2}} + 1 = 1$ e que o coeficiente de $\beta^{4j}$ em $\frac{1}{(1+\beta)^q}$ é 1. Ou seja:

V) $\overline{\binom{q}{2}} = 0$ e $\overline{\binom{q-1+4j}{4j}} = 1$.

[1]Isto pode ser verificado observando-se a fórmula de Wu:
$Sq^k(w_m) = w_k w_m + \overline{\binom{k-m}{1}} w_{k-1} w_{m+1} + \cdots + \overline{\binom{k-m}{k}} w_0 w_{m+k}$.

[2]Estamos utilizando a fórmula de Cartan: $S_q^k(ab) = \sum_{i+j=k} Sq^i(a) Sq^j$.

Observe que $\overline{\begin{pmatrix} q-1+4j \\ 4j \end{pmatrix}} = 1$ implica que $q-1$ e $4j$ têm expansões diádicas disjuntas, por A.0.19 (corolário do Teorema de Lucas).

Como $q$ também é ímpar, por (III), $\overline{\begin{pmatrix} q \\ 2 \end{pmatrix}} = 0 \Rightarrow q \equiv 1(mod\ 4)$.

Consideremos os números determinados pela classe $c^{m-1}$. Teremos que:

$c^{m-1}[RP(\eta)]_2 = \widetilde{w}_2(\eta)[RP(2)]_2 = \alpha^2[RP(2)]_2 = 1$ (usando (IV)) e

$c^{m-1}[RP(\mu)]_2 = \widetilde{w}_{4j+2}(\mu)[RP(4j+2)]_2 =$

$= \overline{\begin{pmatrix} q-1+4j+2 \\ 4j+2 \end{pmatrix}} \beta^{4j+2}[RP(4j+2)]_2 = \overline{\begin{pmatrix} q-1+4j+2 \\ 4j+2 \end{pmatrix}}$

Então $\overline{\begin{pmatrix} q-1+4j+2 \\ 4j+2 \end{pmatrix}} = 1$ e, portanto, $q-1$ e $4j+2$ têm expansões diádicas disjuntas (A.0.19).

Tomemos, agora, os números característicos correspondentes às classes $w[1]_2^k c^{m-1-2k}$, $0 \leq 2k \leq m-1$. Como estamos admitindo $\overline{\begin{pmatrix} p \\ 2 \end{pmatrix}} = 0$, teremos, pela tabela acima, que $w[1]_2^k(RP(\eta)) = \alpha c$. Assim, aplicando A.0.13 e usando (IV):

$w[1]_2^k(RP(\eta))c^{m-1-2k}[RP(\eta)]_2 = \alpha^k c^k c^{m-1-2k}[RP(\eta)]_2 = \alpha^k c^{m-1-k}[RP(\eta)]_2 =$

$= \alpha^k c^{m-1-k}[RP(\eta)]_2 = \begin{cases} \alpha^k \widetilde{w}_{2-k}(\eta)[RP(2)]_2 \text{ se } k \leq 2 \\ 0 \text{ se } 2 < k \leq \frac{m-1}{2} \end{cases} = \begin{cases} \alpha^k \alpha^{2-k}[RP(2)]_2 \text{ se } k \leq 2 \\ 0 \text{ se } 2 < k \leq \frac{m-1}{2} \end{cases} =$

$= \begin{cases} \alpha^k \alpha^{2-k}[RP(2)]_2 \text{ se } k \leq 2 \\ 0 \text{ se } 2 < k \leq \frac{m-1}{2} \end{cases} = \begin{cases} \alpha^2[RP(2)]_2 \text{ se } k \leq 2 \\ 0 \text{ se } 2 < k \leq \frac{m-1}{2} \end{cases} = \begin{cases} 1 \text{ se } k \leq 2 \\ 0 \text{ se } 2 < k \leq \frac{m-1}{2} \end{cases}.$

Por outro lado, como $w[1]_2^k(RP(\mu)) = \beta c$ (por (V)), obtemos, analogamente:

$w[1]_2^k(RP(\mu))c^{m-1-2k}[RP(\mu)]_2 = \begin{cases} \beta^k \widetilde{w}_{4j+2-k}(\mu)[RP(4j+2)]_2 \text{ se } k \leq máx\{4j+2, \frac{m-1}{2}\} \\ 0 \text{ se } 4j+2 < k \leq \frac{m-1}{2} \end{cases} =$

$= \begin{cases} \beta^k \overline{\begin{pmatrix} q-1+4j+2-k \\ 4j+2-k \end{pmatrix}} \beta^{4j+2-k}[RP(4j+2)]_2 \text{ se } k \leq máx\{4j+2, \frac{m-1}{2}\} \\ 0 \text{ se } 4j+2 < k \leq \frac{m-1}{2} \end{cases} =$

$= \begin{cases} \overline{\begin{pmatrix} q-1+4j+2-k \\ 4j+2-k \end{pmatrix}} \beta^{4j+2}[RP(4j+2)]_2 \text{ se } k \leq máx\{4j+2, \frac{m-1}{2}\} \\ 0 \text{ se } 4j+2 < k \leq \frac{m-1}{2} \end{cases} =$

$$= \begin{cases} \overline{\begin{pmatrix} q-1+4j+2-k \\ 4j+2-k \end{pmatrix}} \text{ se } k \leq máx\{4j+2, \frac{m-1}{2}\} \\ 0 \text{ se } 4j+2 < k \leq \frac{m-1}{2} \end{cases}$$

Como os números característicos devem ser iguais, concluímos que:

$$\overline{\begin{pmatrix} q-1+4j+2-k \\ 4j+2-k \end{pmatrix}} = \begin{cases} 1 \text{ se } k \leq 2 \\ 0 \text{ se } 2 < k \leq \frac{m-1}{2} \\ \text{indeterminado se } k > \frac{m-1}{2} \end{cases}.$$

Ou seja, $\overline{\begin{pmatrix} q-1+4j+2 \\ 4j+2 \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} q-1+4j+1 \\ 4j+1-1 \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} q-1+4j \\ 4j \end{pmatrix}} = 1$ e, para $2 < k < máx\{4j+2, \frac{m-1}{2}\}$, $\overline{\begin{pmatrix} q-1+4j+2-k \\ 4j+2-k \end{pmatrix}} = 0$. Como estamos admitindo $m-1 \geq 4j+2$, então $\frac{m-1}{2} \geq 2j+1$. Portanto, em particular, $\overline{\begin{pmatrix} q-1+4j+2-k \\ 4j+2-k \end{pmatrix}} = 0$ para $2 < k \leq 2j+1 \Rightarrow 4j+2-2 > 4j+2-k \geq 4j+2-(2j+1) \Rightarrow 4j > 4j+2-k \geq 2j+1$. Fazendo $t = 4j+2-k$ podemos dizer que $\overline{\begin{pmatrix} q-1+t \\ t \end{pmatrix}} = 0$ para $2j+1 \leq t < 4j$.

Seja $4j+2 = 2^s + \cdots + 2$ a expansão diádica de $4j+2$. Então $2j+1 < 2^s < 4j+2 < 2^{s+1}$. Como $q-1$ e $4j+2$ têm expansões diádicas disjuntas, concluímos que $2^s$ não aparece na expansão diádica de $q-1$. Assim, $q-1$ e $2^s$ também têm expansões diádicas disjuntas e, portanto, $\overline{\begin{pmatrix} q-1+2^s \\ 2^s \end{pmatrix}} \neq 0$ (usando novamente o Corolário A.0.19). Então a única possibilidade é $2^s = 4j$.

Denotando $\acute{w}_3(-) = Sq^1 w[1]_2(-) + cw[1]_2(-)$, $\acute{w}_5 = Sq^2(\acute{w}_3)$, $\acute{w}_9 = Sq^4(\acute{w}_5)$, ... , $\acute{w}_{2^r+1} = Sq^{2^{r-1}}(\acute{w}_{2^{r-1}+1})$, podemos ver que:

$\acute{w}_{2^r+1}(\eta) = 0$, e

$\acute{w}_{2^r+1}(\mu) = \beta^{2^r} c$ (lembrando que $\overline{\begin{pmatrix} q \\ 2 \end{pmatrix}} = 0$).

Tomemos, agora, os números característicos correspondentes às classes $\acute{w}_{2^s+1} c^{m-1-(2^s+1)} = \acute{w}_{4j+1} c^{m-1-(4j+1)}$:

$\acute{w}_{4j+1}(\eta) c^{m-1-(4j+1)}[RP(\eta)]_2 = 0$ e

$\acute{w}_{4j+1}(\mu) c^{m-1-(4j+1)}[RP(\mu)]_2 = \beta^{4j} c c^{m-1-(4j+1)}[RP(\mu)]_2 =$

$= \beta^{4j} c^{m-1-4j}[RP(\mu)]_2 = \beta^{4j} \widetilde{w}_2(\mu)[RP(4j+2)]_2 =$

$= \beta^{4j} \overline{\begin{pmatrix} q-1+2 \\ 2 \end{pmatrix}} \beta^2 [RP(4j+2)]_2 = \overline{\begin{pmatrix} q-1+2 \\ 2 \end{pmatrix}} \beta^{4j+2}[RP(4j+2)]_2 = \overline{\begin{pmatrix} q-1+2 \\ 2 \end{pmatrix}}$

Mas $\overline{\begin{pmatrix} q-1+2 \\ 2 \end{pmatrix}} = 1$, pois $q-1 \equiv 0(mod 4)$, ou seja:

VI) $q-1$ e 2 têm expansões diádicas disjuntas.

Então $\acute{w}_{4j+1}(\eta)\overline{c^{m-1-(4j+1)}}[RP(\eta)]_2 \neq \acute{w}_{4j+1}(\mu)c^{m-1-(4j+1)}[RP(\mu)]_2$, que é uma contradição ao suposto de que $\overline{\begin{pmatrix} p \\ 2 \end{pmatrix}} = 0$.

Então $\overline{\begin{pmatrix} p \\ 2 \end{pmatrix}} = 1$.

Como $p \leq 3$ é ímpar, teremos que:

VII) $p = 3$ e $\widetilde{W}(\eta) = \frac{1}{(1+\alpha)^3} = 1+\alpha$, ou seja, $\widetilde{w}_0(\eta) = 1$, $\widetilde{w}_1(\eta) = \alpha$ e $\widetilde{w}_2(\eta) = 0$.

Calculemos, agora, o número $w[1]_2^k(RP(\eta))c^{m-1-2k}[RP(\eta)]_2$, $0 \leq 2k \leq m-1$.

Pela tabela acima, $w[1]_2(RP(\eta)) = \alpha c + \alpha^2$ (já usando que $\overline{\begin{pmatrix} p \\ 2 \end{pmatrix}} = 1$). Então teremos (utilizando a fórmula A.0.13):

$w[1]_2^k(RP(\eta))c^{m-1-2k}[RP(\eta)]_2 = (\alpha c + \alpha^2)^k c^{m-1-2k}[RP(\eta)]_2 =$

$= \alpha^k(c+\alpha)^k c^{m-1-2k}[RP(\eta)]_2 =$

$= \alpha^k \left[ \overline{\begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix}} c^k + \overline{\begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}} c^{k-1}\alpha + \cdots + \overline{\begin{pmatrix} k \\ k-1 \end{pmatrix}} c\alpha^{k-1} + \overline{\begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix}} \alpha^k \right] c^{m-1-2k}[RP(\eta)]_2 =$

$= \alpha^k \left[ \overline{\begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix}} c^{m-1-k} + \overline{\begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}} c^{m-2-k}\alpha + \cdots + \overline{\begin{pmatrix} k \\ k-1 \end{pmatrix}} c^{m-2k}\alpha^{k-1} + \overline{\begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix}} \alpha^k c^{m-1-2k} \right] [RP(\eta)]_2 =$

$= \alpha^k \left[ \overline{\begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix}} \frac{1}{(1+\alpha)^3} + \overline{\begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}} \alpha \frac{1}{(1+\alpha)^3} + \cdots + \overline{\begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix}} \alpha^k \frac{1}{(1+\alpha)^3} \right] [RP(2)]_2 =$

$= \alpha^k \left[ \overline{\begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix}} + \overline{\begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}} \alpha + \cdots + \overline{\begin{pmatrix} k \\ k-1 \end{pmatrix}} \alpha^{k-1} + \overline{\begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix}} \alpha^k \right] \frac{1}{(1+\alpha)^3} [RP(2)]_2 =$

$= \alpha^k(1+\alpha)^k \frac{1}{(1+\alpha)^3}[RP(2)]_2 = \alpha^k(1+\alpha)^k(1+\alpha)[RP(2)]_2 = \alpha^k(1+\alpha)^{k+1}[RP(2)]_2$.[3]

Então o valor de $w[1]_2^k(RP(\eta))c^{m-1-2k}[RP(\eta)]_2$ será o coeficiente de $\alpha^2$ em $\alpha^k(1+\alpha)^{k+1}$.

Portanto teremos (lembrando que $\alpha^3 = 0$ pois $\alpha \in H^1(RP(2))$):

[3]Observe que mostramos que
$\alpha^k(c+\alpha)^k c^{m-1-2k}[RP(\eta)]_2 = \alpha^k(1+\alpha)^k \frac{1}{(1+\alpha)^3}[RP(2)]_2 = \alpha^k(1+\alpha)^k c^{m-1-2k}[RP(\eta)]_2$,
ou seja, podemos considerar $c+\alpha$ como $1+\alpha$ ao aplicarmos a fórmula A.0.13. Usaremos este resultado mais adiante.

| Tabela 3 | $\alpha^k(1+\alpha)^{k+1}$ | coeficiente de $\alpha^2$ |
|---|---|---|
| $k=0$ | $1+\alpha$ | 0 |
| $k=1$ | $\alpha$ | 0 |
| $k=2$ | $\alpha^2$ | 1 |
| $2<k<m-1$ | 0 | 0 |

Segundo a tabela 2, $w[1]_2(RP(\mu)) = \beta c + \overline{\binom{q}{2}}\beta^2$.

Suponha $\overline{\binom{q}{2}} = 0$:

$w[1]_2^2(RP(\mu))c^{m-1-4}[RP(\mu)]_2 = \beta^2 c^2 c^{m-1-4}[RP(\mu)]_2 =$

$= \beta^2 \overline{c^{m-1-2}[RP(\mu)]_2} = \beta^2 \widetilde{w}_{4j}(\mu)[RP(4j+2)]_2 =$

$= \beta^2 \overline{\binom{q-1+4j}{4j}} \beta^{4j}[RP(4j+2)]_2 =$

$= \overline{\binom{q-1+4j}{4j}} \beta^{4j+2}[RP(4j+2)]_2 = \overline{\binom{q-1+4j}{4j}}.$

Como os números característicos devem ser iguais, $\overline{\binom{q-1+4j}{4j}} = 1$, ou seja, $q-1$ e $4j$ têm expansões diádicas disjuntas. Como $q-1$ e 2 também têm expansões diádicas disjuntas (VI) então $q-1$ e $4j+2$ têm expansões diádicas disjuntas e, portanto:

VIII) $\overline{\binom{q-1+4j+2}{4j+2}} = 1.$

Tomemos, agora, os números correspondentes a $c^{m-1}$.

Pela tabela 3 (caso $k=0$) teremos:

$c^{m-1}[RP(\eta)]_2 = 0.$

Por outro lado:

$c^{m-1}[RP(\mu)]_2 = \widetilde{w}_{4j+2}(\mu)[RP(4j+2)]_2 =$

$= \overline{\binom{q-1+4j+2}{4j+2}} \beta^{4j+2}[RP(4j+2)]_2 = \overline{\binom{q-1+4j+2}{4j+2}}.$

Como os números característicos devem ser iguais, $\overline{\binom{q-1+4j+2}{4j+2}} = 0$, contrariando VIII. Portanto:

IX) $\binom{q}{2} = 1$ e, como $q$ é ímpar, concluímos que $q \equiv 3 mod(4)$.

Pela tabela 3:

$w[1]_2^2(RP(\eta))c^{m-1-4}[RP(\eta)]_2 = 1$

Segundo a tabela 2, $w[1]_2(RP(\mu)) = \beta c + \overline{\binom{q}{2}}\beta^2$. Já sabemos que $\overline{\binom{q}{2}} = 1$:

$w[1]_2^2(RP(\mu))c^{m-1-4}[RP(\mu)]_2 = (\beta c + \beta^2)^2 c^{m-1-4}[RP(\mu)]_2 =$

$= (\beta^2 c^2 + \beta^4)c^{m-1-4}[RP(\mu)]_2 = \beta^2 c^{m-1-2}[RP(\mu)]_2 + \beta^4 c^{m-1-4}[RP(\mu)]_2 =$

$= \beta^2 \widetilde{w}_{4j}(\mu)[RP(4j+2)]_2 + \beta^4 \widetilde{w}_{4j-2}(\mu)[RP(4j+2)]_2$

$= \beta^2 \overline{\binom{q-1+4j}{4j}}\beta^{4j}[RP(4j+2)]_2 + \beta^4 \overline{\binom{q-1+4j-2}{4j-2}}\beta^{4j-2}[RP(4j+2)]_2 =$

$= \overline{\binom{q-1+4j}{4j}}\beta^{4j+2}[RP(4j+2)]_2 + \overline{\binom{q-1+4j-2}{4j-2}}\beta^{4j+2}[RP(4j+2)]_2 =$

$= \overline{\binom{q-1+4j}{4j}} + \overline{\binom{q-1+4j-2}{4j-2}}.$

Como os números característicos devem ser iguais,

$\overline{\binom{q-1+4j}{4j}} + \overline{\binom{q-1+4j-2}{4j-2}} = 1.$

Mas, segundo IX, $q \equiv 3(mod\ 4)$, ou seja, $q-1 \equiv 4j-2 \equiv 2(mod\ 4)$ e, portanto, $q-1$ e $4j+2$ não têm expansões diádicas disjuntas (ambas possuem $2^1$). Assim $\overline{\binom{q-1+4j-2}{4j-2}} = 0$.

Então $\overline{\binom{q-1+4j}{4j}} = 1$. Ou seja, $q-1$ e $4j$ têm expansões diádicas disjuntas.

Seja $s$ tal que $2^s < 4j+2 < 2^{s+1}$. Então $4j+2 = 2^s + \cdots + 2$ e $4j = 2^s + \cdots$, isto é, $2^s$ é o maior termo das expansões diádicas de $4j+2$ e de $4j$. O fato de $q-1$ e $4j$ terem expansões diádicas disjuntas implica que a expansão diádica de $q-1$ não pode ter o termo $2^s$. Como podemos admitir que $q < 2^{s+1}$ (conforme citado no início desta seção), teremos que $q-1 < 2^s \leq 4j$.

Em particular $q < 4j+2$ e $w_q(\xi) \neq 0$. Isto nos dá que $m \geq 4j+2+q$ e, assim, $m-1 \geq 4j+1+q > 2q > 2(q-1)$.

Faz sentido, portanto, calcular o número $w[1]_2^{q-1}(RP(\mu))c^{m-1-2(q-1)}[RP(\mu)]_2$ (que é $w[1]_2^k(RP(\mu))c^{m-1-2(k)}[RP(\mu)]_2$ para $k = q-1$):

$w[1]_2^{q-1}(RP(\mu))c^{m-1-2(q-1)}[RP(\mu)]_2 = (\beta c + \beta^2)^{q-1}c^{m-1-2(q-1)}[RP(\mu)]_2 =$

$= \beta^{q-1}(c+\beta)^{q-1}c^{m-1-2(q-1)}[RP(\mu)]_2 = \beta^{q-1}(1+\beta)^{q-1}\frac{1}{(1+\beta)^q}[RP(4j+2)]_2 =$[4]

[4] O cálculo aqui é análogo ao efetuado para se obter $w[1]_2^k(RP(\eta))c^{m-1-2k}[RP(\eta)]$ e, por isso, omitimos algumas passagens ao substituir $(c+\beta)$ por $(1+c)$, conforme mencionamos anteriormente.

$= \beta^{q-1}\frac{1}{1+\beta}[RP(4j+2)]_2$.

Então o valor de $w[1]_2^{q-1}(RP(\mu))c^{m-1-2(q-1)}[RP(\mu)]_2$ será o coeficiente de $\beta^{4j+2}$ em $\beta^{q-1}\frac{1}{1+\beta} = \beta^{q-1}(1+\beta+\beta^2+\cdots)$. Portanto:

$w[1]_2^{q-1}(RP(\mu))c^{m-1-2(q-1)}[RP(\mu)]_2 = 1$.

Como os números característicos devem ser iguais,

$w[1]_2^{q-1}(RP(\eta))c^{m-1-2(q-1)}[RP(\eta)]_2 = 1$.

Portanto $q-1$ é tal que $w[1]_2^{k}(RP(\eta))c^{m-1-2(k)}[RP(\eta)]_2 = 1$ para $k = q-1$. Segundo a tabela 3 a única possibilidade é $q-1=2$. Assim $q=3$ , como queríamos demonstrar. □

Observação 5.2.4. Note que as hipóteses do teorema ($M$ tem dimensão constante igual a $m$, $F_T = RP(2) \cup RP(4j+2)$, $j>0$) implicam em que $RP(2)$ e $RP(4j+2)$ do conjunto de pontos fixos estão contidos na mesma componente conexa de $M$. Pois, caso contrário, suponha que $RP(2)$ esteja contido em $M_1$ e $RP(4j+2)$ em $M_2$, sendo $M_1$ e $M_2$ componentes conexas de $M$. Então $(M_1, T)$ fixa $RP(2)$ e $(M_2, T)$ fixa $RP(4j+2)$. Pelo Teorema A.0.9, concluiríamos que $dim(M_1) = 4$ e $dim(M_2) = 2(4j+2)$. Mas isto não é possível se $j>0$. Sem estas hipóteses, ou seja, se permitirmos que a variedade $M$ tenha dimensão variável, é claro que não podemos garantir que $W(\mu) = (1+\beta)^3$. Basta notar que a involução $((RP(2) \cup RP(4j+2)) \times (RP(2) \cup RP(4j+2)), twist)$ fixa $\eta \to RP(2) \cup \mu \to RP(4j+2)$, sendo que $W(\eta) = (1+\alpha)^3$ e $W(\mu) = (1+\beta)^{4j+3}$. Na verdade, poderíamos reformular o teorema sem a hipótese de que $M$ tenha dimensão constante: Sejam $(M, T)$ uma involução sobre uma variedade fechada fixando $F_T = RP(2) \cup RP(4j+2)$, $j>0$, e $\eta \to RP(2) \cup \mu \to RP(4j+2)$ o fibrado normal de $F_T$ em $M$. Então $W(\eta) = (1+\alpha)^3$ e $W(\mu) = (1+\beta)^3$ (se $RP(2)$ e $RP(4j+2)$ estão na mesma componente de $M$) ou $W(\mu) = (1+\beta)^{4j+3}$ (se $RP(2)$ e $RP(4j+2)$ estão em componentes diferentes de $M$).

Corolário 5.2.5. *Se $(M^m, T)$ fixa $RP(2) \cup RP(4j+2)$, $j>0$, então $m \geq 4j+5$.*

Demonstração. Pelo teorema anterior, se $\mu \to RP(4j+2)$ é o fibrado normal de $RP(4j+2)$ em $M^m$, então $W(\mu) = (1+\beta)^3 = 1+\beta+\beta^2+\beta^3$. Em particular, $w_3(\mu) = \beta^3 \neq 0$ e, portanto, $dim(\mu) \geq 3$, o que acarreta $m \geq (4j+2)+3 = 4j+5$. □

## 5.3. Classificação de Involuções Fixando $RP(2) \cup RP(4j+2)$

Existe um modelo explícito de involução $(M^m, T)$ fixando $RP(2) \cup RP(4j+2)$ com $m = 4j+5$. De fato, considere $(RP(4j+5), T)$ onde $T[x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{4j+5}] = [-x_0, -x_1, -x_2, x_3, \ldots, x_{4j+5}]$. Denotando genericamente por $\xi \to$

$RP(r)$ o fibrado linha canônico e por $p^\xi \to RP(r)$ a soma de Whitney de $p$ cópias de $\xi$, temos que o "fixed data" de $(RP(4j+5), T)$ é $(4j+3)\xi \to RP(2) \cup 3\xi \to RP(4j+2)$. Note que $W((4j+3)\xi) = (1+\alpha)^{4j+3} = (1+\alpha^4)^j(1+\alpha)^3 = (1+\alpha)^3$ e $W(3\xi) = (1+\beta)^3$ (o que era previsto pelo Teorema 5.2.3).

Como antes, seja $\mathcal{A}$ a coleção das classes de bordismo de involuções fixando $RP(2) \cup RP(4j+2)$, $j > 0$. Pelo Teorema 4.3.2 $\mathcal{A}$ se particiona em classes de estabilidade. Em particular, $(RP(4j+5), T)$ determina uma tal classe. Pelo Corolário 5.2.5, $[RP(4j+5), T]$ é, adicionalmente, o elemento minimal nesta classe de estabilidade. Nosso próximo passo será mostrar que, de fato, $\mathcal{A}$ consiste somente desta classe, o que nos fornecerá a classificação pretendida. Seja $h_j = sup\{dim(M) \mid (M,T) \in \mathcal{A}\}$ (conforme observado anteriormente, tal supremo existe, uma vez que $RP(2) \cup RP(4j+2)$ não borda). Assim, a classe de estabilidade de $[RP(4j+5), T]$ terá a forma $\{[RP(4j+5), T], \Gamma[RP(4j+5), T], \Gamma^2[RP(4j+5), T], \ldots, \Gamma^{k_j}[RP(4j+5), T]\}$ para algum $k_j \leq h_j - 4j - 5$. Observe que $k_j \geq 1$, uma vez que $RP(4j+5)$ borda.

Teorema 5.3.1. *Se $(M^m, T)$ fixa $RP(2) \cup RP(4j+2)$, $j > 0$, então $(M^m, T)$ é equivariantemente bordante a $\Gamma^s[RP(4j+5), T]$ para algum $0 \leq s \leq k_j$.*

Demonstração. Coloquemos $l = 4j + 5 + k_j$. Certamente $m \geq 4j+5$ pelo Corolário 5.2.5; afirmamos que $m \leq l$ (o que implicará $l = h_j$). Suponha ao contrário, que $h_j \geq m > l$. Pela definição de $\Gamma$ (demonstração do Teorema 4.3.2), $\Gamma^{k_j}[RP(4j+5), T]$ é equivariantemente bordante a uma involução $(W^l, S)$ cujo "fixed data" é $((4j+3)\xi \oplus R^{k_j} \to RP(2)) \cup (3\xi \oplus R^{k_j} \to RP(4j+2))$, com $k_j \geq 1$ e tal que $W^l$ não borda. Seja $\eta \to RP(2) \cup \mu \to RP(4j+2)$ o "fixed data" de $(M^m, T)$. Pelo Teorema 5.2.3, $W(\eta) = (1+\alpha)^3$ e $W(\mu) = (1+\beta)^3$. Seja $t = m - l > 0$, e considere o fibrado $(4j+3)\xi \oplus R^{k_j+t} \to RP(2) \cup 3\xi \oplus R^{k_j+t} \to RP(4j+2)$. Observando que nas duas componentes deste fibrado a soma das dimensões da base e da fibra é $4j+5+k_j+t = 4j+5+k_j+m-l = m$, e que a classe característica é $(1+\alpha)^3$ (sobre $RP(2)$) e $(1+\beta)^3$ (sobre $RP(4j+2)$), concluímos que tal fibrado é bordante a $\eta \to RP(2) \cup \mu \to RP(4j+2)$ por terem a mesma dimensão e mesmos números de Whitney; desta forma, usando a seqüência de Conner-Floyd, concluímos que tal fibrado é o "fixed data" de alguma involução. Sendo $t > 0$ e usando o teorema de estabilidade para involuções, concluímos que $(4j+3)\xi \oplus R^{k_j+1} \to RP(2) \cup 3\xi \oplus R^{k_j+1} \to RP(4j+2)$ é o "fixed data" de uma involução $(P^{l+1}, U)$. Agora, o "fixed data" de $\Gamma(W^l, S)$ é $(4j+3)\xi \oplus R^{k_j+1} \to RP(2) \cup 3\xi \oplus R^{k_j+1} \to RP(4j+2) \cup R \to W^l$ e, pelo Corolário A.0.8, temos que a involução $(P^{l+1}, U) \cup \Gamma(W^l, S)$ é equivariantemente bordante a uma involução $(N^{l+1}, V)$ com "fixed data" $R \to W^l$.

Considerando a seqüência de Conner-Floyd

$$0 \to \mathfrak{I}_{l+1}(Z_2) \xrightarrow[j_*]{} \bigoplus_{i=0}^{l+1} \mathfrak{N}_i(BO(l+1-i)) \xrightarrow[\partial]{} \mathfrak{N}_l(Z_2) \to 0$$

temos $\partial j_*[N^{l+1}, V] = \partial[R \to W^l] = [S(R), A]_L = 0$ e o isomorfismo $\mathfrak{N}_l(Z_2) \cong \mathfrak{N}_l(BO(1))$ identifica $[S(R), A]_L$ a $[R \to W^l]$. Então $R \to W^l$ borda e, em particular, $W^l$ borda, absurdo.

Segue que $4j+5 \leq m \leq l$. Seja $s = m - 4j + 5 \geq 0$. O "fixed data" de $\Gamma^s[RP(4j+5), T]$ é bordante a $(4j+3)\xi \oplus R^s \to RP(2) \cup 3\xi \oplus R^s \to RP(4j+2)$, que tem a mesma dimensão e mesmos números de Whitney de $\eta \to RP(2) \cup \mu \to RP(4j+2)$. Segue o resultado. □

A classificação, acima obtida, tem a mesma natureza do resultado obtido por D. Royster em **[Ro]**, correspondente a $F_T = RP(0) \cup RP(2n) = \{ponto\} \cup RP(2n)$, citado na introdução deste capítulo (caso b)). De fato, considere a involução $(RP(2n+1), T)$, onde $T[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}] = [-x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}]$, que tem "fixed data" $R \to \{ponto\} \cup \lambda \to RP(2n)$. Em **[Ro]**, D. Royster mostrou que toda involução fixando $\{ponto\} \cup RP(2n)$ é equivariantemente bordante a $\Gamma^s(RP(2n+1), \ddot{T})$, para algum $0 \leq s \leq k_n$, onde $2n+1+k_n = h_j = sup\{m \mid \exists\ (M^m, T)$ fixando $\{ponto\} \cup RP(2n)\}$. Adicionalmente, D. Royster mencionou a questão em aberto, subjacente a este resultado, concernente ao valor exato de $k_n$ para cada $n$. Esta questão permaneceu em aberto até recentemente, tendo sido resolvida por P. Pergher e R. E. Stong em **[P-S]** (o resultado provado foi: escreva $2n = 2^p q$, com $q$ ímpar; assim, se $p = 1$ então $k_m = 2$, se $p > 1$ então $k_m = 2^p - 1$).

Da mesma forma, no Teorema 5.3.1, concernente à classificação para $F_T = RP(2) \cup RP(4j+2)$, $j > 0$, o valor de $h_j = sup\{m \mid \exists\ (M^m, T)$ fixando $RP(2) \cup RP(4j+2)\}$ (e, portanto, o valor de $k_j = h_j - 4j - 5$) está indeterminado. Na mesma direção do resultado de Pergher e Stong, acima mencionado, nossa próxima meta é preencher esta lacuna, determinando o valor preciso de $k_j$ para cada $j > 0$.

Por conveniência numérica, coloquemos $4j + 5 = 2m + 3$, ou seja, $m$ é ímpar. Temos a involução $(RP(2m+3), T)$ com "fixed data" $(2m+1)\xi \to RP(2) \cup 3\xi \to RP(2m)$. Da mesma forma, reescrevemos $k_m$ no lugar de $k_j$. Denotemos por $\Lambda^i RP(2m+3)$ a variedade subjacente à involução $\Gamma^i(RP(2m+3), T)$, $0 \leq i \leq k_m$. Conforme vimos no Capítulo 4 (demonstração do Teorema 4.3.2) o valor de $k_m$ é caracterizado pelo fato de que $\Lambda^{k_m} RP(2m+3)$ não borda e $\Lambda^{k_m - 1} RP(2m+3)$ borda (ou seja, é o menor $i$ tal que $\Lambda^i RP(2m+3)$ não borda). Como $RP(2m+3) = \Lambda^0 RP(2m+3)$ borda, certamente $k_m \geq 1$. Para obter tal número, necessitaremos dos seguintes

LEMA 5.3.2. *Seja $\Theta^j RP(2m+3)$ o espaço total da fibração*

$RP(1) \leftarrow RP(\xi_1 \oplus R) \leftarrow \cdots \leftarrow RP(\xi_{j-1} \oplus R) \leftarrow RP(3\xi_j \oplus R^{2m+1})$,

*onde $\xi_1$ é o fibrado linha canônico sobre $RP(1)$ e $\xi_j$, $j \neq 1$, é o fibrado linha canônico sobre $RP(\xi_{j-1} \oplus R)$ (ou seja, associado à involução antipodal nas fibras $(S(\xi_{j-1} \oplus R), A)$). Então $\Lambda^j RP(2m+3)$ é homeomorfo a $\Theta^j RP(2m+3)$.*

OBSERVAÇÃO 5.3.3. Segundo o Teorema A.0.23, temos que

$\{X(n)\}_0^\infty = \{[S^0, A]_L, [S^1, A]_L, [S(\xi_1 \oplus R), A]_L, \ldots, [S(\xi_{i-1} \oplus R^{i-1}), A]_L, \ldots\}$

é uma base homogênea para o $\mathfrak{N}_*$-módulo livre $\mathfrak{N}_*(Z_2)$. Então, observando a fibração acima, teremos $[RP(1)] = \varepsilon_*(X(1))$ e $[RP(\xi_j \oplus R)] = \varepsilon_*(X(j+1))$, onde $\varepsilon_* : \mathfrak{N}_*(Z_2) \to \mathfrak{N}_*$ é o homomorfismo de grau zero $\varepsilon_*[M,T]_L = \left[\frac{M}{T}\right]$.

DEMONSTRAÇÃO. A prova é baseada na comparação direta entre as construções dos dois espaços em questão.

Conforme a definição de $\Lambda^j$, temos

$$\Lambda RP(2m+3) = \frac{S^1 \times RP(2m+3)}{-1 \times T}$$

$$\Lambda^2 RP(2m+3) = \frac{S^1 \times \frac{S^1 \times RP(2m+3)}{-1 \times T}}{-1 \times (\overline{z} \times 1)} = \frac{\left(\frac{S^1 \times S^1 \times RP(2m+3)}{1 \times -1 \times T}\right)}{-1 \times \overline{z} \times 1}$$

$$\Lambda^3 RP(2m+3) = \frac{S^1 \times \frac{\left(\frac{S^1 \times S^1 \times RP(2m+3)}{1 \times -1 \times T}\right)}{-1 \times \overline{z} \times 1}}{-1 \times \overline{z} \times 1 \times 1} = \frac{\left(\frac{\left(\frac{S^1 \times S^1 \times S^1 \times RP(2m+3)}{1 \times 1 \times -1 \times T}\right)}{1 \times -1 \times \overline{z} \times 1}\right)}{-1 \times \overline{z} \times 1 \times 1}$$

Seja, para $i \leq j-1$, $V_i : (\prod_1^{j-1} S^1) \times RP(2m+3) \to (\prod_1^{j-1} S^1) \times RP(2m+3)$ tal que $p_i \circ V_i = -1$ e $p_{i+1} \circ V_i = \overline{z}$ (onde $p_i$ é a projeção na $i$-ésima coordenada). As expressões acima ficam:

$$\Lambda RP(2m+3) = \frac{S^1 \times RP(2m+3)}{-1 \times T}$$

$$\Lambda^2 RP(2m+3) = \frac{\left(\frac{S^1 \times S^1 \times RP(2m+3)}{1 \times -1 \times T}\right)}{V_1}$$

$$\Lambda^3 RP(2m+3) = \frac{\left(\frac{\left(\frac{S^1 \times S^1 \times S^1 \times RP(2m+3)}{1 \times 1 \times -1 \times T}\right)}{V_2}\right)}{V_1}$$

Não é difícil ver que iterando obtemos:

$$\Lambda^j RP(2m+3) = \frac{\left(\begin{array}{c} \cdots \left(\frac{\left(\frac{(\prod_1^{j-1} S^1) \times RP(2m+3)}{1 \times \cdots \times 1 \times -1 \times T}\right)}{V_{j-1}}\right) \cdots \\ \hline \vdots \\ \hline V_2 \end{array}\right)}{V_1}.$$

Por outro lado, conforme a definição do fibrado projetivo, teremos que:

$$\Theta^1 RP(2m+3) = RP(\xi_1 \oplus R) = \frac{S^1 \times RP(2m+3)}{-1 \times T}$$

$$\Theta^2 RP(2m+3) = RP(\xi_2 \oplus R) = \frac{\frac{S^1 \times S^1}{-1 \times \overline{z}} \times RP(2m+3)}{1 \times -1 \times T} = \frac{\left(\frac{S^1 \times S^1 \times RP(2m+3)}{-1 \times \overline{z} \times 1}\right)}{1 \times -1 \times T}$$

$$\Theta^3 RP(2m+3) = RP(\xi_3 \oplus R) = \frac{\frac{\frac{S^1 \times S^1}{-1 \times \overline{z}} \times S^1}{1 \times -1 \times \overline{z}} \times RP(2m+3)}{1 \times 1 \times -1 \times T} = \frac{\left(\frac{\left(\frac{S^1 \times S^1 \times S^1 \times RP(2m+3)}{-1 \times \overline{z} \times 1 \times 1}\right)}{1 \times -1 \times \overline{z} \times 1}\right)}{1 \times 1 \times -1 \times T}$$

Usando as aplicações $V_i$, definidas acima, obtemos:

$$\Theta^1 RP(2m+3) = \frac{S^1 \times RP(2m+3)}{-1 \times T}$$

$$\Theta^2 RP(2m+3) = \frac{\left(\frac{S^1 \times S^1 \times RP(2m+3)}{V_1}\right)}{1 \times -1 \times T}$$

$$\Theta^3 RP(2m+3) = \frac{\left(\frac{\left(\frac{S^1 \times S^1 \times S^1 \times RP(2m+3)}{V_1}\right)}{V_2}\right)}{1 \times 1 \times -1 \times T}.$$

Também não é difícil ver que:

$$\Theta^j RP(2m+3) = \frac{\left(\begin{array}{c} \cdots \left(\frac{\left(\frac{(\prod_1^{j-1} S^1) \times RP(2m+3)}{V_1}\right)}{V_2}\right) \cdots \\ \hline \vdots \\ \hline V_{j-1} \end{array}\right)}{1 \times \cdots \times 1 \times -1 \times T}.$$

Como todas as involuções envolvidas comutam, obtemos que $\Lambda^j RP(2m+3)$ é homeomorfo a $\Theta^j RP(2m+3)$. □

LEMA 5.3.4. *Seja $\Xi^j RP(2m+3)$ o espaço total da fibração*

$RP(1) \leftarrow RP(\xi_1 \oplus R^{j-1}) \leftarrow RP(3\xi_{b_j} \oplus R^{2m+1})$,

*onde $\xi_{b_j}$ é o fibrado linha canônico sobre $RP(\xi_1 \oplus R^{j-1})$. Então $\Theta^j RP(2m+3)$ é bordante a $\Xi^j RP(2m+3)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Considere a coleção

$B = \{Y(j)\}_0^\infty = \{[S^0, A]_L, [S^1, A]_L, [S(\xi_1 \oplus R), A]_L, \ldots, [S(\xi_1 \oplus R^{j-1}), A]_L, \ldots\}$.

Seja $c$ a classe característica da involução $[S(\xi_1 \oplus R^{i-1}), A]_2$ e $\alpha$ o gerador de $H^1(RP(1))$. Então $c^n[RP(\xi_1 \oplus R^{j-1})]_2 = \overline{w}_1(\xi_1)[RP(1)]_2 = \alpha[RP(1)]_2 = 1$, segundo a fórmula de A.0.13. Portanto, pelo Teorema 2.6.16, $B$ é uma base homogênea do $\mathfrak{N}_*$-módulo livre $\mathfrak{N}_*(Z_2)$.

Além disso, para os elementos de $B$, $\varepsilon_*[S(\xi_1 \oplus R^i), A]_L = RP(\xi_1 \oplus R^i)$, que borda pois é um espaço projetivo sobre $RP(1)$[5]. Além disso, se $\Delta$ é o homomorfismo de Smith (A.0.20), $\Delta[S(\xi_1 \oplus R^i), A]_L = [S(\xi_1 \oplus R^{i-1}), A]_L$ e $\Delta[S(\xi_a \oplus R), A]_L = [S(\xi_a), A]_L = [S^1, A]_L$.

[5]Se $\eta^k \to S^1$ é um fibrado $k$-dimensional, então $RP(\eta^k)$ borda. Este resultado aparece como exercício em **[C-F**, pg 77], podendo ser resolvido calculando-se os números característicos através da fórmula de 2.7.13.

Então $B$ é uma base homogênea que satisfaz as condições do Teorema A.0.23 e, por unicidade, $B = \{X(n)\}_0^\infty$. Assim, $[S(\xi_1 \oplus R^{j-1}), A]_L = X(j)$ e, conforme ressaltamos na observação 5.3.3, teremos que $[S(\xi_1 \oplus R^{j-1}), A]_L = [S(\xi_{j-1} \oplus R), A]_L$. Portanto, $[\xi_{b_j} \to RP(\xi_1 \oplus R^{j-1})] = [\xi_j \to RP(\xi_{j-1} \oplus R)]$. E, finalmente, concluímos que $[RP(3\xi_{b_j} \oplus R^{2m+1})] = [RP(3\xi_j \oplus R^{2m+1})]$, ou seja, $[\Theta^j RP(2m+3)] = [\Xi^j RP(2m+3)]$. □

Estamos, agora, em condições de determinar os números $k_m$ previamente mencionados; isto será feito através de computações com números característicos.

TEOREMA 5.3.5. *Sejam $r$ e $p$ tais que $2m-2 = 2^r(2p+1)$. Então $\Lambda^j RP(2m+3)$ borda para $j < k$ e não borda para $j = k$, onde $k = \begin{cases} 2 \text{ se } r = 1 \\ 2^r - 1 \text{ se } r > 1 \end{cases}$. Em outras palavras, $k_m = 2$ se $r = 1$ e $k_m = 2^r - 1$ se $r > 1$.*

DEMONSTRAÇÃO. Segue dos lemas acima que $[\Lambda^j RP(2m+3)] = [\Xi^j RP(2m+3)]$ e, assim, podemos substituir $\Lambda^j RP(2m+3)$ por $\Xi^j RP(2m+3)$ no teorema.

Para facilitar a notação usaremos $E = \Xi^j RP(2m+3)$, lembrando que $\Xi^j RP(2m+3)$ é o espaço total da fibração

$\frac{S(1)}{A} \leftarrow \frac{S(\xi_1 \oplus R^{j-1})}{A} \leftarrow RP(3\xi_{b_j} \oplus R^{2m+1})$.

Sejam $\alpha$ o gerador de $H^1(RP(1))$, $d$ a classe característica da involução $(S(\xi_a \oplus R^{j-1}), A)$ e $c$ a classe característica da involução $(S(3\xi_{b_j} \oplus R^{2m+1}), A)$. Usando a fórmula de 2.7.13 e sabendo que $\alpha^2 = 0$, deduzimos que:

$W(E) = (1+\alpha)^2(1+d+\alpha)(1+d)^{j-1}(1+c+d)^3(1+c)^{2m+1} =$

$= (1+d+\alpha)(1+d)^{j-1}(1+c+d)^3(1+c)^{2m+1}$.

Além disso, conforme o Teorema 2.7.13, sabemos que $d^{j-1}(d+\alpha) = 0 \Rightarrow d^j = d^{j-1}\alpha$ e $c^{2m+1}(c+d)^3 = 0$.

Para a classe característica primitiva[6] teremos (fazendo $t = 2+2m+j+1$):

$S_t = (d+\alpha)^t + (j-1)d^t + (2n+1)(c+d)^t + (2+1)c^t =$

$^7= d^t + td^{t-1}\alpha + jd^t + d^t + (c+d)^t + c^t = (c+d)^t + c^t$.

Então, como $W(3\xi_{b_j} \oplus R^{2m+1}) = (1+d)^3$, segundo a fórmula A.0.13 teremos:

$S_t[E]_2 =$ coeficiente de $d^j$ em $\frac{(1+d)^t+1}{(1+d)^3} =$ [8]

$=$ coef. de $d^j$ em $(1+d)^{t-3} +$ coef. de $d^j$ em $\frac{1}{(1+d)^3} =$

$=$ coef. de $d^j$ em $(1+d)^{2m+j} +$ coef. de $d^j$ em $\frac{1}{(1+d)^3} =$

[6] Se $W = (1+v_1)(1+v_2)\cdots(1+v_k)$ é a forma fatorada da classe de Stiefel-Whitney então definimos a classe primitiva como $S_k = v_1^k + v_2^k + \cdots + v_k^k$.

[7] Pois $d^{t-1} = 0$ e $d^t = 0$ já que $t - 1 > j$.

[8] Aqui, fizemos a simplificação efetuada no Capítulo 4 de substituir $c$ por 1, ao aplicar a fórmula A.0.13.

$$= \overline{\begin{pmatrix} 2m+j \\ j \end{pmatrix}} + \overline{\begin{pmatrix} 3-1+j \\ j \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} 2m+j \\ j \end{pmatrix}} + \overline{\begin{pmatrix} 2+j \\ j \end{pmatrix}}.$$

Como $2m-2 = 2^r(2p+1)$ segue que $2m = 2^{r+1}p + 2^r + 2$. Para $j = 2^r$ teríamos $S_t[E]_2 = 1$.[9] Concluímos que $E$ é indecomponível[10] e, portanto, não borda. Assim $k \leq r$.

Em particular, se $r = 1$ teremos $k = 2$ (ou seja $k_m = 2$).

Suponha, então, $r > 1$ e $j \leq r$.

Temos

$W(E) = (1+d+\alpha)(1+d)^{j-1}(1+c+d)^3(1+c)^{2m+1} =$

$= (1+d+\alpha)(1+d)^{j-1}\{(1+c+d)(1+c)\}^3(1+c)^{2m+1-3} =$

$= (1+d+\alpha)(1+d)^{j-1}\{(1+d+c(c+d)\}^3(1+c)^{2^r(2p+1)}.$

Segue que as classes características de $E$ são geradas por $\alpha$ ,$d$, $c(c+d)$ e $c^{2^r}$. Ou seja, toda classe é uma soma de termos da forma $\alpha^e d^f \{c(c+d)\}^g c^{2^r h}$, onde $e = 0$ ou $e = 1$, e $e + f + 2g + 2^r h = 2m + 2 + j + 1$.

Se $f > j$ teremos que $d^f = 0$ e, portanto, $\alpha^e d^f \{c(c+d)\}^g c^{2^r h}[E]_2 = 0$.

Como $d^j = d^{j-1}\alpha$, os números de Whitney obtidos através de produtos de classes envolvendo $\alpha d^f$ serão iguais aos números de Whitney obtidos através dos mesmos produtos, substituindo-se $\alpha d^f$ por $d^{f+1}$ e, assim, podemos desconsiderar o caso $e = 1$. Então, se $f \leq j$ e $f + 2g + 2^r h = 2m + 2 + j + 1$ teremos:

$d^f\{c(c+d)\}^g c^{2^r h}[E]_2 =$ coef. de $d^j$ em $\frac{d^f(1+d)^g}{(1+d)^3}$

Seja $s > r$. Então $2^s > j$, $(1+d)^{2^s} = 1$ e $\frac{d^f(1+d)^g}{(1+d)^3} = \frac{d^f(1+d)^{2^s+g}}{(1+d)^3}$. Assim

$d^f\{c(c+d)\}^g c^{2^r h}[E]_2 =$ coef. de $d^j$ em $d^f(1+d)^{2^s+g-3} =$

$$= \overline{\begin{pmatrix} 2^s+g-3 \\ j-f \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} 2^s + (m+1-2^{r-1}h + \frac{j+1-f}{2}) - 3 \\ j-f \end{pmatrix}} =$$

$$= \overline{\begin{pmatrix} 2^s + m - 2 - 2^{r-1}h + \frac{j+1-f}{2} \\ j-f \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} 2^s + m - 1 - 2^{r-1}h + \frac{j+1-f}{2} - 1 \\ j-f \end{pmatrix}} =$$

$$= \overline{\begin{pmatrix} 2^s + (2^{r-1}(2p+1)) - 2^{r-1}h + \frac{j+1-f}{2} - 1 \\ j-f \end{pmatrix}} =$$

$$= \overline{\begin{pmatrix} x + \frac{j-f+1}{2} - 1 \\ j-f \end{pmatrix}}, \text{ onde } x = 2^s + 2^{r-1}(2p+1-h).$$

Observe que $2^{r-1}$ é o menor termo possível da expansão diádica de $x$.

[9] $\overline{\begin{pmatrix} 2m+2^r \\ 2^r \end{pmatrix}} = 0$ pois as expansões diádicas de $2^r$ e $2m$ têm $2^r$ em comum; $\begin{pmatrix} 2+j \\ j \end{pmatrix} = 1$ pois 2 e $2^r$ têm expansões diádicas disjuntas.

[10] Teorema: $M^n$ é indecomponível se, e somente se, $S_n[M^n]_2 \neq 0$, onde $S_n$ é a classe característica primitiva. **[Th]**

Seja $j - f < 2^r - 1 \Rightarrow j - f + 1 < 2^r$. Como $j - f + 1$ é par $(= 2g + 2^r h + 2m + 2)$ teremos que sua expansão diádica é $j - f + 1 = 2^t + resto$, onde $1 \leq t < r$ e $resto$ são potências de ordem maiores que $t$. Então teremos a seguintes expansões diádicas:

$j - f = 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{t-1} + resto$,

$\frac{j-f+1}{2} = 2^{t-1} + \frac{resto}{2}$, onde $\frac{resto}{2}$ são potências de ordem maiores que $t-1$,

$\frac{j-f+1}{2} - 1 = 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{t-2} + \frac{resto}{2}$.

Portanto, $j - f$ possui em sua expansão diádica o termo $2^{t-1}$, enquanto $x + \frac{j-f+1}{2} - 1$ não. Concluímos, pelo Corolário A.0.18, que $\overline{\begin{pmatrix} x + \frac{j-f+1}{2} - 1 \\ j - f \end{pmatrix}} = 0$, ou seja, se $j - f < 2^r - 1$ teremos $d^f\{c(c+d)\}^g c^{2^r h}[E]_2 = 0$.

Em particular, se $j < 2^r \Rightarrow j \leq 2^r - 2$ teremos que todas as classes características de $E$ são nulas e, conseqüentemente, $\Lambda^j RP(2m+3)$ borda. Então $k \geq 2^r - 2$.

Resumindo, vimos que $\Lambda^j RP(2m+3)$ não borda para $j > 2^r$ e borda para $j \geq 2^r - 2$. Resta verificar o que ocorre para $j = 2^r - 1$.

Se $j = 2^r - 1$ e $f > 0$ teremos $j - f < 2^r - 1$ e, conforme vimos acima, $d^f\{c(c+d)\}^g c^{2^r h}[E]_2 = 0$. Isto implica que, eventualmente, os únicos termos das classes que podem não se anular são os do tipo $\{c(c+d)\}^g c^{2^r h}$. Assim, observando $W(E)$ notamos que:

$w_2(E) = c(c+d) +$ termos que se anulam quando elevados à potencia maximal

Temos, então, que $w_2(E)^{\frac{2m+2+2^r-1+1}{2}}[E]_2 =$

$w_2(E)^{m+1+2^{r-1}}[E]_2 = \{c(c+d)\}^{m+1+2^{r-1}}[E]_2 =$

$= \overline{\text{coef. de } d^j \text{ em } \frac{(1+d)^{m+2^{r-1}+1}}{(1+d)^3}} = \text{coef. de } d^j \text{ em } (1+d)^{m+2^{r-1}-2} =$

$= \overline{\begin{pmatrix} m + 2^{r-1} - 2 \\ 2^r - 1 \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} 2^{r-1}(2p+1) + 1 + 2^{r-1} - 2 \\ 2^r - 1 \end{pmatrix}} =$

$= \overline{\begin{pmatrix} 2^{r-1}(2p+1) + 2^{r-1} - 1 \\ 2^r - 1 \end{pmatrix}}.$

Mas $2^{r-1}(2p+1)$ e $2^{r-1} - 1$ têm expansões diádicas disjuntas, pois a expansão de $2^{r-1}(2p+1)$ só possui termos de ordem $\geq r-1$ enquanto $2^{r-1} - 1$ só possui termos de ordem $< r - 1$. Então $\overline{\begin{pmatrix} 2^{r-1}(2p+1) + 2^{r-1} - 1 \\ 2^r - 1 \end{pmatrix}} = 1$ e, portanto, $w_2(E)^{m+1+2^{r-1}}[E]_2 = 1$. Conseqüentemente $E$ não borda e $k = k_m = 2^r - 1$. □

Concluímos, assim, a classificação, a menos de bordismo, das involuções fixando $RP(2) \cup RP(4j+2)$, $j > 0$. Ou seja, obtemos o

TEOREMA 5.3.6. *Seja* $(M^m, T)$ *fixando* $RP(2) \cup RP(4j+2)$, $j > 0$. *Se* $r$ *e* $p$ *são tais que* $4j = 2^r(2p+1)$. *então* $(M^m, T)$ *é equivariantemente bordante a* $\Gamma^s[RP(4j+5), T]$ *para algum* $0 \leq s \leq k$, *onde* $k = \begin{cases} 2 \text{ se } r = 1 \\ 2^r - 1 \text{ se } r > 1 \end{cases}$.

APÊNDICE A

# Informações Adicionais

Listaremos, neste apêndice, uma coleção de resultados que foram utilizados no trabalho. Daremos a demonstração daqueles para os quais não encontramos referência na literatura.

TEOREMA A.0.7. *Seja $(M, \Phi)$ uma $Z_2^k$-ação com "fixed data" $(F_1; \{\eta_i\}_i) \cup (F_2; \{\mu_i\}_i)$ e suponha que $(F_2; \{\mu_i\}_i)$ borde simultaneamente. Então existe $Z_2^k$-ação $(N, \Psi)$ bordante a $(M, \Phi)$ cujo "fixed data" é $(F_1; \{\eta_i\}_i)$.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $V$ a união das componentes de $M$ fixadas por $\Phi$ e contidas em $F_2$; então $(V; \{\mu_i \mid_V\}_i) = (V; \{0\}_i)$ borda, pois $(F_2; \{\mu_i\}_i)$ borda e ao menos um dos fibrados sobre qualquer outra componente de $F_2$ é não-nulo. Portanto, basta mostrar o teorema para as componentes de $M$ não fixadas por $\Phi$, ou seja, podemos supor que nenhuma componente de $M$ esteja contida em $F_2$.

Seja $D(\bigoplus_i \mu_i)$ o fibrado em discos, já identificado com uma vizinhança tubular $\mathfrak{D}$ de $F_2$ em $M$, conforme a discussão que precedeu a definição de "fixed data" (3.3.6), e com raio suficientemente pequeno para que $D(\bigoplus_i \mu_i)$ seja disjunto de $F_1$. Sabemos, então, que um elemento $x \in D(\bigoplus_i \mu_i)$ pode ser visto como uma $2^k - 1$-upla $(x_{A_1}, x_{A_2}, \cdots, x_{A_{2^k-1}})$ e cada $T_i \in G$ atua em $x$ como

$(x_{A_1}, x_{A_2}, \cdots, x_{A_{2^k-1}}) \longrightarrow (a_i(A_1)x_{A_1}, a_i(A_2)x_{A_2}, \cdots, a_i(A_{2^k-1})x_{A_{2^k-1}})$,

onde $a_i(A_j)$ é a i-ésima coordenada da seqüência $A_j$.

Seja $\mathfrak{M} = M - interior D(\bigoplus_i \mu_i)$, onde $interior D(\bigoplus_i \mu_i)$ é o conjunto de pontos de $M$ identificados com os vetores de norma menor que 1 em $D(\bigoplus_i \mu_i)$. Então $\mathfrak{M}$ é uma variedade com bordo tal que $\partial\mathfrak{M} = S(\bigoplus_i \mu_i)$, onde $S(\bigoplus_i \mu_i)$ é o fibrado em esferas, ou seja, os vetores de norma igual a 1 em $D(\bigoplus_i \mu_i)$. Então $(\mathfrak{M}, \Phi)$ é uma $Z_2^k$-ação fixando $(F_1; \{\eta_i\}_i)$ e atuando no bordo $S(\bigoplus_i \mu_i)$ como

$(x_{A_1}, x_{A_2}, \cdots, x_{A_{2^k-1}}) \longrightarrow (a_i(A_1)x_{A_1}, a_i(A_2)x_{A_2}, \cdots, a_i(A_{2^k-1})x_{A_{2^k-1}})$.

Observe que a $Z_2^k$-ação atua em $S(\bigoplus_i \mu_i)$ sem pontos fixos. De fato, como ao menos um dos fibrados sobre qualquer componente de $F_2$ é não-nulo, concluímos que $T_i$, para algum $i$, atua efetivamente em $x$.

Agora, como $(F_2; \{\mu_i\}_i)$ borda, existe $(P; \{\nu_i\}_i)$ tal que $\partial(P; \{\nu_i\}_i) = (F_2; \{\mu_i\}_i)$. Então $S(\bigoplus_i \nu_i)$ é uma variedade tal que $\partial S(\bigoplus_i \nu_i) = S(\bigoplus_i \mu_i)$. Como a ação sobre $S(\bigoplus_i \mu_i)$, dada pela regra acima, é invariante em cada fibra, podemos estendê-la, com a mesma regra, para $S(\bigoplus_i \nu_i)$. Obtemos assim, uma $Z_2^k$-ação $(S(\bigoplus_i \nu_i), \Psi)$ sem pontos fixos tal que $\partial(S(\bigoplus_i \nu_i), \Psi) = (S(\bigoplus_i \nu_i), \Phi)$. Colando $(\mathfrak{M}, \Phi)$ a $(S(\bigoplus_i \nu_i), \Psi)$ através do bordo comum $S(\bigoplus_i \mu_i)$ (e essa colagem é equivariante, pois $\Phi$ coincide com $\Psi$ no bordo) obtemos $(\mathfrak{M} \cup S(\bigoplus_i \nu_i), \Phi \cup \Psi)$ que satisfaz o teorema. □

Corolário A.0.8. *Seja $(M, \Phi)$ uma $Z_2^k$-ação com "fixed data" $(F_1; \{\eta_i\}_i) \cup (F_2; \{\mu_i\}_i)$ e suponha que exista $(Z_2)^k$-ação $(N_1, \Psi_1)$ com "fixed data" $(F_1; \{\eta_i\}_i)$. Então existe $(Z_2)^k$-ação $(N_2, \Psi_2)$ com "fixed data" $(F_2; \{\mu_i\}_i)$.*

Demonstração. Seja a $Z_2^k$-ação $(M \cup N_1, \Phi \cup \Psi_1)$. Seu "fixed data" será $(F_1; \{\eta_i\}_i) \cup (F_1; \{\eta_i\}_i) \cup (F_2; \{\mu_i\}_i)$. Como $(F_1; \{\eta_i\}_i) \cup (F_1; \{\eta_i\}_i)$ borda, aplicando o teorema anterior, obtemos o resultado. □

Teorema A.0.9. *Seja $(M, T)$ involução não-trivial sobre variedade fechada fixando $RP(2r)$. Então $[M, T] = [RP(2r) \times RP(2r), twist]$.* **[St3]**

Teorema A.0.10. *Se $(M^s, \Phi)$ é uma $Z_2^k$-ação fixando $RP(2r)$ então existe inteiro $j$, $0 \leq j \leq k$, tal que $s = r \cdot 2^{j+1}$ e $(M^s, \Phi)$ é bordante a $((RP(2r))^{2^j}, j - twist, Id, Id, \ldots, Id)$, onde aparecem $k - j$ identidades (a menos de uma mudança de base de $Z_2^k$); ou seja, $(M^s, \Phi)$ é bordante, a menos de uma mudança de base, a $\Gamma_j^k(RP(2r) \times RP(2r), twist)$.* **[Ca]**

Lema A.0.11. *Se $\eta \to RP(2r)$ e $\mu \to RP(2r)$ são fibrados bordantes, sobre o espaço projetivo de dimensão par, então $W(\eta) = W(\mu)$.*

Demonstração. Se $r = 0$ os fibrados são triviais e, portanto, $W(\eta) = W(\mu) = 1$. Então podemos supor $r \geq 1$. Sabemos que $W(RP(2r)) = (1 + \alpha)^{2r+1}$. Como $r \geq 1$, temos que $w_1(RP(2r)) = \alpha$, onde $\alpha \in H^1(RP(2r))$ é o gerador.

Como $\mu \to RP(2r)$ é bordante a $\eta \to RP(2r)$ seus números característicos são iguais. Sejam $w_i(\eta) = v_i$ e $w_i(\mu) = s_i$ as $i$-ésimas classes características de $\eta$ e de $\mu$, respectivamente. Assim, os números característicos correspondentes a $w_1^{2r-j}(RP(2r))w_j(-)[RP(2r)]_2$ são iguais, ou seja, $\alpha^{2r-j}v_j[RP(2r)]_2 = \alpha^{2r-j}s_j[RP(2r)]_2$; como $H^j(RP(2r)) = Z_2$ (isto é, $w_j(-) = 0$ ou $w_j(-) = \alpha^j$) concluímos que $s_j = v_j$, e o teorema está provado. □

Teorema A.0.12. *Se $(RP(2r); \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r)$ e $(RP(2r); \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r)$ são individualmente bordantes então estas listas são, também, simultaneamente bordantes.*

Demonstração. Pelo lema anterior, as classes características dos fibrados correspondentes são todas iguais. Como os números característicos da lista de fibrados envolvem apenas as classes dos fibrados e da variedade, concluímos que as duas listas têm números característicos iguais e, portanto, são bordantes. □

Teorema A.0.13. *Seja $RP(\mu)$ o espaço total do fibrado projetivo associado a um fibrado vetorial $\mu \to M$ sobre uma variedade fechada. Se $\xi \to RP(\mu)$ é o fibrado linha e $w_1(\xi) = c$ então para $\alpha \in H^*(M)$ temos*

$$c^i\alpha[RP(\mu)]_2 = \begin{cases} 0 \text{ se } i < j-1 \\ \tilde{w}_{i-j+1}(\mu)\alpha[M]_2 \text{ se } i \geq j-1 \end{cases},$$

*onde $\widetilde{W} = 1+\tilde{w}_1+\tilde{w}_2+\cdots$ denota a classe de Stiefel-Whitney dual, definida por $W(\mu)\widetilde{W}(\mu) = 1$.*[**Co**]

Lema A.0.14. *Vale a identidade:*

$$\sum_{i=1}^{n}\left[1+\begin{pmatrix} p-1+i \\ i \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} p+n \\ n \end{pmatrix}$$

Demonstração. Usaremos indução sobre $n$.

Para $n = 1$ temos que
$\sum_{i=1}^{1}\left[1+\begin{pmatrix} p-1+i \\ i \end{pmatrix}\right] = \left[1+\begin{pmatrix} p-1+1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \left[1+\begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} p+1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Suponha verdadeiro para $n-1$, ou seja,
$\sum_{i=1}^{n-1}\left[1+\begin{pmatrix} p-1+i \\ i \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} p+n-1 \\ n-1 \end{pmatrix}$,
então
$\sum_{i=1}^{n}\left[1+\begin{pmatrix} p-1+i \\ i \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} p-1+n \\ n \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{n-1}\left[1+\begin{pmatrix} p-1+i \\ i \end{pmatrix}\right] =$
$= \begin{pmatrix} p-1+n \\ n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p-1+n \\ n-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+n \\ n \end{pmatrix}$, e o resultado está provado. □

Lema A.0.15. *Vale a identidade de polinômios com coeficientes inteiros:*

$$(1+x+x^2+\cdots+x^n)^p = 1+\begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}x+\begin{pmatrix} p+1 \\ 2 \end{pmatrix}x^2+\cdots+\begin{pmatrix} p+np-1 \\ np \end{pmatrix}x^{np},$$

*ou seja,*

$$(1+x+x^2+\cdots+x^n)^p = \sum_{i=0}^{np} \begin{pmatrix} p-1+i \\ i \end{pmatrix} x^i.$$

DEMONSTRAÇÃO. Usaremos indução sobre $p$.

Para $p = 1$ é imediato.

Suponha verdadeiro para $p-1$, ou seja,

$$(1+x+x^2+\cdots+x^n)^{p-1} = 1+\begin{pmatrix} p-1 \\ 1 \end{pmatrix} x+\begin{pmatrix} p \\ 2 \end{pmatrix} x^2+\cdots+\begin{pmatrix} p+n(p-1)-2 \\ n(p-1) \end{pmatrix} x^{n(p-1)},$$

então

$$(1+x+x^2+\cdots+x^n)^p = (1+x+x^2+\cdots+x^n)(1+x+x^2+\cdots+x^n)^{p-1} =$$
$$= (1+x+x^2+\cdots+x^n)\left[1+\begin{pmatrix} p-1 \\ 1 \end{pmatrix} x+\begin{pmatrix} p \\ 2 \end{pmatrix} x^2+\cdots+\begin{pmatrix} p+n(p-1)-2 \\ n(p-1) \end{pmatrix} x^{n(p-1)}\right] =$$
$$= 1+\left[1+\begin{pmatrix} p-1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] x+\left[1+\begin{pmatrix} p-1 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} p \\ 2 \end{pmatrix}\right] x^2+\cdots+\left[1+\begin{pmatrix} p-1 \\ 1 \end{pmatrix}+\cdots\right] x^{np}.$$

Concluímos a demonstração aplicando o lema anterior. □

TEOREMA A.0.16. *Seja $\mu$ um fibrado sobre $RP(n)$ tal que $W(\mu) = (1+\alpha)^p$, onde $\alpha \in H^1(RP(n))$ é o gerador, e seja $\tilde{W}(\mu)$ a classe dual, definida por $W(\mu)\tilde{W}(\mu) = 1$. Então*

$$\tilde{W}(\mu) = 1+\overline{\begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}}\alpha+\overline{\begin{pmatrix} p+1 \\ 2 \end{pmatrix}}\alpha^2+\cdots+\overline{\begin{pmatrix} p+n \\ n \end{pmatrix}}\alpha^n,$$

*onde* $\overline{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *(mod 2).*

DEMONSTRAÇÃO. Como $(1+\alpha)\cdot(1+\alpha^2+\alpha^3+\cdots+\alpha^n) = 1$, pois $\alpha^{n+1} = 0$, podemos escrever que $(1+\alpha)^{-1} = (1+\alpha^2+\alpha^3+\cdots+\alpha^n)$. Então $(1+\alpha)^{-p} = (1+\alpha^2+\alpha^3+\cdots+\alpha^n)^p$. Usando o lema anterior, concluímos o teorema. □

TEOREMA A.0.17. *(Teorema de Lucas) Seja $p$ um número primo e tome $r$ e $c$ em notação $p$-ádica:*

$r = r_k r_{k-1}\cdots r_2 r_1 r_0 = r_0 + r_1 p + r_2 p^2 + \cdots + r_k p^k$, $(0 \le r_i < p)$

$c = c_k c_{k-1}\cdots c_2 c_1 c_0 = c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + \cdots + c_k p^k$, $(0 \le r_i < p)$.

*Então* $\begin{pmatrix} r \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 \\ c_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ c_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_2 \\ c_2 \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} r_k \\ c_k \end{pmatrix}$ $(mod\ p)$, *convencionando que* $\begin{pmatrix} r \\ c \end{pmatrix} = 0$ *se* $c > r$. **[Lu]**

Corolário A.0.18. *Tome* $r$ *e* $c$ *em notação diádica:*

$r = r_k r_{k-1}\cdots r_2 r_1 r_0 = r_0 + r_1 2 + r_2 2^2 + \cdots + r_k 2^k$, $(0 \leq r_i < 2)$

$c = c_k c_{k-1}\cdots c_2 c_1 c_0 = c_0 + c_1 2 + c_2 2^2 + \cdots + c_k 2^k$, $(0 \leq r_i < 2)$.

*Sejam* $R = \{i \mid r_i = 1\}$ *e* $C = \{i \mid c_i = 1\}$ *os conjuntos dos expoentes com coeficiente igual a* 1 *na notação diádica de* $r$ *e* $c$*, respectivamente. Então* $\begin{pmatrix} r \\ c \end{pmatrix}$ *é ímpar se, e somente se,* $C \subset R$.

Demonstração. Basta aplicar o Teorema de Lucas observando que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1(mod\ 2)$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0(mod\ 2)$. □

Corolário A.0.19. $\begin{pmatrix} a+c \\ c \end{pmatrix}$ *é ímpar se, e somente se,* $a$ *e* $c$ *têm notações diádicas disjuntas.*

Demonstração. Sejam

$r = r_k r_{k-1}\cdots r_2 r_1 r_0 = r_0 + r_1 2 + r_2 2^2 + \cdots + r_k 2^k$, $(0 \leq r_i < 2)$

$a = a_k a_{k-1}\cdots a_2 a_1 a_0 = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + \cdots + a_k 2^k$, $(0 \leq r_i < 2)$

$c = c_k c_{k-1}\cdots c_2 c_1 c_0 = c_0 + c_1 2 + c_2 2^2 + \cdots + c_k 2^k$, $(0 \leq r_i < 2)$

as notações diádicas e sejam $R = \{i \mid r_i = 1\}$, $A = \{i \mid a_i = 1\}$ e $C = \{i \mid c_i = 1\}$ os conjuntos dos expoentes com coeficiente igual a 1 na notação diádica de $r$, $a$ e $c$, respectivamente. Dizer que $a$ e $c$ têm notações diádicas disjuntas significa que $A \cap C = \emptyset$, que é equivalente a dizer que $R = A \cup C$, ou seja, $C \subset R$. Usando o corolário anterior, concluímos a demonstração. □

Definição A.0.20. Homomorfismo de Smith:

Dada uma involução sem pontos fixos $(M^n, T)$, existe para $N > n$ uma aplicação equivariante $C^\infty$ $g : (M^n, T) \to (S^N, A)$ de tal forma que $g$ seja regular e transversal a $S^{N-1} \subset S^N$. Seja $V^{n-1} = g^{-1}(S^{N-1})$; então $V^{n-1}$ é subvariedade fechada de $M^n$ e invariante sob $T$. Definimos o homomorfismo de $\mathfrak{N}_*$-módulos $\Delta : \mathfrak{N}_n(Z_2) \to \mathfrak{N}_{n-1}(Z_2)$, chamado de homomorfismo de Smith e dado por $\Delta[M^n, T]_L = [V^{n-1}, T]_L$. **[C-F**, pg 83]

TEOREMA A.0.21. *Seja $(M^n, T)$ uma involução sem pontos fixos, e seja $W^n \subset M^n$ subvariedade com bordo tal que $W^n \cup T(W^n) = M^n$ e $W^n \cap T(W^n) = \partial W^n$. Então $\partial W^n$ é invariante sob $T$ e $\Delta[M^n, T]_L = [\partial W^n, T]_L$.* **[C-F**, pg 84]

COROLÁRIO A.0.22. $\Delta[S^n, A]_L = [S^{n-1}, A]_L$.

TEOREMA A.0.23. *Existe uma única base homogênea $\{X(n)\}_0^\infty$ de $\mathfrak{N}_*(Z_2)$ que satisfaz:*

*i)* $\Delta X(n+1) = X(n)$, $n \geq 0$;

*ii)* $\varepsilon_* X(n) = 0 \in \mathfrak{N}_*$, $n > 0$, *onde* $\varepsilon_* : \mathfrak{N}_*(Z_2) \to \mathfrak{N}_*$ *é o homomorfismo de grau zero* $\varepsilon_*[M, T]_L = \left[\frac{M}{T}\right]$.

DEMONSTRAÇÃO. A demonstração pode ser encontrada em **[C-F**, pg 86], onde a existência é provada apresentando a base

$$\{X(n)\}_0^\infty = \{[S^0, A]_L, [S^1, A]_L, [S(\xi_1 \oplus R), A]_L, \ldots, [S(\xi_{i-1} \oplus R^{i-1}), A]_L, \ldots\},$$

onde $\xi_1$ é o fibrado linha canônico sobre $RP(1)$ e $\xi_j$, $j \neq 1$, é o fibrado linha canônico associado à involução antipodal nas fibras de $(S(\xi_{j-1} \oplus R), A)$. □

# Referências Bibliográficas


[C-F] P. E. Conner and E. E. Floyd, Differentiable Periodic Maps, Second Edition Springer (1979).

[Ca] F. L. Capobianco, Stationary Points of $(Z_2)^k$-actions, Proc. Amer. Math. Soc. 61 (1976), 377-380.

[Co] P. E. Conner, Diffeomorphisms of Period Two, Mich. Math. J. 10 (1963) 341-352.

[Do] A. Dold, Erzeugende der Thomshen Algebra $\mathfrak{N}$, Math. Z. 65 (1956), 25-35.

[H-T] D. Hou and B. Torrence, Involutions Fixing the Disjoint Union of Copies of Even Projective Space, Acta Math. Sinica 12 (1997), 156.

[H-T2] D. Hou and B. Torrence, Involutions Fixing the Union of Odd-dimensional Projective Spaces, Canad. Math. Bull. 37 (1994) 66-74.

[K-S] C. Kosniowski and R.E. Stong, Involutions and Characteristic Numbers, Topology 17 (1978) 309-330.

[K-S2] C. Kosniowski and R.E. Stong, $(Z_2)^k$-Actions and Characteristc Numbers, Indiana Univ. Math. J. 28 (1979) 725-743.

[Lu] E. Lucas, Théorie des Nombres, 1878; reprint, Librarie Blanchard, Paris, 1961.

[Mi] J. W. Milnor, Lectures on Characteristic Classes, Princeton University Press (1974).

[M-Z] D. Montgomery and L. Zippin, Topological Transformation Groups, Interscience Publishing Co. (1955).

[Pe1] P. L. Q. Pergher, An Equivariant Construction , Proc. Amer. Math. Soc. 119 (1993), 319-320.

[Pe2] P. L. Q. Pergher, Bordism of Two Commuting Involutions, Proc. Amer. Math. Soc. 126 (1998), 191-195.

[Pe3] P. L. Q. Pergher, Bordismo de Fibrados e Involuções, Tese de Doutorado - ICMSC/USP (1983).

[Pe4] P. L. Q. Pergher, Involutions Fixing an Arbitrary Product of Spheres and a Point, Manuscripta Math., 89 (1996), 471-474.

[Pe5] P. L. Q. Pergher, On $(Z_2)^k$-Actions, Topology Appl., 117 (2001), 105-112.

[Pe6] P. L. Q. Pergher, The Union of a Connected Manifold and a Point as Fixed Set of Commuting Involutions, Topology Appl. 69 (1996), 71-81.

[Pe7] P. L. Q. Pergher, $(Z_2)^k$-Actions Fixing $\{point\} \cup V^n$, Fundamentha Mathematicae, a aparecer.

[Pe8] P. L. Q. Pergher, $(Z_2)^k$-Actions Fixing a Product of Spheres and a Point, Canad. Math. Bull., 38 (1995), 366-372.

[Pe9] P. L. Q. Pergher, $(Z_2)^k$-Actions Whose Fixed Data Has a Section, Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001), 175-189.

[P-S] P. L. Q. Pergher, R. E. Stong, Involutions Fixing $\{point\} \cup F^n$, Transform. Groups 6 (2001) 79-86.

[Po] L. S. Pontrjagin, Characteristc Cycles on Differentiable Manifolds, Mat. Sbonik N. S. 21(63) (1947), 233-284; A. M. S. Translation 32 (1950).

[Ro] D. C. Royster, Involutions Fixing the Disjoint Union of Two Projective Spaces, Indiana Univ. Math. J. 29 (1980) 267-276.

[St] R. E. Stong, Equivariant Bordism and $(Z_2)^k$-Actions, Duke Math. J. 37(1970), 779-785.

[St2] R. E. Stong, Involutions Fixing Products of circles, Proc. Amer. Math Soc. 119 (1993) 1005-1008.

[St3] R. E. Stong, Involutions Fixing Projective Spaces, Michigan Math J. 13 (1966) 445-447.

[Th] R. Thom, Quelques Propriétés Globales des Variétés Differentiables, Comm. Math. Helv. 28 (1954), 17-86.

[To] B. Torrence, Bordism Classes of Vector Bundles Over Real Projective Spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 118 (1993), 963-969.