UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Espaços de Hardy em Variedades Compactas.

Luís Antônio Carvalho dos Santos

São Carlos - SP
2002

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Espaços de Hardy em Variedades Compactas.

Luís Antônio Carvalho dos Santos

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFSCar como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática

São Carlos - SP
Março de 2002

Orientador

Prof. Dr. Jorge Guillermo Hounie

Abstract

The main aim of this work is to give a characterization of Hardy spaces H^p on a compact manifold Σ when Σ is the smooth boundary of a bouded domain of Euclidean space $\mathbb{R}^n$ in terms of the Poisson Kernel of the domain. The basic assumption used here is that $0 < p \leq 1$ since all results in this work are known to be valid for $p > 1$.

When Σ is a compact manifold it is possible to define a notion of Hardy Space $\mathcal{H}^p(\Sigma)$ using local charts and also the local Hardy Space $h^p(\Sigma)$, introduced by Goldberg in [2].

The second point of view is to give an intrinsic maximal caracterization based in a bounded family of smooth functions on Σ.

The third approach arises when the Poisson Kernel associated to Ω is used, such fact allows us to define some maximal functions on Σ taking account the harmonic extension of a distribution defined on Σ.

We prove the equivalence of all these different definitions of Hardy spaces in a theorem that extends a result due Leonard Colzani who studied the special case $\Sigma = S^{n-1}$, the (n-1)-dimensional sphere.

A difficulty that arises in the general case of a smooth domain is that an explicit expression for the Poisson Kernel is not known. However, the relevant estimates for the derivatives of the Poisson Kernel can be obtained using pseudo-differential operator techniques.

Capítulo 1

Espaços de Hardy $H^p(\mathbb{R}^n)$.

O estudo dos espaços de Hardy teve início durante os anos $1910's$ e $1920's$ no contexto de séries de Fourier e análise complexa em uma variável, e com o decorrer do tempo se transformou numa teoria rica e com desdobramentos em vários tópicos, fornecendo um importante material para o estudo de funções maximais, integrais singulares, e para a teoria dos espaços L^p. Existem muitos teoremas que ocorrem para todo $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, mas que não se estendem para o L^p com $p \leq 1$. Isto ocorre pois, para $p < 1$, os elementos de L^p não são distribuições e além disso, L^p não possui dual não-trivial. Como exemplo deste fato temos o teorema de Sobolev: se $L^p_k = \{f \in L^p : D^\alpha f \in L^p \quad \text{no sentido das ditribuições} \quad |\alpha| \leq k\}$ então $L^p_k \subset L^q$ para $p^{-1} - q^{-1} = k/n$, que vale apenas para $p \geq 1$. Em 1960 Stein e Weiss [1] introduziram o espaço $H^p(\mathbb{R}^n)$ que é igual ao L^p quando $p > 1$, estritamente contido em L^p se $p = 1$, e é um espaço de distribuições quando $p < 1$. Como aplicação desta teoria, eles estenderam o teorema de Sobolev para $p < 1$ substituindo L^p por H^p. Um dos aspectos importantes desta teoria se refere ao fato de que os espaços de Hardy H^p são equivalentes aos espaços L^p quando $p > 1$, mas quando $p \leq 1$, esses espaços são melhores para o tratamento de questões ligadas a análise harmônica, do que os espaços L^p.

1.1 Caracterização maximal de $H^p(\mathbb{R}^n)$

Os espaços H^p são espaços de distribuições definidas em $\mathbb{R}^n$, que podem ser caracterizados de várias formas, baseados em diferentes definições, todas implicando na mesma noção de H^p.[2] Faremos a seguir uma breve descrição de suas caracterizações.

Considere o espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, isto é, o conjunto das funções testes ϕ definidas no $\mathbb{R}^n$ infinitamente diferenciáveis, junto com todas as suas

[1] Elias M. Stein e Guido Weiss. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces. Princeton, 1971.*

[2] Uma boa referência desta teoria pode ser encontrada em *Harmonic analysis:Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals,* capítulo 3, de *Elias M. Stein.*

derivadas rapidamente decrescentes no infinito, no sentido de que permanecem limitadas mesmo multiplicadas por polinômios arbitrários, e munida com a topologia definida pela família enumerável de seminormas

$$\|\varphi\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial_x^\beta \varphi(x)|$$

com

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1}, \cdots, x_n^{\alpha_n}, \qquad \partial_x^\beta = \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}};$$

α e β em $\mathbb{Z}_+^n$.

E denotamos $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ o dual topológico de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, com a topologia fraca. O espaço $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ também é denominado o espaço das distribuições temperadas.

Se f é uma distribuição temperada e $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, a convolução $f * \Phi$ é uma função bem definida e de classe C^∞ (de crescimento polinomial no infinito).

A conexão dos espaços de Hardy $H^p(\mathbb{R}^n)$ com funções harmonicas definidas no semi-plano superior $\mathbb{R}_+^{n+1}$ pode ser feita considerando-se o produto convolução $f * P_t$, com $P_t(x) = t^{-n}P(x/t)$ e P sendo o núcleo de Poisson de $\mathbb{R}_+^{n+1}$.

$$P(x) = \frac{c_n}{(1+|x|^2)^{(n+1)/2}}.$$

O produto de convolução $f * P_t$ não está definido para distribuições arbitrárias, desde que P não pertence ao espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Assim, a teoria dos espaços H^p exige uma restrição natural na classe das distribuições. Por isso torna-se necessário trabalhar-se na classe das distribuições limitadas, ou seja, $f \in \mathcal{S}'$ tais que $f * \phi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ qualquer que seja $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Assim se f é uma distribuição limitada e $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então a convolução $f * h$ pode ser definida como uma distribuição. De fato, seja $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ então podemos definir.

$$\langle f * h, \phi\rangle = \langle f * \tilde{\phi}, \tilde{h}\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (f * \tilde{\phi})(x)\tilde{h}(x)dx$$

com $\tilde{\phi}(x) = \phi(-x)$. Além disso, $f * h$ também é uma distribuição limitada e ainda $f * (h_1 * h_2) = (f * h_1) * h_2$ se $h_i \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Assim, desde que $P \in L^1(\mathbb{R}^n)$, segue que $f * P_t$ está bem definida para toda distribuição limitada f. Além disso, para todo t fixo, $f * P_t$ é uma função em C^∞ e limitada. De fato, podemos escrever $P = \phi * h + \psi$ com $\phi, \psi \in S$ e $h \in L^1$. Para ver isto, note que $\hat{P}(\xi) = e^{-2\pi|\xi|}$ é rapidamente decrescente no infinito e de classe C^∞, à exceção da origem.[3] Tomando $h = P$ e $\phi \in S$ com $\hat{\phi}(\xi) = 1$ para ξ perto de 0, logo basta definir ψ por $\hat{\psi}(\xi) = (1 - \hat{\phi}(\xi))e^{-2\pi|\xi|}$. Portanto,

$$P_t = \phi_t * h_t + \psi_t \quad \text{e} \quad f * P_t = f * \psi_t + (f * \phi_t) * h_t$$

[3] A notação $\hat{\phi}$ significa a transformada de Fourier de ϕ.

o que conclui a demonstração do fato: $f * P_t \in C^\infty \cap L^\infty$.

Além disso, desde que $[(\partial_t)^2 + \sum_{j=1}^{n} (\partial_{x_j})^2] P_t(x) = 0$, vemos que a função $u(x,t) = (f * P_t)(x)$ é de classe C^∞ em (x,t) e harmonica no semiplano superior.

Para cada $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e toda distribuição f, podemos definir a função maximal radial $M_\Phi f(x)$ por

$$M_\Phi f(x) = \sup_{t>0} |(f * \Phi_t)(x)|. \tag{1.1}$$

A seguir, vamos considerar uma função maximal relacionada não apenas a uma aproximação da identidade Φ_t mas baseada numa família limitada de funções testes, chamada de grande função maximal. Com esse objetivo, seja $\mathcal{F} = \{\| \cdot \|_{\alpha_i,\beta_i}\}$ uma coleção finita de seminormas definidas sobre S, e seja

$$S_\mathcal{F} = \{\Phi \in S : \|\Phi\|_{\alpha_i,\beta_i} \leq 1 \text{ para toda } \| \cdot \|_{\alpha_i,\beta_i} \in \mathcal{F}\}.$$

então

$$\mathcal{M}_\mathcal{F} f(x) = \sup_{\Phi \in S_\mathcal{F}} M_\Phi f(x). \tag{1.2}$$

Finalmente, se f é uma distribuição limitada, seja

$$u(x,t) = (f * P_t)(x)$$

a integral de Poisson de f, definida no semiplano superior e seja

$$u^*(x) = \sup_{|x-y| \leq t} |u(y,t)| \tag{1.3}$$

a função maximal não-tangencial de u.

Os espaços de Hardy $H^p(\mathbb{R}^n)$ podem ser caracterizados da seguinte forma[4].

Teorema 1.1 *Seja f uma distribuição e seja $0 < p \leq \infty$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) Existe uma função $\Phi \in \mathcal{S}$ com $\int \Phi \neq 0$ tal que $M_\Phi f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Existe uma coleção $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{M}_\mathcal{F} f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

(iii) A distribuição f é limitada e $u^* \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Se alguma dessas três propriedades forem satisfeitas, então dizemos que f pertence a $H^p(\mathbb{R}^n)$.

Suponha que N seja um inteiro positivo, e seja

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_N = \{\| \cdot \|_{\alpha,\beta} : |\alpha| \leq N, |\beta| \leq N\}.$$

[4]Vide: Elias M. Stein. *Harmonic Analysis: Real-variable methods, orthogonality, and oscillatory Integrals.*

se N é suficientemente grande (em termos de p), então as quantidades

$$\|M_\Phi f\|_{L^p}, \quad \|\mathcal{M}_{\mathcal{F}_N} f\|_{L^p}, \quad \text{e} \quad \|u^*\|_{L^p}$$

são comparáveis, com as constantes independentes de f. Qualquer uma destas três expressões pode ser tomada como normas em $H^p(\mathbb{R}^n)$; ressaltamos que são normas apenas quando $p \geq 1$. Entretanto é usual se referir a essas quantidades, por exemplo, $\|M_\Phi f\|_{L^p}$ como H^p norma de f, e denotamos por $\|f\|_{H^p}$. Note que a expressão $\|\cdot\|_{H^p}^p$ é subaditiva se $p \leq 1$ fornecendo assim uma métrica em H^p. E esta métrica define a topologia de H^p.

1.1.1 Decomposição atômica para $H^p(\mathbb{R}^n)$.

Um objeto importante que surge no estudo dos espaços $H^p(\mathbb{R}^n)$ com $p \leq 1$ são os H^p átomos. Mais precisamente, são funções a mensuráveis que satisfazem as seguintes propriedades:

(i) a é suportado numa bola B,

(ii)$|a(x)| \leq |B|^{-1/p}$ para quase todo x, e

(iii) $\int x^\beta a(x)dx = 0$ para todo β com $|\beta| \leq n(p^{-1} - 1)$.

Os H^p átomos são de fato elementos de $H^p(\mathbb{R}^n)$, com norma H^p uniformemente limitada. Ou seja,

$$\|\mathcal{M}_0 a\|_{L^p} \leq C(n, p)$$

para todo H^p-átomo, sendo que $\mathcal{M}_0 f(x) = \sup_{t>0} |f * \Phi_t(x)|$, com Φ uma função suave suportada na bola unitária em torno da origem com $\int \Phi \neq 0$.

Além disso, é possível mostrar que se $\{a_k\}$ é uma coleção de H^p-átomos e $\{\lambda_k\}$ é uma sequência de números complexos com $\sum |\lambda_k|^p < \infty$, então a série

$$f = \sum_k \lambda_k a_k \tag{1.4}$$

converge no sentido das distribuições, e sua soma $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$, com

$$\|f\|_{H^p} \leq c(\sum |\lambda_k|^p)^{1/p}.$$

Por outro lado, a recíproca deste fato pode ser expressa no seguinte resultado, veja por exemplo ([3]).

Teorema 1.2 *Seja $p \leq 1$. Então cada $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$ pode ser escrita como uma soma de H^p átomos, como em (1.4) acima, que converge na norma H^p; além disso,*

$$\sum_k |\lambda_k|^p \leq c\|f\|_{H^p}^p.$$

1.2 Versão local dos espaços de Hardy, $h^p(\mathbb{R}^n)$.

A idéia de que os espaços de Hardy H^p são como L^p quando $p < 1$ falha em alguns aspectos como por exemplo: (1) H^p não contém $\mathcal{S}$; (2) H^p não é bem definido em variedades diferenciáveis; (3) operadores pseudo-diferenciais não são limitados em H^p. Entretando, em 1979 Goldberg ([2]), introduziu os espaços $h^p(\mathbb{R}^n)$, uma versão local dos espaços de Hardy. Nesses espaços (1), (2) e (3), acima ocorrem.

1.2.1 Funções harmonicas numa faixa

Seja $S = \{(x_1, \cdots, x_n, y) : 0 < y < 1\}$ a faixa em $\mathbb{R}^{n+1.}$ Quando $n = 1$, o núcleo de Poisson para S pode ser calculado explicitamente usando uma aplicação conforme de S no disco unitário. [5] O resultado é

$$P_y^0(x) = \frac{\sin \pi y}{2(\cosh \pi x - \cos \pi y)} \tag{1.5}$$

com $P_y^0(x) \longrightarrow \delta$(delta de Dirac) quando $y \longrightarrow 0$ e $P_y^0(x) \longrightarrow 0$ quando $y \longrightarrow 1$. E considere ainda: $P_y^1(x) = P_{1-y}^0(x)$, e $P_y(x) = P_y^0(x) + P_y^1(x)$.

Para $n > 1$ a transformada de Fourier pode ser calculada da seguinte forma. Se $\hat{F}(\xi) = \int F(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx$ e $f(y) = \hat{P}_y^0(\xi)$ então $f''(y) = 4\pi^2|\xi|^2 f(y)$, $f(0) = 1$, e $f(1) = 0$. Desta forma,

$$f(y) = \hat{P}_y^0(\xi) = \sinh[(1-y)2\pi|\xi|]/\sinh 2\pi|\xi|,\ \hat{P}_y(\xi) = [\cosh(1-2y)\pi|\xi|]/\cosh \pi|\xi|.$$

Observando essas expressões vemos que todos estes núcleos de Poisson são elementos de $\mathcal{S}$.

Os próximos resultados têm o objetivo de fixar algumas notações para intruduzirmos os espaços $h^p(\mathbb{R}^n)$. Veja em ([2]).

Proposição 1.1 *A função $u(x, y) = P_y^0 * f_0 + P_y^1 * f_1$ é solução do problema de Dirichlet em S para funções contínuas f_0, f_1 que se anulam no infinito. Em particular, $P_y^i(x) \geq 0$.*

■

Lema 1.1 *Se u é uma função harmônica em S e $1 < p < \infty$ então*

$$\sup_{0<y<1} \int |u(x, y)|^p dx < \infty$$

se e somente se,$u(x, y) = P_y^0 * f_0 + P_y^1 * f_1$ para $f_i \in L^p,\ i = 0, 1.$

[5] Para uma demonstração deste fato veja por exemplo *Fourier Analysis on Euclidean Spaces,* E. Stein e G. Weiss, pág 205 à 209.

■

Deste modo, se $p > (n-1)/n$ então

$$h^p(\mathbb{R}^n) = \{(u_0, u_1, \cdots, u_n) : \sup_{0<y<1} \int_{\mathbb{R}^n} (|u_0(x,y)|^2 + \cdots + |u_n(x,y)|^2)^{p/2} dx < \infty\}$$

sendo que $u_i(x,y)$ são funções harmônicas na faixa S e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann generalizadas

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \quad i \neq j.$$

Além disso, u_o deve satisfazer $u_0(x,y) = u_0(x, 1-y)$.

Como na teoria H^p, $u_1, \cdots, u_n$ podem ser obtidos a partir de u_0 e $\lim_{y \longrightarrow 0} u_0(x,y)$ existe no sentido das distribuições, logo h^p pode ser identificado com um subespaço do espaço das distribuições temperadas em $\mathbb{R}^n$. E como o núcleo de Poisson $P_y(x) \in \mathcal{S}$, temos que $u_0(x,y) = (P_y * u_0)(x)$ pode ser obtido diretamente do seu valor de fronteira, o que representa uma vantagem técnica de h^p, o que não é possível em H^p.

Para enunciar o próximo Teorema fixaremos algumas notações :

$$\Gamma(x) = \{(x', y) : |x - x'| < y, \ 0 < y < \frac{1}{2}\},$$

$$u^*(x) = \sup_{(x',y) \in \Gamma(x)} |u(x', y)|$$

$$m_\psi f(x) = \sup_{0<t<1} |f * \psi_t(x)|$$

$$m_\psi^* f(x) = \sup_{(x',t) \in \Gamma(x)} |\psi_t * f(x')|$$

$$m_{\mathcal{F}} f(x) = \sup_{\varphi \in S_{\mathcal{F}}} m_\varphi f(x)$$

$$s(u) = (\int_{\Gamma(x)} |\nabla u(x', y)|^2 y^{1-n} dx' dy)^{1/2}$$

sendo que $u(x,y) = P_y * f$, $\|\varphi\|_{\alpha,\beta} = \|x^\alpha D^\beta \varphi\|_\infty$, e

$$S_{\mathcal{F}} = \{\Phi \in \mathcal{S} : \|\Phi\|_{\alpha_i,\beta_i} \leq 1 \text{ para toda } \|\cdot\|_{\alpha_i,\beta_i} \in \mathcal{F}\},$$

sendo

$$\mathcal{F} = \{\|\cdot\|_{\alpha_i,\beta_i}\}$$

uma coleção finita de seminormas de $\mathcal{S}$.

Denominamos a função maximal $m_{\mathcal{F}} f$ de a pequena grande função maximal.

Teorema 1.3 *Se $p > (n-1)/n$ então $f \in h^p(\mathbb{R}^n)$ se e somente se, $u^* \in L^p$. Além disso, para cada $0 < p < \infty$ existe um N suficientemente grande em termos de p tal que se*

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_N = \{\varphi \in \mathcal{S} : \|\varphi\|_{\alpha,\beta} \leq 1 \text{ para } |\alpha|, |\beta| \leq N\}$$

e se $\psi \in \mathcal{S}$ com $\int \psi \neq 0$, então as normas L^p das seguintes funções são equivalentes:

$$u^*, s(u), \sup_{(x',t)\in\Gamma(x)} |\psi_t * f(x')|, \sup_{0<t<1} |\psi_t * f(x)|, \sup_{0<t<1} \sup_{\varphi\in\mathcal{F}_N} |\varphi_t * f(x)|.$$

■

O próximo Lema se refere à passagem de H^p para h^p.

Lema 1.2 *Se $\varphi \in \mathcal{S}$, é tal que $\int \varphi = 1$, e $\int x^\alpha \varphi(x)dx$ para todo $\alpha \neq 0$, então*

$$\|f - \varphi * f\|_{H^p} \leq C\|f\|_{h^p},$$

em particular $f \in h^p \Longrightarrow f - \varphi * f \in H^p$.

■

1.2.2 Decomposição atômica para o $h^p(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.1 *Dizemos que uma função mensurável a é um h^p-átomo se:*

$$\text{Tipo } 1 = \begin{cases} (i) & S(a) \subset B \text{ com } \quad |B| < 1 \\ (ii) & \|a\|_\infty \leq |B|^{\frac{1}{p}} \\ (iii) & \int x^\alpha a(x)dx = 0, \ |\alpha| \leq N = n[p^{-1} - 1] \end{cases}$$

$$\text{Tipo } 2 = \begin{cases} (i) & S(a) \subset B \text{com } |B| \geq 1 \\ (ii) & \|a\|_\infty \leq |B|^{\frac{1}{p}} \end{cases}$$

definimos $\|a\|^p_{atom} = \|a\|^p_\infty m(Q)$. Na teoria atômica de H^p, a condição de momento nulo presente nos átomos de tipo 1 deve ocorrer para todos os H^p-átomos, assim todo H^p-átomo é também um h^p-átomo. Assim, a decomposição atômica para o h^p é descrita através do seguinte Teorema, veja ([2]).

Teorema 1.4 *Se $f \in h^p(\mathbb{R}^n)$, $(p \leq 1)$ então $f = \sum a_i$ com $\sum \|a_i\|^p_{atom} \leq C\|f\|^p_{h^p}$ (ou mais precisamente, $f = \lim_k \sum^k a_i$ na norma de h^p.) Além disso, $\|a_i\|_{h^p} \leq C\|a_i\|_{atom}$.*

■

Observamos que é possível escolher átomos C_c^∞ com muitos momentos nulos.

Portanto seguindo a descrição de Goldberg expressa no Teorema (1.4) podemos sempre representar uma distribuição f de $h^p(\mathbb{R}^n)$ como uma soma de h^pátomos com coeficientes em $l^p(\mathbb{R})$ isto é, $f = \sum_{i\in I} \lambda_i a_i$, sendo que esta série converge em $\mathcal{S}$ e também em norma h^p. A princípio poderiam ocorrer cancelamentos tais que a distribuição f estivesse suportada num compacto K sem que, os átomos integrantes da sua representação, estivessem também suportados em algum compacto. Entretanto, podemos escolher uma decomposição atômica tal que isto não ocorre, como mostra o seguinte Lema.

Lema 1.3 *Seja $f \in h^p(\mathbb{R}^n)$ tal que $S(f) \subset B_1(0)$ [6] então f pode ser representada pela seguinte soma*

$$f = \sum_{i\in I} \lambda_i a_i$$

onde $(\lambda_i) \in l^p$ e a_i átomos de acordo com a definição (1.1), tais que $S(a_i) \subset B(0,2)$.

Prova do Lema (1.3): Para a demonstração suporemos que os átomos presentes na decomposição atômica possuam tantos cancelamentos de momentos, quanto forem necessários contanto que, este número nunca seja inferior ao valor $N = n[1/p - 1]$.

Assim, tendo sido feita esta observação, tome $\eta \in C_c^\infty(B(0,2))$ tal que $\eta \equiv 1$ em $B(0,1)$ e $0 \leq \eta \leq 1$. Podemos desta forma escrever:

$$f = \sum_{i\in E} \lambda_i \eta a_i$$

com E consistindo da subcoleção dos índices tais que os átomos correspondentes possuem suportes não disjuntos de $B_2(0)$.

Separando as parcelas entre os tipos 1 e 2 e denotando-os por $a_{i,1}$ e $a_{i,2}$ respectivamente, podemos escrever

$$f = \sum_{i\in E} \lambda_i \eta a_{i,1} + \sum_{i\in E} \lambda_i \eta a_{i,2}.$$

Os elementos da forma $\eta a_{i,2}$ são átomos do tipo 2 com suportes contidos na bola $B_2(0)$.

Vejamos agora que as funções $\eta a_{i,1}$ podem ser decompostas como somas de átomos de tipo 1 e 2, adequadamente suportadas.

[6] Denotamos $S(f)$ o suporte da função f.

Observe que se $S(a_{i,1}) \subset B_{r_i}(x_i)$ e considerando a expansão de Taylor da função $\eta(x)$ em torno do ponto x_i,

$$\eta(x) = \eta(x_i) + \sum_{1\leq|\alpha|\leq d} \frac{D^\alpha \eta(x_i)}{\alpha!}(x-x_i)^\alpha + r_{x_i}(x)$$

com a estimativa para o resto: $|r_{x_i}(x)| \leq C|x-x_i|^{d+1}$.

Logo, podemos escrever

$$\begin{aligned} \eta(x)a_{i,1}(x) &= \sum_{|\alpha|\leq d} \frac{D^\alpha \eta(x_i)}{\alpha!} a_{i,1}(x)(x-x_i)^\alpha + r_{x_i}(x)a_{i,1}(x) \\ &= \quad \text{Tipo 1} \ + \ \text{Tipo 2} \ . \end{aligned}$$

Os termos $\frac{D^\alpha \eta(x_i)}{\alpha!} a_{i,1}(x)(x-x_i)^\alpha$ são átomos de tipo 1 suportados na bola $B_{x_i}(r_i)$, a menos de uma constante multiplicativa.

De fato, como o suporte de $\frac{D^\alpha \eta(x_i)}{\alpha!} a_{i,1}(x)(x-x_i)^\alpha$ está contido no suporte de $a_{i,1}$ que por sua vez está contido na bola $B(x_i, r_i)$ e esta bola satisfaz $|B_{r_i}(x_i)| < 1$ temos que $r_i < (\omega_n)^{-\frac{1}{n}}$ sendo que $\omega_n = |S^{n-1}|$ assim,

$$\Big|\frac{D^\alpha \eta(x_i)}{\alpha!} a_{i,1}(x)(x-x_i)^\alpha\Big| \leq \Big|\frac{D^\alpha \eta(x_i)}{\alpha!}\Big| r_i^{|\alpha|} |B_{x_i}(r_i)|^{-\frac{1}{p}} \leq C_{\eta,n,N}|B_{x_i}(r_i)|^{-\frac{1}{p}}$$

para todo índice α com comprimento menor que d e todo x na bola $B_2(0)$.

A condição de momento também é satisfeita uma vez que, para todo multi-índice β tal que $|\beta| \leq N$ temos:

$$\sum_{|\alpha|\leq d} \int \Big\{ \frac{D^\alpha \eta(x_i)}{\alpha!} a_{i,1}(x)(x-x_i)^\alpha \Big\} x^\beta dx =$$

$$\sum_{|\alpha|\leq d} \frac{D^\alpha \eta(x_i)}{\alpha!} \int a_{i,1}(x)(x-x_i)^\alpha x^\beta dx = 0 \qquad \forall |\beta| \leq N.$$

Por outro lado, as funções $r_{x_i}(x)a_{i,1}(x)$ são funções suportadas na bola $B_{x_i}(r_i)$. Além disso,

$$\begin{aligned} |r_{x_i}(x)a_{i,1}(x)| &\leq C|x-x_i|^{d+1}|B_{r_i}(x_i)|^{-\frac{1}{p}} \leq \frac{r_i^{-\frac{n}{p}}}{\omega_n}|x-x_i|^{d+1} \\ &\leq C2^{\frac{n}{2}} \frac{r_i^{-\frac{n}{p}+d+1}}{\omega_n^{\frac{1}{p}} 2^{\frac{n}{p}}} \leq C2^{\frac{n}{2}} \frac{r_i^{-\frac{n}{p}+d+1}}{|B_2(0)|^{\frac{1}{p}}} \leq \frac{C}{|B_2(0)|^{\frac{1}{p}}} \end{aligned}$$

$|B_{r_i}(x_i)| = r_i^n \omega_n$.

Como $a_{i,1}$ é um átomo do tipo 1 temos que $r_i \leq (\omega_n^{-1})^{\frac{1}{n}}$ logo, se escolhermos d suficientemente grande para que o expoente $-\frac{n}{p} + d + 1$ fique positivo teremos que a constante C só dependerá da dimensão n. E finalmente como o $S(r_{x_i}a_{i,1}) \subset B(0,2)$ temos que $r_{x_i}a_{i,1}$ constitui-se num múltiplo de um átomo do tipo 2. ■

1.3 Caracterização Maximal de $h^p(\mathbb{R}^n)$ alternativa.

Recordemos que $h^p(\mathbb{R}^n)$ pode ser definido como:

$$h^p(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : m_{\mathcal{F}_N} f \in L^p(\mathbb{R}^n)\} \tag{1.6}$$

se N for suficientemente grande, e se:

$$m_{\mathcal{F}_N} f(x) = \sup_{\phi \in \mathcal{F}_N} \sup_{0<r<1} |f * \phi_r(x)|$$

e

$$\mathcal{F}_N = \{\phi \in S(\mathbb{R}^n) : \|\phi\|_{\alpha,\beta} \leq 1, \quad \forall\ |\alpha|, |\beta| \leq N\}.$$

Nesta Seção daremos uma caracterização maximal de $h^p(\mathbb{R}^n)$, equivalente a (1.6). Caracterização esta que permitirá estender a noção dos espaços de Hardy às variedades diferenciáveis. Com esse objetivo introduziremos a função maximal f_s^* por meio da seguinte definição (1.2).

Definição 1.2 *Para cada $x \in \mathbb{R}^n$ e $m \in \mathbb{Z}_+$ seja*

$$K_s(x) = \{\phi \in C_c^\infty : S(\phi) \subset B(x,r),\ r < 1,\ \|D^\alpha \phi\|_{L^\infty} \leq r^{-n-|\alpha|}, |\alpha| \leq s\}.$$

E defina para toda $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ a função maximal,

$$f_s^*(x) = \sup_{\phi \in K_s(x)} |\langle f, \phi \rangle|. \tag{1.7}$$

A motivação para a Definição (1.2) está no seguinte fato. Seja $\phi \in \mathcal{F}_N$ tal que $S(\phi) \subseteq B(0,1)$ então $S(\phi_r) \subseteq B(0,r)$ e além disso

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha \phi_r(x)| \leq \frac{1}{r^{n+|\alpha|}} \|\phi\|_{0,\alpha} < \frac{1}{r^{n+|\alpha|}}$$

para todo $|\alpha| \leq N$.

A Proposição que vem a seguir, descreve a possibilidade de se caracterizar as distribuições temperadas que estão em $h^p(\mathbb{R}^n)$, por meio da função maximal f_s^*.

Proposição 1.2 *Uma distribuição temperada $f \in \mathcal{S}'$ está em $h^p(\mathbb{R}^n)$, se e somente se, existe $s > 0$ tal que, $f_s^* \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Temos ainda que as normas L^p das funções maximais f_s^* e $m_{\mathcal{F}} f$ são comparáveis.*

Prova da Proposição (1.2): Mostraremos primeiramente que $f_s^*(x) \leq m_{\mathcal{F}_s} f(x)$ pontualmente.

De fato, sejam $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$, ϕ, uma função de $K_s(x)$, para um certo s fixo. Então, como, $S(\phi) \subset B(x,r)$ com $r < 1$ e $\|D^\alpha \phi\|_\infty \leq \frac{1}{r^{n+|\alpha|}}$, para todo $|\alpha| \leq s$, mostraremos que a família de funções $\{\psi_{x,r}\}_{0<r<1}$

definida por $\psi_{x,r}(y) = r^n\phi(x-ry)$, forma uma família limitada em $S(\mathbb{R}^n)$. Mais precisamente, mostraremos que $\{\psi_{x,r}\}_{0<r<1} \subset \mathcal{F}_s$. De fato, considere o conjunto das seminormas $\| \ \|_{\alpha,\beta}$ para multi-índices $|\alpha|, |\beta| \leq s$. Então,

$$\|\psi_{x,r}\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |z^\alpha D^\beta \psi_{x,r}(z)| \leq r^{n+|\beta|}\|D^\beta\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq 1 \text{ para } |\alpha|, |\beta| \leq s.$$

Logo, $|\langle f, \phi\rangle| = |\langle f, \tau_x(\check{\psi}_{x,r})\rangle| = |f * (\psi_{x,r})_r|$ sendo que $\check{\psi}(x) = \psi(-x)$ e $\tau_x f(y) = f(y-x)$. Assim, como, dada qualquer ϕ em $K_s(x)$ a família $\{\psi_{x,r}\}_{0<r<1}$ está contida em $\mathcal{F} = \{\phi \in S(\mathbb{R}^n) : \|\phi\|_{\alpha,\beta} \leq 1 \text{ para } |\alpha|, |\beta| \leq s\}$ segue que,

$$f_s^*(x) \leq \sup_{0<t<1} \sup_{\psi\in\mathcal{F}_s} |f * \psi_r(x)| = m_{\mathcal{F}} f(x).$$

Esta desigualdade nos permite concluir que $\|f_s^*\|_{L^p} \leq \|m_{\mathcal{F}_s} f\|_{L^p}$, para todo s fixo. Desta forma como $f \in h^p(\mathbb{R}^n)$ escolhendo s suficientemente grande para que $\|m_{\mathcal{F}} f\|_{L^p}$ seja equivalente a $\|m_\varphi f\|_{L^p}$ vemos que $\|f_s^*\|_{L^p} \leq \|m_{\mathcal{F}_s} f\|_{L^p} < \infty$. □

Reciprocamente, suponha que f seja uma distribuição temperada tal que $f_m^* \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para algum $m > 0$.

Seja ϕ uma função de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, suportada na bola unitária $B(0,1)$ tal que $\int \phi(x)dx \neq 0$ e escreva para todo $0 < t < 1$ o produto de convolução.

$$f * \phi_t(x) = \int f(y)\phi(\frac{x-y}{t})\frac{dy}{t^n} = |\langle f, \psi_{x,t}\rangle|$$

observe que $S(\psi_{x,t}) \subset B(x,t)$ com $t < 1$, e além disso,

$$\|D^\alpha \psi_{x,t}\|_{L^\infty} = t^{-n-|\alpha|}\|D^\alpha\phi\|_{L^\infty}$$

Seja $C = \max_{|\alpha|\leq m'} \|D^\alpha\phi\|_{L^\infty}$ então $\{\frac{\psi_{x,t}}{C}\}_{0<t<1}$ está contida em $K_{m'}(x)$, para todo $m' > 0$ logo,

$$m_\phi f(x) \leq c_{m'} \sup_{\psi\in K_{m'}} |\langle f, \psi\rangle| = C f_{m'}^*(x) \leq C f_m^*(x) \quad \forall m' \geq m. \tag{1.8}$$

Pelo Teorema (1.3) temos que existe uma constante C' independente de f tal que $\|m_{\mathcal{F}_N} f\|_{L^p} \leq C'\|m_\phi f\|_{L^p}$. Assim, segue da desigualdade (1.8) que se s for suficientemente grande então

$$\|m_{\mathcal{F}_N} f\|_{L^p} \leq C'\|m_\phi f\|_{L^p} \leq C''\|f_m^*\|_{L^p}.$$

■

1.4 Espaços de Hardy numa variedade compacta.

Nesta Seção descreveremos três formas diferentes de extensão dos espaços de Hardy para uma variedade compacta M dotada de uma métrica

Riemanniana. Definiremos os espaços $H^p(M)$, $\tilde{H}^p(M)$, $H^p_{atom}(M)$ através de três enfoques diferentes, enfoques estes, que resultarão numa mesma noção de espaço de Hardy em M. Descrevemos a seguir uma forma natural para estender os espaços de Hardy locais a uma variedade compacta M dotada de uma métrica Riemanniana g.

1.4.1 Espaço $H^p(M)$.

Definição 1.3 *Dizemos que uma coleção de cartas $\mathcal{C} = \{U_\alpha, \Phi_\alpha\}$ definida sobre uma variedade diferenciável M é regular se:*
(i) $M \subseteq \cup_\alpha U_\alpha$
(ii) $\Phi_\alpha : U_\alpha \longmapsto B_3(0)$ é uma difeomorfismo sobre a bola de raio 3 e tal que
(iii) a coleção de abertos definidos por $V_\alpha = \Phi_\alpha^{-1}(B_1(0))$ ainda constituem uma cobertura de M. Neste caso dizemos que a coleção $\mathcal{C} = \{U_\alpha, V_\alpha, \Phi_\alpha\}$ é uma coleção de cartas regular.

Definição 1.4 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão n e seja $\{U_\alpha, \Phi_\alpha\}$ a coleção de cartas dada pela estrutura diferenciável de M. Dizemos que uma distribuição $f \in \mathcal{D}'(M)$ está no espaço $H^p(M)$ se existe uma partição da unidade $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ subordinada a cobertura $\{U_\alpha\}$ tal que $f\varphi_i \circ \Phi_\alpha^{-1} \in h^p(\mathbb{R}^n)$, para todo $i \in I$, α tal que $S(\varphi_i) \subset U_\alpha$.*

Esta definição independe da partição e da escolha da carta. Para ver isto suponha que φ_i seja uma elemento da partição tal que $S(\varphi_i) \subset U_\alpha$ é tal que $\varphi_i f \circ \Phi_\alpha^{-1} \in h^p(\mathbb{R}^n)$ e suponha além disso, que $S(\varphi_i) \subset U_{\alpha'}$ então devemos mostrar que $\varphi_i f \circ \Phi_{\alpha'}^{-1} \in h^p(\mathbb{R}^n)$. De fato, desde que $S(\varphi_i) \subset U_\alpha \cap U_{\alpha'}$ podemos escrever

$$f\varphi_i \circ \Phi_{\alpha'}^{-1} = \underbrace{f\varphi_i \circ \Phi_\alpha^{-1}}_{h^p} \circ \underbrace{\Phi_\alpha \circ \Phi_{\alpha'}^{-1}}_{difeom.} = f_{i,\alpha,\alpha'}.$$

Podemos supor sem perda de generalidade que a coleção de cartas $\{U_\alpha, \Phi_\alpha\}$ seja regular de acordo com a definição (1.3) isto é, $\{U_\alpha, V_\alpha, \Phi_\alpha\}$ é tal que $\Phi_\alpha(U_\alpha) = B(0,3)$ e que $V_\alpha = \Phi_\alpha^{-1}(B(0,1))$ ainda cobre M. Assim, podemos supor que $S(\varphi_i) \subset V_\alpha \cap V_{\alpha'}$.

Neste caso, temos que a função $f\varphi_i \circ \Phi_\alpha^{-1}$ tem suporte compacto na bola unitária $B(0,1)$ e o difeomorfismo

$$\Phi_\alpha \circ \Phi_{\alpha'}^{-1} : \Phi_{\alpha'}(U_\alpha \cap U_{\alpha'}) \longmapsto \Phi_\alpha(U_\alpha \cap U_{\alpha'})$$

tem a propriedade de para todo x no seu domínio tal que $|x| \leq 1$ então $|\Phi_i \circ \Phi_k^{-1}(x)| \leq 1$ é possível mostrar que $f_{i,\alpha,\alpha'} \in h^p(\mathbb{R}^n)$, basta observar o seguinte Lema.

Lema 1.4 *Sejam U e V abertos limitados não disjuntos da bola unitária $B(0,1)$ e $\alpha : U \longmapsto V$ um difeomorfismo C^∞ tal que*

$$\alpha(U \cap B(0,1)) \subset V \cap B(0,1)$$

e tal que $\forall \beta \in \mathbb{Z}_+^n \ \exists C_\beta$, tal que $\|\partial^\beta J_\alpha\|_\infty \leq C_\beta < \infty$ sendo que J_α é o Jacobiano de α. Então se f é um elemento de $h^p(\mathbb{R}^n)$ suportado no conjunto $U \cap B(0,1)$ tem-se $f \circ \alpha \in h^p(\mathbb{R}^n)$.

Prova do Lema (1.4): É suficiente supor que f seja um átomo a do tipo 1 suportado na bola $B = B_r(x_0) \subset V \cap B_1(0)$. Seja $x_0' = \alpha^{-1}(x_0)$ e B' a menor bola que contém o conjunto $\alpha^{-1}(B)$, e denotamos ainda por B'^* a bola de centro x_0' e raio $2r'$. Seja φ uma função teste suportada na bola unitária, então como consequência temos que a função $\varphi_t * (a \circ \alpha)$ tem suporte na bola $B_2(0)$ logo,

$$\|a \circ \alpha\|_{h^p}{}^p \leq \int\limits_{B'^*} \sup_{t<1} |[\varphi_t * (a \circ \alpha)](x)|^p dx + \int\limits_{B_3(0)\setminus B'^*} \sup_{t<1} |[\varphi_t * (a \circ \alpha)](x)|^p dx.$$

O primeiro termo pode ser majorado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int\limits_{B'^*} \sup_{t<1} |[\varphi_t * (a \circ \alpha)](x)|^p dx &\leq \|\varphi\|_{L^1}^p \|a\|_\infty^p |B'^*| \\ &\leq 2^n \|\varphi\|_{L^1}^p \|a\|_\infty^p |B'| \\ &\leq C 2^n \|\varphi\|_{L^1}^p \|a\|_\infty^p |B| \end{aligned}$$

Quanto ao segundo termo, pela fórmula de Taylor com resto integral podemos escrever:

$$\begin{aligned} \varphi_t * (a \circ \alpha)(x) &= \int\limits_{\alpha^{-1}(B)} \varphi_t(x-y) a(\alpha(y)) dy \\ &= \int\limits_{\alpha^{-1}(B)} \varphi_t((x-x_0') - (y-x_0')) a(\alpha(y)) dy \\ &= \sum_{|\beta| \leq N} \tfrac{1}{\beta!} \int\limits_{\alpha^{-1}(B)} t^{-n-|\beta|} \partial^\beta \varphi\Big(\tfrac{x-x_0'}{t}\Big)(x_0'-y)^\beta a(\alpha(y)) dy \\ &+ \sum_{|\beta|=N+1} \int\limits_{\alpha^{-1}(B)} (x_0'-y)^\beta R_\alpha(x,y) a(\alpha(y)) dy \\ &= \sum_{k=1}^{N} A_k + A_{N+1} \ \text{ onde} \end{aligned}$$

$$A_k = \sum_{|\beta|=k} \frac{1}{k!} \int\limits_{\alpha^{-1}(B)} t^{-n-|\beta|} \partial^\beta \varphi\Big(\frac{x-x_0'}{t}\Big)(x_0'-y)^\beta a(\alpha(y)) dy$$

$$A_{N+1} = \sum_{|\beta|=N+1} \int_{\alpha^{-1}(B)} (x_0' - y)^\beta R_\alpha(x,y) a(\alpha(y)) dy$$

com

$$R_\alpha(x,y) = \int_0^1 \frac{(N+1)(1-s)^N}{\alpha!} t^{-n-N-1} \partial^\alpha \varphi\Big[\frac{(x-x_0') - s(y-x_0'))}{t}\Big] ds$$

satisfazendo a desigualdade

$$|R_\alpha(x,y)| \leq C t^{-n-N-1} \leq C|x-y|^{-n-N-1}.$$

Provaremos agora a seguinte estimativa $\int\limits_{B_3 \setminus B'^*} |A_k|^p \leq C\|a\|_\infty^p |B|$.

$$|A_k|^p \leq C|x-x_0'|^{-np-kp} \sum_{|\beta|=k} \Big| \int_{\alpha^{-1}(B)} (x_0'-y)^\beta a(\alpha(y)) dy \Big|^p$$

$$\int_{B_3\setminus B'^*} |A_k|^p \leq C\Big\{ \int_{B_3\setminus B'^*} |x-x_0'|^{-np-kp} dx \Big\} \Big\{ \sum_{|\beta|=k} \Big| \int_{\alpha^{-1}(B)} (y-x_0')^\beta a(\alpha(y)) dy \Big|^p \Big\}$$

o primeiro fator

$$\int_{B_3\setminus B'^*} |x-x_0'|^{-np-kp} dx \leq C \log|B'^*|, \quad \text{para todo } k \leq N \tag{1.9}$$

vejamos agora o que ocorre com o segundo fator

$$\int_{\alpha^{-1}(B)} (x_0'-y)^\beta a(\alpha(y)) dy = \int_B (\alpha^{-1}(x_0) - \alpha^{-1}(y))^\beta a(y) J_\alpha(y) dy. \tag{1.10}$$

Seja $\theta(y) = (\alpha^{-1}(x_0) - \alpha^{-1}(y))^\beta$ e considere as expanções de Taylor numa vizinhança de x_0 do Jacobiano de α e da função θ respectivamente,

$$J_\alpha(y) = p(y) + (y-x_0)^{N+1} r_{N+1}(y) \tag{1.11}$$

$$\theta(y) = q(y) + (y-x_0)^{N+1} s_{N+1}(y) \tag{1.12}$$

desta forma,

$$\begin{aligned}
\int_B (\alpha^{-1}(x_0) - \alpha^{-1}(y))^\beta a(y) J_\alpha(y) dy &= \int_B p(y)q(y)a(y)dy \\
&+ \int_B p(y)(y-x_0)^{N+1} s_{N+1}(y) a(y) dy \\
&+ \int_B q(y)(y-x_0)^{N+1} r_{N+1}(y) a(y) dy \\
&+ \int_B p(y)q(y)(y-x_0)^{2(N+1)} a(y) dy
\end{aligned}$$

a primeira integral se anula devido ao cancelamento dos momentos e pelo fato de p e q serem polinômios na variável y.

$$\begin{aligned}
|\int_B p(y)(y-x_0)^{N+1}s_{N+1}(y)a(y)dy| &\leq \|p\|_\infty\|s_{N+1}\|_\infty\|a\|_\infty\int_B|y-x_0|^{N+1}dy \\
&\leq C\|a\|_\infty|B|^{\frac{N+1+n}{n}} \\
|\int_B q(y)(y-x_0)^{N+1}r_{N+1}(y)a(y)dy| &\leq \|q\|_\infty\|r_{N+1}\|_\infty\|a\|_\infty\int_B|y-x_0|^{N+1}dy \\
&\leq C\|a\|_\infty|B|^{\frac{N+1+n}{n}} \\
|\int_B p(y)q(y)(y-x_0)^{2(N+1)}a(y)dy| &\leq \|p\|_\infty\|q\|_\infty\|a\|_\infty\int_B|y-x_0|^{2(N+1)}dy \\
&\leq C\|a\|_\infty|B|^{\frac{2(N+1)+n}{n}} \leq C\|a\|_\infty|B|^{\frac{N+1+n}{n}}
\end{aligned}$$

finalmente temos a seguinte estimativa para o segundo fator

$$\sum_{|\beta|=k}\Big|\int_{\alpha^{-1}(B)}(y-x_0')^\beta a(\alpha(y))dy\Big|^p \leq C\|a\|_\infty|B|^{\frac{Np+p+np}{n}}$$

Logo,

$$\int_{B_3\setminus B'^*}|A_k|^p \leq C\|a\|_\infty^p|B|^{\frac{Np+p+np}{n}}\log|B'^*|$$

$$\leq C\|a\|_\infty^p|B| \text{ desde que } N+1>n\Big[\frac{1}{p}-p\Big] \text{ e } |B|\simeq|B'|.$$

□

A seguir provaremos a estimativa $\int_{B_3\setminus B'^*}|A_{N+1}|^p dx \leq C\|a\|_\infty^p|B|$.

$$\begin{aligned}
\int_{B_3\setminus B'^*}|A_{N+1}|^p dx &\leq \int_{B_3\setminus B'^*}\Big[\int_{\alpha^{-1}(B)}\frac{|y-x_0'|^{N+1}|a(\alpha(y))|}{|x-y|^{N+1+n}}dy\Big]^p dx \\
&\leq \Big\{\int_{B_3\setminus B'^*}2^{Np+p+np}|x-x_0'|^{-Np-p-np}dx\Big\} \\
&\cdot \Big\{\int_{\alpha^{-1}(B)}|y-x_0'|^{N+1}|a(\alpha(y))|dy\Big\}^p
\end{aligned}$$

para o segundo fator temos

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\alpha^{-1}(B)} |y-x_0'|^{N+1}|a(\alpha(y))|dy &= \int\limits_{B_r(x_0)} |\alpha^{-1}(y)-\alpha^{-1}(x_0)|^{N+1}|a(y)|J(y)dy \\
&\leq C\|a\|_\infty\|J\|_\infty \int\limits_{B_r(x_0)} |y-x_0|^{N+1}dy \\
&= C\|a\|_\infty\|J\|_\infty|S^{n-1}|\int\limits_0^r \tau^{N+n}d\tau \\
&= C\|a\|_\infty\|J\|_\infty|S^{n-1}|r^{\frac{N+n+1}{n}n} \\
&= C\|a\|_\infty\|J\|_\infty|B(0,r^{\frac{N+n+1}{n}})| \\
&\leq C\|a\|_\infty\|J\|_\infty|B|^{\frac{N+n+1}{n}}
\end{aligned}$$

logo,

$$\Big\{\int\limits_{\alpha^{-1}(B)} |y-x_0'|^{N+1}|a(\alpha(y))|dy\Big\}^p \leq C\|a\|_\infty^p\|J\|_\infty^p|B|^{\frac{Np+np+p}{n}}$$

por outro lado, temos a seguinte estimativa para o primeiro fator

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B_3\setminus B'^*} |x-x_0'|^{-Np-p-np}dx &\leq \int\limits_{B_R(x_0')\setminus B_{\frac{r'}{2}}(x_0')} |x-x_0'|^{-Np-np-p}dx \\
&\overset{\mathrm{R}\geq 5}{=} |S^{n-1}|\int\limits_{\frac{r'}{2}}^R \tau^{-Np-np-p+n-1}d\tau \\
&= |S^{n-1}|\{R^{-Np-np-p+n}-(r'/2)^{-Np-np-p+n}\}
\end{aligned}.$$

Fazendo R tender para o infinito temos que

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B_3\setminus B'^*} |x-x_0'|^{-Np-p-np}dx &\leq C|S^{n-1}|r'^{-Np-np-p+n} \\
&\overset{\mathrm{r}\simeq\mathrm{r}'}{=} C|S^{n-1}|r^{-Np-np-p+n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B_3\setminus B'^*} |A_{N+1}|^p dx &\leq C\|a\|_\infty^p\|J\|_\infty^p|S^{n-1}|^{\frac{Np+np+p}{n}+1}r^{Np+np+p}r^{Np-np-p+n} \\
&= C\|a\|_\infty^p\|J\|_\infty^p|S^{n-1}|^{\frac{Np+np+p}{n}}r^n|S^{n-1}| \\
&\leq C\|a\|_\infty^p|B| \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

1.4.2 Espaço $H^p_{atom}(M)$.

A seguir vamos definir uma noção de espaços de Hardy em M partindo de elementos mais simples que são os átomos, noção esta que já existe no $\mathbb{R}^n$ e que pode ser transportada para M através das cartas locais de M.

Definição 1.5 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e compacta de dimensão n. Dizemos que uma função $a \in L^\infty(M)$ é um $H^p(M)$-átomo se existe um aberto $U \subset M$ e um difeomorfismo $\Phi : U \longmapsto B_3(0) \subset \mathbb{R}^n$ tal que*
(i) *$S(a) \subset V = \Phi^{-1}(B_1(0))$,*
(ii) *$a \circ \Phi^{-1}$ é um h^p-átomo do $\mathbb{R}^n$, conforme a Definição (1.1).*

Definição 1.6 *Seja $\mathcal{C} = \{(U_\alpha, V_\alpha, \Phi_\alpha)\}$ uma coleção de cartas regular. Um átomo a se diz associado à coleção $\mathcal{C}$ se satisfaz (i) e (ii) da definição anterior com $\Phi = \Phi_\alpha$, para algum α.*

Definição 1.7 *Dizemos que uma distribuição $f \in \mathcal{D}'(M)$ está em $H^p_{at}(M)$ se f pode ser representada como uma soma de $H^p(M)$-átomos com coeficientes em $l^p(\mathbb{C})$. Mais precisamente*

$$H^p_{at}(M) = \{f \in D'(M) : f = \sum_i \lambda_i a_i \text{ tal que } \sum_i |\lambda_i|^p < \infty\} \tag{1.13}$$

(com a série convergindo no sentido das distribuições para f), dotado com a norma

$$\|f\|_{H^p_{at}(M)} = \inf\Big\{ \sum_i |\lambda_i|^p : f = \sum_i \lambda_i a_i \Big\}$$

com o ínfimo sendo tomado sobre todas as representações possíveis em $H^p(M)-$átomos.

1.4.3 Espaço $\mathcal{H}^p(M)$.

Na Seção (1.3) demonstramos que o espaço $h^p(\mathbb{R}^n)$ pode ser definido, de forma equivalente, através da função maximal f^*_s. Esta função maximal pode ser definida de forma semelhante, assim como é feita no caso do $\mathbb{R}^n$, sobre uma variedade Riemanniana e compacta, estendendo de forma intrínseca a noção de espaços de Hardy a M.

Definição 1.8 *Uma variedade diferenciável M é dita orientável se é possível definir uma n-forma Ω de classe C^∞ que nunca se anula, neste caso Mé dita orientável pela escolha de Ω.*

Teorema 1.5 *Seja M uma variedade Riemanniana e orientada com métrica Riemanniana g. Fixada uma orientação em M existe uma única n-forma Ω que dá a mesma orientação e que assume valor $+1$ em qualquer referencial ortonormal orientado.* ■

Esta forma Ω é chamada *elemento de volume* de uma variedade Riemanniana orientada. Dado uma sistema de coordenadas (U, φ) temos a seguinte expressão em coordenadas para Ω:

$$\varphi^{-1^*}\Omega = \sqrt{g}dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

onde $g(x) = det(g_{ij}(x))$ e com $g_{ij}(x) = g_p(\frac{\partial}{\partial x_i}\big|_p, \frac{\partial}{\partial x_j}\big|_p)$ e $\varphi(p) = x$ $i, j = 1 \ldots n$.

Quando $M = \mathbb{R}^n$ com coordenadas e métricas usuais, temos que $\Omega = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$.

Seja M uma variedade compacta dotada com duas métricas Riemannianas g e $\tilde{g}$ então existe uma constante $C > 1$ tal que

$$\frac{1}{C}g \leq \tilde{g} \leq Cg \tag{1.14}$$

com tais desigualdades sendo interpretadas no sentido das formas bilineares.

Definição 1.9 *Seja $(U_i, \Phi_i)_{i\in I}$ um sistema de coordenadas de M e φ_i uma partição da unidade subordinada à cobertura U_i para toda $f : M \longmapsto \mathbb{R}$ Lebesgue integrável definimos*

$$\int_M f dv(g) = \sum_{i\in I} \int_{\Phi_i(u_i)} (\varphi_i f \circ \Phi_i^{-1})(x)\sqrt{g \circ \Phi_i^{-1}(x)}dx.$$

Definição 1.10 *Definimos o espaço $L^p(M)$ como*

$$L^p(M) = \{f : M \longmapsto \mathbb{R} \text{ mensurável } : \int_M |f|^p dv(g) < \infty\}.$$

A importância de uma variedade Riemanniana está no fato de que o tensor métrico g torna o espaço tangente em cada ponto um espaço Euclidiano, com o produto interno definido por $g(X_p, Y_p)$. Isto torna possível definir angulos entre curvas, ou seja, ângulos entre seus vetores tangentes X_p e Y_p, e comprimentos de curvas em M.

Seja $t \longmapsto p(t)$, $a \leq t \leq b$, uma curva de classe C^1 em uma variedade Riemanniana M. Então seu comprimento L é definido como o valor da integral

$$L = \int_a^b \Big(g\Big(\frac{dp}{dt}, \frac{dp}{dt}\Big)\Big)^{\frac{1}{2}} dt$$

Teorema 1.6 *Toda variedade Riemanniana conexa é um espaço métrico com a métrica $d(p, q) =$ ínfimo dos comprimentos das curvas de classe C^1 por partes que unem os pontos p e q. E além disso, as topologias como variedade e como espaço métrico coincidem.* ■

Definição 1.11 *Seja $\{U_\alpha, V_\alpha, \Phi_\alpha\}$ uma cobertura regular e seja δ o número de Lebesgue associado à cobertura V_α. Para todo $p \in M$ fixo e $m > 0$ defina o conjunto*

$$K_s(p) = \{\phi \in C^\infty(M) : S(\phi) \subset S_r(p),\ r \leq \delta$$
$$\sup_{|\alpha|\leq s} \sup_{\{i_1,\ldots i_k\}\subset\{1,\ldots N\}} r^{n+s}\|X_{i_1}^{\alpha_1}\ldots X_{i_k}^{\alpha_n}\phi\|_{L^\infty(M)} \leq 1\}$$

$\alpha \in \mathbb{N}_+^n$, onde $S_r(p) = \{q \in M : d(p,q) < r\}$. E consideremos a seguinte função

$$f_s^*(p) = \sup_{\phi\in K_s(p)} |\langle f, \phi\rangle|$$

então definimos o espaço

$$\mathcal{H}^p(M) = \{f \in D'(M) : f_s^* \in L^p(M)\} \tag{1.15}$$

A desigualdade (1.14) implica no seguinte resultado.

Proposição 1.3 *Se M é compacta então o espaço $\mathcal{H}^p(M)$ não depende da métrica.* ■

Lema 1.5 *Existe uma constante $C > 0$ tal que para qualquer função $\phi \in K_s(p)$ e qualquer carta regular $(U_\alpha, V_\alpha, \Phi_\alpha)$ tal que $p \in V_\alpha$ temos que $C(\phi \circ \Phi_\alpha^{-1}) \in K_s(\Phi_\alpha(p))$. Além disso, C também independe do ponto p.*

Prova: Seja $\{U_\alpha, V_\alpha, \Phi_\alpha\}$ uma cobertura regular de M então $\Phi_i(V_i) = B_1(0)$ e $\Phi_i(U_i) = B_3(0)$. Considere o compacto $K = \{(x,\alpha) \in M \times \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 3,\ \|\alpha\| = 1\}$ então existem constantes m, M tais que

$$0 < m < \sum_{i,j} g_{ij}(x)\alpha^i\alpha^j < M < \infty \text{ para todo } (x,\alpha) \in K.$$

Sejam p, q pontos de U_i, definimos a distância Euclidiana de p, q por $d_E(p,q) = \|\Phi_\alpha(p) - \Phi_\alpha(q)\|$ seja ainda $t \longmapsto p(t),\ a \leq t \leq b$ a parametrização de uma curva L suave por partes ligando p e q então o seu comprimento é dado por

$$L = \int_a^b \Big(\sum_{i,j} g_{ij}(x(t))\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt}\Big)^{\frac{1}{2}} dt$$

e além disso, seja $\tilde{L}$ a imagem da curva L pela carta (U_i, Φ_i) cujo comprimento é

$$\tilde{L} = \int_a^b \Big(\sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt}^2\Big)^{\frac{1}{2}} dt$$

então

$$0 < m\Big(\sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt}^2\Big)^{\frac{1}{2}} < \Big(\sum_{i,j} g_{ij}(x(t))\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt}\Big)^{\frac{1}{2}} < M\Big(\sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt}^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

após integrarmos de a a b temos que

$$0 \leq m\tilde{L} < L \leq M\tilde{L} < \infty$$

tomando o ínfimo sobre L temos

$$0 \leq md_E(p,q) \leq d(p,q) \leq Md_E(p,q) < \infty.$$

Seja agora $\phi \in K_s(p)$ desde que $S(\phi) \subset S_r(p)$ então se $p \in V_\alpha$ temos que $S(\phi \circ \Phi^{-1}) \subset \Phi_\alpha(S_r(p))$ logo seja $\tilde{r}$ o menor raio tal que $\Phi_\alpha(S_r(p)) \subset B_{\tilde{r}}(\Phi_\alpha(p))$ e além disso, existe q no bordo de $S_r(p)$ tal que $\tilde{r} = d_E(p,q) \simeq d(p,q) = r$. Mais precisamente, como $\frac{d(p,q)}{M} < d_E(p,q) < \frac{d(p,q)}{m}$ para $p, q \in U_\alpha$ segue que

$$\frac{r}{M} < \tilde{r} < \frac{r}{m}$$

logo para todo $r < m_0 = \min\{m, \delta\}$ temos que $\tilde{r} < 1$.

Seja M uma variedade compacta de dimensão n então existem N campos suaves $\{X_1, \ldots, X_N\}$ tais que em cada vizinhança coordenada (U_i, Φ_i) é possível selecionar n destes campos tais que $\{X_{i_1 p}, \ldots, X_{i_n p}\}$ sejam uma base para o espaço tangente T_pM para todo $p \in U_i$.

Sejam $\{Y_1, \ldots, Y_N\}$ os campos suaves provenientes dos campos $\{X_1, \ldots, X_N\}$ através da carta (U_i, Φ_i). Como Φ_i é um difeomorfismo temos que o conjunto $\{Y_{i_1}, \ldots, Y_{i_n}\}$ correspondentes ao referencial $\{X_{i_1}, \ldots, X_{i_n}\}$ também constitui-se num referencial para o aberto $B_3(0)$. Então em cada ponto $x \in B_3(0)$ o conjunto $\{Y_{i_1 x}, \ldots, Y_{i_n x}\}$ é uma base para o espaço tangente $T_x\mathbb{R}^n$. Este conjunto se representa como o produto de uma matriz não singular pelos vetores canônicos $\{\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{i_n}}\}$ em cada ponto de $B(0,3)$. Assim invertendo a matriz podemos obter a seguinte representação

$$\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j} = b_1^j X_{i_1} + \ldots + b_n^j X_{i_n}, \quad j = 1, \ldots, n$$

com $b_k^j \in C^\infty(B_3(0))$.

Assim se $\gamma \in \mathbb{Z}_+^n$ é um multi-índice tal que $|\gamma| = k$ então

$$\begin{aligned}
\partial^\gamma &= \partial_1^{\gamma_1} \ldots \partial_n^{\gamma_n} \\
&= (b_1^1 Y_{i_1} + \ldots + b_n^1 Y_{i_n})^{\gamma_1} \ldots (b_1^n Y_{i_1} + \ldots + b_n^n Y_{i_n})^{\gamma_k} \\
&= \Big(\sum_{\{j_1, \ldots, j_{\gamma_1}\} \subset \{i_1, \ldots, i_n\}} b^1_{j_1, \ldots, j_{\gamma_1}} Y_{j_1} \ldots Y_{j_{\gamma_1}} \Big) \\
\ldots &\ \Big(\sum_{\{j_1, \ldots, j_{\gamma_n}\} \subset \{i_1, \ldots, i_n\}} b^n_{j_1, \ldots, j_{\gamma_n}} Y_{j_1} \ldots Y_{j_{\gamma_n}} \Big) \\
&= \sum_{\{j_1, \ldots, j_{\gamma_n}\} \subset \{i_1, \ldots, i_n\}} C_{j_1, \ldots, j_{\gamma_n}} Y_{j_1}^{\gamma_1} \ldots Y_{j_{\gamma_n}}^{\gamma_n}.
\end{aligned}$$

Assim, se $\phi \in \tilde{K}_m(p)$ então

$$\sup_{x\in B_2(0)} |\partial^\gamma(\phi\circ\Phi_i^{-1})(x)| \leq$$

$$\sum_{\{j_1,\ldots,j_{\gamma_n}\}\subset\{i_1,\ldots,i_n\}} \sup_{B_2(0)} |C_{j_1,\ldots,j_{\gamma_n}}(x) Y_{j_1}^{\gamma_1}\ldots Y_{j_{\gamma_n}}^{\gamma_n}(\phi\circ\Phi_i^{-1})(x)| \leq$$

$$C \sum_{\{j_1,\ldots,j_{\gamma_n}\}\subset\{i_1,\ldots,i_n\}} \sup_{B_2(0)} |X_{j_1}^{\gamma_1}\ldots X_{j_{\gamma_n}}^{\gamma_n}(\phi)(x)| \leq$$

$$C \sum_{\{j_1,\ldots,j_{\gamma_n}\}\subset\{1,\ldots,N\}} \sup_{\Phi^{-1}(B_2(0))} |X_{j_1}^{\gamma_1}\ldots X_{j_{\gamma_n}}^{\gamma_n}(\phi)(x)| \leq$$

$$C \sup_{\{j_1,\ldots,j_{\gamma_n}\}\subset\{1,\ldots,N\}} \|X_{j_1}^{\gamma_1}\ldots X_{j_{\gamma_n}}^{\gamma_n}\phi\|_{L^\infty(M)} \leq \frac{C}{r^{n+|\gamma|}}$$

onde

$$C = \frac{N!}{(N-n)!} \sup_{\{j_1,\ldots,j_{\gamma_n}\}\subset\{i_1,\ldots,i_n\}} \sup_{B_2(0)} |C_{j_1,\ldots,j_{\gamma_n}}(x)|$$

e $C<\infty$ desde que as funções $C_{j_1,\ldots,j_{\gamma_n}}$ são funções de classe $C^\infty(B_3(0))$. ■

Proposição 1.4 *Os espaços $H^p(M)$, $H^p_{at}(M)$ e $\mathcal{H}^p(M)$ são idênticos.*

Prova da Proposição (1.4):

Passo 1: $H^p(M) = \mathcal{H}^p(M)$.

(i) $H^p(M) \subseteq \mathcal{H}^p(M)$. Seja $f \in H^p(M)$, vamos mostrar que $f_s^* \in L^p(M)$,

De fato, seja $\phi \in K_s(p)$ e vamos estimar $|\langle f,\phi\rangle|$, supondo que $f \in L^1(M)$.

$$\begin{aligned}
\langle f,\phi\rangle &= \int_M f\phi\, dv(g) \quad \text{usando partição da unidade} \\
&= \sum_i \int_M (\varphi_i f)\phi\, dv(g) \\
&= \sum_i \int_{B_1(0)} ((\varphi_i f)\circ\Phi_\alpha^{-1})(x)\ (\phi\circ\Phi_\alpha^{-1})(x)\ \sqrt{g^\alpha(x)}dx
\end{aligned}$$

logo,

$$|\langle f,\phi\rangle| \leq \sum_i \Big| \int_{B_{\tilde{r}}(\Phi_\alpha(p))} ((\varphi_i f)\circ\Phi_\alpha^{-1})(x)\ (\phi\circ\Phi_\alpha^{-1})(x)\ \sqrt{g^\alpha}dx \Big|$$

considere a função $\Psi_\alpha(x) = \phi\circ\Phi_\alpha^{-1}(x)\ \sqrt{g^\alpha(x)}$.

Lembremos que os abertos V_α ainda cobrem M. Como ϕ está suportada na bola $S_r(p)$ relativa a métrica induzida pela métrica Riemanniana então segue do Lema (1.5) que a função Ψ_α está suportada na bola $B_{\tilde{r}}(\Phi_i(p))$ com $r \simeq \tilde{r}$ e $\tilde{r} < 1$. Seja $C_{s,\alpha} = \max_{|\gamma|\leq s} \|D^\gamma(\sqrt{g^i})\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ e seja β um multi-índice tal que $|\beta| \leq s$ então pela regra de Leibniz:

$$\partial^\beta \Psi_\alpha(x) = \sum_{\gamma+\delta=\beta} C_{\gamma,\delta} \partial^\gamma(\phi \circ \Phi_\alpha^{-1})(x) \partial^\delta(\sqrt{g^\alpha(x)})$$

$$\begin{aligned}
\|\partial^\beta \Psi_\alpha\|_{L^\infty} &\leq C_{s,\alpha} \sum_{|\gamma|\leq|\beta|} \|\partial^\gamma(\phi \circ \Phi_\alpha^{-1})\|_{L^\infty} \\
&\leq C_{s,\alpha} \sum_{|\gamma|\leq|\beta|} \sup_{\{j_1,\ldots,j_{\gamma_n}\}\subset\{1,\ldots,N\}} \|X_{j_1}^{\gamma_1} \ldots X_{j_{\gamma_n}}^{\gamma_n} \phi\|_{L^\infty(M)} \\
&\leq C_{s,\alpha} \sum_{|\gamma|\leq|\beta|} \tfrac{1}{r^{n+|\gamma|}} \\
&\leq C_{m,i} \sum_{|\gamma|\leq|\beta|} \tfrac{1}{\tilde{r}^{n+|\gamma|}} \text{ desde que } r \simeq \tilde{r} \\
&\leq \tfrac{C}{\tilde{r}^{n+|\beta|}} \text{ desde que } \tilde{r} < 1.
\end{aligned}$$

Assim temos que a coleção $\frac{\Psi_\alpha}{C} \in K_s(\Phi_\alpha(p))$

logo,

$$\begin{aligned}
|\langle f, \phi\rangle| &\leq \sum_i \Big| \int_{B_{\tilde{r}}(\Phi_\alpha(p))} ((\varphi_i f) \circ \Phi_\alpha^{-1})(x) \phi \circ \Phi_\alpha^{-1}(x) \sqrt{g^\alpha(x)} dx \Big| \\
&= \sum_i C \Big| \int_{B_{\tilde{r}}(\Phi_\alpha(p))} ((\varphi_i f) \circ \Phi_\alpha^{-1})(x) \frac{\Psi_\alpha(x)}{C} dx \Big| \\
&\leq C \sum_i [(\varphi_i f) \circ \Phi_\alpha^{-1}]^*(\Phi_\alpha(p)).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
f_s^*(q)^p &= \sup_{\phi\in K_s(q)} |\langle f, \phi\rangle|^p \\
&\leq C^p \sum_i [(\varphi_i f) \circ \Phi_\alpha^{-1}]_s^{*p}(\Phi_i(q)).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_M f_s^*(q)^p dv(g) &\leq C\sum_i \int_M [(\varphi_i f)\circ\Phi_\alpha^{-1}]_s^{*p}(\Phi_\alpha(q))dv(g) \\
&\leq C\sum_i \int_{B_1(0)} [(\varphi_i f)\circ\Phi_\alpha^{-1}]_s^{*p}(s)\sqrt{g_\alpha}dx \\
&\leq C\sum_i \int_{B_1(0)} [(\varphi_i f)\circ\Phi_\alpha^{-1}]_s^{*p}(x)dx \\
&\leq C\|(\varphi_i f)\circ\Phi_\alpha^{-1}\|^p_{h^p(\mathbb{R}^n)} < \infty
\end{aligned}$$

□

(ii) $\mathcal{H}^p(M) \subseteq H^p(M)$. Seja $\{\varphi_i\}$ uma partição da unidade subordinada a cobertura $\{V_\alpha\}$ devemos mostrar que se $f \in \mathcal{H}^p(M)$ então $f_{i,\alpha} = (\varphi_i f)\circ\Phi_i^{-1} \in h^p(\mathbb{R}^n)$. Para isto basta mostrar que $(f_{i,\alpha}^*)_s \in L^p(\mathbb{R}^n)$, e usar a equivalência entre: $\|(f_{i,\alpha}^*)_s\|_{L^p}$ e $\|m_{\mathcal{F}_s}(f_{i,\alpha})\|_{L^p}$.

$$\begin{aligned}
(f_{i,\alpha})_s^*(x) &= \sup_{\Psi\in K_s(x)} |\langle(\varphi_i f)\circ\Phi_\alpha^{-1}, \tfrac{\Psi}{\sqrt{g_\alpha}}\sqrt{g_\alpha}\rangle| \\
&= \sup_{\Psi\in K_s(\Phi_\alpha^{-1}(x))} C|\langle\varphi_i f, \tfrac{\Psi\circ\Phi_\alpha}{C\sqrt{g_\alpha\circ\Phi_\alpha}}\rangle| \\
&= \sup_{\Psi\in K_s(\Phi_\alpha^{-1}(x))} C|\langle\varphi_i f, \tfrac{\Psi\circ\Phi_\alpha}{C\sqrt{g_\alpha\circ\Phi_\alpha}}\rangle| \\
&\leq C(\varphi_i f)_s^*(\Phi_\alpha^{-1}(x))
\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (f_{i,\alpha})_s^*(x)^p dx &\leq C \int_{B_1(0)} C(\varphi_i f)_s^*(\Phi_\alpha^{-1}(x))\sqrt{g_i}\frac{dx}{\sqrt{g_i}} \\
&\leq C\int_{V_i} (\varphi_i f)_s^{*p}\frac{dv(g)}{\sqrt{g_i}} \\
&\leq \tfrac{C}{\min|\sqrt{g_i}|}\int_{V_i} (\varphi_i f)_s^{*p} dv(g) < \infty
\end{aligned}$$

pois o espaço $\mathcal{H}^p(M)$ é localizável no sentido de que se $f \in \mathcal{H}^p(M)$ e se φ for uma função suave tal que o $S(\varphi)$ esteja contido em alguma vizinhança coordenada então $\varphi f \in \mathcal{H}^p(M)$). □

Passo 2 $H^p(M) = H^p_{at}(M)$

(i) $H^p(M) \subset H^p_{at}(M)$

Se $f \in H^p(M)$ então existe uma partição da unidade $\{\varphi_i\}$ subordinada à cobertura $\{V_i\}$ regular fixada $\{\Phi_i, U_i, V_i\}$ tal que $(\varphi_i f)\circ\Phi_i^{-1}$ estendida por zero fora da bola $B(0,1)$ pertence ao espaço $h^p(\mathbb{R}^n)$, para todo índice i. Chamaremos de f_i tal extensão, então como $f_i \in h^p(\mathbb{R}^n)$ está suportada na bola $B_1(0)$ temos que f_i pode ser representada por meio de uma soma de h^p-átomos com coeficientes em l^p.

$$f_i = \sum_k \lambda_k^i a_k^i$$

tais que $S(a_k^i) \subset B_2(0)$ para todo k. Logo

$$f = \sum_i (\varphi_i f)\circ\Phi_i^{-1}\circ\Phi_i = \sum_i f_i\circ\Phi_i = \sum_i\sum_k \lambda_k^i (a_k^i\circ\Phi_i)$$

com $a_k^i\circ\Phi_i$ sendo átomos no sentido de Goldberg. □

(ii) $H^p_{at}(M) \subseteq H^p(M)$

Seja $f \in H^p_{at}(M)$ então existe uma coleção deH^p-átomos $\{a_i\}$ e uma sequência λ_i em l^p tais que $f = \sum_i \lambda_i a_i$ em $\mathcal{D}'(M)$ então

$$(f_s^*)^p \le \sum_i |\lambda_i|^p (a_i)_s^{*p}$$

$$\int_M (f_s^*)^p \le \sum_i |\lambda_i|^p \int_M (a_i)_s^{*p}$$

Neste ponto observamos que se a é um H^p-átomo então:

$$(a_i)_s^*(q) = \sup_{\phi\in K_s(q)} |\langle a_i,\phi\rangle| = \sup_{\phi\in K_s(q)} \Big|\int_{B_1(0)} [(a_i\varphi_\alpha)\circ\Phi_i^{-1}][\phi\circ\Phi_\alpha^{-1}]\sqrt{g_\alpha}dx\Big|$$

$$\le C \sup_{\phi\in K_s(q)} \Big|\int_{B_1(0)} [(a_i\varphi_i)\circ\Phi_\alpha^{-1}]\frac{[\phi\circ\Phi_\alpha^{-1}]\sqrt{g_\alpha}}{C}dx\Big|$$

$$\le C \sup_{\Psi\in K_s(\Phi_\alpha(q))} \Big|\int_{B_1(0)} [(a_i\varphi_i)\circ\Phi_\alpha^{-1}]\Psi dx\Big| = C[(a_i\varphi_i)\circ\Phi_\alpha^{-1}]_s^*(\Phi_\alpha(q))$$

logo,

$$\int_M (a_i)_s^{*p} \le C \int_{B_1(0)} [(a_i\varphi_i)\circ\Phi_\alpha^{-1}]_s^{*p}\sqrt{g_\alpha}dx$$

$$\le C\|\sqrt{g_\alpha}\|_{L^\infty}\sum_i \|[(a\varphi_i)\circ\Phi_\alpha^{-1}]_s^*\|_{L^p}$$

$$\le C\sum_i \|(a\varphi_i)\circ\Phi_\alpha^{-1}\|_{h^p(\mathbb{R}^n)} = C < \infty$$

$$\|f\|_{H^p(M)} = \int_M f_s^{*p} \le C\sum_i |\lambda_i|^p \le C\|f\|_{H^p_{at}(M)}.$$

■

Capítulo 2

Espaços de Hardy na esfera unitária

2.1 Introdução

A esfera unitária é uma variedade compacta. Desta forma, podemos definir o espaço de Hardy $H^p(S^{n-1})$ como sendo o subespaço formado pelas distribuições $f \in \mathcal{D}'(S^{n-1})$ tais que a expressão de f em coordenadas locais está em $h^p(\mathbb{R}^n)$, como mostra a definição (1.4) do Capítulo 1. É ainda possível uma caracterização via função maximal f_s^*, que nos possibilita, de forma intrínseca definir os espaços de Hardy como aquele consistindo das distribuições em S^{n-1} tais que $f_s^* \in L^p(S^{n-1})$, se s for suficientemente grande.

Entretanto, a esfera unitária possui a propriedade adicional de ser fronteira de um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, o que confere a ela a possibilidade de caracterização dos espaços de Hardy, tendo em vista o comportamento de funções harmonicas definidas na bola unitária, tal como é feito no caso dos espaços de Hardy do $\mathbb{R}^n$ em que são consideradas distribuições limitadas[1] $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tais que o produto convolução $f * P_t$ satisfaça, $\sup_{0<t<\infty} |f * P_t(x)| \in L^p(\mathbb{R}^n)$. A analogia pode ser caracterizada no Teorema (2.1), adiante.

Se uma distribuição f satisfaz uma das condições acima dizemos que $f \in \mathcal{H}^p(S^{n-1})$. Notação compatível com a usada no Capítulo 1.

2.2 Notações.

De agora em diante vamos nos restringir ao estudo do caso em que $0 < p \leq 1$, embora, a maioria dos resultados seja enunciada para $0 < p < \infty$.

O objetivo principal desta seção é fornecer as definições que serão necessárias para as demonstrações dos resultados que se seguem e de fixação

[1]Uma distribuição $f \in \mathcal{S}'$ é dita limitada se o produto convolução $f * \phi \in L^\infty, \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Esta hipótese é necessária para que o produto convolução$f * P_t(x)$, sendo P o núcleo de Poisson do semi-plano superior, possa estar definido.

de algumas notações.

Seja $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \cdots, x_n) : x \in \mathbb{R}\}$ o espaço vetorial das n-uplas de números reais munido com o produto interno usual

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \text{ sendo que } x = (x_1, \cdots, x_n), \text{ e } y = (y_1, \cdots, y_n). \tag{2.1}$$

Definimos a esfera unitária do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ como sendo o conjunto $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, x\rangle = 1\}$, munida com a estrutura diferenciável induzida pelas projeções estereográficas. Com esta estrutura de variedade, S^{n-1} pode ser vista como uma subvariedade mergulhada do $\mathbb{R}^n$. Além disso, como $\mathbb{R}^n \simeq T_p\mathbb{R}^n$(o espaço tangente no ponto p) temos que o produto interno definido em (2.1) induz uma métrica Riemanniana em $\mathbb{R}^n$ que denominamos *métrica usual*. Esta métrica por sua vez induz uma métrica Riemanniana g sobre a esfera da seguinte forma:

$$g_p : T_pS^{n-1} \times T_pS^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g_p(u, v) = \langle di_p(u), di_p(v)\rangle$$

sendo di o diferencial da aplicação inclusão $i : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, que neste caso é um mergulho.

Seja u uma função harmônica na bola unitária B^n de $\mathbb{R}^n$. Para cada $x \in S^{n-1}$ podemos definir a função maximal radial de u por

$$u^{\perp}(x) = \sup_{0\le r<1} |u(rx)|$$

Definição 2.1 *Se $x \in S^{n-1}$, e $1 < \alpha < \infty$, então definimos a região de Stolz com vértice x e abertura α como sendo:*

$$\Gamma_\alpha(x) = \{z \in B^n : |z - x| < \alpha(1 - |z|)\}.$$

A seguir definimos a função maximal não-tangencial:

$$u^*_\alpha(x) = \sup_{z\in\Gamma_\alpha(x)} |u(z)| \tag{2.2}$$

A função maximal u^{**}_m, é dada por:

$$u^{**}_m(x) = \sup_{z\in B^n} |u(z)| \Big[\frac{1 - |z|}{|z - x|}\Big]^m \tag{2.3}$$

Como a esfera S^{n-1} é uma variedade diferenciável de classe C^∞ podemos definir o espaço $C^k(S^{n-1})$ com $k \geq 0$ das funções k-vezes continuamente diferenciáveis sobre S^{n-1} com respeito a estrutura diferenciável induzida pelas projeções estereográficas.

Definimos para toda $\phi \in C^k(S^{n-1})$ a norma

$$\|\phi\|_k = \sup_{|\gamma|\le k} \sup_{\{i_1,\ldots i_n\}\subset\{1,\ldots n\}} \|X^{\gamma_1}_{i_1} \ldots X^{\gamma_n}_{i_n}\phi\|_{L^\infty(S^{n-1})} \tag{2.4}$$

e seja $C^\infty(S^{n-1}) = \cap_{k=0}^\infty C^k(S^{n-1})$ o conjunto formado pelas funções infinitamente diferenciáveis sobre S^{n-1}, dotada com a topologia induzida pela familia de seminormas $p_\gamma(\phi) = \sup_{\{i_1,\dots i_k\}\subset\{1,\dots n\}} \|X_{i_1}^{\gamma_1}\dots X_{i_k}^{\gamma_n}\phi\|_{L^\infty(S^{n-1})}$.

Consideramos $\mathcal{D}'(S^{n-1})$ seu dual topológico os espaço das distribuições sobre S^{n-1} e denotamos por $\langle f,\phi\rangle$ o emparelhamento entre distribuições e funções testes. Se $f \in L^1(S^{n-1})$ então

$$\langle f,\phi\rangle = \int_{S^{n-1}} f(x)\phi(x)d\sigma(x)$$

sendo que $d\sigma$ denota o elemento de volume da S^{n-1}.

A seguir daremos algumas definições e resultados que podem ser encontrados em ([13]).

Definição 2.2 *Para toda função $f \in L^1(S^{n-1})$ definimos a função maximal de Hardy-Littlewood*

$$Mf(x) = \sup_{R>0} \frac{1}{|B(x,R)\cap S^{n-1}|}\int_{B(x,R)\cap S^{n-1}} |f(t)|dt \tag{2.5}$$

Definição 2.3 *Seja (X,μ) um espaço de medida e seja $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função mensurável. Dizemos que f é de tipo fraco p,com $0 < p < \infty$, se $\mu\{x : |f(x)| > \lambda\} \leq C/\lambda^p$, para todo $0 < \lambda < \infty$. O espaço de tipo fraco ∞ é definido como sendo o espaço L^∞.*

Observação: O espaço L^p está contido propriamente no espaço das funções de tipo fraco p.

Definição 2.4 *Um operador $T : L^p(X,d\mu) \longrightarrow \{$funções mensuráveis$\}$ é dito ser de tipo fraco (p,p), com $0 < p < \infty$, se*

$$\mu\{x : |Tf(x)| > \lambda\} \leq C\|f\|_{L^p}^p/\lambda^p, \quad \forall f \in L^p, \quad \lambda > 0.$$

Proposição 2.1 *O operador M é de tipo fraco $(1,1)$.*

Prova da Proposição (2.1): A demonstração deste fato pode ser encontrada na página 339 de ([13]). ■

Lema 2.1 *O operador de Hardy-Littlewood definido sobre uma variedade compacta é contínuo de L^2 em L^2.*

Prova do Lema (2.1): A demonstração deste fato pode ser encontrado na página 343 de ([13]). ■

Definição 2.5 *Para todo $s \in \mathbb{Z}_+$, e todo $x \in S^{n-1}$ fixos seja $K_s(x)$ o conjunto das funções $\phi \in C^\infty(S^{n-1})$ tais que:*
(i) *$S(\phi) \subseteq B(x,h) \cap S^{n-1}$, para algum $0 < h < 1$; sendo*

$$B(x,h) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| \leq h\}.$$

(ii) *$\|\phi\|_k \leq h^{-n+1-k}$, para $k = 0, 1, \ldots, s$.*
Com $\|\cdot\|_k$ definida por (2.4)

Definição 2.6 *Se f é uma distribuição em S^{n-1}, definimos*

$$f_s^*(x) = \sup_{\phi \in K_s(x)} |\langle f, \phi \rangle|.$$

2.3 Estimativas para o núcleo de Poisson da esfera.

O núcleo de Poisson da bola unitária B pode ser calculado de forma explícita e a sua expressão é dada por:

Para $z \in B^n$ e $x \in S^{n-1}$ escreva

$$P(z,x) = c_n \frac{1-|z|^2}{|z-x|^n} \quad \text{sendo que} \quad c_n = \frac{1}{n\omega_n} \tag{2.6}$$

com $\omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{(n)\Gamma(\frac{n}{2})}$ volume da bola unitária em $\mathbb{R}^n$.

Calculando diretamente sobre a expressão (2.6) podemos obter a seguinte estimativa:

Lema 2.2 *Para o núcleo de Poisson da bola unitária valem as seguintes estimativas:*

$$\left|\frac{\partial^\alpha}{\partial z^\alpha} P(z,x)\right| \leq \frac{c(n,\alpha)}{|z-x|^{n-1+|\alpha|}} \tag{2.7}$$

Prova: Suponha $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ tal que, $|\alpha| = 0$ temos

$$\begin{aligned} P(z,x) &= c_n \tfrac{1-|z|^2}{|z-x|^n} \\ &= c_n \tfrac{(1+|z|)(|x|-|z|)}{|z-x|^n} \\ &\leq 2c_n \tfrac{|z-x|}{|z-x|^n} \\ &= \tfrac{2c_n}{|z-x|^{n-1}} \end{aligned}$$

□

Suponha que $\alpha = (1, \cdots, 0)$ então

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial^\alpha}{\partial z^\alpha} P(z,x)\right| &= \left|\frac{\partial}{\partial z_1} c_n \frac{1-(z_1^2+\cdots+z_n^2)}{[(z_1-x_1)^2+\cdots+(z_n-x_n)^2]^{\frac{n}{2}}}\right| \\
&= \left|\frac{-2z_1 c_n |z-x|^n}{|z-x|^{2n}} - \frac{n c_n (1-|z^2|)(z_1-x_1)|z-x|^{n-2}}{|z-x|^{2n}}\right| \\
&\leq \frac{2c_n}{|z-x|^n} + \frac{n c_n (1-|z|^2)}{|z-x|^{n+1}} \\
&\leq \frac{2c_n}{|z-x|^n} + \frac{n c_n (|z-x|)(1+|z|)}{|z-x|^{n+1}} \\
&\leq \frac{2c_n}{|z-x|^n} + \frac{2nc_n}{|z-x|^n} = \frac{2(1+n)c_n}{|z-x|^n} = \frac{c'_n}{|z-x|^{n-1+|\alpha|}}
\end{aligned}$$

A prova do caso geral segue calculando sucessivamente desta forma. ■

2.4 Caracterização de $\mathcal{H}^p(S^{n-1})$

O objetivo principal desta seção é dar com detalhes a demonstração de um Teorema de Leonardo Colzani, veja na página (231) de [11].

Nos resultados que enunciaremos a seguir denotaremos por u a integral de Poisson de uma distribuição f definida em S^{n-1} conforme a definição (3.1) que será dada adiante.

Teorema 2.1 *Seja f uma distribuição $f \in \mathcal{D}'(S^{n-1})$ e u a integral de Poisson de f, e seja $0 < p < \infty$, então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) $u^{\perp} \in L^p(S^{n-1})$

(ii) $u^*_\alpha \in L^p(S^{n-1})$

(iii) $u^{**}_m \in L^p(S^{n-1})$ quando $m > n/p$

(iv) Existe $s \in \mathbb{N}_+$ tal que $f^*_s \in L^p(S^{n-1})$.

Além disso, todas as funções maximais presentes no enunciado do Teorema possuem normas $L^{p's}$ equivalentes.

Prova do Teorema (2.1): Faremos a demonstração supondo que $0 < p < 1$, o caso $p \geq 1$ é mais simples e não será estudado.

Vamos separar os passos em sub-seções para facilitar a compreensão da prova. Observe que são imediatas as seguintes desigualdades

$$u^{\perp}(x) \leq u^*_\alpha(x) \leq c u^{**}_m(x)$$

Pontualmente, as desigualdades contrárias não são verdadeiras, entretanto a seguinte Proposição ocorre:

2.4.1 Controle da norma L^p de u^*_α sobre a norma L^p de u^{**}_m.

Os resultados contidos nesta subseção mostram que $(ii) \Longrightarrow (iii)$.

Proposição 2.2 *Se $0 < p < 1, \alpha > 1$ e $m > \frac{n}{p}$ então, existe uma constante $C > 0$ que depende de p, α, m, n tal que:*

$$\|u^{**}_m\|_{L^p(S^{n-1})} \leq C \|u^*_\alpha\|_{L^p(S^{n-1})}.$$

Prova da Proposição (2.2): Para cada $x \in S^{n-1}$ fixo, considere os conjuntos:

$$A_0 = \{z \in B^n : |z - x| \leq \alpha(1 - |z|)\}$$

$$A_j = \{z \in B^n : 2^{j-1}\alpha(1 - |z|) \leq |z - x| < 2^j \alpha(1 - |z|)\}.$$

Os conjuntos $\{A_j\}$ formam uma cobertura de B a bola unitária logo,

$$u^{**}_m(x) \leq \sup_{A_0} |u(z)| \Big[\frac{1 - |z|}{|z - x|}\Big]^m + \sum_{j=1}^{\infty} \sup_{A_j} |u(z)| \underbrace{\Big[\frac{1 - |z|}{|z - x|}\Big]^m}_{\leq \alpha^{-m} 2^{(1-j)m}}$$

assim, pela definição de u^*_α temos

$$u^{**}_m(x) \leq u^*_\alpha(x) + \alpha^{-m} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{(1-j)m} u^*_{2^j\alpha}(x)$$

elevando à potência p com $0 < p \leq 1$, ambos os membros temos[2]

$$u^{**}_m(x)^p \leq u^*_\alpha(x)^p + \alpha^{-mp} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{(1-j)mp} u^*_{2^j\alpha}(x)^p \tag{2.8}$$

Assim, integrando sobre a esfera unitária temos,

$$\int_{S^{n-1}} u^{**}_m(x)^p d\sigma(x) \leq \int_{S^{n-1}} u^*_\alpha(x)^p d\sigma(x) + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{(1-j)mp} \int_{S^{n-1}} u^*_{2^j\alpha}(x)^p d\sigma(x). \tag{2.9}$$

Para continuarmos a demonstração precisaremos do seguinte Lema que é uma adaptação de um resultado de Stein, veja página 62 de ([3]).

Lema 2.3 *Sejam a e b números reais tais que $0 < b \leq a$ então*

$$\int_{S^{n-1}} u^*_a(x) dx \leq 3^{n-1} \Big(1 + \frac{2a}{b}\Big)^{n-1} \int_{S^{n-1}} u^*_{1+b}(x) dx \tag{2.10}$$

Prova do Lema (2.3): Seja $0 < \sigma < 1$ e $F \subset S^{n-1}$ um conjunto fechado na topologia relativa. Definimos F^*_σ o conjunto dos pontos de σ-densidade global de F com respeito a S^{n-1} como:

$$F^* = F^*_\sigma = \{x \in S^{n-1} : \forall r > 0 \ \ \frac{|B(x,r) \cap F|}{|B(x,r)|} \geq \sigma\}.$$

Propriedades de F^*
(i) F^* é fechado
(ii) $F^* \subset F$
(iii) $|F^{c*}| \leq \frac{3^n}{1-\sigma} |F^c|$

Demostraremos primeiramente a validade da propriedade **(iii)**. Seja $\mathcal{O} = F^c$ por **(ii)** temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}^* &= \{x \in S^{n-1} : \exists r > 0 \text{ tal que } \tfrac{|B(x,r)\cap F|}{|B(x,r)|} < \sigma\} \\
&= \{x \in S^{n-1} : \exists r > 0 \text{ tal que } \tfrac{|B(x,r)\cap \mathcal{O}|}{|B(x,r)|} > 1 - \sigma\} \\
&= \{x \in S^{n-1} : \exists r > 0 \text{ tal que } \tfrac{1}{|B(x,r)\cap S^{n-1}|} \int_{|B(x,r)\cap S^{n-1}|} \chi_{\mathcal{O}}(t) dt > 1 - \sigma\} \\
&\subseteq \{x \in S^{n-1} : M(\chi_{\mathcal{O}})(x) > 1 - \sigma\}
\end{aligned}$$

[2] Aqui usamos o fato da função $\varphi(t) = t^p$ ser subaditiva para $0 < p \leq 1$. Isto é, $(a+b)^p \leq a^p + b^p$, para todo $a > 0,\ b > 0$.

Desta forma,

$$|\mathcal{O}^*| \leq |\{x \in S^{n-1} : M(\chi_{\mathcal{O}})(x) > 1-\sigma\}| \leq \frac{3^n}{1-\sigma}\|\chi_{\mathcal{O}}\|_{L^1}.^3$$

A constante 3^n na última desigualdade provém do Lema de cobertura de Wiener que pode ser encontrado por exemplo em Krantz ([13]).

Recordemos que $u_a^*(x) = \sup_{z\in\Gamma_a(x)} |u(z)|$ sendo que

$$\Gamma_a(x) = \{z \in B^n : |z-x| < a(1-|z|)\}$$

com $a > 1$. Para demonstrarmos o Lema (2.3) é suficiente provarmos a seguinte desigualdade:

$$|\{x \in S^{n-1} : u_a^*(x) > \lambda\}| \leq 3^{n-1}\Big(1+\frac{2a}{b}\Big)^{n-1}|\{x \in S^{n-1} : u_{1+b}^*(x) > \lambda\}|, \tag{2.11}$$

para todo $\lambda > 0$.

Seja $\mathcal{O} = \{x \in S^{n-1} : u_{1+b}^*(x) > \lambda\}$, como a função u_a^* é semicontínua inferiormente temos que o conjunto $\mathcal{O}$ é aberto, para cada λ fixo. A idéia para demonstrar a desigualdade (2.11) consiste em escolher σ apropriado para que o conjunto $\{x \in S^{n-1} : u_a^*(x) > \lambda\} \subseteq \mathcal{O}^*$.

Seja $x_0 \in \{x \in S^{n-1} : u_a^*(x) > \lambda\}$ então pela propriedade de supremo existe $z \in B^n$ tal que $z \in \Gamma_a(x_0)$ isto é, $|z-x_0| < a(1-|z|)$, e além disso, vale a desigualdade $|u(z)| > \lambda$.

A aplicação que associa cada ponto z no interior da bola aberta B a sua projeção na fronteira S^{n-1} é dada por $\pi z = \frac{z}{|z|}$. Assim, podemos demonstrar as seguintes afirmações

Afirmação 1. O conjunto $B(\frac{z}{|z|}, b(1-|z|)) \cap S^{n-1}$ está contido em $\mathcal{O}$.

De fato, seja $w \in B(\frac{z}{|z|}, b(1-|z|)) \cap S^{n-1}$ então

$$\begin{aligned} |z-w| &\leq |z-\tfrac{z}{|z|}| + |\tfrac{z}{|z|}-w| \\ &\leq (1-|z|) + b(1-|z|) \\ &< (1+b)(1-|z|). \end{aligned}$$

Isto mostra que $z \in \Gamma_{1+b}(w)$ logo $u_{1+b}^*(w) \geq |u(z')|$ para todo $z' \in \Gamma_{1+b}(w)$ em particular, $u_{1+b}^*(w) \geq |u(z)| > \lambda$ portanto, $x_0 \in \mathcal{O}$ e a Afirmação 1 está provada. □

Afirmação 2. Afirmamos que $B(\frac{z}{|z|}, b(1-|z|)) \cap S^{n-1}$ está contido propriamente no conjunto $B(x_0, (a+b+1)(1-|z|)) \cap S^{n-1}$.

[3] O operador maximal de Hardy-Littlewood M definida sobre a esfera S^{n-1} de acordo com a definição (2.4) é de tipo fraco (1,1), vide Krantz ref([13]).

De fato, seja $w \in B(\frac{z}{|z|}, b(1-|z|))$ então

$$\begin{aligned} |w - x_0| &\leq |w - \tfrac{z}{|z|}| + |\tfrac{z}{|z|} - z| + |z - x_0| \\ &< b(1-|z|) + (1-|z|) + a(1-|z|) \\ &= (a+b+1)(1-|z|). \end{aligned}$$

□

Assim, pela Afirmações anteriores obtemos a seguinte desigualdade,

$$\frac{|\mathcal{O} \cap B(x_0, (a+b+1)(1-|z|))|}{|B(x_0, (a+b+1)(1-|z|)) \cap S^{n-1}|} > \frac{|B(\frac{z}{|z|}, b(1-|z|)) \cap S^{n-1}|}{|B(x_0, (a+b+1)(1-|z|)) \cap S^{n-1}|} = \Big[\frac{b}{a+b+1}\Big]^{n-1}$$

Logo, se $F = \mathcal{O}^c$ então podemos concluir que se $x_0 \in \{x \in S^{n-1} : u_a^*(x) > \lambda\}$ a seguinte desigualdade ocorre

$$\frac{|F \cap B(x_0, (a+b+1)(1-|z|))|}{|B(x_0, (a+b+1)(1-|z|))|} < 1 - \Big(\frac{b}{a+b+1}\Big)^{n-1} = \sigma.$$

Neste caso

$$\{x \in S^{n-1} : u_a^*(x) > \lambda\} \subseteq \mathcal{O}^* = F^{c*}_{\sigma}$$

Assim, segue da propriedade **(iii)** que

$$|\{x \in S^{n-1} : u_a^*(x) > \lambda\}| \leq |\mathcal{O}^*| \leq \frac{3^{n-1}}{1-\sigma}|\mathcal{O}| = \frac{3^{n-1}}{1-\sigma}|\{x \in S^{n-1} : u_{1+b}^*(x) > \lambda\}|$$

Ou seja,

$$|\{x \in S^{n-1} : u_a^*(x) > \lambda\}| \leq 3^{n-1}\Big(1 + \frac{2a}{b}\Big)^{n-1}|\{x \in S^{n-1} : u_{1+b}^*(x) > \lambda\}|$$

Integrando sobre a esfera S^{n-1} temos:

$$\int_{S^{n-1}} u_a^*(x)dx \leq 3^{n-1}\Big(1 + \frac{2a}{b}\Big)^{n-1} \int_{S^{n-1}} u_{1+b}^*(x)dx$$

Isto conclui a demonstração do Lema (2.3) □

Voltando à demonstração da Proposição (2.2), após aplicarmos o Lema (2.3) a desigualdade (2.9) obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} u_m^{**}(x)^p dx &\leq \int_{S^{n-1}} u_\alpha^*(x)^p dx + 3^{n-1}\alpha^{-mp}\sum_{j=1}^{\infty} 2^{(1-j)mp} \int_{S^{n-1}} u_{2^j\alpha}^*(x)^p dx \\ &\leq \int_{S^{n-1}} u_\alpha^*(x)^p dx + c_n \sum_{j=1}^{\infty} 2^{(1-j)mp}(\frac{2^{j+1}\alpha}{\alpha-1}) \int_{S^{n-1}} u_\alpha^*(x)^p dx \\ &\leq \int_{S^{n-1}} u_\alpha^*(x)^p dx + c_{n,p,m,\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j(n-mp)} \int_{S^{n-1}} u_\alpha^*(x)^p dx \end{aligned}$$

Aqui estamos considerando $a = 2^j\alpha > \alpha > \alpha - 1 = b$. Assim,

$$\|u_m^{**}\|^p_{L^p(S^{n-1})} \leq \|u_\alpha^*\|^p_{L^p(S^{n-1})} + c_{n,p,m,\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{j(n-mp)} \|u_\alpha^*\|^p_{L^p(S^{n-1})}$$

Portanto,

$$\|u_m^{**}\|^p_{L^p(S^{n-1})} \leq c\|u_\alpha^*\|^p_{L^p(S^{n-1})} \text{ se } n < mp.$$

com $c = c_{n,p,m,\alpha}$. O que completa a prova da Proposição (2.2). ■

O próximo passo consiste em provar o controle da função maximal radial $u^\perp$ sobre a função maximal não-tangencial u_α^* de abertura $\alpha > 1$, mostrando a desigualdade $\|u_\alpha^*\|_{L^p(S^{n-1})} \leq C\|u^\perp\|_{L^p(S^{n-1})}$.

2.4.2 Controle da norma L^p de $u^\perp$ sobre a norma L^p de u_α^*.

Os resultados contidos nesta subseção mostram que $(i) \Longrightarrow (ii)$.

Proposição 2.3 *Seja u uma função harmônica na bola unitária B se $\alpha > 1$ então existe uma constante $C = C(n,p)$ tal que*

$$\|u_\alpha^*\|_{L^p(S^{n-1})} \leq C\|u^\perp\|_{L^p(S^{n-1})}$$

Para a demonstração deste fato precisaremos de um resultado de C. Fefferman e E. M. Stein e que pode ser encontrado na página (172) de ([1]).

Lema 2.4 *Seja B uma bola no $\mathbb{R}^n$ com centro em z, e suponha que u seja uma função harmônica e contínua no fecho de B. Então se $q > 0$ temos que:*

$$|u(z)|^q \leq \frac{c(q,n)}{|B|} \int_B |u(w)|^q dw. \tag{2.12}$$

■

Voltando a demonstração da Proposição (2.3) observe o seguinte Lema:

Lema 2.5 *Seja $u(z)$ a integral de Poisson de uma distribuição $f \in S^{n-1}$ então a seguinte estimativa vale:*

$$u_\alpha^*(x) \leq cM[u^{\perp q}](x)^{\frac{1}{q}} \quad \forall x \in S^{n-1}, \quad q > 0 \tag{2.13}$$

sendo que M representa a função maximal de Hardy-Littlewood.

Prova do Lema (2.5): Seja $x \in S^{n-1}$ fixo e tomemos $z \in \Gamma_\alpha(x)$. Lembremos que $\Gamma_\alpha(x) = \{z \in B^n : |z - x| < \alpha(1 - |z|)\}$. Suponha que $1/2 < |z| < 1$ neste caso, considere a bola $B = B(z, \frac{1-|z|}{2})$, e seja $q < p$ então pela desigualdade expressa no Lema (2.4) temos que:

$$\begin{aligned} |u(z)|^q &\leq \tfrac{C(q,n)}{|B|} \int_B |u(w)|^q dw \\ &\leq \tfrac{C(q,n)}{|B|} \int_{\frac{3|z|-1}{2}}^{\frac{|z|+1}{2}} \int_{S_z} |u(rw)|^q r^{n-1} dw dr \end{aligned}$$

como $S_z \subseteq B(\frac{z}{|z|}, C\alpha(1-|z|)) \cap S^{n-1}$, com a constante C independente de z, além disso, temos que $S_z \subset B(x,(2+C)\alpha(1-|z|)) \cap S^{n-1}$ uma vez que se $w \in S$ então $|w - \frac{z}{|z|}| \leq \alpha(1-|z|)$, e portanto.

$$\begin{aligned} |w-x| &\leq \left|w - \tfrac{z}{|z|}\right| + \left|\tfrac{z}{|z|} - z\right| + |z-x| \\ &\leq (C\alpha + 1 + \alpha)(1-|z|) \leq (C+2)\alpha(1-|z|). \end{aligned}$$

Logo, sendo $C' = C+2$ e colocando $B' = B(x, C'\alpha(1-|z|)) \cap S^{n-1}$ temos que:

$$\begin{aligned} |u(z)|^q &\leq C(q,n)\tfrac{|B(x,C'\alpha(1-|z|))\cap S^{n-1}|}{|B(z,\frac{(1-|z|)}{2})|} \int_{\frac{3|z|-1}{2}}^{\frac{|z|+1}{2}} \frac{1}{|B'|} \int_{B'} \sup_{0\leq r<1} |u(rw)|^q r^{n-1} dw dr \\ &\leq C(q,n)\tfrac{|B(x,C'\alpha(1-|z|))\cap S^{n-1}|}{|B(z,\frac{(1-|z|)}{2})|} \int_{\frac{3|z|-1}{2}}^{\frac{|z|+1}{2}} \frac{1}{|B'|} \int_{B'} u^{\perp}(w) r^{n-1} dw dr \\ &\leq C(q,n)\tfrac{|B(x,C'\alpha(1-|z|))\cap S^{n-1}|}{|B(z,\frac{(1-|z|)}{2})|} \int_{\frac{3|z|-1}{2}}^{\frac{|z|+1}{2}} M[u^{\perp q}](x) r^{n-1} dr \\ &\leq C(q,n)\tfrac{|B(x,C'\alpha(1-|z|))\cap S^{n-1}|}{|B(z,\frac{(1-|z|)}{2})|} (1-|z|) M[u^{\perp q}](x) \\ &\leq C(q,n) M[u^{\perp q}](x). \end{aligned}$$

□

Finalmente, para concluirmos a demonstração da Proposição (2.3) basta usar a continuidade da função maximal de Hardy-Littlewood dada pela definição (2.2) em $L^p(S^{n-1})$. Para $p = 2$, ver no Lema (2.1) e aplicar a desigualdade (2.13) para $q = p/2$.

$$\begin{aligned} \|u_\alpha^*\|_{L^p(S^{n-1})}^p &= \int_{S^{n-1}} u_\alpha^*(x)^p d\sigma(x) \\ &\leq c \int_{S^{n-1}} M[u^{\perp q}](x)^{\frac{p}{q}} d\sigma(x) \\ &\leq c \int_{S^{n-1}} M[u^{\perp q}](x)^2 d\sigma(x) \\ &\leq c \int_{S^{n-1}} u^{\perp 2q}(x) d\sigma(x) \\ &= \|u^{\perp}\|_{L^p(S^{n-1})}^p \end{aligned}$$

■

2.4.3 Controle de u_m^{**} sobre f_s^*

A seguir mostraremos que $(iii) \Longrightarrow (iv)$, provando o controle pontual que a função maximal u_m^{**} exerce sobre a função maximal f_s^*, pela seguinte proposição:

Proposição 2.4 *Sejam $m, L \in \mathbb{Z}_+$ tais que $m < L$. Então existe uma constante C que depende de m,L,n tal que*

$$f_s^*(x) \leq C u_m^{**}(x)$$

para cada $x \in S^{n-1}$.

Antes de proseguirmos com a demonstração da Proposição (2.4) faremos a seguir algumas definições.

Lema 2.6 *Seja $L \in \mathbb{Z}_+$ tal que $L \geq 1$ e seja ainda $f \in C^L([0,\infty))$ e defina*

$$\Delta_t f(x) = f(x+t) - f(x), \quad t > 0$$

e seja $\Delta_t^k f(x), \quad k = 1, 2, 3, \cdots$ definida por indução do seguinte modo:

$$\begin{cases} \Delta_t^1 f(x) = \Delta_t f(x) \\ \Delta_t^{k+1} f(x) = \Delta_t(\Delta_t^k f(x)). \end{cases}$$

Então, as seguintes fórmulas ocorrem:

$$\Delta_t^L f(x) = \sum_{j=0}^{L} (-1)^{L+j} \binom{L}{j} f(x+jt) \tag{2.14}$$

$$\Delta_t^L f(x) = t^L \int_{[0,1]^L} f^{(L)}(x + t(s_1 + \cdots + s_L)) ds_1 \cdots ds_L. \tag{2.15}$$

Sendo que $f^{(L)}$ denota a derivada de ordem L da função f.

Prova do Lema (2.6): Provaremos por indução primeiramente a fórmula (2.14). Suponha $L = 1$ então

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{1} (-1)^{1-j} \binom{L}{j} f(x+jt) &= (-1)^1 \binom{1}{0} f(x) + (-1)^{1-1} \binom{1}{1} f(x+t) \\ &= f(x+t) - f(x) \\ &= \Delta_t^1 f(x) \end{aligned}$$

Suponhamos agora que (2.14) seja válida para $k = L$ isto é,

$$\sum_{j=0}^{L} (-1)^{L+j} \binom{L}{j} f(x+jt) = \Delta_t^L f(x)$$

e mostremos que também vale para $k = L + 1$. De fato,

$$\begin{aligned}
\Delta_t^{L+1} f(x) &= \Delta_t(\Delta_t^L f(x)) \\
&= \Delta_t^L f(x+t) - \Delta_t^L f(x) \\
&= \sum_{j=0}^{L} (-1)^{L+j} \binom{L}{j} f(x+(j+1)t) \\
&- \sum_{j=0}^{L} (-1)^{L+j} \binom{L}{j} f(x+jt) \text{ seja } \tilde{j} = j+1 \\
&= \sum_{\tilde{j}=1}^{L+1} (-1)^{L+\tilde{j}-1} \binom{L}{\tilde{j}-1} f(x+\tilde{j}t) \\
&- \sum_{j=0}^{L} (-1)^{L+j} \binom{L}{j} f(x+jt) \text{ substituindo } \tilde{j} = j \\
&= \sum_{j=1}^{L+1} (-1)^{L+j-1} \binom{L}{j-1} f(x+jt) \\
&- \sum_{j=0}^{L} (-1)^{L+j} \binom{L}{j} f(x+jt) \\
&= \sum_{j=1}^{L} (-1)^{L+j-1} \binom{L}{j-1} f(x+jt) \\
&+ (-1)^{L+(L+1)-1} \binom{L}{L} f(x+(L+1)t) \\
&- \sum_{j=1}^{L} (-1)^{L+j} \binom{L}{j} f(x+jt) \\
&- (-1)^{L} \binom{L}{0} f(x)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{L}(-1)\Big\{\Big[\binom{L}{j-1}+\binom{L}{j}\Big]f(x+jt)(-1)^{L+j}\Big\} \\
&+ (-1)^{2L}\binom{L}{L}f(x+(L+1)t) \\
&- (-1)^{L}\binom{L}{0}f(x) \quad \text{usando } \binom{L}{j-1}+\binom{L}{j}=\binom{L+1}{j}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{L}(-1)\binom{L+1}{j}(-1)^{L+j}f(x+jt)\\
&+ (-1)^{2L}\binom{L}{L}f(x+(L+1)t)\\
&- (-1)^{L}\binom{L}{0}f(x) \ \text{ acrescentando o termo } \ j=0\\
&= \sum_{j=0}^{L}(-1)^{L+j+1}\binom{L+1}{j}f(x+jt)\\
&+ \Big(-(-1)^{L+1}\binom{L+1}{0}f(x)-(-1)^{L}\binom{L}{0}f(x)\Big)\\
&+ (-1)^{2L}\binom{L}{L}f(x+(L+1)t) \ \text{ acrescentando o termo } \ j=L+1\\
&= \sum_{j=0}^{L+1}(-1)^{L+j+1}\binom{L+1}{j}f(x+jt)-\binom{L+1}{L+1}(-1)^{L+1+L+1}f(x+(L+1)t)\\
&+ (-1)^{2L}\binom{L}{L}f(x+(L+1)t)\\
&= \sum_{j=0}^{L+1}(-1)^{L+j+1}\binom{L+1}{j}f(x+jt)\\
&+ f(x+(L+1)t)\Big\{(-1)^{2L}\binom{L}{L}-(-1)^{2L+2}\binom{L+1}{L+1}\Big\}\\
&= \sum_{j=0}^{L+1}(-1)^{L+j+1}\binom{L+1}{j}f(x+jt).
\end{aligned}
$$

Como queríamos mostrar. □

Provaremos a seguir que a fórmula (2.15) ocorre. De fato, suponha $L=1$ e considere a função $s \longmapsto f(x+st)$ então:

$$\int_0^1 \frac{d}{ds}f(x+st)ds = f(x+t)-f(x)$$

logo,

$$\Delta_t^1 f(x) = f(x+t)-f(x) = t\int_0^1 f^{(1)}(x+st)ds$$

Suponha válida para $k = L$, isto é,

$$\Delta_t^L f(x) = t^L \int_{[0,1]^L} f^{(L)}(x + t(s_1 + \cdots + s_L))ds$$

e mostremos que vale para $k = L + 1$.

$$\begin{aligned}
\Delta_t^{L+1} f(x) &= \Delta_t(\Delta_t^L f(x)) \\
&= \Delta_t^L f(x+t) - \Delta_t^L f(x) \\
&= t^L \int_{[0,1]^L} f^{(L)}(x + t + t(s_1 + \cdots + s_L))ds \text{ sendo que } ds = ds_1 \cdots ds_{L+1} \\
&- t^L \int_{[0,1]^L} f^{(L)}(x + t(s_1 + \cdots + s_L))ds \\
&= t^L \int_{[0,1]^L} f^{(L)}(x + t(s+1) - f^{(L)}(x + ts)ds \\
&= t^L \int_{[0,1]^L} \int_0^1 \frac{d}{ds_{L+1}} f^{(L)}(x + s_{L+1}t + t(s+1)tds_{L+1}ds \\
&= t^{L+1} \int_{[0,1]^{L+1}} f^{(L+1)}(x + ts)ds.
\end{aligned}$$

Como queíamos demonstrar. ■

A seguir vamos usar as fórmulas (2.14) e (2.15) na função f a ser definida na seguinte Proposição:

Proposição 2.5 *Seja $\phi \in C^\infty(S^{n-1})$ e considere a função:*

$$f(x, \xi) = \int_{S^{n-1}} P((1 - \xi)x, y)\phi(y)d\sigma(y) \tag{2.16}$$

definida para todo $\xi \in [0, 1]$, sendo P o núcleo de Poisson. Então, $f \in C^\infty(S^{n-1} \times [0, 1])$

Prova da Proposição (2.5) A demonstração deste fato pode ser vista como uma consequência do Teorema (6.19) de [7]. ■

Outro resultado importante diz respeito à convergência radial da integral de Poisson $P_r(\phi)$ quando $r \longrightarrow 1$.

Proposição 2.6 *Seja $\phi \in C^\infty(S^{n-1})$. Então, a função:*

$$P_r(\phi)(x) = \int_{S^{n-1}} P(rx, y)\phi(y)d\sigma(y)$$

converge a ϕ na topologia de $C^\infty(S^{n-1})$ quando $r \longrightarrow 1$.

Prova da Proposição (2.6) Este fato será demonstrado com maior generalidade no Cap. 3, veja Proposição (3.6). ■

A seguir vamos definir a partir do núcleo de Poisson e da função f definida na Proposição acima um núcleo auxiliar que denotaremos por σ_t e que desempenhará um papel importante nas futuras estimativas.

Definição 2.7 *Seja L um número inteiro positivo, para todo $0 < t < 1/L$, e $\phi \in C^\infty(S^{n-1})$ definimos o núcleo singular $\sigma_t : S^{n-1} \times S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$*

$$\sigma_t(x,y) = \sum_{j=0}^{L} (-1)^{L+j} \binom{L}{j} P((1-jt)x, y) \tag{2.17}$$

e o operador integral associado $\sigma_t : C^\infty(S^{n-1}) \longrightarrow C^\infty(S^{n-1})$

$$\sigma_t(\phi)(x) = \int_{S^{n-1}} \sigma_t(x,y)\phi(y)d\sigma(y) \tag{2.18}$$

Observação1: Fora do ponto x a distribuição $\sigma_t(x,\cdot)$ coincide com uma função C^∞. Portanto, (2.18) pode ser interpretada como uma integral convergente para todo x que se situe fora do suporte de ϕ, se assumirmos que o complementar do suporte é não vazio.
Observação2: Veja que:

$$\sigma_t(\phi)(x) = \sum_{j=0}^{L} (-1)^{L+j} \binom{L}{j} \int_{S^{n-1}} P((1-jt)x, y)\phi(y)d\sigma(y) \tag{2.19}$$

$$\Delta_t^L f(0) = \sum_{j=0}^{L} (-1)^{L+j} \binom{L}{j} f(jt)$$

sendo f a função definida em (2.16).

As estimativas (2.7) para o núcleo de Poisson da esfera implicam na seguinte estimativa para o núcleo $\sigma_t(x,y)$.

Lema 2.7 *Para todo $x \neq y$ em S^{n-1} vale a seguinte estimativa:*

$$|\sigma_t(x,y)| \leq \frac{ct^L}{|x-y|^{n-1+L}} \tag{2.20}$$

com a constante c dependendo somente de L,n.

Prova do Lema (2.7)

Caso 1: Sejam $x, y \in S^{n-1}$ tais que $x \neq y$ e $|y-x| < 2t$ isto implica em:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1+L} \leq \frac{t^{n-1+L}}{|x-y|^{n-1+L}} L^{n-1+L}. \tag{2.21}$$

uma vez que $L > 1$. Usando as estimativas (2.7) para o núcleo de Poisson, temos as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned}
|\sigma_t(x,y)| &= |\sum_{j=1}^{L}(-1)^{L+j}\binom{L}{j}P((1-jt)x,y)| \\
&\leq \sum_{j=1}^{L}\binom{L}{j}|P((1-jt)x,y)| \\
&\leq \sum_{j=1}^{L}\binom{L}{j}\frac{C}{|(1-jt)x-y)|^{n-1}} \\
&\leq \sum_{j=1}^{L}\binom{L}{j}\frac{C}{(jt)^{n-1}} \\
&\leq C(L)\tfrac{C2^{n-1+L}}{2^{n-1+L}t^{n-1}}, \text{ por (2.21)} \\
&\leq C(L,n)\tfrac{t^{n-1+L}}{t^{n-1}|x-y|^{n-1+L}} \\
&= C(L,n)t^L|x-y|^{-n+1-L}
\end{aligned}$$

o que demonstra o caso 1.

Caso 2: Sejam $x, y \in S^{n-1}$ tais que $|x-y| > 2t$. Vamos usar a fórmula (2.15) suponto f dada pela Proposição (2.16).

$$\begin{aligned}
|\sigma_t(x,y)| &= \Big|t^L\sum_{|\alpha|=L}(-y)^\alpha\int_{[0,1]^L}\frac{\partial^\alpha}{\partial z^\alpha}P((1-ts)x,y)ds\Big| \\
&\leq t^L\sum_{|\alpha|=L}|y|^{|\alpha|}\int_{[0,1]^L}\Big|\frac{\partial^\alpha}{\partial z^\alpha}P((1-ts)x,y)\Big|ds \\
&\leq t^L\sum_{|\alpha|=L}|y|^{|\alpha|}\int_{[0,1]^L}\frac{C(L,n)}{|(1-ts)x-y|^{n-1+|\alpha|}}ds
\end{aligned}$$

sendo que na última linha aplicamos as estimativas para o núcleo de Poisson dadas por (2.7). Como, $|x-y| > 2t$ e $|w-x| < t$ temos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} |x-y| &\leq |x-tsx-y| + |tsx| \\ &\leq |(1-ts)x-y| + ts \\ &\leq |(1-ts)x-y| + t \\ &\leq |(1-ts)x-y| + \tfrac{|x-y|}{2} \end{aligned}$$

ou seja,

$$|(1-ts)x-y| \geq \frac{1}{2}|x-y|$$

O que conclui a demonstração do Caso 2. ■

Como o nosso objetivo é expressar funções testes em termos do núcleo de Poisson, precisamos fazer uma pequena alteração no operador σ_t definindo:

Definição 2.8 *Seja $\phi \in C^\infty(S^{n-1})$ e defina o seguinte operador:*

$$\Gamma_t(\phi)(x) = \sigma_t(\phi)(x) - (-1)^L I(\phi)(x). \tag{2.22}$$

Sendo I o operador identidade.

$$\Gamma_t(\phi)(x) = \sum_{j=1}^{L} (-1)^{L+j} \binom{L}{j} \int_{S^{n-1}} P((1-jt)x, y)\phi(y)d\sigma(y) \tag{2.23}$$

Observe que se $\phi \in C^\infty(S^{n-1})$ se anula identicamente num aberto U não vazio de S^{n-1}, então:

$$\Gamma_t(\phi)(x) = \sigma_t(\phi)(x),$$

para todo $x \in U$, pois $P(x,y) = \delta_x$ a distribuição delta de Dirac.

Proposição 2.7 *Para toda $\phi \in C^\infty(S^{n-1})$ temos que $\Gamma_t \circ \Gamma_t(\phi) \longrightarrow \phi$ na topologia de $C^\infty(S^{n-1})$, quando $t \longrightarrow 0$.*

Prova da Proposição (2.7) Para a demonstração deste fato veja o corolário (3.2) que será enunciado adiante. ■

Definição 2.9 *Fixado o operador Γ_t, definimos*

$$\Gamma_t^+ = \Gamma_{\frac{t}{2}} + \Gamma_t, \quad \sigma_t^+ = \sigma_{\frac{t}{2}} + \sigma_t$$

$$\Gamma_t^- = \Gamma_{\frac{t}{2}} - \Gamma_t, \quad \sigma_t^- = \sigma_{\frac{t}{2}} - \sigma_t$$

Então as seguintes igualdades ocorrem:

$$\sigma_t = \frac{\sigma_t^+ - \sigma_t^-}{2} \quad \text{e} \quad \sigma_{\frac{t}{2}} = \frac{\sigma_t^+ + \sigma_t^-}{2}$$

$$\Gamma_t = \frac{\Gamma_t^+ - \Gamma_t^-}{2} \quad \text{e} \quad \Gamma_{\frac{t}{2}} = \frac{\Gamma_t^+ + \Gamma_t^-}{2}$$

Observe que $\sigma_t^- = \Gamma_t^-$

Lema 2.8 *Sejam $s < L$ inteiros positivos fixos tais que $L > 1$. Então para toda $\phi \in C^\infty(S^{n-1})$ as seguintes estimativas:*

$$\sup_{x \in S^{n-1}} \left| \sigma_t^-(\phi)(x) \right| \leq C t^s \|\phi\|_{C^s} \tag{2.24}$$

com C dependendo somente de n,L.

Prova do Lema (2.8): Vamos demonstrar com maior generalidade no Lema (3.9). ■

Lema 2.9 *Seja ϕ uma função suportada na bola $B(x,h)$, tal que $\|\phi\|_{L^1(S^{n-1})} \leq 1$, e que $\|\phi\|_{C^L} \leq h^{-n+1-L}$. Então, para todo $m < s < L$ as seguintes desigualdades ocorrem:*

(i) $\displaystyle\int_{S^{n-1}} |\sigma_h(\phi)(y)| \Big(1 + \frac{|x-y|}{h}\Big)^m d\sigma(y) \leq C(n,L)$

(ii) $\displaystyle\int_{S^{n-1}} |\sigma_{th}^-(\phi)(y)| \Big(1 + \frac{|x-y|}{h}\Big)^m d\sigma(y) \leq C(n,L) t^s.$

Prova do Lema (2.9): Prova de **(i)**. Podemos decompor a expressão em:

$$\int_{S^{n-1}} |\sigma_h(\phi)(y)| \Big(1 + \frac{|x-y|}{h}\Big)^m d\sigma(y) = I + II$$

$$I = \int_{B(x,9h) \cap S^{n-1}} |\sigma_h(\phi)(y)| \Big(1 + \frac{|x-y|}{h}\Big)^m d\sigma(y)$$

e

$$II = \int_{S^{n-1} \setminus B(x,9h)} |\sigma_h[\phi](y)| \Big(1 + \frac{|x-y|}{h}\Big)^m d\sigma(y)$$

Para o estudo do termo (I) observe que se $y \in B(x,9h) \cap S^{n-1}$ então $|x-y| \leq 9h$, como consequência $1+|x-y|/h \leq 10$. Logo,

$$\begin{aligned}
|I| &\leq 10^m \int\limits_{B(x,9h)\cap S^{n-1}} |\sigma_h(\phi)(y)| d\sigma(y) \text{ aplicando a definição (2.19) de } \sigma_t \\
&\leq 10^m \sum_{j=0}^{L} \binom{L}{j} \int\limits_{B(x,9h)\cap S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} P((1-jt)y,w)|\phi(w)| d\sigma(w) d\sigma(y) \\
&\leq 10^m \sum_{j=0}^{L} \binom{L}{j} \int\limits_{S^{n-1}} |\phi(w)| \int\limits_{S^{n-1}} P((1-jt)y,w) d\sigma(y) d\sigma(w)
\end{aligned}$$

Neste momento demonstraremos o seguinte Lema, que nos permitirá calcular a última integral separadamente:

Lema 2.10 $\sup\limits_{0<r<1} \int_{S^{n-1}} P(rx,y)d\sigma(y) \leq C < \infty$. *Com a constante C dependendo somente de n.*

Prova do Lema(2.10): Seja $B = B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ a bola unitária. Recordemos a expressão do núcleo de Poisson relativo a B:

$$P(z,y) = \frac{c_n(1-|z|^2)}{|z-y|^n}$$

com $c_n = 1/\omega_n$ e $\omega_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{(n)\Gamma(\frac{n}{2})}$ volume da bola unitária em $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
\int_{S^{n-1}} P(rx,y)d\sigma(x) &= \tfrac{1}{r^{n-1}} \int_{\partial B(0,r)} P(w,y)d\sigma(w) \\
&= \tfrac{C}{|\partial B(0,r)|} \int_{\partial B(0,r)} P(w,y)d\sigma(w) \\
&= CP(0,y) \\
&= C' \tfrac{1-|0|^2}{|0-y|^n} = C'
\end{aligned}$$

com C' dependendo somente de n. Passando o supremo em r segue a afirmação desejada. □

Voltando a demonstração do ítem (i) do Lema (2.9) vemos que:

$$
\begin{aligned}
|I| &\leq 10^m \sum_{j=0}^{L} \binom{L}{j} \int\limits_{S^{n-1}} |\phi(w)| \int\limits_{S^{n-1}} P((1-jt)y,w)d\sigma(y)d\sigma(w) \\
&\leq 10^m \sum_{j=0}^{L} \binom{L}{j} \int\limits_{S^{n-1}} |\phi(w)| \sup_{j,t} \int\limits_{S^{n-1}} P((1-jt)y,w)d\sigma(y)d\sigma(w) \\
&\leq c'10^m \sum_{j=0}^{L} \binom{L}{j} \int\limits_{S^{n-1}} |\phi(w)|d\sigma(w) \\
&\leq C(n,L).
\end{aligned}
$$

após usarmos que $\|\phi\|_{L^1(S^{n-1})} \leq 1$. □

Para estimarmos o termo II suponha agora que $|x-y| \geq 9h$ então,

$$
\begin{aligned}
(1+|x-y|/9) &= \left(\tfrac{h+|x-y|}{h}\right) \\
&\leq \tfrac{10|x-y|}{9h}
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
|II| &\leq \int\limits_{S^{n-1}\setminus B(x,9h)} |\sigma_h(\phi)(y)|\Big(1+\frac{|x-y|}{h}\Big)^m d\sigma(y) \\
&\leq \Big(\tfrac{10}{9}\Big)^m h^{-m} \int\limits_{S^{n-1}\setminus B(x,9h)} \Big(\int_{B(x,h)} |\sigma_h(y,w)||\phi(w)|d\sigma(w)\Big)|x-y|^m d\sigma(y) \\
&\leq \Big(\tfrac{10}{9}\Big)^m h^{-m} \int\limits_{S^{n-1}\setminus B(x,9h)} \Big(\int_{B(x,h)} ch^L|y-w|^{-n+1-L}|\phi(w)|d\sigma(w)\Big)|x-y|^m d\sigma(y) \\
&\leq Ch^{L-m}\Big(\tfrac{10}{9}\Big)^m \int\limits_{S^{n-1}\setminus B(x,9h)} \int_{S^{n-1}} |\phi(w)||x-y|^{m-n+1-L} d\sigma(w)d\sigma(y) \\
&= Ch^{L-m}\Big(\tfrac{10}{9}\Big)^m \int\limits_{S^{n-1}} |\phi(w)|\Big\{\int_{S^{n-1}\setminus B(x,9h)} |x-y|^{m-n+1-L} d\sigma(y)\Big\}d\sigma(w) \\
&\leq Ch^{L-m}\Big(\tfrac{10}{9}\Big)^m \int\limits_{S^{n-1}} |\phi(w)|h^{m-L} d\sigma(w) \\
&= C(L,m,n)\|\phi\|_{L^1(S^{n-1})} < \infty.
\end{aligned}
$$

Na terceira desigualdade usamos o Lema (2.7).
A quarta desigualdade é obtida observando que se

$$|x-y|<h \text{ e } |y-w|>9h \text{ então } |y-w|>9|x-y|.$$

O que conclui a demonstração de **(i)**
Prova de **(ii)**.

$$\int\limits_{S^{n-1}} |\sigma_{th}^{-}(\phi)(y)|\Big(1+\frac{|x-y|}{h}\Big)^m d\sigma(y) = I + II$$

$$I = \int\limits_{B(x,9h)\cap S^{n-1}} |\sigma_{th}^{-}(\phi)(y)|\Big(1+\frac{|x-y|}{h}\Big)^m d\sigma(y)$$

e

$$II = \int\limits_{S^{n-1}\setminus B(x,9h)} |\sigma_{th}^{-}(\phi)(y)|\Big(1+\frac{|x-y|}{h}\Big)^m d\sigma(y)$$

Vejamos primeiramente o que ocorre com I.

$$\begin{aligned}
|I| &\leq 10^m \int\limits_{B(x,9h)\cap S^{n-1}} |\sigma_{th}^{-}(\phi)(y)| d\sigma(y) \text{ pelo Lema (2.8)} \\
&\leq 10^m C(L,n) \int\limits_{B(x,9h)\cap S^{n-1}} t^s h^s \|\phi\|_{C^s(S^{n-1})} d\sigma(y) \\
&\leq t^s h^{-n+1} \int\limits_{B(x,9h)\cap S^{n-1}} d\sigma(y), \text{ após usarmos } \|\phi\|_{C^s} \leq h^{-n+1-L} \\
&\leq C(L,n) t^s
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|II| &\leq \int\limits_{S^{n-1}\setminus B(x,9h)} |\sigma_{th}^{-}(\phi)(y)|\Big(1+\frac{|x-y|}{h}\Big)^{m} d\sigma(y) \\
&\leq \Big(\tfrac{10}{9}\Big)^{m} h^{-m} \int\limits_{S^{n-1}\setminus B(x,9h)} |\sigma_{th}^{-}(\phi)(y)||x-y|^{m} d\sigma(y) \\
&\leq Ct^{L}h^{L}\Big(\tfrac{10}{9}\Big)^{m} h^{-m} \int\limits_{S^{n-1}\setminus B(x,9h)} \int_{S^{n-1}} |\phi(w)||x-y|^{m-n+1-L} d\sigma(w) d\sigma(y) \\
&+ \Big(\tfrac{10}{9}\Big)^{m} t^{L}h^{-m} \int\limits_{S^{n-1}\setminus B(x,9h)} |\phi(y)| d\sigma(y), \text{ mas } S(\phi)\subset B(x,h) \text{ implica} \\
&= Ct^{L}h^{L}\Big(\tfrac{10}{9}\Big)^{m} h^{-m} \int\limits_{S^{n-1}} |\phi(w)|\Big\{\int_{S^{n-1}\setminus B(x,9h)} |x-y|^{m-n+1-L} d\sigma(y)\Big\} d\sigma(w) \\
&\leq Ct^{L}h^{L}\Big(\tfrac{10}{9}\Big)^{m} h^{-m} \int\limits_{S^{n-1}} |\phi(w)| h^{m-L} d\sigma(w) \\
&= C(L,m,n)t^{L}\|\phi\|_{L^{1}(S^{n-1})} \leq C(L,m,n)t^{L} < C(L,m,n)t^{s}.
\end{aligned}
$$

Concluindo assim a demonstração de **(ii)** terminando assim a demonstração do Lema (2.9). ■

Prova da Proposição (2.4) Seja $L \in \mathbb{R}$ tal que $L \geq 1$. Para $x \in S^{n-1}$ fixo consideremos o conjunto $K_L(x)$ que consiste do conjunto formado por funções $\phi \in C^{\infty}(S^{n-1})$ tais que:
(i) Existe uma bola $B(x,h)$ do $\mathbb{R}^n$ tal que $S(\phi) \subseteq B(x,h) \cap S^{n-1}$, com $h < 1$;
(ii) Para este h vale a estimativa $\|\phi\|_{C^{L}(S^{n-1})} \leq \frac{1}{h^{n-1+L}}$.

Fixada uma função $\phi \in K_L(x)$, o próximo passo consiste em obter uma decomposição *diádica* para ϕ. Com esse objetivo faremos algumas definições:

Denotarmos $\Gamma_t \circ \Gamma_t$ a operação de composição. Então temos,

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{\frac{t}{2}} \circ \Gamma_{\frac{t}{2}} - \Gamma_t \circ \Gamma_t &= \tfrac{1}{4}\{(\Gamma_t^{+}+\Gamma_t^{-})(\Gamma_t^{+}+\Gamma_t^{-}) - (\Gamma_t^{+}-\Gamma_t^{-})(\Gamma_t^{+}-\Gamma_t^{-})\} \\
&= \tfrac{1}{2}\{\Gamma_t^{+}\circ\Gamma_t^{-} + \Gamma_t^{-}\circ\Gamma_t^{+}\}
\end{aligned}
$$

Seja I o operador identidade, segue da Proposição (2.7) que a soma telescópica:

$$
\Gamma_h \circ \Gamma_h + \sum_{j=0}^{N} (\Gamma_{2^{-j-1}h} \circ \Gamma_{2^{-j-1}h} - \Gamma_{2^{-j}h} \circ \Gamma_{2^{-j}h})
$$

$$
= \Gamma_{2^{-N-1}h} \circ \Gamma_{2^{-N-1}h} \longrightarrow I \text{ quando } \; N \longrightarrow \infty
$$

Assim,

$$\begin{aligned}\phi &= \Gamma_h \circ \Gamma_h(\phi) + \sum_{j=0}^{\infty}(\Gamma_{2^{-j-1}h} \circ \Gamma_{2^{-j-1}h} - \Gamma_{2^{-j}h} \circ \Gamma_{2^{-j}h})(\phi) \\ &= \Gamma_h \circ \Gamma_h(\phi) + \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2}\{\Gamma^+_{2^{-j}h} \circ \Gamma^-_{2^{-j}h} + \Gamma^-_{2^{-j}h} \circ \Gamma^+_{2^{-j}h}\}(\phi)\end{aligned}$$

Seja f uma distribuição em S^{n-1} então como o operador Γ_h é auto-adjunto temos que:

$$\begin{aligned}\langle f, \phi\rangle &= \langle f, \Gamma_h \circ \Gamma_h(\phi)\rangle \\ &+ \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2}\{\langle f, \Gamma^+_{2^{-j}h} \circ \Gamma^-_{2^{-j}h}(\phi)\rangle + \langle f, \Gamma^-_{2^{-j}h} \circ \Gamma^+_{2^{-j}h}(\phi)\rangle\} \\ &= \langle \Gamma_h(f), \Gamma_h(\phi)\rangle \\ &+ \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2}\{\langle \Gamma^+_{2^{-j}h}(f), \Gamma^-_{2^{-j}h}(\phi)\rangle + \langle \Gamma^-_{2^{-j}h}(f), \Gamma^+_{2^{-j}h}(\phi)\rangle\}\end{aligned}$$

Defina

$$(\Gamma)^{**}_m(f)(x) = \sup_{y\in S^{n-1}, 0<t\leq 1/L} |\Gamma_t(f)(y)|\Big(\frac{t}{t+|x-y|}\Big)^m \tag{2.25}$$

e de forma similar

$$(\Gamma^+)^{**}_m(f)(x) = \sup_{y\in S^{n-1}, 0<t\leq 1/L} |\Gamma^+_t(f)(y)|\Big(\frac{t}{t+|x-y|}\Big)^m \tag{2.26}$$

e

$$(\Gamma^-)^{**}_m(f)(x) = \sup_{y\in S^{n-1}, 0<t\leq 1/L} |\Gamma^-_t(f)(y)|\Big(\frac{t}{t+|x-y|}\Big)^m \tag{2.27}$$

Recordemos a definição da função maximal u^{**}_m associada a distribuição f

$$u^{**}_m(x) = \sup_{z\in B} |u(z)|\Big[\frac{1-|z|}{z-x}\Big]^m \tag{2.28}$$

sendo que $u(z) = \langle f, P(z,\cdot)\rangle$.

Fatos importantes:

Lema 2.11 *As seguintes desigualdades pontuais ocorrem:*

$$(\Gamma)^{**}_m(f)(x) \leq u^{**}_m(x) \tag{2.29}$$

$$(\Gamma^+)^{**}_m(f)(x) \leq u^{**}_m(x) \tag{2.30}$$

$$(\Gamma^-)^{**}_m(f)(x) \leq u^{**}_m(x) \tag{2.31}$$

Prova do Lema (2.11) Vamos demonstrar com maior generalidade no Lema (3.4) que será exibido no Capítulo seguinte. ■

Voltando a demonstração da Proposição (2.4) temos,

$$\langle \Gamma_h(f), \Gamma_h(\phi)\rangle = \Big| \int_{S^{n-1}} \Gamma_h(f)(y)\Gamma_h(\phi)(y)d\sigma(y)\Big|$$

$$= \Big| \int_{S^{n-1}} \Gamma_h(f)(y)\Big(1+\frac{|x-y|}{h}\Big)^{-m}\Gamma_h(\phi)(y)\Big(1+\frac{|x-y|}{h}\Big)^{m} d\sigma(y)\Big|$$

$$\leq \sup_{y\in S^{n-1}, 0<t\leq 1/L} |\Gamma_t(f)(y)|\Big(1+\frac{|x-y|}{t}\Big)^{-m}\int_{S^{n-1}} |\Gamma_h(\phi)(y)|\Big(1+\frac{|x-y|}{h}\Big)^{m} d\sigma(y)$$

$$= (\Gamma)^{**}_m(f)(x)\int_{S^{n-1}} |\Gamma_h(\phi)(y)|\Big(1+\frac{|x-y|}{h}\Big)^{m} d\sigma(y)$$

$$\leq Cu^{**}_m(x), \text{ após aplicarmos (2.29) e o Lema (2.9)}$$

□

$$|\langle \Gamma^+_{2^{-j}h}(f), \Gamma^-_{2^{-j}h}(\phi)\rangle| = \Big| \int_{S^{n-1}} \Gamma^+_{2^{-j}h}(f)(y)\Gamma^-_{2^{-j}h}(\phi)(y)d\sigma(y)\Big|$$

$$= \Big| \int_{S^{n-1}} \Gamma^+_{2^{-j}h}(f)(y)\Big(1+\frac{|x-y|}{2^{-j}h}\Big)^{-m}\Gamma^-_{2^{-j}h}(\phi)(y)\Big(1+\frac{|x-y|}{2^{-j}h}\Big)^{m} d\sigma(y)\Big|$$

$$\leq \sup_{y\in S^{n-1}, 0<t\leq 1/L} |\Gamma^+_t(f)(y)|\Big(t+\frac{|x-y|}{t}\Big)^{m}\int_{S^{n-1}} 2^{mj}|\Gamma^-_{2^{-j}h}(\phi)(y)|\Big(1+\frac{|x-y|}{h}\Big)^{m} d\sigma(y)$$

$$= 2^{mj}(\Gamma^+)^{**}_m(f)(x)\int_{S^{n-1}} |\Gamma^-_{2^{-j}h}(\phi)(y)|\Big(1+\frac{|x-y|}{h}\Big)^{m} d\sigma(y)$$

$$\leq 2^{(m-s)j}Cu^{**}_m(x) \text{ após aplicarmos (2.30) e o Lema (2.9)}$$

Provando de forma análoga temos:

$$|\langle \Gamma^-_{2^{-j}h}(f), \Gamma^+_{2^{-j}h}(\phi)\rangle| \leq 2^{j(m-s)}Cu^{**}_m(x)$$

Logo,

$$|\langle f,\phi\rangle| \leq \tfrac{C}{2}\sum_{j=0}^{\infty} 2^{(m-s)j}u^{**}_m(x) \text{ por hipótese } m<s$$

$$\leq Cu^{**}_m(x) \ \ \forall \phi \in K_L(x)$$

Deste modo, passando ao supremo em $\phi \in K_L(x)$ temos que:

$$f^*_L(x) \leq Cu^{**}_m(x), \ \ \forall x \in S^{n-1}$$

com C independente de f e de x. ■

2.4.4 Controle de f_s^* sobre $u^\perp$

A seguir vamos mostrar que $(iv) \Longrightarrow (i)$ provando o controle que a função maximal f_s^* exerce sobre a função maximal radial $u^\perp$.

Proposição 2.8 *Seja $f \in C^\infty(S^{n-1})$ tal que $S(f) \subseteq B(x_0,\epsilon) \cap S^{n-1}$ com ϵ pequeno o suficiente. Para todo $s > 0$ existe uma constante C que depende de ϵ, s, n, tal que:*

$$\|u^\perp\|_{L^p(S^{n-1})} \leq C\|f_s^*\|_{L^p(S^{n-1})} \tag{2.32}$$

Prova da Proposição (2.8): Fixemos $p < 1$. Por uma rotação podemos supor que o ponto x_0 é o polo norte $x_0 = (0, \cdots, 1)$

$$\begin{aligned} \|u^\perp\|^p_{L^p(S^{n-1})} &= \int_{S^{n-1}} \sup_{0<r<1} \Big| \int_{B(x_0,\epsilon)\cap S^{n-1}} P(rx,y)f(y)d\sigma(y)\Big|^p d\sigma(x) \\ &= I + II \end{aligned}$$

Sendo

$$I = \int_{B(x_0,2\epsilon)\cap S^{n-1}} \sup_{0<r<1} \Big| \int_{B(x_0,\epsilon)\cap S^{n-1}} P(rx,y)f(y)d\sigma(y)\Big|^p d\sigma(x)$$

e

$$II = \int_{S^{n-1}\setminus\{B(x_0,2\epsilon)\cap S^{n-1}\}} \sup_{0<r<1} \Big| \int_{B(x_0,\epsilon)\cap S^{n-1}} P(rx,y)f(y)d\sigma(y)\Big|^p d\sigma(x)$$

Vamos estudar primeiramente o termo I. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ denotamos $x = (x', x_n)$, com $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Seja $U = \{(x', \sqrt{1-|x'|^2}) : \frac{\sqrt{3}}{2} < \sqrt{1-|x'|^2} \leq 1\}$ a semicalota superior e tome $\Phi : U \longrightarrow D = \Phi(U)$ a projeção cuja imagem inversa é dada por $\Phi^{-1}(x') = F(x') = (x', \sqrt{1-|x'|^2})$. Vemos que, $U \subset S^{n-1}$ é aberto na topologia relativa e além disso, $U = B(x_0, \frac{\sqrt{3}}{2}) \cap S^{n-1}$.

Seja $f \in C^\infty(S^{n-1})$ tal que $K = S(f) \subset U$. Como K é compacto seja $\delta = d(K, S^{n-1} \setminus U)$ a distância de K ao complementar de U então desde que $\delta > 0$, escolha uma função $\chi \in C_c^\infty(S^{n-1})$ tal que

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 \ se \ x \in U_{\frac{\delta}{4}} \\ 0 \ se \ x \in S^{n-1} \setminus U_{\frac{\delta}{2}} \end{cases}$$

o aberto U_ϵ é definido por:

$$U_\epsilon = \{x \in U : d(x, S^{n-1} \setminus U) < \epsilon\}.$$

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0,\epsilon)\cap S^{n-1}} P(rx,y)f(y)d\sigma(y) &= \int_K P(rx,y)f(y)d\sigma(y) \\ &= \int_{U_{\frac{\delta}{2}}} P(rx,y)\chi(y)f(y)d\sigma(y) \end{aligned}$$

escrevendo nas coordenadas (U,Φ) obtemos:

$$\begin{aligned}\int_{B(x_0,\epsilon)\cap S^{n-1}} P(rx,y)f(y)d\sigma(y) &= \int_{\Phi(U_{\frac{\delta}{2}})} \tilde{P}(r,x',y')\tilde{f}(y')\tilde{\chi}(y')\mathcal{J}(y')dy' \\ &= \int_{\Phi(U_{\frac{\delta}{2}})} \tilde{f}(y')\Psi(y')dy'\end{aligned}$$

as funções $\tilde{f},\tilde{\chi}$ são dadas por:

$$\tilde{f}(y') = f\circ F(y')$$
$$\tilde{\chi}(y') = \chi\circ f(y')$$

aqui $\mathcal{J}$ denota a expressão do elemento de volume nas coordenadas (U,Φ) e finalmente reduzimos a expressão pondo:

$$\Psi(y') = \tilde{P}(r,x',y')\tilde{\chi}(y')\mathcal{J}(y')$$

Estendendo Ψ por zero fora de $\Phi(U_{\frac{\delta}{2}})$ temos que a função $\Psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ é tal que $S(\Psi)\subset\Phi(U_{\frac{\delta}{2}})$.

A seguir mostraremos que Ψ pode ser escrita como:

$$\Psi(y') = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\{g_{r,k}\}_{2^k r}(y') \tag{2.33}$$

sendo $\{g_{r,k}\}$ para todo $0<r<1$ e $k\in\mathbb{Z}_+$ uma familia limitada em $C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$. Para ver (2.33), fixe $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ com:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 \ se\ |x|\leq\frac{1}{2} \\ 0 \ se\ |x|\geq 1\end{cases}$$

do fato de $\phi(y'/2^{N+1}r)\longrightarrow 1$ quando $N\longrightarrow\infty$ temos

$$1 = \lim_{N\longrightarrow\infty}\{\phi(y'/r) + \sum_{k=0}^{N}(\phi(y'/2^{k+1}r) - \phi(y'/2^k r))\}$$

obtendo assim a soma telescópica:

$$1 = \phi(y'/r) + \sum_{k=0}^{\infty}(\phi(y'/2^{k+1}r) - \phi(y'/2^k r)) \tag{2.34}$$

multiplicando ambos os membros da expressão (2.34) por Ψ obtemos:

$$\Psi(y') = \Psi(y')\phi(y'/r) + \sum_{k=0}^{\infty}\Psi(y')(\phi(y'/2^{k+1}r) - \phi(y'/2^k r))$$

A seguir definiremos funções $g_r, \{g_{r,k}\}$ tais que:

$$\Psi(y') = g_r(y') + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\{g_{r,k}\}_{2^k r}(y') \tag{2.35}$$

sendo que $\{g_{r,k}\}_{2^k r}(y') = \frac{1}{(2^k r)^{n-1}} g_{r,k}(\frac{y'}{2^k r})$.

Basta definir:

$$g_r(y') = \Psi(y')\phi(y'/r)$$

e

$$g_{r,k}(y') = 2^k(2^k r)^{n-1}\Psi(2^k r y')(\phi(y'/2) - \phi(y'))$$

Mas, desde que a função $(\phi(y'/2^{k+1}r) - \phi(y'/2^k r))$ está suportada em $\frac{1}{2} \leq |y'| \leq 2$, a coleção $\{g_{r,k}\}$ têm as seguintes propriedades expressas no Lema abaixo:

Lema 2.12 *A coleção $\{g_{r,k}\}$ satisfaz:*
(i) $S(g_{r,k}) \subseteq \{y' \in \mathbb{R}^{n-1} : \frac{1}{2} \leq |y'| \leq 2\}$;
(ii) $\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$ *existe uma constante* $C = C(\alpha) < \infty$ *tal que:*

$$\sup_{y' \in \mathbb{R}^{n-1}} |\partial^\alpha g_{r,k}(y')| \leq C;$$

(iii) $y' \in S(g_{r,k}) \Longrightarrow 2^k r < 1$

Prova: Para verificar (i) veja que

$$S(g_{r,k}) \subset S(\phi(y'/2) - \phi(y')) \subseteq \{y' \in \mathbb{R}^{n-1} : 1/2 \leq |y'| \leq 2\}$$

Por simplicidade suporemos $n = 3$ para a prova de (ii). O caso geral é demonstrado de forma análoga. Ponha $\psi(y') = \phi(y'/2) - \phi(y')$. Assim, para a prova de (ii) basta derivar a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
g_{r,k}(y') &= 2^k(2^k r)^2\Psi(2^k r y')\psi(y') \\
&= \frac{C2^k(2^k r)^2(1-r^2)\tilde{\chi}(2^k r y')(1-(2^k r y_1)^2-(2^k r y_1)^2)^{-\frac{1}{2}}\psi(y')}{[(rx_1-2^k r y_1)^2+(rx_2-2^k r y_2)^2+(r\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}-\sqrt{1-(2^k r y_1)^2-(2^k r y_2)^2})^2]^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{C2^{3k}r^2(1-r^2)\tilde{\chi}(2^k r y')(1-(2^k r y_1)^2-(2^k r y_1)^2)^{-\frac{1}{2}}\psi(y')}{2^{3k}[(2^{-k}rx_1-r y_1)^2+(2^{-k}rx_2-r y_2)^2+(2^{-k}r\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}-\sqrt{2^{-2k}-(r y_1)^2-(r y_2)^2})^2]^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{Cr^2(1-r^2)\tilde{\chi}(2^k r y')(1-(2^k r y_1)^2-(2^k r y_1)^2)^{-\frac{1}{2}}\psi(y')}{[(2^{-k}rx_1-r y_1)^2+(2^{-k}rx_2-r y_2)^2+(2^{-k}r\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}-\sqrt{2^{-2k}-(r y_1)^2-(r y_2)^2})^2]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

Para provar (iii) veja que se $y' \in S(g_{r,k})$ temos que por um lado y' é tal que $2^k r|y'| \leq C_\delta$ com $C_\delta < 1/2$ e por outro lado $1/2 \leq |y'| \leq 2$, juntando os dois fatos obtemos

$$2^k r(1/2) \leq 2^k r|y'| \leq C_\delta < 1/2$$

portanto,

$$y' \in S(g_{r,k}) \Longrightarrow 2^k r < 1$$

□

Como consequência do Lema (2.12) temos o seguinte corolário:

Corolário 2.1 *Para todo $s \in \mathbb{Z}_+$ fixo tal que $s \geq 1$ temos que existe uma constante C que depende somente de s tal que para todo $t \in B(0, \frac{1}{4})$*

$$\frac{\{g_{r,k}\}_{2^k r}}{C} \subset K_s(t)$$

Prova: Observe que $S(g_{r,k}) \subset B(0,2)$. Como

$$(g_{r,k})_{2^k r}(y') = \frac{1}{(2^k r)^{n-1}} g_{r,k}\Big(\frac{y'}{2^k r}\Big)$$

vemos que $S((g_{r,k})_{2^k r}) \subset B(0, 2^k r)$ com $2^k r < 1$ a elém disso, segue as estimativas para a derivada

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha (g_{r,k})_{2^k r}(y')| &\leq \tfrac{1}{(2^k r)^{n-1+|\alpha|}} |\partial^\alpha (g_{r,k})(y'/2^k r)| \\ &\leq \tfrac{C_\alpha}{(2^k r)^{n-1+|\alpha|}} \\ &= \tfrac{C'^{,n}_\alpha}{((5/4)2^k r)^{n-1+|\alpha|}} \end{aligned}$$

Assim, se fixarmos $s \in \mathbb{Z}_+$ com $s \geq 1$ então existe uma constante $C = C(n,s)$ tal que $(g_{r,k})_{2^k r}/C \in K_s(t)$ para todo $t \in B(0, 2^k r/4)$ uma vez que dado $t \in B(0, 2^k/4)$ segue que $B(0, 2^k r) \subset B(t, (5/4)2^k r)$

□

Aplicando a identidade (2.35) a integral $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \tilde{f}(y')\Psi(y')dy'$ obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \tilde{f}(y')\Psi(y')dy' &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \tilde{f}(y') g_r(y')dy' \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \tilde{f}(y')\{g_{r,k}\}_{2^k r}(y')dy' \end{aligned}$$

Logo multiplicando e dividindo a integral $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \tilde{f}(y')\{g_{r,k}\}_{2^k r}(y')dy'$ pela constante C do Corolário (2.1) obtemos a seguinte estimativa:

$$C\Big|\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \tilde{f}(y')\{g_{r,k}\}_{2^k r}(y')/C dy'\Big|^p \leq C \sup_{\phi \in K_s(t)} |\langle \tilde{f}, \phi\rangle|^p \quad \forall t \in B = B(0, 1/4)$$

isto implica que:

$$\begin{aligned} C|\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \tilde{f}(y')\{g_{r,k}\}_{2^k r}(y')/C dy'|^p &\leq \frac{C}{|B|}\int_B \sup_{\phi\in K_s(t)} |\langle \tilde{f},\phi\rangle|^p dt \\ &= \frac{C}{|B|}\int_B \tilde{f}_s^*(t)^p dt \end{aligned}$$

Finalmente podemos concluir que existe uma contante $C = C(n,s)$ tal que

$$I \leq C\|\tilde{f}_s^*\|^p_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}$$

A seguir vamos estimar o termo:

$$II = \int_{S^{n-1}\setminus\{B(x_0,2\epsilon)\cap S^{n-1}\}} \sup_{0<r<1} \Big|\int_{B(x_0,\epsilon)\cap S^{n-1}} P(rx,y)f(y)d\sigma(y)\Big|^p d\sigma(x).$$

Observe que se $x \in S^{n-1}\setminus\{B(x_0,2\epsilon)\cap S^{n-1}$ e $y \in B(x_0,\epsilon)\cap S^{n-1}$ então, $|x-y|>\epsilon$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0,\epsilon)\cap S^{n-1}} P(rx,y)f(y)d\sigma(y) &= \int_{B(x_0,\epsilon)\cap S^{n-1}} P(rx,y)f(y)\chi(y)d\sigma(y) \\ &= \int_{S^{n-1}} f(y)\phi_{r,x}(y)d\sigma(y) \end{aligned}$$

Lema 2.13 *Se $\phi_{r,x}(y) = P(rx,y)\chi(y)$ afirmamos que fixado $s\in\mathbb{Z}_+$ com $s\geq 1$ existe uma constante $C = C(n,s)$ tal que $\{\phi_{r,x}/C\}\subset K_s(t)$, $\forall t\in B(x_0,\epsilon/4)\cap S^{n-1}$ e todo $x\in S^{n-1}\setminus\{B(x_0,2\epsilon)\cap S^{n-1}\}$.*

Prova do Lema (2.13): Observe que $S(\phi_{r,x})\subseteq B(x_0,\epsilon)$ assim, para todo $t\in B(x_0,\epsilon/4)$ temos que $B(x_0,\epsilon)\subset B(t,5\epsilon/4)$. Além disso, para todo multi-índice $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$ vale a seguinte estimativa:

$$|\partial^\alpha P(rx,y)| \leq \frac{C_{\alpha,n}}{\epsilon^{n-1+|\alpha|}} \tag{2.36}$$

De fato,
caso 1: Suponha que $1-r>\epsilon/2$.

Segue das estimativas para o núcleo de Poisson da esfera que:

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha P(rx,y)| &\leq \frac{C_{\alpha,n}}{|rx-y|^{n-1+|\alpha|}} \\ &\leq \frac{C_{\alpha,n}}{(1-r)^{n-1+|\alpha|}} \\ &\leq \frac{C'_{\alpha,n}}{\epsilon^{n-1+|\alpha|}} \end{aligned}$$

caso 2: Suponha $1-r\leq\epsilon/2$.

Neste caso, $\epsilon \leq |x-y| \leq |x-rx| + |rx-y| \leq \epsilon/2 + |rx-y|$ isto é, $|rx-y| \geq \epsilon/2$. Assim,

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha P(rx,y)| &\leq \tfrac{C_{\alpha,n}}{|rx-y|^{n-1+|\alpha|}} \\ &\leq \tfrac{C'_{\alpha,n}}{\epsilon^{n-1+|\alpha|}} \end{aligned}$$

Logo, $S(\phi_{r,x}) \subset B(t, 5\epsilon/4)$ se $t \in B(x_0, \epsilon/4)$ e além disso,

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha \phi_{r,x}(y)| &\leq \sum_{\beta+\gamma=\alpha} C_{\beta,\gamma} |\partial_y^\beta P(rx,y)||\partial_y^\alpha \chi(y)| \\ &\leq \sum_{\beta+\gamma=\alpha} C_{\beta,\gamma} \frac{C_{\beta,n}}{\epsilon^{n-1+|\beta|}} |\partial_y^\alpha \chi(y)| \\ &\leq \tfrac{C_{\alpha,n,\chi}}{\epsilon^{n-1+|\alpha|}} \\ &= \tfrac{C'_{\alpha,n,\chi}}{(5\epsilon/4)^{n-1+|\alpha|}} \end{aligned}$$

Logo, escolhendo $C = \max_{|\alpha|\leq s} C_{\alpha,n,\chi}$ temos que $\phi_{r,x}/C \in K_s(t)$ $\forall t \in B(x_0, \epsilon/4) \cap S^{n-1}$

Assim,

$$\begin{aligned} \Big| \int_{B(x_0,\epsilon)\cap S^{n-1}} P(rx,y) f(y) d\sigma(y) \Big|^p &= C \Big| \int_{S^{n-1}} f(y)(\phi_{r,x}(y)/C) d\sigma(y) \Big|^p \\ &\leq C \sup_{\phi \in K_s(t)} |\langle f, \phi \rangle|^p, \quad \forall t \in B(x_0, \epsilon/4) \end{aligned}$$

integrando sobre o conjunto $S = B(x_0, \epsilon) \cap S^{n-1}$ obtemos

$$\begin{aligned} \Big| \int_{B(x_0,\epsilon)\cap S^{n-1}} P(rx,y) f(y) d\sigma(y) \Big|^p &\leq \tfrac{C}{|S|} \int_S \sup_{\phi \in K_s(t)} |\langle f, \phi \rangle|^p d\sigma(t) \\ &= \tfrac{C}{|S|} \int_S f_s^*(t)^p d\sigma(t) \\ &\leq C' \|f_s^*\|^p_{L^p(S^{n-1})} \end{aligned}$$

com a constante C' dependendo de n, s, χ, ϵ. ■

Corolário 2.2 *Seja $f \in \mathcal{D}'(S^{n-1})$. Então dado $s > 0$ existe uma constante C que depende de s, n tal que:*

$$\|u^\perp\|_{L^p(S^{n-1})} \leq C \|f_s^*\|_{L^p(S^{n-1})}.$$

Prova do Corolário (2.2): Fixado $\epsilon > 0$ escolha uma partição da unidade $\{\varphi_j\}$ subordinada a cobertura $B(x_j, \epsilon) \cap S^{n-1}$ com $j = 1, \cdots, M$, e aplique o raciocínio da Proposição (2.8) a distribuição $\varphi_j f$. ■

Capítulo 3

Espaços de Hardy na Fronteira Σ de um Aberto Ω.

3.1 Introdução

Mostraremos neste capítulo que os resultados contidos no Capítulo 2 podem ser estendidos. Mais precisamente, definiremos o espaço $\mathcal{H}^p(\Sigma)$, sendo Σ a fronteira suave de um subconjunto aberto e limitado Ω do $\mathbb{R}^n$.

Este espaço será caracterizado por uma série de desigualdades estabelecidas entre funções maximais definidas sobre Σ, a partir da extensão harmônica de uma distribuição definida sobre Σ, conforme a definição (3.2) que será dada adiante.

Vimos no Capítulo 1 que se Σ for uma variedade compacta e arbitrária é possível definir os espaços de Hardy sobre Σ através do uso de cartas e dos espaços de Hardy locais $h^p(\mathbb{R}^n)$, de Goldberg([2]). Ainda vimos que é possível dar uma caracterização intrínseca dos espaços de Hardy por meio da função maximal f_s^*, tal como é feito na caracterização adicional do $h^p(\mathbb{R}^n)$, vista no Capítulo 1. Veremos adiante a equivalência destas abordagens.

Uma dificuldade está no fato de que, em geral a expressão do núcleo de Poisson associado a subconjuntos abertos do $\mathbb{R}^n$, é desconhecida. Entretanto, as estimativas (2.7) são obtidas neste trabalho via a utilização de operadores pseudo-diferenciais.

3.2 Preliminares.

Seja Ω um subconjunto aberto, conexo e limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Σ de classe C^∞, então existe $\rho : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ de classe C^∞ satisfazendo:

a. $\nabla\rho \neq 0$ sobre Σ;

b. $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) < 0\}$;

c. $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) = 0\}$.

O Teorema da Funçao Implícita implica que para todo $0 \leq \epsilon < \epsilon_0$ o conjunto $\Sigma_\epsilon = \{x \in \Omega : \rho(x) = -\epsilon\}$ é uma subvariedade compacta e

mergulhada no $\mathbb{R}^n$ fronteira da região $\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega : \rho(x) < -\epsilon\}$.

Ao se trabalhar com funções definidas num aberto arbitrário Ω temos a necessidade de dispor de dilatações do tipo $f_\epsilon(z) = f(\epsilon z)$. Como ϵz pode escapar do domínio de definição de f é possível cobrir Ω por finitos domínios $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ com as seguintes propriedades:

a. $\Omega = \cup\Omega_j$

b. Para cada j, o conjunto $\Sigma \cap \partial\Omega_j$ é uma variedade de dimensão $n-1$ com fronteira.

c. Existe um $\epsilon_0 > 0$ e um campo vetorial normal a $\Sigma \cap \partial\Omega_j$ apontando para a direção externa ν_j tal que o conjunto $\Omega_j - \epsilon\nu_j = \{z - \epsilon\nu_j : z \in \Omega_j\} \subset\subset \Omega$, para todo $0 < \epsilon < \epsilon_0$.

Assim, para toda função u definida em Ω podemos definir $u_\epsilon(x) = u(x - \epsilon\nu_j)$ para todo $x \in \Omega_j$. O que nos permite associar a seguinte função maximal, chamada função maximal radial:

$$u^\perp(x) = \sup_{0<\epsilon<\epsilon_0} |u(x - \epsilon\nu)|$$

sendo ν um campo vetorial normal exterior a Σ tal que restrito aos conjuntos $\Sigma \cap \partial\Omega_j$ coincide com os campos ν_j normais aos Ω_j definidos anteriormente. A função $u^\perp$ reflete o comportamento radial da função u. Torna-se importante definirmos uma função maximal relacionada ao comportamento não-tangencial de u próximo a fronteira Σ.

Seguindo este propósito consideramos para cada ponto $x \in \Sigma$ a região

$$\Gamma_\alpha(x) = \{z \in \Omega_0 : |z - x| < \alpha d(z, \Sigma)\}$$

sendo que $\Omega_0 = \{z \in: d(z, \Sigma) < \epsilon_0\}$, $d(z, \Sigma) = dist(z, \Sigma)$ e $\alpha > 1$. Este é o análogo n-dimensional para a região de Stolz. Definimos então,

$$u^*_\alpha(x) = \sup_{z \in \Gamma_\alpha(x)} |u(z)|.$$

A seguir definimos a função u^{**}_m que será importante para a prova das equivalências citadas anteriormente entre as várias definições de espaços de Hardy sobre Σ, todas resultando numa mesma noção. Para todo $m \in \mathbb{Z}_+$ definimos a função maximal,

$$u^{**}_m(x) = \sup_{z \in \Omega_0} |u(z)| \Big(\frac{d(z, \Sigma)}{|z - x|}\Big)^m$$

sendo que, $d(z, \Sigma) = \inf_{w \in \Sigma} |z - w|$.

Definição 3.1 *Seja $s \in \mathbb{Z}_+$, e $x \in \Sigma$. Então denotamos por $K_s(x)$ o conjunto de todas as $\phi \in C^\infty(\Sigma)$ tais que existe um $0 < h < h_0$ que satisfaz simultaneamente:*
(i) *$S(\phi) \subseteq B(x, h)$, sendo que*

$$B(x, h) = \{y \in \Sigma : d(x, y) < h\}$$

d: distância geodésica,
(ii) $\sup_{0\leq k\leq s} h^{n-1+k}\|\phi\|_k \leq 1.$

Definição 3.2 *Seja $f \in \mathcal{D}'(\Sigma)$ e P(z,x) o núcleo de Poisson associado ao aberto Ω. Então definimos a integral de Poisson de f pela função harmônica u que a cada $z \in \Omega$ associa*

$$u(z) = \langle f, P(z,\cdot)\rangle$$

Definição 3.3 *Se f é uma distribuição em Σ, definimos*

$$f_s^*(x) = \sup_{\phi\in K_s(x)} |\langle f,\phi\rangle|.$$

3.2.1 Operadores Pseudo-diferenciais.

Definição 3.4 *Seja m um número real qualquer. Denotaremos por $S^m(\Omega,\Omega)$ o espaço das funções $a(x,y,\xi)$ definidas e de classe C^∞ em $\Omega\times\Omega\times\mathbb{R}^n$, com a seguinte propriedade:*

Para todo subconjunto compacto K de $\Omega\times\Omega$ e para qualquer conjunto de multi-índices α,β,γ, existe uma constante $C_{\alpha,\beta,\gamma}(K) > 0$ tal que

$$|D_x^\alpha D_y^\beta D_\xi^\gamma a(x,y,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta,\gamma}(K)(1+|\xi|^2)^{\frac{m-|\gamma|}{2}},\ \forall (x,y)\in K, \forall \xi\in\mathbb{R}^n. \quad (3.1)$$

A expressão $(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}$ é usualmente denotada por $\langle\xi\rangle$ o pseudo-módulo de ξ.

Os elementos de $S^m(\Omega,\Omega)$ são chamados de amplitudes[1] de grau $\leq m$ em $(\Omega\times\Omega)$. E vamos chamar de símbolos as amplitudes que independam da variável y, e neste caso denotaremos por $S^m(\Omega)$ o conjunto dos símbolos de grau $\leq m$ definidos sobre Ω. A interseção de todos os $S^m(\Omega,\Omega)$ quando m percorre o conjuto $\mathbb{R}$ será denotado por $S^{-\infty}(\Omega,\Omega)$

O espaço $S^m(\Omega,\Omega)$ é um espaço de Fréchet quando sua topologia for induzida pela família de seminormas: $p_{K;\alpha,\beta,\gamma}(a)$ que definimos como sendo o ínfimo das constantes $C_{\alpha,\beta,\gamma}(K)$ tais que (3.1) ocorre, quando K percorre a coleção de todos os subconjuntos compactos de Ω, e α,β,γ o conjunto de todos os multi-índices de $\mathbb{Z}_+^n$.

Definição 3.5 *Seja $a \in S^m(\Omega,\Omega)$. Denotamos por Op(a) o operador linear $A : C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ definido por:*

$$Au(x) = (2\pi)^{-n}\int\int e^{i(x-y)\cdot\xi}a(x,y,\xi)u(y)dyd\xi \quad (3.2)$$

A integral (3.2) deve ser interpretada como uma integral oscilatória quando $m \geq -n$.

[1]Uma referência para o estudo dos operadores pseudo-diferenciais pode ser encontrada em [5] e em [9].

Definição 3.6 *Um operador linear $A : \mathcal{E}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ é chamado operador pseudo-diferencial de ordem m se existe uma amplitude $a \in S^m(\Omega, \Omega)$ tal que $A = Op(a)$.*

O conjunto dos operadores pseudo-diferenciais de ordem m serão denotados por $\Psi^m(\Omega)$.

Conforme o Teorema do Núcleo de Schwartz: *Para todo operador linear e contínuo $A : C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$, corresponde um único Núcleo K em $\mathcal{D}'(\Omega \times \Omega)$ tal que $\langle Au, v\rangle = \langle K, v \otimes u\rangle$, para todo par $u, v \in C_c^\infty(\Omega)$.* É possível mostrar que se K_A é o núcleo de um operador pseudo-diferencial de ordem m, então K é de classe C^∞ fora da diagonal de $\Omega \times \Omega$. Mais precisamente, é possível mostrar que fixada a ordem m para cada $j \in \mathbb{Z}_+$ existe $N_j \in \mathbb{Z}_+$ tal que $|x-y|^{2N_j} K_a(x,y) \in C^j(\Omega \times \Omega \setminus \Delta)$. Isto implica na propriedade dos operadores pseudo-diferenciais dados por amplitudes $a \in S^m(\Omega, \Omega)$ serem pseudolocais.

Assim, os operadores pseudo-diferenciais não são somente contínuos de $C_c^\infty(\Omega)$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ mas realmente de $C_c^\infty(\Omega)$ em $C^\infty(\Omega)$ e portanto podem ser estendidos como aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{E}'(\Omega)$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Definição 3.7 *Um operador linear e contínuo $A : C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ é dito regularizante se pode ser estendido a uma aplicação linear e contínua de $\mathcal{E}'$ em $C^\infty(\Omega)$.*

Proposição 3.1 *Todo operador regularizante $A : \mathcal{E}'(\Omega) \longrightarrow C^\infty(\Omega)$ é da forma $Op(a)$, com $a \in S^{-\infty}(\Omega, \Omega)$.*

Prova da Proposição (3.1): Veja a Proposição 2.1 da página 16 de ([5]). ■

O resultado que vem a seguir será usado para obtermos uma estimativa para o núcleo de Poisson de um aberto do $\mathbb{R}^n$ do tipo (2.7).

Proposição 3.2 *Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e seja $K \in \mathcal{D}'(\Omega \times \Omega)$ o núcleo de um Operador Pseudo-diferencial dado por uma aplitude $a \in S^m(\Omega, \Omega)$. Então, para todo par de multi-índices $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ a seguinte estimativa ocorre:*

$$|D_x^\alpha D_y^\beta K(x,y)| \leq \frac{c_{\alpha,\beta}}{|x-y|^{m+n+|\alpha|+|\beta|}} \tag{3.3}$$

para todo $x \neq y$.

Prova da Proposição (3.2): Veja Teorema (1.1) de ([10]). ■

Teorema 3.1 *Seja A um operador pseudo-diferencial em Ω, de ordem m. Dado qualquer número real s, a aplicação $u \longmapsto Au$ pode ser estendida como um operador linear e contínuo de $H_c^s(\Omega)$ em $H_{loc}^{s-m}(\Omega)$.*

Prova do Teorema (3.1): Veja por exemplo o Teorema 2.1 da página 16 de ([5]). ■

A seguir faremos uma breve revisão de como os operadores pseudo-diferenciais se comportam quando é realizada uma mudança de variável. Seja $x \longmapsto y = \phi(x)$ um difeomorfismo do aberto Ω com imagem no aberto Ω', ambos abertos do $\mathbb{R}^n$, e denotamos por $\mathcal{J}(y)$ a matriz Jacobiada de ϕ^{-1}.

O difeomorfismo ϕ induz um isomorfismo $\phi^* : C_c^\infty(\Omega') \longrightarrow C_c^\infty(\Omega)$, pela fórmula:

$$(\phi^* u)(x) = u(\phi(x)), \quad \forall u \in C_c^\infty(\Omega').$$

Por transposição temos que ela define um isomorfismo $\phi_* : \mathcal{D}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega')$ dada por:

$$\langle \phi_* F, u \rangle = \langle F, \phi^* u \rangle, \quad \forall u \in C_c^\infty(\Omega'), F \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

A restrição de ϕ_* a $\mathcal{E}'(\Omega)$ é um isomorfismo de $\mathcal{E}'(\Omega)$ em $\mathcal{E}'(\Omega')$.

Dado qualquer operador pseudo-diferencial $A \in \Psi^m(\Omega)$ definido de $\mathcal{E}'(\Omega)$ a $\mathcal{D}'(\Omega)$ podemos definir

$$A^\phi = \phi_* \circ A \circ (\phi_*^{-1}) : \mathcal{E}'(\Omega') \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega') \tag{3.4}$$

Chamaremos A^ϕ a transferência de A de Ω' através de ϕ.

Teorema 3.2 *Seja ϕ um difeomorfismo de Ω em Ω'. Para cada número real m, a aplicação $A \longmapsto A^\phi$ é uma bijeção de $\Psi^m(\Omega)$ sobre $\Psi^m(\Omega')$.*

Demonstração do Teorema (3.2): Veja o Teorema 3.3 da página 27 de ([5]). ■

Sejam M, M' duas variedades diferenciáveis e $\phi : M \longrightarrow M'$ um difeomorfismo, e seja $A : C_c^\infty(M) \longrightarrow \mathcal{D}'(M')$ uma aplicação linear e contínua podemos definir de forma análoga a transferência de A para M' através de ϕ como sendo: $A^\phi = \phi_* \circ A \circ \phi^*$ sendo que ϕ^* é o *pullback* de funções e ϕ_* a imagem direta de distribuições associadas com ϕ, que se trata do transposto da aplicação $f \longmapsto f \circ \phi^{-1} : C_c^\infty(M') \longrightarrow C_c^\infty(M)$.

Seja $\mathcal{O}$ um aberto de M, chamamos de restrição de A em $\mathcal{O}$ e denotamos $A_\mathcal{O}$ a composição:

$$C_c^\infty(\mathcal{O}) \longrightarrow C_c^\infty(M) \longrightarrow^A \mathcal{D}'(M) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathcal{O})$$

sendo que a primeira flecha é a aplicação que estendo por zero em $M \setminus \mathcal{O}$ uma função com suporte compacto em $\mathcal{O}$, e a última é a restrição natural de uma distribuição definida em M ao aberto $\mathcal{O}$.

Definição 3.8 *Uma aplicação linear e contínua $A : C_c^\infty(M) \longrightarrow \mathcal{D}'(M)$ é dita ser um operador pseudo-diferencial (de ordem m) em M se, dada qualquer carta $(\mathcal{O}, \chi)$ em M, a transferência $A_\mathcal{O}^\chi$ é um operador pseudo-diferencial (de ordem m) em $\chi(\mathcal{O})$.*

Podemos estender o Teorema (3.1) às variedades diferenciáveis obtendo assim o seguinte Teorema:

Teorema 3.3 *Seja $A \in \Psi^m(M)$, $(m \in \mathbb{R})$. Dado qualquer $s \in \mathbb{R}$, a aplicação $u \longmapsto Au$ é uma aplicação linear e contínua de $H_c^s(M)$ em $H_{loc}^{s-m}(M)$.*

Prova do Teorema (3.1) Veja por exemplo o Teorema 5.1 da página 47 de ([5]). ■

3.2.2 Estimativas para o Núcleo de Poisson.

Nesta Seção mostraremos que as estimativas (2.7) também são verdadeiras no caso em que $P(z,x)$ é o núcleo de Poisson de um aberto arbitrário do $\mathbb{R}^n$ com fronteira suave.

Proposição 3.3 *Seja $P(z,x)$ o núcleo de Poisson de um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ com fronteira suave.*

$$|\partial_z^\alpha P(z,x)| \leq \frac{c_{\alpha,\beta}}{|z-x|^{n-1+|\alpha|}} \tag{3.5}$$

ocorre para todo $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ e todo $z \in \Omega$ e $x \in \Sigma$.

Prova da Proposição (3.3):

Seja $x \in \Sigma$ fixo e conside o cone

$$\Gamma(x) = \{z \in \Omega : |z-x| < d(z,\Sigma)\}.$$

Etapa 1: Suponha que $z \in \Gamma(x)$.

Para $\alpha = 0$ usaremos um método devido à N. Kerzman para a estimativa do Núcleo de Poisson de um aberto arbitrário com fronteira de classe C^2. Esses resultados podem ser encontrados na Proposição 8.2.1 na página 325 de ([13]). Mais precisamente na seguinte Proposição.

Proposição 3.4 *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira de classe C^2. Seja $P = P_\Omega : \Omega \times \partial\Omega \longmapsto \mathbb{R}^n$. Então, para cada $x \in \Omega$, existe uma constante positiva C_x tal que:*

$$0 < C_x \leq P(x,y) \leq \frac{C}{|x-y|^{n-1}} \leq \frac{C}{\delta(x)^{n-1}}$$

sendo que $\delta(x) = dist(x, \partial\Omega)$ e $C = C(\Omega, n)$.

Prova da Proposicão (3.4): Recorde que, $G(x,y) = \Gamma(x-y) - \phi^x(y)$ sendo que

$$(*) \begin{cases} \Delta\phi^x(y) = 0 & \text{se } y \in \Omega \\ \phi^x(y) = \Gamma(x-y) & \text{se } y \in \partial\Omega \end{cases}$$

Pelo método de Perron como a função $y \longmapsto \Gamma(x-y) \in C^0(\partial\Omega)$ para cada $x \in \Omega$ o problema de Dirichlet $(*)$ possui solução $\phi^x \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$. Desta forma, temos que $G(x,y) = 0 \quad \forall x \in \Omega, \quad y \in \partial\Omega$. Escolha $0 < \epsilon < \delta(x)/2$ e considere a região $\Omega_\epsilon = \Omega \setminus B(x,\epsilon)$. Veja que se $y_0 \in \partial\Omega$ então

$$G(x,y_0) = \Gamma(x-y_0) - \phi^x(y_0) = 0$$

além disso, se $y_1 \in \partial B(x,\epsilon)$ então

$$G(x,y_1) = \Gamma(x-y_1) - \phi^x(y_1) = \frac{C_n}{\epsilon^{n-2}} - \phi^x(y_1).$$

Desde que ϕ^x é limitada em compactos de Ω escolhendo ϵ suficientemente pequeno vemos que $G(x,y_1) \geq 0 \ \ \forall y_1 \in \partial B(x,\epsilon)$. Fixemos ϵ tal que isto ocorra, então a função G é solução do seguinte problema:

$$(**) = \begin{cases} \Delta_y G(x,y) = 0 & \text{se } y \in \Omega_\epsilon \\ G(x,y) = 0 & \text{se } y \in \partial\Omega \\ G(x,y) \geq 0 & \text{se } y \in \partial B(x,\epsilon) \end{cases}$$

Assim, segue do Princípio do máximo que $y \longmapsto G(x,y) > 0$ em Ω_ϵ e fazendo ϵ tender a 0 vemos que $y \longmapsto G(x,y) > 0 \ \ \forall y \in \Omega$. Por outro lado, $-G(x,y) < 0$ em Ω o que implica que $\forall y_0 \in \partial\Omega$, y_0 é um máximo global em Ω desde que

$$-G(x,y) < 0 = -G(x,y_0) \ \ \forall y \in \Omega, \ \ \forall y_0 \in \partial\Omega.$$

Como $G \in C^{2-\epsilon}$ sobre o conjunto $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \setminus \{diagonal\}$ segue do Lema de Hopf que:

$$-\frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x,y) > 0 \ \ \forall y_0 \in \partial\Omega.$$

Lembre que $P(x,y) = -\frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x,y) \ \ \forall x \in \Omega, \quad y \in \partial\Omega$. Neste caso vemos que $0 < P(x,y) \ \ \forall y \in \partial\Omega$. Como $\partial\Omega$ é compacto $\exists C_x > 0$ tal que $0 < C_x \leq P(x,y)$ e portanto o limitante inferior é assim estabelecido.

O próximo passo consiste em mostrar a desigualdade:

$$P(x,y) \leq \frac{C}{|x-y|^{n-1}} \ \ \forall x \in \Omega, \ \ \forall y \in \partial\Omega.$$

De fato, fixemos $x \in \Omega$ e $y \in \partial\Omega$. Desde que $\partial\Omega \in C^2$ existem bolas $B_y = B(c_y, r)$ e $\tilde{B}_y = B(\tilde{c}_y, \tilde{r})$ tais que $B_y \cap \partial\Omega = \{y\}$ e $\tilde{B} \cap \partial\Omega = \{y\}$ com $B_y \subset \Omega$ e $\tilde{B}_y \subset^c \bar{\Omega}$. Estudaremos a seguir as propriedades da função $G_\Omega(x,.) - G_{^c\tilde{B}_y}(x,.)$ no conjunto $\bar{\Omega}$. Vejamos que, $G_{\Omega(x,y)} - G_{^c\tilde{B}_y}(x,y) = \phi_2^x(y) - \phi_1^x(y)$ sendo que:

$$\begin{cases} \Delta\phi_1^x(y) = 0 & \text{se } y \in \Omega \\ \phi^x(y) = \Gamma(x-y) & \text{se } y \in \partial\Omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\phi_2^x(y) = 0 & \text{se } y \in {}^c\tilde{B}_y \\ \phi^x(y) = \Gamma(x-y) & \text{se } y \in \partial\, {}^c\tilde{B}_y \end{cases}$$

Desde que, $\Omega \subset \tilde{B}_y^c$ vemos que a função $t \longmapsto G_\Omega(x,t) - G_{\tilde{B}_y^c}(x,t)$ é harmônica em Ω. Além disso, se $t \in \partial\Omega$ então $G_\Omega(x,t) - G_{\tilde{B}_y^c}(x,t) = -G_{\tilde{B}_y^c}(x,t) < 0 \ \ \forall x \in \Omega \ \ \forall t \in \partial\Omega \setminus \{y\}$ e ainda $G_\Omega(x,y) - G_{\tilde{B}_y^c}(x,y) = 0$. Logo,

$$\begin{cases} \Delta_t[G_\Omega(x,t) - G_{\tilde{B}_y^c}(x,t)] = 0 & \text{se } t \in \ \Omega \\ G_\Omega(x,t) - G_{\tilde{B}_y^c}(x,t) \leq 0 & \text{se } t \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Pelo Princípio do máximo novamente temos que

(a) $G_\Omega(x,t) - G_{\tilde{B}_y^c}(x,t) \leq 0 \ \ \forall x \in \Omega \ \ \forall t \in \bar{\Omega}$;

(b) $G_\Omega(x,y) - G_{\tilde{B}_y^c}(x,y) = 0$.

Assim,

$$G_\Omega(x,t) - G_{\tilde{B}_y^c}(x,t) \leq 0 = G_\Omega(x,y) - G_{\tilde{B}_y^c}(x,y).$$

Portanto, segue do Lema de Hopf que:

$$P_\Omega(x,y) = -\frac{\partial}{\partial \nu_y} G_\Omega(x,y) < -\frac{\partial}{\partial \nu_y} G_{\tilde{B}_y^c}(x,y) = -P_{\tilde{B}_y^c}(x,y). \tag{3.6}$$

Como o núcleo de Poisson para $\tilde{B}_y^c$ é dado por:

$$P_{\tilde{B}_y}(x,t) = \frac{\tilde{r}^2 - |x - \tilde{c}_y|^2}{w_{n-1}\tilde{r}|x-t|^n}.$$

Pela Transformação de Kelvin, o núcleo de Poisson para $\tilde{B}_y^c$ se escreve:

$$P_{\tilde{B}_y^c}(x,t) = \frac{|x - \tilde{c}_y|^2 - \tilde{r}^2}{w_{n-1}\tilde{r}|x-t|^n}.$$

Desta forma (3.6) nos dá:

$$\begin{aligned}
P_\Omega(x,y) &\leq \tfrac{|x-\tilde{c}_y|^2-\tilde{r}^2}{w_{n-1}\tilde{r}|x-t|^n} \\
&= \tfrac{(|x-\tilde{c}_y|+\tilde{r})(|x-\tilde{c}_y|-\tilde{r})}{w_{n-1}\tilde{r}|x-t|^n} \\
&\leq \tfrac{(|x-\tilde{c}_y|+\tilde{r})(|x-\tilde{c}_y|-|y-\tilde{c}_y|)}{w_{n-1}\tilde{r}|x-t|^n} \\
&\leq \tfrac{(|x-\tilde{c}_y|+\tilde{r})|x-y|}{w_{n-1}\tilde{r}|x-t|^n} \\
&\leq \tfrac{2|x-y|(diam\Omega+\tilde{r})}{w_{n-1}\tilde{r}|x-y|^n} \\
&\leq \tfrac{2(diam\Omega+\tilde{r})}{w_{n-1}\tilde{r}|x-y|^{n-1}}.
\end{aligned}$$

■

Para a demonstração do caso geral isto é, para $\alpha \in \mathbb{Z}$ arbitrário usaremos o seguinte Lema.

Lema 3.1 *Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ e u uma função harmônica então a seguinte estimativa ocorre:*

$$\left|\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} u(x_0)\right| \leq \frac{c_{|\alpha|}}{R^{n+|\alpha|}} \|u\|_{L^1(B(x_0,R))} \tag{3.7}$$

para cada $B(x_0,R) \subset\subset \Omega$ e $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ sendo que $C_{|\alpha|} = \frac{(2^n n|\alpha|)^{|\alpha|}}{w_n}$ e $c_0 = \frac{1}{wn}$

■

A seguir daremos a demonstração da Etapa 1 que trata do caso da estimativa para o núcleo de Poisson em cones.

Proposição 3.5 *Existe uma constante $C = C(\alpha, \Omega)$ tal que o núcleo de Poisson de um aberto limitado Ω com fronteira de classe C^∞, P satisfaz a seguinte estimativa*

$$|\partial_z^\alpha P(z,x)| \leq \frac{c_{\alpha,n}}{|z-x|^{n-1+|\alpha|}} \tag{3.8}$$

para todo $x \in \Omega$ e para todo $z \in \Gamma(x)$.

Prova da Proposição (3.5): Seja $\Sigma = \partial\Omega$. Considere o conjunto

$$\Omega_{r_0} = \{z \in \Omega : d(z,\Sigma) < r_0\}$$

e escolhemos r_0 suficientemente pequeno de modo que Ω_{r_0} seja uma faixa com fronteira suave em Ω sem auto-interseções. Lembremos que $G(x,y) \in C^\infty$ na região $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \setminus \{diagonal\}$ implicando que $P(z,x) \in C^\infty$ na região $\Omega \times \Sigma$. Considere o conjunto

$$X = \{(x,y) \in \bar{\Omega} \times \partial\Omega : |x-y| \geq r_0\}$$

Como X é um compacto é suficiente provarmos a desigualdade (3.8) para pontos que estão no complementar de X. Sejam $(z,x) \in \bar{\Omega} \times \Sigma$ tais que $|z-x| < r_0$. Aplicaremos a seguir o Lema (3.1) para a função harmônica $z \longmapsto P(z,x), \quad \forall x \in \Sigma$ com respeito a bola $B(z, \frac{|z-x|}{4})$. A hipótese $z \in \Gamma(x)$ implica que a bola $B(z, \frac{|z-x|}{4})$ está sempre contida na região Ω_{r_0}. Nestas condições temos que:

$$\begin{aligned}
|\partial_z^\alpha P(z,x)| &\leq \frac{4^{n+|\alpha|}C_{|\alpha|}}{|z-x|^{n-1+|\alpha|}} \int_{|t-x|\leq\frac{|z-x|}{4}} |P(t,x)|dt \\
&\leq \frac{4^{n+|\alpha|}C_{|\alpha|}}{|z-x|^{n-1+|\alpha|}} \int_{|t-x|\leq\frac{|z-x|}{4}} \frac{dt}{|t-x|^{n-1}} \\
&\leq \frac{4^{n-1+|\alpha|}C_{|\alpha|}}{|x-y|^{n+|\alpha|}} \int_{|t-x|\leq\frac{|z-x|}{4}} \frac{dt}{|t-x|^{n-1}} \\
&\leq \frac{4^{n-1+|\alpha|-1}C_{|\alpha|}|S^{n-1}|diam\Omega}{|z-x|^{n-1+|\alpha|}} \\
&= \frac{C(\alpha,n,\Omega)}{|z-x|^{n-1+|\alpha|}}.
\end{aligned}$$

O que conclui a demonstração da Etapa 1. ■

Etapa 2 Neste caso vamos supor que $|z-x| \geq d(z,\Sigma)$.

Utilizando a técnica de construção de uma parametriz para a equação do calor $\partial U/\partial t - \Delta_x U = 0$ é possível construirmos uma expansão assintótica

para o núcleo de Poisson, provando que a integral de Poisson define uma família de operadores integrais singulares sobre Σ, tais que para cada carta local $(\mathcal{O}, \chi)$ a transferência desta coleção de operadores via χ define uma família de operadores pseudo-diferenciais módulo regularizante, toda ela uniformemente contida em $S^0(\chi(\mathcal{O}))$, em relação ao parâmetro t. O que nos permite via Proposição (3.2) obter estimativas em termos das suas derivadas. Mais precisamente:

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta P_{\mathcal{O}}^\chi(t,x,y)| \leq C_{\alpha,\beta}|x-y|^{-n+1-|\alpha|-|\beta|} \tag{3.9}$$

Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ com fronteira Σ de classe C^∞. Daqui por diante vamos considerar Σ como uma variedade diferenciável com a estrutura diferenciável induzida do espaço ambiente, o que confere a ela a qualidade de subvariedade regular de $\mathbb{R}^n$ de dimensão $n-1$. Fixada $\varphi \in C^\infty(\Sigma)$ considere o problema de Dirichlet associado

$$\begin{cases} \Delta U(z) = 0 & \text{se } z \in \Omega \\ U(z) = \varphi(z) & \text{se } z \in \Sigma \end{cases}$$

cuja solução é única e dada pela expressão:

$$U(z) = \int_\Sigma P(z,u)\varphi(y)d\sigma(y). \tag{3.10}$$

Para todo $0 < t < t_0$ podemos definir a família de operadores $P_t : C^\infty(\Sigma) \longrightarrow C^\infty(\Sigma)$ por

$$P_t(\varphi)(x) = \int_\Sigma P(x - t\nu_x, y)\varphi(y)d\sigma(y) \tag{3.11}$$

sendo ν_x um campo normal de classe C^∞ exterior definido sobre Σ.

Nosso próximo objetivo é mostrar o seguinte Lema:

Lema 3.2 *para toda carta $(\mathcal{O}, \chi)$ a transferência de P_t por χ restrita a $\mathcal{O}$ ou seja, ${P_t^\chi}_{\mathcal{O}}$ pode ser escrita como*

$${P_t^\chi}_{\mathcal{O}}(\varphi)(x) = K(t,x,D_x)(\varphi)(x) + R(\varphi)(x) \tag{3.12}$$

sendo que $K(t,x,D_x)$ representa para todo $t > 0$ um operador pseudo-diferencial em $\Psi^{-\infty}(\chi(\mathcal{O}))$ e uniformemente em $\Psi^0(\chi(\mathcal{O}))$ para todo $t \geq 0$, e R um operador regularizante.

Estes argumentos seguem da seguinte motivação. Seja $P_t(x) = \frac{c_n t}{(t+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$ o núcleo de Poisson do semi-plano superior $\mathbb{R}_+^{n+1}$ temos então o operador associado $P_t(\varphi)(x) = \int P_t(x-y)\varphi(y)dy$. Após aplicarmos a fórmula de inversão de fourier e escolhermos $\chi \in C_c^\infty$ com $\chi \equiv 1$ numa vizinhança da

origem temos,

$$\begin{aligned} P_t(\varphi)(x) &= (2\pi)^{-n}\int e^{ix\xi}e^{-t|\xi|}\hat{\varphi}(\xi)d\xi \\ &= (2\pi)^{-n}\int e^{ix\xi}e^{-t|\xi|}(1-\chi(\xi))\hat{\varphi}(\xi)d\xi \\ &+ (2\pi)^{-n}\int e^{ix\xi}e^{-t|\xi|}\chi(\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi \\ &= Op(a)(\varphi)(x) + R(\varphi)(x) \\ &= A(\varphi)(x) + R(\varphi)(x) \end{aligned}$$

Sendo $a(t,x,\xi) = e^{-t|\xi|}(1-\chi(\xi)) \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ e R um operador regularizante. E além disso, $a \in S^0(\mathbb{R}^n)$ uniformemente em $t \geq 0$.

Assim, se denotamos $K(t,x,y)$ o núcleo$P_t(x-y)$, $K_A(x,y)$ o núcleo de A, e $K_R(x,y)$ o núcleo de R então:

$$K(t,x,y) = K_A(x,y) + K_R(x,y) \tag{3.13}$$

Logo, para todo par de multi-índice α, β seguem as estimativas:

$$|D_x^\alpha D_y^\beta K(t,x,y)| \leq c_{\alpha,\beta}|x-y|^{-n+1-|\alpha|-|\beta|} + |D_x^\alpha D_y^\beta K_R(x,y)|$$

Mas, $K_R \in C^\infty(\chi(\mathcal{O}) \times \chi(\mathcal{O}))$. Uma vez que R é regularizante. □

Prova do Lema (3.2): Considere o aberto Ω. Como Σ é de classe C^∞ dado qualquer ponto $p \in \Sigma$ existe uma carta $(\mathcal{O}, \chi)$ tal que
1) $\chi(\mathcal{O} \cap \Omega) = \mathcal{O}' \cap \mathbb{R}^n_+$
2) $\chi(\mathcal{O} \cap \Sigma) = \mathcal{O}' \cap \{(x,t) \in \mathbb{R}^n_+ : t = 0\}$

Podemos supor sem perda de generalidade que $\chi(\mathcal{O} \cap \bar{\Omega}) = \mathcal{R}$ sendo $\mathcal{R} = \{(x,t) \in \bar{\mathbb{R}^n_+} : 0 \leq t < T_0,\ |x| \leq r\}$. Neste caso, o sistema

$$\begin{cases} \Delta U(z) = 0 & \text{se } z \in \Omega \\ U(z) = \varphi(z) & \text{se } z \in \Sigma \end{cases} \tag{3.14}$$

é transformado via χ no problema:

$$\begin{cases} \Big(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\displaystyle\sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial t} + \sum_{j,k} c_{jk}\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \text{ordem inferior}\Big)u = 0 & \text{em } \mathcal{R} \\ u(x,0) = \varphi(x) & \text{em } |x| \leq r \end{cases} \tag{3.15}$$

sendo $u = U \circ \chi^{-1}$.

Seja

$$P = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial t} + \sum_{j,k} c_{jk} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}$$

P é um operador elítico. Queremos encontrar um Operador pseudo-diferencial D tal que

$$P = (\partial_t + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial}{\partial x_j} - D)(\partial_t + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial}{\partial x_j} + D) mod \Psi^{-\infty}.$$

E tal que

$$Du(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int e^{ix\cdot\xi} d(t,x,\xi) \hat{u}(\xi,t) d\xi^2$$

seja dado por um símbolo $d(t,x,\xi) \in S^1(\mathcal{O}')$.
Com esse propósito veja o seguinte desenvolvimento:

$$\begin{aligned}
& (\partial_t + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial}{\partial x_j} - D)(\partial_t + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial}{\partial x_j} + D) \\
= \;& \tfrac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial b_j}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial t} D + \Big(\sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial}{\partial x_j} \Big)^2 \\
+ \;& \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial}{\partial x_j} D - D \frac{\partial}{\partial t} - D \Big(\sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial}{\partial x_j} \Big) - D^2 \\
= \;& \tfrac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_j} + Op(\frac{\partial}{\partial t} d) + \Big(\sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial}{\partial x_j} \Big)^2 \\
+ \;& Op(Ld) - D^2 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial b_j}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_j} \\
= \;& P - D^2 - \sum_{j,k} c_{jk} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \Big(\sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial}{\partial x_j} \Big)^2 \\
+ \;& Op(\tfrac{\partial}{\partial t} d) + Op(Ld) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial b_j}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_j} \\
= \;& P + R
\end{aligned}$$

[2] A expressão $\hat{u}(x,t)$ denota a transformada de Fourier na primeira variável.

com $L = \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, e $d = \sigma(D)$ sendo que $\sigma(A)$ denota o símbolo do operador A e

$$R = -D^2 - \sum_{j,k} c_{jk} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \Big(\sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial}{\partial x_j} \Big)^2 + Op(\frac{\partial}{\partial t} d) + Op(Ld) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial b_j}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Assim, devemos definir o operador D tal que o operador:

$$Ru(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int e^{ix\cdot\xi} r(x,\xi,t) \hat{u}(\xi,t) d\xi$$

seja tal que $r(x,\xi,t) \in S^{-\infty}(\mathcal{O}')$.

Mais precisamente devemos obter uma expansão assintótica para o símbolo de D da forma:

$$\sigma(D) \sim d_1 + d_0 + d_{-1} + \cdots$$

Veja que a parte principal do operador R é dada por:

$$-D^2 - \sum_{j,k} c_{jk} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \Big(\sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial}{\partial x_j} \Big)^2$$

que por sua vez possui como símbolo principal

$$-d_1^2(x,\xi,t) + \sum_{j,k} c_{jk} \xi_j \xi_k + \Big(\sum_{j=1}^{n} b_j \xi_j \Big)^2$$

Assim, defina

$$d_1(x,\xi,t) = \Big(\sum_{j,k} c_{jk} \xi_j \xi_k - \Big(\sum_{j=1}^{n} b_j \xi_j \Big)^2 \Big)^{1/2}.$$

e veja que d_1 é uma função homogênea de grau 1. Assim, após multiplicarmos d_1 por uma função de corte apropriadamente escolhida podemos então obter um símbolo em $S^1(\mathcal{O})$. Além disso, como d_1 é uma função elítica, existem constantes c_1 e c_2 tais que $c_1|\xi|^2 \leq |d_1(x,\xi,t)| \leq c_2|\xi|^2$.

Seja então, $D_1 = Op(d_1)$, e veja que:

$$D_1^2 = D_1 \circ D_1 = Op\Big((\sum_{j,k} c_{jk} \xi_j \xi_k - (\sum_{j} b_j \xi_j)^2)^{1/2} \Big) + R_1$$

com $R_1 \in \Psi^1(\mathcal{O}')$.

Queremos agora definir um operador $D_0 \in S^0(\mathcal{O}')$ tal que:

$$(D_1 + D_0)^2 + \underbrace{\sum c_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j \partial x_k} - (\sum b_j \frac{\partial}{\partial x_j})^2}_{Q} = R_0$$

de tal forma que R_0 esteja em $\Psi^0(\mathcal{O}')$.

Mas,

$$D_1^2 + 2D_1D_0 + D_0^2 + Q = 2D_1D_0 + D_0^2 + R_1.$$

Defina então, o operador D_0 dado pelo símbolo,

$$\sigma(D_0) = -\frac{1}{2}\frac{R_1}{D_1}.$$

Então, vemos que:

$$\begin{aligned} 2D_1D_0 + D_0^2 + R_1 &= 2D_1(-1/2R_1/D_1) + (-1/2R_1/D_1)^2 + R_1 \\ &= -R_1 + R_1 + 1/4R_1^2/D_1^2 = R_0. \end{aligned}$$

Resta ver que de fato, $R_0 \in S^0$. Mas o símbolo principal de R_0 é dado por:

$$\sigma^0(R_0) = \frac{1}{4}\frac{r_1(t,x,\xi)^2}{\sum c_{jk}\xi_j\xi_k - (\sum b_j\xi_j)^2}$$

que define uma função homogênea de grau 0 e de modo que o denominador se anula somente na origem. Assim, é possível escolher símbolos $\{d_1, d_0, d_{-1}, \cdots\}$ tais que

$$(D_1 + D_0 + \cdots + D_{-j})^2 + \Big[\sum c_{jk}\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} - (\sum b_j \frac{\partial}{\partial x_j})^2\Big] = R_{-j}$$

de modo que $R_{-j} \in \Psi^{-j}$.

Considere o seguinte Teorema:

Teorema 3.4 *Sejam $a_j(x,\xi)$ uma sequência de símbolos tais que $a_j \in S^{m-j}(\Omega)$. Então, existe um símbolo $a(x,\xi) \in S^m(\Omega)$ tal que,*

$$a(x,\xi) - \sum_{j=0}^{N} a_j(x,\xi) \in S^{m-N-1}, \quad \forall N = 0,1,2,\cdots.$$

Neste caso, escrevemos:

$$a(x,\xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x,\xi)$$

Prova do Teorema (3.4): Veja por exemplo Teorema 3.1 da página 40 de [12]. ■

Deste modo, temos que existe $D \in S^1(\mathcal{O}')$ tal que

$$P = (\partial_t + \sum b_j \frac{\partial}{\partial x_j} - D)(\partial_t + \sum b_j \frac{\partial}{\partial x_j} + D) mod \Psi^{-\infty}$$

Com isto podemos escrever:

$$P = (\partial_t + A_1)(\partial_t + A) + R$$

com o operador A dado por

$$A = \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial}{\partial x_j} + D$$

e com o operador A_1 dado por

$$A = \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial}{\partial x_j} - D$$

e $R \in \Psi^0(\mathcal{O}')$.

Deste modo, $\sigma_1(A) = d_1(x,t,\xi) + i\sum_{j=1}^{n} b_j \xi_j$

O próximo passo consiste em mostrar que existe um operador pseudo-diferencial $K(x,t,D_x) \in S^1(\chi(\mathcal{O}))$ satisfazendo:

$$\begin{cases} P \circ K(x,t,D_x)\varphi = R(\varphi) \\ K(x,t,D_x)_{|_{t=0}} = I \end{cases} \tag{3.16}$$

com $R \in S^{-\infty}$.

Entretanto, para resolver (3.16) é suficiente estudar o seguinte problema:

$$\begin{cases} (\partial_t + A)K(\varphi) = R(\varphi) \\ K_{|_{t=0}} = I \end{cases} \tag{3.17}$$

A forma proposta para o símbolo $k(t,x,\xi)$ de $K(x,t,D_x)$ é:

$$k(t,x,\xi) \sim e^{-\int_0^t \sigma_A(s,\xi)ds}(1 + k_{-1}(t,x,\xi) + k_{-2}(t,x,\xi) + \cdots)$$

Observe que se

$$K(t,x,D_x)\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int e^{ix\cdot\xi}\Big(e^{-\int_0^t \sigma_A(s,x,\xi)ds}\Big)\hat{\varphi}(\xi)d\xi$$

então se $t = 0$ temos:

$$\begin{aligned} K(0,x,D_x)\varphi(x) &= \tfrac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int e^{ix\cdot\xi}\hat{\varphi}(\xi)d\xi \\ &= \varphi(x) \end{aligned}$$

logo, a condição inicial é satisfeita.

Além disso,

$$\begin{aligned}\partial_t K\varphi(x) &= -\tfrac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int e^{ix\cdot\xi}\sigma_A(s,x,\xi)e^{-\int_0^t \sigma_A(s,x,\xi)ds}\hat{\varphi}(\xi)d\xi \\ &= -A\circ K mod S^0.\end{aligned}$$

Portanto, é possível determinar todos os símbolos $k_{-j}(t,x,\xi)$, $j = 1,2,3,\cdots$ de modo que (3.16) ocorra.

Seja $K(t,x,D_x) = Op(k)$ então K satisfaz:

$$\partial_t K\varphi + AK\varphi = R\varphi, \quad R \in \Psi^{-\infty}$$

e

$$K\varphi_{|t=0} = \varphi$$

Desta forma,

$$P\circ K(\varphi) = (\partial_t + A_1)(\partial_t + A)\circ K(\varphi) = (\partial_t + A_1)R(\varphi) = \tilde{R}(\varphi)$$

com $\tilde{R} \in S^{-\infty}$. Provando que de fato, $K(t,x,D_x)$ é solução do problema (3.16). Ou seja, $P\circ K \sim 0$ e $K(0,x,D_x) = I$ sendo I o operador identidade. O que demonstra o Lema (3.2). ■

Observamos que a demonstração acima é uma adaptação da demonstração do Teorema 1.1 da página 134 de ([5]) entretanto, o símbolo principal do operador $K(t,x,D_x)$, em nosso caso, que é dado por:

$$\sigma_K(t,x,\xi) = e^{-\int_0^t (d_1(s,x,\xi) + i\sum_{j=1}^n b_j\xi_j)ds}$$

possui parte imaginária.

Portanto, dada qualquer carta local da forma $(\mathcal{O},\chi)$ existe um operador regularizante R tal que a transferência do operador P_t via χ se representa como:

$$P_t^{\chi}{}_{\mathcal{O}} = K(x,t,D_x) + R, \quad \text{em} \quad \chi(\mathcal{O}). \tag{3.18}$$

Sendo $K(t,x,D_x)$ um operador pseudo-diferencial de ordem zero uniformemente em t, e tal que $P_t^{\chi}{}_{\mathcal{O}} \longrightarrow I$ na topologia de $C^{\infty}(\chi(\mathcal{O}))$.

Deste modo, uma estimativa para o núcleo de $P_t^{\chi}{}_{\mathcal{O}}$:

$$|D_x^{\alpha}D_y^{\beta}K_{P_t^{\chi}{}_{\mathcal{O}}}(x,y)| \leq \frac{c_{\alpha,\beta}}{|x-y|^{n-1+|\alpha|+|\beta|}}, \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{Z}_+^{\mathsf{n}}.$$

Voltando a demonstração da Etapa 2 da Proposição (3.3)

Seja $\alpha \in \mathbb{Z}_+^{\mathsf{n}}$ um multi-índice, resta concluir que

$$|\partial_z P(z,x)| \leq \frac{c_{\alpha}}{|z-x|^{n-1+|\alpha|}}$$

se z está fora do cone $\Gamma_{\alpha}(x) = \{z \in \Omega : |z-x| < d(z,\Sigma)\}$.

Seja $(\mathcal{O}, \chi)$ uma carta local ao redor de um ponto $x \in \Sigma$ então, existe $R > 0$ tal que $B = B(x, R) \cap \Sigma \subset \mathcal{O}$, e seja $z \in B$. Após efetuarmos a mudança de coordenadas podemos supor que o ponto x seja levado no próprio x e que z seja levado no ponto $x' - te_n$ sendo e_n o n-ésimo vetor da base ortogonal do $\mathbb{R}^n$. Neste caso temos que a transferência do operador definido pela integral de Poisson P pela carta local tem, como consequência do Lema (3.2) a forma:

$$P = U + R$$

Assim, seus respectivos núcleos satisfazem:

$$K_P(t, x, x') = K_U(t, x, x') + K_R(t, x, x')$$

Logo, $\partial_z^\alpha P(z, x)$ pode ser comparada com $D_{x'}^{\alpha'} D_t^{\alpha_n} K_U(x, x', t)$

As derivadas em x' satisfazem:

$$|D_{x'}^{\alpha'} K_U(x, x', t))| \leq \frac{c_{\alpha'}}{|x - x'|^{n-1+|\alpha'|}} \leq \frac{c_{\alpha'}}{|z - x|^{n-1+|\alpha'|}}.$$

As derivadas em t satisfazem:

$$|D_t^{\alpha_n} K_U(x, x', t)| \leq \frac{c_{\alpha_n}}{|x - x'|^{n-1+\alpha_n}}$$

Uma vez que $D_t^{\alpha_n} K_U(x, x', t)$ define um operador pseudo-diferencial de ordem α_n. Observamos que a constante α_n independe da variável t.

Isto ocorre pois o operador U resolve o problema $\partial_t U + AU \sim 0$ com $A \in S^0$ uniformemente em t. logo, segue de $\partial_t^{\alpha_n} U = \partial_t^{\alpha_n}(AU) mod \Psi^{-\infty}$, além disso, usar o fato de $|z - x| \simeq |x - x'|$. ■

Como consequência dos comentários feitos acima temos a seguinte Proposição.

Proposição 3.6 *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Σ de classe C^∞ e considere $P(z, y)$ o núcleo de Poisson associado ao aberto Ω e defina:*

$$P_t(\varphi)(x) = \int_\Sigma P(x - t\nu_x, y)\varphi(y) d\sigma(y)$$

então valem os seguintes resultados:
(i) para todo $0 \leq t < t_0$ o operador P_t aplica $C^\infty(\Sigma)$ em $C^\infty(\Sigma)$;
(ii) o operador $P_t \longrightarrow I$ na topologia de $C^\infty(\Sigma)$ quando $t \longrightarrow 0$ sendo que I denota o operador identidade em $C^\infty(\Sigma)$.

Prova: Para a demonstração de (i) é suficiente mostrarmos que para toda carta local $(\mathcal{O}, \chi)$ a transferência de P_t em $\mathcal{O}$ via χ denotada por ${P_t}^\chi{}_\mathcal{O}$ aplica continuamente $C^\infty(\chi(\mathcal{O}))$ em $C^\infty(\chi(\mathcal{O}))$. Mas, para toda $\varphi \in C_c^\infty(\chi(\mathcal{O}))$ temos a seguinte representação

$${P_t}^\chi{}_\mathcal{O}(\varphi)(x) = K(t, x, D_x)(\varphi)(x) + \int K_R(t, x, y)\varphi(y) dy$$

sendo $K(t,x,D_x) \in \Psi^0(\chi(\mathcal{O}))$ e K_R sendo o núcleo de um operador regularizante isto é, $K(t,x,y) \in C^\infty(\chi(\mathcal{O}) \times \chi(\mathcal{O}))$, $\forall 0 \leq t < t_0$.

Logo, pelo Teorema (3.3) $K(t,x,D_x) : H_c^s(\chi(\mathcal{O})) \longrightarrow H_{loc}^s(\chi(\mathcal{O}))$ para todo $s \in \mathbb{R}$ logo, $K(t,x,D_x)$ aplica continuamente $C_c^\infty(\chi(\mathcal{O}))$ em $C^\infty(\chi(\mathcal{O}))$.

Para o segundo termo vemos que um operador cujo núcleo é regularizante ele pode ser estendido a um operador contínuo de $C_c^\infty(\chi(\mathcal{O}))$ em $C^\infty(\chi(\mathcal{O}))$ □

Para a demonstração de (ii) veja que:

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \int D_x^\alpha D_y^\beta K_R(t,x,y)\varphi(y)dy = \int D_x^\alpha D_y^\beta K_R(0,x,y)\varphi(y)dy, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Ou seja, $\int K_R(t,x,y)\varphi(y)dy \longrightarrow \int K_R(0,x,y)\varphi(y)dy$ em $C^\infty(\chi(\mathcal{O}))$

No primeiro termo $K(t,x,D_x) \in \Psi^0(\chi(\mathcal{O}))$ implica que $K(t,x,D_x)$ define um operador contínuo de $L^2(\chi(\mathcal{O}))$ em $L^2(\chi(\mathcal{O}))$ para todo $0 \leq t < t_0$. Logo,

$$\begin{aligned} \|K(t,x,D_x)\varphi - K(0,x,D_x)\varphi\|_{L^2} &\leq \|K(t,x,D_x) - K(0,x,D_x)\|_{\mathcal{L}(L^2)}\|\varphi\|_{L^2} \\ &\leq c \sum_{|\alpha| \leq N} p_{\alpha,K}(a(x,t,\xi) - a(0,t,\xi)) \\ &\leq \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad t \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

denotamos $p_{\alpha,K}$ por:

$$p_{\alpha,K}(a) = \sum_{\delta+\gamma=\alpha} \|\langle\xi\rangle^{|\gamma|} D_x^\delta D_\xi^\gamma a(t,x,\xi)\|_{L^\infty(K)}$$

Analogamente é possível mostrar que

$$\|K(t,x,D_x)\varphi - K(0,x,D_x)\varphi\|_{H_{loc}^s(\chi(\mathcal{O}))} \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad t \longrightarrow 0$$

■

A seguir faremos uma alteração no operador P_t definindo

Definição 3.9 *Seja L um número inteiro positivo, e Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ com fronteira suave. Para toda função teste $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ definimos:*

$$\sigma_t(\varphi)(x) = \int \sigma_t(x,y)\varphi(y)d\sigma(y) \tag{3.19}$$

sendo que,

$$\sigma_t(x,y) = \sum_{j=0}^{L} (-1)^{L-j} \binom{L}{j} P(x - t\nu, y) \tag{3.20}$$

e $P(z,y)$ denota o núcleo de Poisson relativo ao aberto Ω, definido para todo $z \in \Omega$ e todo $y \in \Sigma$.

Definimos ainda, o operador Γ_t como sendo $\Gamma_t = \sigma_t - (-1)^L I$, I é o operador identidade.

Como consequência da Proposição (3.6) temos o seguinte Corolário:

Corolário 3.1 *O operador σ_t está bem definido e aplica continuamente $C^\infty(\Sigma)$ em $C^\infty(\Sigma)$ para todo $0 \leq t \leq t_0$. Além disso, para toda $\varphi \in C^\infty(\Sigma)$ temos que*

$$\Gamma_t(\varphi) \longrightarrow (-1)^L\varphi, \text{ na topologia de } C^\infty(\Sigma). \tag{3.21}$$

■

Corolário 3.2 *Para toda $\varphi \in C^\infty(\Sigma)$ segue que $\Gamma_t^2(\varphi) = \Gamma_t \circ \Gamma_t(\varphi) \longrightarrow \varphi$ em $C^\infty(\Sigma)$.*

Prova do Corolário (3.2): Segue do seguinte resultado: *Seja X um espaço de Banach e $T_j \in \mathcal{L}(X)$ uma sequência de operadores lineares e contínuos tais que para todo $x \in X$, ocorre que $T_j x \longrightarrow x$ em norma, então $\|T_j^2 x - x\|_X \longrightarrow 0$.*

Seja X uma variedade compacta. Como $C^\infty(X) = \cap_s H^s_{loc}(X)$, assim podemos considerar em $C^\infty(X)$ a topologia induzida pela família de normas dos espaços de Sobolev com s percorrendo o conjunto dos reais. Para cada s fixo, em virtude da Proposição (3.6) temos que fixada qualquer $\varphi \in C^\infty(\Sigma)$ então como $\Gamma_t(\varphi) \longrightarrow (-1)^L\varphi$ em $H^s_{loc}(\Sigma)$ logo, segue do resultado mencionado acima que:

$$\|\Gamma_j^2(\varphi) - \varphi\|_{H^s_{loc}(\Sigma)} \longrightarrow 0, \quad \forall s. \tag{3.22}$$

O que prova o resultado desejado. ■

Se Γ_t^T denota o transposto do operador Γ_t considere o Corolário.

Corolário 3.3 *Para toda $\varphi \in C^\infty(\Sigma)$ segue que $\Gamma_t^T \circ \Gamma_t(\varphi) \longrightarrow \varphi$ em $C^\infty(\Sigma)$.*

3.3 Resultado Principal.

Os espaços de Hardy $H^p(\Sigma)$ podem ser caracterizados pelo seguinte Teorema.

Teorema 3.5 *Seja $f \in \mathcal{D}'(\Sigma)$ uma distribuição e u a integral de Poisson de f. e seja $0 < p \leq \infty$, então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) $u^\perp \in L^p(\Sigma)$;

(ii) $u^*_\alpha \in L^p(\Sigma)$;

(iii) $u^{**}_m \in L^p(\Sigma)$ quando $m > n/p$;

(iv) existe um número $s \in \mathbb{Z}_+$ tal que $f^*_s \in L^p(\Sigma)$.

Além disso, todas as funções maximais presentes no enunciado do Teorema possuem normas $L^{p's}$ equivalentes.

Antes de demonstrar o Teorema veja que estas funções se relacionam da seguinte forma. Para cada $x \in \Sigma$ fixo

$$u^\perp(x) \leq u^*_\alpha(x) \leq \alpha^m u^{**}_m(x)$$

Deste modo, para todo $0 < p \leq \infty$ temos que

$$\|u^\perp\|_{L^p(\Sigma)} \leq \|u^*_\alpha\|_{L^p(\Sigma)} \leq \alpha^m \|u^{**}_m\|_{L^p(\Sigma)}. \tag{3.23}$$

Prova do Teorema (3.5): Vamos nos restringir ao caso $0 < p \leq 1$.

A demonstração de que $(ii) \Longrightarrow (iii)$ é feita de forma idêntica como no caso da esfera e não será repetida aqui.

Demonstraremos a seguir que $(i) \Longrightarrow (ii)$. A demonstração é ligeiramente diferente da demonstração feita no caso da esfera, e por isso será comentada aqui.

Proposição 3.7 *Seja u uma função harmônica definida em Ω se $\alpha > 1$ então existe uma constante $c = c_{n,p,\alpha}$ tal que*

$$\|u^*_\alpha\|_{L^p(\Sigma)} \leq c\|u^\perp\|_{L^p(\Sigma)}. \tag{3.24}$$

Para a demostração desta Proposição precisaremos do seguinte Lema [3].

Lema 3.3 *Seja B uma bola no $\mathbb{R}^n$ com centro em z, e suponha que u seja uma função harmônica e contínua no fecho de B. Então se $q > 0$ temos que:*

$$|u(z)|^q \leq \frac{C(n,q)}{|B|}\int_B |u(w)|^q dw \tag{3.25}$$

■

Prova da Proposição (3.7): É suficiente mostrarmos a seguinte desigualdade.

$$u^*_\alpha(x) \leq cM[u^{\perp q}](x)^{\frac{1}{q}} \quad \forall x \in \Sigma, \quad q > 0 \tag{3.26}$$

Antes faremos o seguinte comentário seja ρ a função que define o aberto Ω de acordo com a definição dada no começo deste Capítulo. Desde que, $\nabla\rho \neq 0$ sobre Σ, pela compacidade de Σ temos que existe uma constante λ, com $0 < \lambda < 1$, tal que $0 < \lambda \leq |\nabla\rho(x)| < 1/\lambda$ se $x \in \Omega_0$. Seja $x \in \Sigma$ fixo e tomemos $z \in \Gamma_\alpha(x)$ então é possível provar que

$$B(z, \frac{\lambda d(z,\Sigma)}{2}) \subset \{w : -3d(z,\Sigma)/\lambda^2 < \rho(w) < -\lambda^2 d(z,\Sigma)/3\} = S.$$

Consideremos ainda as projeções $\pi_\epsilon : \partial\Omega_\epsilon \longmapsto \partial\Omega$ e seja

$$A = \cap_{\epsilon<\epsilon_0}\pi_\epsilon(B(z, \lambda d(z,\Sigma)/2))$$

[3] Lema 2, pág 172. [1]

Então, desde que $B(z,\lambda d(z,\Sigma)/2)\subset S\cap A$ temos que para $B=B(z,\frac{\lambda d(z,\Sigma)}{2})$ e escolhendo $q<p$ para que $\frac{p}{q}=2$ então pelo Lema (3.3) temos que:

$$\begin{aligned}
|u(z)|^q &\leq \tfrac{C}{|B|}\int_B |u(w)|^q d\sigma(w)\\
&\leq \tfrac{C}{|B|}\int_{S\cap A} |u(w)|^q d\sigma(w)\\
&\leq \tfrac{C}{|B|}\int_{-\frac{3d(z,\Sigma)}{\lambda^2}}^{-\frac{\lambda^2 d(z,\Sigma)}{\lambda^2}} \int_{\partial\Omega_\epsilon\cap\{w:\pi_\epsilon w\in B(\pi z,\lambda d(z,\Sigma)/2)\}} |u(w)|^q d\sigma_\epsilon(w)d\epsilon\\
&= \tfrac{C}{|B|}\int_{-\frac{3d(z,\Sigma)}{\lambda^2}}^{-\frac{\lambda^2 d(z,\Sigma)}{3}} \int_{\partial\Sigma\cap B(z,\lambda d(z,\Sigma)/2)} |u(\pi_\epsilon^{-1}(t))|^q \mathcal{J}_\epsilon(t)d\sigma(t)d\epsilon\\
&= \tfrac{C}{|B|}\int_{-\frac{3d(z,\Sigma)}{\lambda^2}}^{-\frac{\lambda^2 d(z,\Sigma)}{3}} \underbrace{\int_{\partial\Sigma\cap B(x,3\alpha\lambda d(z,\Sigma)/2)}}_{B'} |u(\pi_\epsilon^{-1}(t))|^q \mathcal{J}_\epsilon(t)d\sigma(t)d\epsilon\\
&\leq \tfrac{C|B'|}{|B|}\int_{-\frac{3d(z,\Sigma)}{\lambda^2}}^{-\frac{\lambda^2 d(z,\Sigma)}{3}} \frac{1}{|B'|}\int_{B'} |u(\pi_\epsilon^{-1}(t))|^q \mathcal{J}_\epsilon(t)d\sigma(t)d\epsilon\\
&\leq \tfrac{C|B'|}{|B|}\int_{-\frac{3d(z,\Sigma)}{\lambda^2}}^{-\frac{\lambda^2 d(z,\Sigma)}{3}} \frac{1}{|B'|}\int_{B'} \sup_{\epsilon<\epsilon_0} |u(\pi_\epsilon^{-1}(t))|^q \mathcal{J}_\epsilon(t)d\sigma(t)d\epsilon\\
&\leq \tfrac{C|B'|}{|B|}\int_{-\frac{3d(z,\Sigma)}{\lambda^2}}^{-\frac{\lambda^2 d(z,\Sigma)}{3}} \frac{1}{|B'|}\int_{B'} |u^\perp(t)|^q \mathcal{J}_\epsilon(t)d\sigma(t)d\epsilon\\
&\leq \tfrac{C|B'|\|\mathcal{J}_\epsilon\|_{L^\infty}}{|B|}\int_{-\frac{3d(z,\Sigma)}{\lambda^2}}^{-\frac{\lambda^2 d(z,\Sigma)}{3}} M[u^{\perp q}](x)d\epsilon\\
&\leq CM[u^{\perp q}](x)
\end{aligned}$$

o que demonstra (3.26).

Assim, segue da continuidade do operador M em $L^2(\Sigma)$ e da desigualdade

$$u_\alpha^*(x)=\sup_{z\in\Gamma_\alpha(x)}|u(z)|\leq C\{M[u^{\perp q}]\}^{\frac{1}{q}}(x)$$

que:

$$\begin{aligned}\int_\Sigma |u^*_\alpha(x)|^p d\sigma(x) &\leq C\int_\Sigma \{M[u^{\perp q}]\}^{\frac{p}{q}}(x)d\sigma(x)\\ &\leq C\int_\Sigma |u^\perp(x)|^p d\sigma(x)\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração da Proposição (3.7). ■

A seguir vamos mostrar que $(iv) \Longrightarrow (i)$ provando o controle que a função maximal f^*_s exerce sobre a função maximal radial $u^\perp$.

Proposição 3.8 *Seja $f \in C^\infty(\Sigma)$ tal que $S(f) \subseteq B(x_0,\epsilon)\cap\Sigma$ com ϵ pequeno o suficiente. Para todo $s>0$ existe uma constante C que depende de ϵ, s, n, tal que:*

$$\|u^\perp\|_{L^p(\Sigma)} \leq C\|f^*_s\|_{L^p(\Sigma)} \tag{3.27}$$

Prova da Proposição (3.8): A demonstração é idêntica a demonstração da Proposição (2.8). ■

Corolário 3.4 *Seja $f \in \mathcal{D}'(\Sigma)$. Então dado $s>0$ existe uma constante C que depende de s, n tal que:*

$$\|u^\perp\|_{L^p(\Sigma)} \leq C\|f^*_s\|_{L^p(\Sigma)}.$$

Prova do Corolário (3.4) Usar os mesmos argumentos que provam o Corolário (2.2) do Capítulo 2.

■

A seguir provaremos a seguinte implicação $(iii) \Longrightarrow (iv)$.

Proposição 3.9 *Sejam $m, L \in \mathbb{Z}_+$ tais que $m < L$. Então existe uma constante C (que depende de m,L,n) tal que:*

$$f^*_L(x) \leq Cu^{**}_m(x) \tag{3.28}$$

para todo $x \in \Sigma$.

Prova da Proposição (3.9): Seja $\phi \in K_L(x)$ por definição existe $h < h_0$ tal que os seguintes fatos ocorrrem simultaneamente:

1) $S(\varphi) \subseteq B(x,h)\cap\Sigma$ sendo $B(x,h)$ uma bola em $\mathbb{R}^n$;
2) se $\|\cdot\|_k$ denota a norma C^k em (Σ) então $\sup\limits_{0\leq k\leq L} h^{n-1+k}\|\phi\|_k \leq 1$.

Como consequência do Corolário (3.3) temos que a seguinte representação é válida em $C^\infty(\Sigma)$.

$$\phi = \Gamma^T_h \circ \Gamma_h(\phi) + \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2}\{\Gamma^{T+}_{2^{-j}h}\circ\Gamma^-_{2^{-j}h} - \Gamma^{T-}_{2^{-j}h}\circ\Gamma^+_{2^{-j}h}(\phi)\} \tag{3.29}$$

Suponha $f \in D'(\Sigma)$ então:

$$\begin{aligned}
\langle f, \phi \rangle &= \langle f, \Gamma_h^T \circ \Gamma_h(\phi) \rangle \\
&+ \tfrac{1}{2}\Big[\sum_{j=0}^{\infty} \langle f, \Gamma^{T+}_{2^{-j}h} \circ \Gamma^{-}_{2^{-j}h}(\phi) \rangle - \langle f, \Gamma^{T-}_{2^{-j}h} \circ \Gamma^{+}_{2^{-j}h}(\phi) \rangle \Big] \\
&= \langle \Gamma_h(f), \Gamma_h(\phi) \rangle \\
&+ \tfrac{1}{2}\Big[\sum_{j=0}^{\infty} \langle \Gamma^{+}_{2^{-j}h}(f), \Gamma^{-}_{2^{-j}h}(\phi) \rangle - \langle \Gamma^{-}_{2^{-j}h}(f), \Gamma^{+}_{2^{-j}h}(\phi) \rangle \Big]
\end{aligned}$$

Definição 3.10 *Sejam m,L números inteiros positivos e $f \in D'(\Sigma)$, então definimos em Σ as seguintes funções maximais:*

$$(\Gamma)^{**}_m(f)(x) = \sup_{y \in \Sigma, 0 \le t \le 1/L} |\Gamma_t(f)(y)| \Big(1 + \frac{d(x,y)}{t}\Big)^{-m} \tag{3.30}$$

$$(\Gamma^+)^{**}_m(f)(x) = \sup_{y \in \Sigma, 0 \le t \le 1/L} |\Gamma^+_t(f)(y)| \Big(1 + \frac{d(x,y)}{t}\Big)^{-m} \tag{3.31}$$

$$(\Gamma^-)^{**}_m(f)(x) = \sup_{y \in \Sigma, 0 \le t \le 1/L} |\Gamma^-_t(f)(y)| \Big(1 + \frac{d(x,y)}{t}\Big)^{-m} \tag{3.32}$$

sendo que $d(x,y)$ denota a distância geodésica definida sobre Σ.

Lema 3.4 *Para toda $f \in D'(\Sigma)$, as seguintes desigualdades pontuais ocorrem:*

$$(\Gamma)^{**}_m(f)(x) \le C u^{**}_m(x) \tag{3.33}$$

$$(\Gamma^+)^{**}_m(f)(x) \le C u^{**}_m(x) \tag{3.34}$$

$$(\Gamma^-)^{**}_m(f)(x) \le C u^{**}_m(x) \tag{3.35}$$

para todo $x \in \Sigma$, e C dependendo somente de L.

Prova do Lema (3.4): Recordemos a definição de $u^{**}_m(x)$

$$u^{**}_m(x) = \sup_{z \in \Omega} |u(z)| \Big(\frac{d(z,\Sigma)}{|z-x|}\Big)^m \tag{3.36}$$

sendo que $u(z) = \langle f, P(z,\cdot) \rangle$ e o colchete denota o emparelhamento entre distribuições e funções testes definidas sobre Σ.

$$
\begin{aligned}
(\Gamma)_m^{**}(f)(x) &= \sup_{y\in\Sigma, 0\le t\le 1/L} |\Gamma_t(f)(y)|\Big(1+\frac{d(x,y)}{t}\Big)^{-m} \\
&\le \sum_{j=1}^{L}\binom{L}{j}\sup_{y\in\Sigma,0\le t\le 1/L}|u(y-jt\nu)|\Big(1+\frac{d(x,y)}{t}\Big)^{-m}
\end{aligned}
$$

Seja $z = y - jt\nu$ observe que:

$$
\begin{aligned}
\tfrac{d(z,x)}{d(z,\Sigma)} &= \tfrac{d(y-jt\nu,x)}{jt} \le \tfrac{jt+d(x,y)}{jt} \\
&= 1+\tfrac{d(x,y)}{jt} \le 1+\tfrac{d(x,y)}{t}
\end{aligned}
$$

isto implica em:

$$
\Big(1+\frac{d(x,y)}{t}\Big)^{-m} \le \Big(\frac{d(z,\Sigma)}{d(z,x)}\Big)^{m}
$$

logo,

$$
(\Gamma)_m^{**}(f)(x) \le \sum_{j=1}^{L}\binom{L}{j}\sup_{z\in\Omega}|u(z)|\Big(\frac{d(z,\Sigma)}{d(z,x)}\Big)^{m}
$$

e portanto,

$$
(\Gamma)_m^{**}(f)(x) \le Cu_m^{**}(x) \tag{3.37}
$$

o que prova (3.33), as demais desigualdades são demonstradas de forma análoga. ■

Voltando a demonstração da Proposição (3.9) vejamos o que ocorre com o termo $\langle\Gamma_h(f),\Gamma_h(\phi)\rangle$.

$$
\begin{aligned}
|\langle\Gamma_h(f),\Gamma_h(\phi)\rangle| &= |\int \Gamma_h(f)(y)\Gamma_h(\phi)| \\
&\le \int |\Gamma_h(f)(y)|\Big(1+\frac{d(x,y)}{h}\Big)^{-m}|\Gamma_h(\phi)(y)|\Big(1+\frac{d(x,y)}{h}\Big)^{m} \\
&\le \int |\Gamma_h(f)(y)|\Big(1+\frac{d(x,y)}{h}\Big)^{-m}|\Gamma_h(\phi)(y)|\Big(1+\frac{d(x,y)}{h}\Big)^{m} \\
&\le (\Gamma)_m^{**}(f)(x)\int |\Gamma_h(\phi)(y)|\Big(1+\frac{d(x,y)}{h}\Big)^{m} \\
&\le Cu_m^{**}(x)\int |\Gamma_h(\phi)(y)|\Big(1+\frac{d(x,y)}{h}\Big)^{m}
\end{aligned}
$$

após aplicarmos a desigualdade (3.33).

Assim, resta saber o que ocorre com o fator: $\int |\Gamma_h(\phi)(y)|\Big(1+\frac{d(x,y)}{h}\Big)^{m}$

Veja o seguinte Lema,

Lema 3.5 *Existe uma contante positiva C que depende somente de L e n tal que:*

$$\int_{\Sigma} |\Gamma_h(\phi)(y)| \Big(1 + \frac{d(x,y)}{h}\Big)^m \leq C \tag{3.38}$$

Prova do Lema (3.5): Sejam:

$$B = \{y \in \Sigma : d(x,y) < h\}, \quad B^* = \{y \in \Sigma : d(x,y) < 2h\}$$

Vamos escreve:

$$\int_{\Sigma} |\Gamma_h(\phi)(y)| \Big(1 + \frac{d(x,y)}{h}\Big)^m = \Big(\int_{B^*} + \int_{B^{*c}}\Big) |\Gamma_h(\phi)(y)| \Big(1 + \frac{d(x,y)}{h}\Big)^m$$

Para o cálculo de $\displaystyle\int_{B^*}$ observe que, para todo $y \in B^*$ vale que

$$\Big(1 + \frac{d(x,y)}{h}\Big)^m \leq 3^m \leq 3^L \tag{3.39}$$

logo,

$$\int_{B^*} |\Gamma_h(\phi)(y)| \Big(1 + \frac{d(x,y)}{h}\Big)^m dy \leq 3^L c_L \sum_{j=1}^{L} \int_{B^*} \int_{B} |P(y - jh\nu, w)||\phi(w)||dwdy$$

Neste momento observamos que para podermos aplicar Fubini devemos observar o seguinte Lema:

Lema 3.6 *Seja* $\Sigma = \partial\Omega$ *então* $\displaystyle\sup_{U \leq \epsilon_0} \sup_{x \in \Sigma} \Big| \int_{\Sigma} P(t - U\nu, x)dt \Big| \leq C(n, \Omega).$

Prova do Lema (3.6): Considere uma cobertura $\Omega \subseteq \cup_{j=1}^{N} \Omega_j$, tal que para cada j o conjunto $\Sigma_j = \Sigma \cap \Sigma_j$ seja uma variedade de dimensão n-1 com fronteira e tal que exista um campo vetorial ν_j normal ao aberto Ω_j tal que ν_j restrito a Σ_j seja exterior a Ω e ainda tal que, $\Omega_j - \epsilon\nu_j = \{z - \epsilon\nu_j : z \in \Omega_j\} \subset\subset \Omega$ para todo $\epsilon < \epsilon_0$. Como o núcleo de Poisson P é uma função positiva temos que:

$$\int_{\Sigma} P(t-U\nu,x)dt$$

$$\leq \sum_{j=1}^{N}\int_{\Sigma_j} P(t-U\nu_j,x)d\sigma_j(t)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{M_j}\int_{\Sigma_j\cap B(t_k,U/2)} P(t-U\nu_j,x)d\sigma_j(t)$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{M_j}\int_{\{\bar{t}:\Sigma_j-U\nu_j\}\cap B(t_k-U\nu_j,U/2)} P(\bar{t},x)\mathcal{J}\pi(\bar{t})d\sigma(\bar{t})$$

$$\leq \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{M_j}\|\mathcal{J}\pi\|_{L^\infty}\frac{\omega_n(U/2)^{n-1}}{\omega_n(U/2)^{n-1}}\int_{B(t_k-U\nu_j,U/2)} P(\bar{t},x)\mathcal{J}\pi(\bar{t})d\sigma(\bar{t})$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{M_j}\|\mathcal{J}\pi\|_{L^\infty}\frac{\omega_n U^{n-1}}{2^{n-1}}P(t_k-U\nu_j,x) \text{ aplicando a Proposição (3.4)}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{N_0}\sum_{k=1}^{M_j}\|\mathcal{J}\pi\|_{L^\infty}\omega_n\frac{U^{n-1}}{2^{n-1}}\frac{c}{U^{n-1}} \leq C(n,\Omega)<\infty.$$

■

Observado o Lema e aplicando Fubini temos:

$$\int_{B^*}|\Gamma_h(\phi)(y)|\Big(1+\frac{d(x,y)}{h}\Big)^m dy \leq c_{n,L,\Omega}\|\phi\|_{L^1(\Sigma)}$$

mas $\|\phi\|_{L^1}\leq 1$ e isto conclui a estimativa para $\int_{B^*}$. Ressaltamos que a dependência da constante c em relação a Ω se diz respeito à curvatura de Σ.

Para o cálculo de $\int_{B^{*c}}$ veja que se $y\in B^{*c}$ então $h<d(x,y)/2$ neste caso $\Big(1+\frac{d(x,y)}{h}\Big)^m=\Big(\frac{h+d(x,y)}{h}\Big)^m\leq(3/2)^m h^{-m}d(x,y)^m$. Logo

$$\int_{B^{*c}}|\Gamma_h(\phi)(y)|\Big(1+\frac{d(x,y)}{h}\Big)^m dy \leq c_m h^{-m}\int_{B^{*c}}|\Gamma_h(\phi)(y)|d(x,y)^m dy \quad (3.40)$$

Fora do suporte de ϕ o valor de $\Gamma_h(\phi)(y)$ coincide com $\sigma_h(\phi)(y)$ mas,

$$|\sigma_h(\phi)(y)|\leq\int_{\Sigma}|\sigma_h(y,w)||\phi(w)|dw.$$

Para estimar o integrando considere o seguinte Lema:

Lema 3.7 *Para todo $x \neq y$ em Σ valem as seguintes estimativas:*

$$|\sigma_t(x,y)| \leq \frac{ct^L}{|x-y|^{n-1+L}} \tag{3.41}$$

com a constante c dependendo somente de L,n.

Prova do Lema (3.7): Considerando as estimativas (3.5) a demonstração deste Lema é feita da mesma forma como no caso da esfera isto é, veja (2.7). ■

Assim, segue da estimativa (3.41) que

$$|\sigma_h(y,w)| \leq \frac{c}{d(y,w)^{n-1+L}}$$

resultando em:

$$\begin{aligned} |\int \sigma_h(y,w)\phi(w)dw| &\leq Ch^L \int_B \frac{|\phi(w)|}{d(y,w)^{n-1}}dw \\ &\leq Ch^L \int_B \frac{|\phi(w)|}{d(y,w)^{n-1+L}}dw \end{aligned}$$

■

Assim, aplicando o Lema (3.7) em (3.40) temos que

$$\begin{aligned} &\int_{B^{*c}} |\Gamma_h(\phi)(y)|\Big(1+\frac{d(x,y)}{h}\Big)^m dy \\ \leq\ & c_m h^{-m} \int_{B^{*c}} \Big(Ch^L \int_B \frac{|\phi(w)|}{d(y,w)^{n-1+L}}dw\Big) d(x,y)^m dy \\ \leq\ & c_{n,L,\Omega} h^{-m+L} \int_{B^{*c}} \Big(\int_B \frac{|\phi(w)|}{d(x,y)^{n-1+L}}dw\Big) d(x,y)^m dy \\ \leq\ & c_{n,L,\Omega} h^{-m+L} \int_{B^{*c}} \int_B |\phi(w)| d(x,y)^{m-n+1-L} dw dy \\ \leq\ & c_{n,L,\Omega} h^{-m+L} \|\phi\|_{L^1} \int_{B^{*c}} d(x,y)^{m-n+1-L} dy \\ \leq\ & c'_{n,L,\Omega} h^{-m+L} h^{m-L} = c'_{n,L,\Omega} \end{aligned}$$

o que completa a demonstração do Lema (3.5). ■

Finalmente, temos a seguinte estimativa

$$|\langle \Gamma_h(f), \Gamma_h(\phi)\rangle| \leq c u_m^{**}(x) \tag{3.42}$$

com c dependendo somente de n, L, Σ.

A seguir vamos estimar o termo

$$\langle \Gamma^+_{2^{-j}h}(f), \Gamma^-_{2^{-j}h}(\phi)\rangle \tag{3.43}$$

Procedendo como no caso anterior vamos multiplicar e dividir pelo fator:

$$\Big(1+\frac{d(x,y)}{2^{-j}h}\Big)^m \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned}
&|\langle \Gamma^+_{2^{-j}h}(f), \Gamma^-_{2^{-j}h}(\phi)\rangle| \\
=\ & |\int \Gamma^+_{2^{-j}h}(f)(y)\Gamma^-_{2^{-j}h}(\phi)(y)dy| \\
\leq\ & \int |\Gamma^+_{2^{-j}h}(f)(y)|\Big(1+\frac{d(x,y)}{2^{-j}h}\Big)^{-m}|\Gamma^-_{2^{-j}h}(\phi)(y)|\Big(1+\frac{d(x,y)}{2^{-j}h}\Big)^m \\
\leq\ & (\Gamma^+)^{**}_m(f)(x)\int |\Gamma^-_{2^{-j}h}(\phi)(y)|\Big(1+\frac{d(x,y)}{2^{-j}h}\Big)^m dy, \quad \text{definição (3.31)} \\
\leq\ & Cu^{**}_m(x)\int |\Gamma^-_{2^{-j}h}(\phi)(y)|\Big(1+\frac{d(x,y)}{2^{-j}h}\Big)^m dy \quad \text{desigualdade (3.34)} \\
\leq\ & C2^{jm}u^{**}_m(x)\int |\Gamma^-_{2^{-j}h}(\phi)(y)|\Big(1+\frac{d(x,y)}{h}\Big)^m dy
\end{aligned}$$

Para prosseguirmos vamos considerar o seguinte Lema:

Lema 3.8 *Seja $L \in \mathbb{Z}_+$ tal que $L > 1$ fixo. Seja $\phi \in C^\infty(\Sigma)$ tal que $S(\phi) \subseteq B(x,h)$, e que além disso, $\|\phi\|_{L^1} \leq 1$ e $\|\phi\|_{C^s} \leq h^{-n+1-s}$. Então, se $m < s < L$ existe uma constante positiva $c = c_{n,L,\Sigma}$ tal que a seguinte desigualdade ocorre:*

$$\int_\Sigma |\Gamma^-_{th}(\phi)(y)|\Big(1+\frac{d(x,y)}{h}\Big)^m dy \leq ct^L \tag{3.45}$$

Prova do Lema (3.8): Sejam:

$$B = \{y \in \Sigma : d(x,y) < h\}, \quad B^* = \{y \in \Sigma : d(x,y) < 2h\}$$

Vamos escreve:

$$\int_\Sigma |\Gamma^-_{th}(\phi)(y)|\Big(1+\frac{d(x,y)}{h}\Big)^m dy = \Big(\int_{B^*} + \int_{B^{*c}}\Big)|\Gamma^-_{th}(\phi)(y)|\Big(1+\frac{d(x,y)}{h}\Big)^m dy$$

Vamos estimar primeiramente o termo:

$$\int_{B^*} |\Gamma^-_{th}(\phi)(y)|\Big(1+\frac{d(x,y)}{h}\Big)^m dy \tag{3.46}$$

se $y \in B^*$ então $\left(1+\frac{d(x,y)}{h}\right)^m \leq 3^m$ logo,

$$\int_{B^*} |\Gamma^-_{th}(\phi)(y)|\Big(1+\frac{d(x,y)}{h}\Big)^m dy \leq 3^m \int_{B^*} |\Gamma^-_{th}(\phi)(y)|dy \tag{3.47}$$

para podermos continuar com a demonstração vamos assumir temporariamente o seguinte Lema:

Lema 3.9 *Para toda função teste $\phi \in C^\infty(\Sigma)$, e todo $s \in \mathbb{Z}_+$ tal que $s < L$. Então,*

$$\sup_{x\in\Sigma} |\Gamma^-_h(\phi)(x)| \leq ch^s \|\phi\|_{C^s(\Sigma)} \tag{3.48}$$

sendo que a constante c depende somente de n, L, Σ.

Prova do Lema (3.9): Recordemos a definção dos espaços de Lipschitz[4] $\Lambda^s(\mathbb{R}^n)$ quando $s \in \mathbb{Z}_+$.

Definição 3.11 *Denotamos por $\Lambda^s(\mathbb{R}^n)$ com $s \in \mathbb{Z}_+$ o espaço das funções $f \in C^{s-1}(\mathbb{R}^n)$ para as quais existe uma constante C tal que para cada multi-índice β com $|\beta| = s-1$, a derivada $D^\beta f$ satisfaz a condição de Lipschitz*

$$|D^\beta f(x+2h) - 2D^\beta f(x+h) + D^\beta f(x)| \leq C|h|$$

para cada $x, h \in \mathbb{R}^n$. Ou equivalentemente:

$$\|f\|_{\Lambda^s(\mathbb{R}^n)} = \sup_{|\beta|=s-1} \sup_{h\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{\|\Delta^2_h D^\beta f\|_\infty}{|h|} < \infty.$$

Seja $x \in \Sigma$ fixo e considere a função harmônica definida em Ω por

$$U(z) = \int_\Sigma P(z,y)\phi(y)d\sigma(y).$$

Seja $\tilde{U} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\tilde{U}$ restrita ao aberto Ω coincida com a própria função U. Isto é, a extensão C^∞ de U em todo o $\mathbb{R}^n$.

Seja $(\mathcal{O}, \chi)$ uma carta local do $\mathbb{R}^n$ contendo x tal que $\mathcal{O}\cap\Sigma$ constitui-se numa fatia da carta $(\mathcal{O}, \chi)$

Podemos supor sem perda de generalidade que ϕ esteja suportada em $\mathcal{O} \cap \Sigma$. Também não ocorre perdas em supor que o conjunto $\mathcal{O} \cap \mathbb{R}^n$ seja da forma

$$\{(z,t) : z \in B(x,R), 0 < t < t_0\}$$

com $B(x,R)$ sendo uma bola do $\mathbb{R}^{n-1}$.

[4]Veja por exemplo a referência ([6]).

Agora, faremos o desenvolvimento da expressão $\Gamma_h^-(\phi)(y)$.

$$\begin{aligned}\Gamma_h^-(\phi)(x) &= \Gamma_{\frac{h}{2}}(\phi)(x) - \Gamma_h(\phi)(x)\\ &= \sum_{j=1}^{L}(-1)^{L-j}\binom{L}{j}\int (P(x-jh/2\nu,w)-P(x-jh\nu,w))\phi(w)d\sigma(w)\\ &= \sum_{j=0}^{L}(-1)^{L-j}\binom{L}{j}\int (P(x-jh/2\nu,w)-P(x-jh\nu,w))\phi(w)d\sigma(w)\end{aligned}$$

Assim, basta estudar o que ocorre com o termo:

$$\sum_{j=0}^{L}(-1)^{L-j}\binom{L}{j}\int_{\Sigma} P(x-jh\nu,y)\phi(y)d\sigma(y)$$

então, seguem as seguintes igualdades,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{L}(-1)^{L-j}\binom{L}{j}\int_{\Sigma} P(x-jh\nu,y)\phi(y)d\sigma(y) &= \sum_{j=0}^{L}(-1)^{L-j}\binom{L}{j}U(x-jh\nu)\\ &= \sum_{j=0}^{L}(-1)^{L-j}\binom{L}{j}U(\bar{z}-jz)\end{aligned}$$

sendo que, $z=-h\nu$ e $\bar{z}=x-Lh\nu$.

Deste modo, se $s\in\mathbb{Z}_+$ é tal que $s<L$ então,

$$\begin{aligned}\frac{|\Gamma_h^-(\phi)(x)|}{|h|^s} &= \frac{|\sum_{j=0}^{L}(-1)^{L-j}\binom{L}{j}U(\bar{z}-jz)|}{|h|^s}\\ &= \frac{|\Delta_z^L U(\bar{z})|}{|z|^s}\\ &= \frac{|\Delta_z^2\Delta_z^{L-2}U(\bar{z})|}{|z|^s}\end{aligned}$$

Mas, pela fórmula de Taylor com resto integral podemos obter a seguinte forma:

$$\Delta_z^{L-2}U(\bar{z}) = \sum_{j=1}^{L-2}\sum_{|\beta|=s-1} j^{s-1}z^{\beta}\int_0^1 \frac{(1-t)^{s-2}(s-1)}{\beta!}D^{\beta}U(\bar{z}-jtz)dt$$

Logo, aplicando o operador diferença sobre a extensão $\tilde{U}$, ou seja, $\Delta_z^2\Delta_z^{L-2}\tilde{U}(\bar{z})$ temos:

$$\Delta_z^2\Delta_z^{L-2}\tilde{U}(\bar{z}) = \sum_{j=1}^{L-2}\sum_{|\beta|=s-1} j^{s-1}z^{\beta}\int_0^1 \frac{(1-t)^{s-2}(s-1)}{\beta!}\Delta_z^2 D^{\beta}\tilde{U}(\bar{z}-jtz)dt$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}
\frac{|\Delta_z^2\Delta_z^{L-2}\tilde{U}(\bar{z})|}{|z|^s} &\leq |z|^{s-1}\sup_{0<t<1}\sup_{1\leq j\leq L-2}\frac{|\Delta_z^2 D^{\beta}\tilde{U}(\bar{z}-jtz)|}{|z|^s} \\
&\leq \sup_{0<t<1}\sup_{1\leq j\leq L-2}\frac{|\Delta_z^2 D^{\beta}\tilde{U}(\bar{z}-jtz)|}{|z|} \\
&\leq |D^{\beta}\tilde{U}|_{\Lambda^1(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq |D^{\beta}U|_{\Lambda^1(\mathbb{R}^n_+)} \\
&\leq c|K_{\beta}(\phi)|_{\Lambda^1(\mathbb{R}^{n-1})}
\end{aligned}$$

Com K_β definindo uma família de operadores pseudo-diferenciais dados por símbolos de ordem $|\beta| = s-1$.

Considere o seguinte Lema:

Lema 3.10 *Seja a um símbolo em S^m. Então o operador $Op(a)$ é limitado de Λ^γ em $\Lambda^{\gamma-m}$ se $\gamma > m$.*

Prova do Lema 3.10 Veja na página 253 de [3]. ■

Assim, aplicando o Lema anterior fazendo $\gamma = s$ e $m = s-1$ então segue que

$$K_\beta : \Lambda^s(\mathbb{R}^{n-1}) \longrightarrow \Lambda^1(\mathbb{R}^{n-1})$$

define uma família de operadores contínuos.

Logo,

$$\sup_{x\in\Sigma, 0<h<h_0}\frac{|\Gamma_h^-(\phi)(x)|}{|h|^s} \leq c|\phi|_{\Lambda^s(\mathbb{R}^{n-1})} \leq c'|\phi|_{C^s((\mathbb{R}^{n-1}))}$$

■

Aplicando o Lema (3.9) na desigualdade (3.47) temos:

$$\begin{aligned}
\int_{B^*} |\Gamma^-_{th}(\phi)(y)|\Big(1+\frac{d(x,y)}{h}\Big)^m dy &\leq 3^m \int_{B^*} |\Gamma^-_{th}(\phi)(y)|dy \\
&\leq 3^m c \int_{B^*} (th)^s \|\phi\|_{C^s(\Sigma)} dy \\
&\leq 3^m c \int_{B^*} (th)^s h^{-n+1-s} dy \\
&= 3^m c t^s h^{-n+1} \int_{B^*} dy \\
&= 3^m c' t^s h^{-n+1} h^{n-1} \\
&= c'' t^s
\end{aligned}$$

com a constante c'' dependendo de n, L, Σ.

Agora vamos estimar o termo:

$$\int_{B^{*c}} |\Gamma^-_{th}(\phi)(y)|\Big(1+\frac{d(x,y)}{h}\Big)^m dy \tag{3.49}$$

Supondo que $y \in B^{*c}$ então

$$\Big(1+\frac{d(x,y)}{h}\Big)^m \leq \Big(\frac{3}{2}\Big)^m h^{-m} d(x,y)^m \tag{3.50}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\int_{B^{*c}} |\Gamma^-_{th}(\phi)(y)|\Big(1+\frac{d(x,y)}{h}\Big)^m dy \quad \text{aplicando o Lema (3.41)} \\
\leq\ & \Big(\tfrac{3}{2}\Big)^m h^{-m} \int_{B^{*c}} \Big(c(th)^L \int_B \frac{|\phi(w)|}{d(y,w)^{n-1+L}} dw\Big) d(x,y)^m dy \\
\leq\ & c' t^L h^{L-m} \|\phi\|_{L^1(\Sigma)} \int_{B^{*c}} d(x,y)^{m-n+1-L} dy \\
\leq\ & c'' t^L h^{L-m} h^{m-L} = c'' t^L \leq c'' t^s
\end{aligned}$$

o que conclui a prova do Lema (3.8). ■

Voltando para o estudo do termo (3.43)

$$\begin{aligned}
|\langle \Gamma^+_{2^{-j}h}(f), \Gamma^-_{2^{-j}h}(\phi)\rangle| &\leq C 2^{jm} u^{**}_m(x) \int_\Sigma |\Gamma^-_{2^{-j}h}(\phi)(y)|\Big(1+\frac{d(x,y)}{h}\Big)^m dy \\
&\leq c''' 2^{jm} u^{**}(x) 2^{-js} = c''' 2^{j(m-s)} u^{**}_m(x)
\end{aligned}$$

As mesmas estimativas são obtidas para o termo $\langle \Gamma^{-}_{2^{-j}h}(f), \Gamma^{+}_{2^{-j}h}(\phi)\rangle$ o que nos permite concluir finalmente que para toda $\phi \in K_L(x)$ existe uma constante $c = c_{n,L,\Sigma}$ tal que para toda distribuição $f \in \mathcal{D}'(\Sigma)$ tem-se:

$$\begin{aligned} |\langle f, \phi\rangle| &\leq c\{u^{**}_m(x) + \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(m-s)} u^{**}_m(x)\} \\ &\leq c u^{**}_m(x) \end{aligned}$$

uma vez que $m < s$. Como a desigualdade $|\langle f, \phi\rangle| \leq c u^{**}_m(x)$ ocorre para toda função teste $\phi \in K_L(x)$ temos finalmente provada a proposição (3.9) ■

Referências Bibliográficas

[1] Charles Fefferman e Elias M. Stein. *H^p spaces of Several variables,* Acta Math. 129(1972),137-193.

[2] David Goldberg. *A local version of real Hardy spaces*, Duke Math. J. vol 46: 27-42 1979.

[3] Elias M. Stein.*Harmonic Analysis: Real-variable Methods, orthogonality, and oscillatory integrals.* Princeton University Press. 1993.

[4] Elias M. Stein e Guido Weiss. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean spaces.* Princeton, 1971.

[5] Francois Treves. *Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators*, Plenum Press, New York, 1980.

[6] J. García-Cuerva and Rubio De Francia. *Weighted Norm Inequalities and Related Topics*, North-Holland Mathematics Studies. Notas de Matemática(104), 1985.

[7] D. Gilbarg e M. S. Trudinger; *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, Berlin, 1977.

[8] Jorge Hounie. *Teoria Elementar das Distribuições* , 12 Colóquio Brasileiro de Mat., Impa, 1979.

[9] Jorge Hounie. *Introdução aos operadores Pseudo-Diferenciais* , 16 Colóquio Brasileiro de Mat., Impa, 1987.

[10] Josefina Alvarez and Jorge Hounie. *Estimates for the kernel and continuity properties of pseudo-differential operators*, Arkiv för matematik, Vol.28 (1990).

[11] Leonardo Colzani. *Hardy Spaces on unit spheres*, Bollettino U.M.I. Analisi Funzionale e Applicazioni. Serie vi, vol. iv-C,N.1-1985.

[12] Michael E. Taylor. *Pseudodifferential Operators*, Princeton University Press, 1981.

[13] Steven G. Krantz. *Function Theory of Several Complex Variables*, 1992.