UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Problema de Cauchy para sistemas 2×2 fracamente hiperbólicos do plano

Marcelo Rempel Ebert

São Carlos - SP

Dezembro de 2004

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Problema de Cauchy para sistemas 2×2 fracamente hiperbólicos do plano

Marcelo Rempel Ebert

Orientador: Prof. Dr. José Ruidival Soares dos Santos Filho

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFS-Car como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática

São Carlos - SP

Dezembro de 2004

Ficha catalográfica elaborada pelo DePT da Biblioteca Comunitária/UFSCar

E16pc

Ebert, Marcelo Rempel.
Problema de Cauchy para sistemas 2 X 2 fracamente hiperbólicos do plano / Marcelo Rempel Ebert. -- São Carlos : UFSCar, 2005.
61 p.

Tese (Doutorado) -- Universidade Federal de São Carlos, 2004.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Sistemas fracamente hiperbólicos. 3. Cauchy, Problema de. 4. Existência e unicidade de soluções I. Título.

CDD: 515.353 (20ª)

Agradecimentos

Aos meus familiares pelo apoio e carinho.

A minha esposa Helena pela compreensão, incentivo e amor. Também lembrar a alegria e preocupações que a Yasmin já está nos propiciando.

Aos amigos, muitos dos quais colegas, funcionários e professores do DM que criaram um ambiente de cooperação e momentos de descontração.

Ao meu orientador de mestrado e doutorado, Prof. José Ruidival Soares dos Santos Filho, pela sugestão do trabalho, oportunidades criadas e incessante ajuda seja nas questões matemáticas ou conselhos profissionais.

À CAPES, órgão que financiou este trabalho.

Resumo

Neste trabalho obtemos condições suficientes, conhecidas como do tipo Levi, para obtermos existência e unicidade de soluções do problema de Cauchy não-característico para sistemas lineares 2×2 do plano, fracamente hiperbólicos.

Nós obtemos uma versão para uma classe de sistemas lineares 2×2 de segunda ordem, desacoplados na parte principal, de um teorema de O. Oleinik que considerou o caso de equações lineares escalares de segunda ordem, fracamente hiperbólicas.

Usando o teorema acima obtemos resultados para uma classe de sistemas lineares 2×2 de primeira ordem.

Abstract

In this work we obtain sufficient conditions, which can be thought as a Levi condition, under which we have existence and uniqueness of solutions of the Cauchy problem for 2×2 weakly hyperbolic systems.

For a class of 2×2 linear systems of second order partial differential equations we obtain a version of a theorem for the scalar case due by O. Oleinik.

Using the above theorem we obtain the results for a class of 2×2 linear systems of first order.

Sumário

Resumo **i**

Abstract **ii**

Introdução **1**

1 Preliminares **5**

1.1 Notações e Definições 5

1.2 Resultados Básicos de Espaços de Funções 6

1.3 Desigualdade de Glaeser 9

2 Uma Versão do Teorema de Oleinik: Resultados **11**

2.1 Resultado de O. Oleinik 12

2.2 Resultados para Sistemas 13

2.3 Sistemas Estritamente Hiperbólicos 17

3 Estimativa das soluções do problema Estritamente Hiperbólico **22**

3.1 Estimativas para U 23

3.2 Estimativas do tipo $\partial_x^l U, l \leq k$ 29

3.3 Estimativas do tipo $\partial_x^l \partial_t^\rho U, \rho + l \leq k$ 34

3.4 Prova do Lema 2.3.2 e do Teorema 2.2.1 36

4 Sistemas 2x2 de primeira ordem fracamente hiperbólicos 42

4.1 Introdução 42

4.2 Demonstração dos Teoremas 48

4.3 O resultado de Nishitani-Spagnolo 51

Referências Bibliográficas 54

Introdução

Estamos interessados em determinar quando um problema é bem posto no sentido de J. Hadamard, isto é, a solução existe, é unicamente determinada, e além disso, dependa continuamente nos dados para escolha apropriada de normas. Em muitas situações pode existir solução , ela ser única, mas o problema não é bem posto. Isto é ilustrado pelo clássico exemplo de J. Hadamard (ver [5]) para o problema de Cauchy da equação de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

com dados iniciais

$$u(x,0) = 0,\ u_y(x,0) = f(x),$$

para o qual existe solução quando f é analítica; e tal solução é analítica. Mas se $f(x) = n^{-2}cos(nx)$ temos que $u = n^{-3}\cos(nx)\sinh(ny)$ é solução. Entretanto, apesar de f e sua derivada tender para zero quando $n \to \infty$, a solução $u \to \infty$ quando $n \to \infty$ se $x = 0$ e $y \neq 0$.

Muito se sabe no caso de equações escalares, alguns dos resultados mais gerais foram obtidos nas últimas três décadas do século passado. Já para sistemas de equações diferenciais parciais, o desenvolvimento das questões de existência, unicidade e dependência contínua nos dados iniciais do problema

se encontra defasado com os avanços do caso escalar. Como exemplo do que se conhece, explicitamos os seguintes resultados:

Consideramos sistemas lineares da forma

$$L = I\partial_t - \sum_{j=1}^{n} A_j(x,t)\partial_{x_j} + A_0(x,t), \tag{1}$$

em que $A_j(x,t)$, $j = 0, 1, ...n$, são matrizes $m \times m$ com entradas suaves em $\mathbb{R}^n \times]-T, T[, T > 0$. Sabemos que, mesmo no caso em que as matrizes $A_j's$, $0 \leq j \leq n$, terem entradas constantes, uma condição necessária para o problema de Cauchy

$$Lu = f,\ u|_{t=0} = \phi(x) \tag{2}$$

ser C^∞ bem posto é que os autovalores da matriz

$$A(x,t,\xi) = \sum_{j=1}^{n} A_j(x,t)\xi_j$$

sejam reais. Tal resultado é conhecido como Teorema de Lax-Mizohata (ver Chazarain-Piriou ([1]) ou F. Treves ([16])).

Nestas condições o sistema (1) é chamado fracamente hiperbólico(ou hiperbólico).

Se os autovalores de $A(x,t,\xi), 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$ são reais e distintos o sistema (1) é chamado estritamente hiperbólico. O problema de Cauchy (2) para sistemas estritamente hiperbólicos é bem posto nos espaços de funções apropriados.(ver [1] ou [16]).

A caracterização dos sistemas lineares analíticos 2×2 fracamente hiperbólicos de primeira ordem no plano cujo problema de Cauchy não-característico é bem posto só em 1999 foi completado, devido aos esforços de T. Nishitani (veja [12]). Este resultado depende dos termos de ordem zero do sistema.

Neste trabalho obtemos condições suficientes para que o problema de Cauchy não-característico seja bem posto para sistemas lineares 2×2 fracamente

hiperbólicos de primeira ordem do plano no caso dos coeficientes do sistema e suas derivadas até uma certa ordem sejam limitados. Os resultados seguem de uma versão para sistemas no plano por nós obtida, denotado Teorema 2.2.1, de um teorema de O. Oleinik (veja Teorema 2.1.1), neste último se considerou o caso de equações lineares escalares de segunda ordem fracamente hiperbólicas.

Este trabalho é organizado do seguinte modo:

No primeiro capítulo apresentaremos algumas definições, notações e resultados utilizados ao longo deste trabalho. Apresentamos uma demonstração da clássica desigualdade de G. Glaeser ([4]), seguindo as linhas da encontrada em Oleinik-Radkevic(ver [15]). A título de informação enunciaremos também duas versões mais gerais desta desigualdade, uma para formas quadráticas não-negativas(ver [15]), e a outra que é devida a Nishitani-Spagnolo(ver [13]).

Na primeira seção do segundo capítulo enunciamos o resultado de O. Oleinik. Na Seção 2.2 enunciamos nossa extensão do teorema de Oleinik, a saber o Teorema 2.2.1, que trata de sistemas 2×2 de segunda ordem fracamente hiperbólico no plano desacoplado na parte principal. Daí obtemos como conseqüência do Teorema 2.2.1 um resultado de existência e unicidade de soluções análogo a um teorema devido a Colombini e Spagnolo(veja [2]). Comentamos ainda um resultado de não-unicidade, análogo ao de [2], que segue também pelos teoremas devido a S. Nakane (veja [10] e [11]). Na Seção 2.3 iniciaremos a demonstração do Teorema 2.2.1; nesta primeira etapa também como em ([14]), vamos regularizar os dados e perturbar o sistema original de modo a torná-lo estritamente hiperbólico. Finalmente concluímos este capítulo enunciando um lema básico(Lema 2.3.2).

O primeiro objetivo do terceiro capítulo é demonstrar o lema básico. Antes de fazê-lo, demonstraremos algumas desigualdades gerais que aparecerão ao

longo da demonstração do Lema 2.3.2; isto será feito nas seções 3.1, 3.2 e 3.3. Finalmente na seção 3.4, além da demonstração do Lema 2.3.2, via um processo ao limite obtemos a demonstração do Teorema 2.2.1.

Finalmente no quarto capítulo, consideraremos sistemas 2x2 de primeira ordem não-característicos fracamente hiperbólicos a duas variáveis independentes. Para tal classe de sistemas obtemos três resultados que são enunciados na Seção 4.1: No Teorema 4.1.1 obtemos condições suficientes para que a solução, caso exista, do Problema de Cauchy $(4.1) - (4.2)$ seja única. No Teorema 4.1.2 obtemos um resultado de existência de soluções e com a hipótese adicional (4.10), no Teorema 4.1.3 obtemos condições suficientes para termos existência e unicidade de soluções.

Na Seção 4.2 demonstraremos os três resultados acima citados. A técnica principal de demonstração consiste em compor à direita ou (e) à esquerda o operador P de (4.1) por um outro de primeira ordem de modo à obter um operador de ordem dois nas condições do Teorema 2.2.1.

Na Seção 4.3 vamos considerar o caso em que a matriz A na equação (4.1) só dependa da variável espacial. Usando a técnica descrita acima demonstraremos que o problema de Cauchy (4.1)-(4.2) é bem posto no sentido das normas dadas em (2.8). Tal resultado é análogo ao Teorema 5.1 de Nishitani e Spagnolo ([13]) sob hipóteses mais fracas.

Agradecimentos: O autor expressa sua gratitude ao seu orientador de doutorado Professor José Ruidival dos Santos Filho. Também agradece aos Professores A. Bergamasco, F. Colombini, J. Hounie, C. Kondo, N. Lerner e S. Spagnolo pelas valiosas conversas sobre este trabalho.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos definições, notações e resultados que serão utilizados neste trabalho. Daremos referências para os resultados cujas demonstrações são omitidas.

1.1 Notações e Definições

Seja Ω um aberto do R^n, um sistema de equações diferenciais parciais linear de ordem m em Ω é dado por

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha \partial_x^\alpha u = f \tag{1.1}$$

em que $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ uma n-upla de inteiros não negativos, $\partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} ... \partial_{x_n}^{\alpha_n}$, A_α´s são matrizes quadradas $N \times N$, com u e f são vetores colunas com N componentes, f e $A'_\alpha s$ funções reais de classe C^∞ de variável independente x.

Para o sistema (1.1) um problema de Cauchy consiste em encontrar solução de (1.1) com dados prescritos numa hiper-superfície $\Sigma \subset \Omega$ de classe C^∞ tal

que

$$\partial_\eta^j u(x) = u_j(x), 0 \leq j \leq m-1 \text{ e } x \in \Sigma,$$

em que η é um vetor unitário normal à Σ. Em geral para garantir existência e unicidade de soluções é necessário assumir que Σ seja não-característica em respeito a L. Diz-se que Σ é não-característica com respeito a este operador se o símbolo principal não se anula nos co-vetores não-nulos da variedade conormal de Σ. Mostra-se que a noção de uma hiper-superfície ser não-característica com respeito a L é invariante por mudança de variáveis.

Como no que segue estaremos considerando $\Sigma = \{x_n = 0\}$, neste caso Σ será não-característica com respeito a L e aos dados prescritos se

$$det(A_{\alpha^*}) \neq 0,$$

em que $\alpha^* = (0, 0, ..., 0, m)$.

1.2 Resultados Básicos de Espaços de Funções

Nesta seção apresentamos alguns resultados básicos dos espaços de funções utilizados neste trabalho.

Definição 1.2.1 *Seja s um número real. Denotamos por $H^s(\mathbb{R}^n)$ ou simplesmente por H^s, o subespaço das $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ cuja transformada de Fourier $\widehat{u} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\|u\|_s = [(2\pi)^{-n} \int (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi]^{1/2} < \infty. \tag{1.2}$$

Observação 1.2.1 *Como H^s é um espaço de Hilbert, ele é um espaço reflexivo, e portanto pelo Teorema de Banach-Alaoglu tem a propriedade de que toda seqüência limitada em H^s possui subseqüência fracamente convergente.*

Se $K \subset\subset \mathbb{R}^n$ é um compacto, empregamos a notação

$$H^s(K) = H^s \cap \mathcal{E}'(K),$$

em que $\mathcal{E}'(K)$ é o espaço das distribuições suportadas em K. A seguir veremos uma forma do Lema de Rellich (Ver J. Hounie [6]).

Lema 1.2.1 *Seja K um compacto de $\mathbb{R}^n$, $t < s$, então a inclusão*

$$H^s(K) \subset H^t$$

é compacta.

Na prova deste lema vamos usar a seguinte desigualdade de Peetre.

Lema 1.2.2 *Seja $s \in \mathbb{R}$, então*

$$(1+|\eta|^2)^{-s} \leq 2^{|s|}(1+|\xi-\eta|^2)^{|s|}(1+|\xi|^2)^{-s},\ \xi,\eta \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstração: Se $s < 0$

$$\begin{aligned}(1+|\eta|^2)^{-s} &\leq (1+(|\xi-\eta|+|\xi|)^2)^{-s} \leq (1+2|\xi-\eta|^2+2|\xi|^2)^{-s} \\ &\leq 2^{-s}(1+|\xi-\eta|^2+|\xi|^2)^{-s} \leq 2^{-s}(1+|\xi-\eta|^2)^{-s}(1+|\xi|^2)^{-s}.\end{aligned}$$

Por outro lado, para $s > 0$ basta inverter os papéis de ξ e η, isto é,

$$(1+|\xi|^2)^s \leq 2^s(1+|\xi-\eta|^2)^s(1+|\eta|^2)^s$$

Logo

$$(1+|\eta|^2)^{-s} \leq 2^s(1+|\xi-\eta|^2)^s(1+|\xi|^2)^{-s}.$$

∎

Agora demonstraremos o lema de Rellich.

Demonstração:(**Lema 1.2.1**) Devemos provar que a bola unitária de $H^s(K)$ é um conjunto relativamente compacto de H^t. Seja (u_k) uma sequência

em $H^s(K)$, $\|u_k\|_s \leq 1$. Se $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é igual a 1 numa vizinhança de K, então $u_k = \phi u_k$. Daí pela transformada de Fourier temos

$$\begin{aligned} \widehat{u}_k(\xi) &= (2\pi)^{-n}\widehat{\phi} * \widehat{u}(\xi) \\ &= (2\pi)^{-n}\int \widehat{\phi}(\xi-\eta)\widehat{u}(\eta)d\eta. \end{aligned}$$

Multiplicando e dividindo o integrando por $(1+|\eta|^2)^{s/2}$ e aplicando a desigualdade de Schwarz obtemos

$$|\widehat{u}_k(\xi)| = (2\pi)^{-n}[\int |\widehat{\phi}(\xi-\eta)|^2(1+|\eta|^2)^{-s}d\eta]^{1/2}\|u_k\|_s \leq C(1+|\xi|^2)^{-s/2}$$

sendo que usamos a desigualdade de Peetre. Isto mostra que $(\widehat{u}_k(\xi))$ é uniformemente limitada em compactos. Ainda,

$$D_j\widehat{u}_k(\xi) = (2\pi)^{-n}D_j\widehat{\phi} * \widehat{u}_k(\xi),$$

donde um raciocínio análogo mostra que $(D_j\widehat{u}_k(\xi)), j = 1, ..., n$ é uniformemente limitado sobre compactos. Logo, pelo teorema do Valor Médio obtemos que $(\widehat{u}_k)$ é uniformemente equicontínua sobre compactos do $\mathbb{R}^n$. Pelo teorema de Arzela-Ascoli podemos escolher uma subseqüência , ainda denotada por $(\widehat{u}_k)$, que converge uniformemente sobre compactos. Vejamos que, de fato, $(\widehat{u}_k)$ converge em H^t. Com efeito, com $d\mu_t = (2\pi)^{-n}(1+|\xi|^2)^t d\xi$

$$\begin{aligned} \|\widehat{u}_k - \widehat{u}_j\|_{L^2(d\mu_t)} &\leq [\int_{|\xi|\leq R} |\widehat{u}_k(\xi) - \widehat{u}_j(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^t d\xi]^{1/2} \\ &+ \max_{|\xi|\geq R}(1+|\xi|^2)^{(t-s)/2}[\int_{|\xi|\geq R} |\widehat{u}_k(\xi) - \widehat{u}_j(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s d\xi]^{1/2}. \end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$ podemos tomar R suficientemente grande para que a segunda parcela do membro direito seja menor que ϵ e depois escolher índice $n_0 = n_0(R, \epsilon)$ de modo que a primeira parcela seja menor que ϵ quando $k, j \geq n_0$, o que é possível pela convergência uniforme de $\widehat{u}_j$ em $\{|\xi| \leq R\}$. Isto mostra que $\widehat{u}_j$ é de Cauchy em $L^2(d\mu_t)$ e (u_k) é convergente em H^t. ∎

1.3 Desigualdade de Glaeser

Nesta seção faremos uma demonstração da clássica desigualdade de Glaeser ([4]), seguindo as linhas da encontrada em Oleinik-Radkevic(ver [15]). Também enunciaremos duas versões mais gerais desta desigualdade, uma para formas quadráticas não-negativas(ver [15]), e a outra que é devida a Nishitani-Spagnolo (ver [13]).

Teorema 1.3.1 *Seja* $f \in C^2(\mathbb{R})$, $f(x) \geq 0$ *e* $f''(x) \leq M$ *em* $\mathbb{R}$. *Então*

$$|f'(x)| \leq \sqrt{2M}\sqrt{f(x)}.$$

Demonstração: Suponhamos por absurdo que a desigualdade não vale em x_0; assim

$$f'^2(x_0) > 2Mf(x_0),\ f(x_0) \neq 0. \tag{1.3}$$

Considere o ponto $\tilde{x}_0 = x_0 - 2f(x_0)/f'(x_0)$. Pela fórmula de Taylor de f até ordem dois em x_0 temos

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}_0) &= f(x_0) + f'(x_0)(-2f(x_0)/f'(x_0)) + \frac{f''(\xi)}{2}(-2f(x_0)/f'(x_0))^2 \\ &= -f(x_0)[1 - 2\frac{f(x_0)}{f'^2(x_0)}f''(\xi)]. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Por (1.3) temos que

$$2\frac{f(x_0)}{f'^2(x_0)}f''(\xi) \leq 2\frac{f(x_0)}{f'^2(x_0)}\sup|f''| < 1.$$

Segue de (1.4) que $f(\tilde{x}_0) < 0$ o que contradiz a hipótese de $f(x) \geq 0$. ∎

Observação 1.3.1 *No seguinte exemplo veremos que o resultado anterior não vale para funções definidas em intervalos limitados. Considere* $f(t) = t$, $t \in [0, T)$. *Temos que* f *satisfaz as hipóteses de teorema mas* $|f'(0)| = 1 > C\sqrt{f(0)} = 0$, *donde não vale a conclusão do teorema.*

Teorema 1.3.2 *Seja* $\sum_{j,k=1}^{m} a^{kj}(x)\xi_k\xi_j \geq 0$ *e suponhamos que* $a^{kj} \in C_{(2)}(\mathbb{R}^m)$. *Então para todo* $v \in C_{(2)}(\mathbb{R}^m)$

$$(\sum_{k,j=1}^{m} a^{kj}_{x_\rho} v_{x_k x_j})^2 \leq M \sum_{s,k,j=1}^{m} a^{kj} v_{x_s x_k} v_{x_s x_j},\ \forall \rho = 1, ..., m$$

em que M *depende somente de* $\partial_x^\alpha a^{kj}$, $|\alpha| = 2$. *Aqui* $C_{(k)}$ *é a classe das funções com derivadas até ordem* k *limitadas em* $\mathbb{R}^m$.

Para uma demonstração ver ([15]).

Se tomarmos $f = ab$ no Teorema 1.3.1, podemos estimar a soma $a'b + ab'$, mas o resultado não garante que a estimativa vale para apenas um dos termos da soma. Entretanto, o próximo teorema garante que podemos obter uma estimativa análoga para cada um dos termos da soma.

Teorema 1.3.3 *Seja* $f, g \in C^2(\mathbb{R})$. *Assuma que* $f^{(j)}(x), g^{(j)}(x)$, $j = 0, 1, 2$, *são limitadas em* $\mathbb{R}$, *e*

$$f(x)g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Então

$$|f(x)g'(x)|, |f'(x)g(x)| \leq M\sqrt{f(x)g(x)}, \forall x \in \mathbb{R}$$

em que M *é uma constante dependendo do* $\sup\{|f^{(j)}(x)| + |g^{(j)}(x)|, x \in \mathbb{R}, j = 0, 1, 2\}$.

Para uma demonstração ver ([13]).

Capítulo 2

Uma Versão do Teorema de Oleinik: Resultados

Neste capítulo enunciaremos uma versão no plano por nós obtida de um teorema de O. Oleinik (Teorema 2.1.1), que trata de sistemas 2×2 de segunda ordem, fracamente hiperbólicos, desacoplados na parte principal.

Na seção 2.1 vamos enunciar o resultado de O. Oleinik.

Na seção 2.2 estabelecemos notações e enunciamos o Teorema 2.2.1, e encerramos a seção fazendo algumas observações e conseqüências do teorema.

Na seção 2.3, começaremos a demonstração do Teorema 2.2.1; nesta primeira etapa também como em ([14]), vamos regularizar os dados e perturbar o sistema original de modo a torná-lo estritamente hiperbólico. Finalmente concluímos este capítulo enunciando um lema básico(Lema 2.3.2); sua demonstração se encontra no Capítulo 3, o qual será utilizado na prova do teorema.

2.1 Resultado de O. Oleinik

Consideremos o problema de Cauchy no domínio $G = \{0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}^m\}$ para a equação

$$\partial_t^2 u - \sum_{1\leq i,j\leq m} \partial_{x_j}(a^{ij}(x,t)\partial_{x_i} u) + \sum_{1\leq i\leq m} b^i(x,t)\partial_{x_i} u + c(x,t)\partial_t u + d(x,t)u = f, \quad (2.1)$$

com a condição inicial

$$u|_{t=0} = \phi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad (2.2)$$

em que $\sum_{i,j=1}^m a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \geq 0$ em G para todo $\xi = (\xi_1, ..., \xi_m)$. Uma equação na forma (2.1) nestas condições é do tipo fracamente hiperbólica. (Lembramos que, no caso, hiperbólico significa que em τ, $p(x,t,\xi,\tau) = \tau^2 - a(x,t)\xi^2$ tem raízes reais e distintas)

Vamos introduzir as seguintes notações:

$$G_\tau = \{0 \leq t \leq \tau, x \in \mathbb{R}^m\}, (\phi,\psi)_{t=\tau} = \int_{\mathbb{R}^m} \phi\psi dx,$$

$$[u,v]_{G_\tau} = \int_{G_\tau} uvdtdx,$$

$$\|u\|_{\tau;k} = \{\sum_{\rho+l\leq k} (\partial_x^l\partial_t^\rho u, \partial_x^l\partial_t^\rho u)_{t=\tau}\}^{1/2},$$

$$\|u\|_{G_\tau;k} = \{\int_0^\tau \|u\|_{\sigma;k}^2 d\sigma\}^{1/2},$$

$$\|u\|_{\tau;q,k} = \{\sum_{\rho\leq q,\ \rho+l\leq k} (\partial_x^l\partial_t^\rho u, \partial_x^l\partial_t^\rho u)_{t=\tau}\}^{1/2},$$

$$\|u\|_{G_\tau;q,k} = \{\int_0^\tau \|u\|_{\sigma;q,k}^2 d\sigma\}^{1/2}.$$

Por $H^k(G)$ denotamos o completamento com respeito à norma $\|u\|_{G_T;k}$, do espaço das funções $C^\infty(G)$ com suporte compacto em x.

Vamos assumir alguma regularidade para os dados. Seja $k \geq 2$ e $p \geq -1$:

1) As derivadas $\partial_x^l \partial_t^\rho$ de $a^{ij}, \partial_{x_i} a^{ij}, b^i, c, \partial_t c$ e d são limitadas em G para $l+\rho \leq k-2$ e para $\rho = 0$, $l \leq k$.

2) As derivadas $\partial_x^l \partial_t^\rho$ de $a^{ij}, \partial_{x_i} a^{ij}, b^i, c, d$, com $\rho \leq p$ e $\rho + l \leq p + k + 2$, são limitadas em $t = 0$. Além disto, as derivadas $\partial_x^l \partial_t^\rho$ destas mesmas funções, com $\rho \leq p+1$ e $l \leq k$, são limitadas para $0 \leq t \leq t_0$.

3) f, ϕ e ψ tem suporte compacto na variável x.

Temos o seguinte teorema:

Teorema 2.1.1 *Assuma que os coeficientes de* (2.1) *satisfazem*

$$t\alpha(t) \sum_{1 \leq i \leq m} (b^i \xi_i)^2 \leq \theta \sum_{1 \leq i,j \leq m} a^{ij} \xi_i \xi_j + \sum_{1 \leq i,j \leq m} \partial_t a^{ij} \xi_i \xi_j, \tag{2.3}$$

em G para todo ξ. Então existe uma única solução $u \in H^k(G)$ do problema de Cauchy (2.1)-(2.2) *e a estimativa vale para quase todo ponto $0 \leq \tau \leq T$*

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{\tau;k} \leq M_1 \{ &\|\phi\|^2_{0;k+p+4} + \|\psi\|^2_{0;k+p+3} + \|f\|^2_{G_\tau;0,k} + \|f\|^2_{\tau;k-2} \\ &+ \sum_{\rho \leq p} \|f\|^2_{0;\rho,p+k+2-\rho} + \max_{0 \leq \sigma \leq t_0} \|f\|^2_{\sigma;p+1,k+p+1} \}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

se as normas de f, ϕ, ψ no lado direito de (2.4) *são finitas. Aqui θ é uma constante, $\alpha(t) = \alpha_1 \chi_{[0,t_0]} + \alpha_2 \chi_{[t_0,T]}$, em que $t_0, \alpha_1, \alpha_2 > 0$ com $t_0 < T$ uma constante suficientemente pequena e $\frac{\alpha_1}{2} > (2p+6)^{-1}$, e M_1 é uma constante dependendo dos coeficientes do sistema* (2.1) *e de suas derivadas indicadas acima.*

Para uma demonstração ver ([14]) ou ([15]).

2.2 Resultados para Sistemas

Consideraremos o problema de Cauchy não-característico

$$LU = I\partial_t^2 U - \partial_x(aI\partial_x U) + B\partial_x U + C\partial_t U + DU = f \tag{2.5}$$

$$U|_{t=0} = \Phi,\ U_t|_{t=0} = \Psi, \tag{2.6}$$

em $G = \{0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}\}$. Aqui $B(x,t) = (b_{ij}(x,t))$, $C(x,t) = (c_{ij}(x,t))$ e $D(x,t) = (d_{ij}(x,t))$ são matrizes 2×2 a valores reais, com $a(x,t) \geq 0$, e $U(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t))$, $f(x,t) = (f_1(x,t), f_2(x,t))$, $\Phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x))$ e $\Psi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x))$ são funções vetoriais. Um sistema da forma (2.5) nestas condições é do tipo fracamente hiperbólico, no sentido que este pode ser transformado num sistema de primeira ordem fracamente hiperbólico. (Para sistemas de primeira ordem veja definição dada no Capítulo 4)

Como no caso escalar introduzimos as seguintes notações:

$$G_\tau = \{0 \leq t \leq \tau, x \in \mathbb{R}\}, (\Phi, \Psi)_{t=\tau} = \int_{\mathbb{R}} [\phi_1\psi_1 + \phi_2\psi_2]dx,$$

$$[U, V]_{G_\tau} = \int_{G_\tau} [u_1v_1 + u_2v_2]dtdx,$$

Por $H^k(G, \mathbb{R}^2)$ denotamos o completamento com respeito a norma $\|U\|_{G_T;k}$, do espaço das funções $C^\infty(G)$ com suporte compacto em x.

Nosso objetivo é obter condições suficientes para que o problema de Cauchy (2.5)-(2.6) seja bem posto. Esta será uma versão para sistemas no plano da forma (2.5) do Teorema 2.1.1.

Para os dados assumiremos alguma regularidade. Seja $k \geq 2$ e $p \geq -1$:

1) As derivadas $\partial_x^l \partial_t^\rho$ de $a, \partial_x a, B, C, \partial_t C, D$, são limitadas em G para $l + \rho \leq k - 2$ e para $\rho = 0$, $l \leq k$.

2) As derivadas $\partial_x^l \partial_t^\rho$ de $a, \partial_x a, B, C, D$, com $\rho \leq p$ e $\rho + l \leq p + k + 2$, são limitadas em $t = 0$. Além disto, as derivadas $\partial_x^l \partial_t^\rho$ destas mesmas funções, com $\rho \leq p + 1$ e $l \leq k$, são limitadas para $0 \leq t \leq t_0$.

3) f, Φ e Ψ tem suporte compacto na variável x.

Temos o seguinte teorema:

Teorema 2.2.1 *Assuma que além das hipóteses acima os coeficientes de* (2.5) *satisfaçam*

$$\begin{aligned} t\alpha(t)((b_{11})^2 + (b_{12})^2) &\leq \theta a + \partial_t a, \\ t\alpha(t)((b_{22})^2 + (b_{21})^2) &\leq \theta a + \partial_t a. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Então existe uma única solução $U \in H^k(G, \mathbb{R}^2)$ *do problema de Cauchy* (2.5)-(2.6) *e a seguinte estimativa vale para quase todo ponto* τ, $0 \leq \tau \leq T$

$$\begin{aligned} \|U\|^2_{\tau;k} \leq M_1\{&\|\Phi\|^2_{0;k+p+4} + \|\Psi\|^2_{0;k+p+3} + \|f\|^2_{G_\tau;0,k} + \|f\|^2_{\tau;k-2} \\ &+ \sum_{\rho\leq p} \|f\|^2_{0;\rho,p+k+2-\rho} + \max_{0\leq\sigma\leq t_0} \|f\|^2_{\sigma;p+1,k+p+1}\}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

se as normas de f, Φ, Ψ *no lado direito de* (2.8) *são finitas. Aqui* θ *é uma constante,* $\alpha(t) = \alpha_1\chi_{[0,t_0]} + \alpha_2\chi_{[t_0,T]}$, *em que* $t_0, \alpha_1, \alpha_2 > 0$ *com* $t_0 < T$ *uma constante suficientemente pequena e* $\frac{\alpha_1}{2} > (2p+6)^{-1}$, *e* M_1 *é uma constante dependendo dos coeficientes do sistema* (2.5) *e de suas derivadas indicadas acima.*

Observação 2.2.1 *Fazendo uma inspeção na demonstração do teorema acima, se na condição* (2.7) *substituirmos* b_{ij} *por* $|b_{ij}|$ *e com as devidas modificações nas normas em* (2.8) *temos que o resultado continua válido no caso das matrizes* B, C *e* D *terem entradas complexas.*

Observação 2.2.2 *Se* $k > \frac{n}{2} + r$, *pelo lema de Sobolev* $H^k \subset C^r$. *Logo, para* $n = 2$, *se* $k > 3$, *então existe solução clássica do problema de Cauchy* (2.5)-(2.6).

Observação 2.2.3 *A partir da condição* (2.7) *do Teorema 2.2.1 segue que se* $a(x_0, t_0) = 0$, *então* $a(x_0, t) = 0; \forall t \leq t_0$. *De fato, por* (2.7) *temos que* $\theta a + \partial_t a \geq 0$, *logo integrando em* s *de* t (*para cada* $0 \leq t < t_0$) *a* t_0 *a função* $\partial_s[a(x,s)e^{\theta s}]$ *obtemos a afirmação.*

Analogamente as conclusões obtidas por Colombini e Spagnolo([2]) a partir do Teorema 1 de Oleinik ([14]), temos como consequência do Teorema 2.2.1 um resultado de existência e unicidade de soluções.

Corolário 2.2.1 *Se os dados do problema* (2.5)-(2.6) *são suficientemente regulares e*

$$a^{(j)}(0) \neq 0 \text{ for some } j \leq 2, \tag{2.9}$$

em que, em (2.5), $a = a(t)$, *então existe uma única solução* $U \in H^k(G, \mathbb{R}^2)$ *do problema de Cauchy* (2.5)-(2.6) *numa vizinhança de* $t = 0$.

Demonstração: Vamos supor que $a \in C^2$ numa vizinhança de $t = 0$. Nós provaremos somente uma das desigualdades de (2.7), pois a outra segue de modo análogo. Considere

$$\begin{aligned} g(x,t) &= \theta a(t) + a^{'}(t) - \alpha t(b_{11}^2 + b_{12}^2) \\ &\geq \theta a(t) + a^{'}(t) - \alpha t\|b_{11}^2 + b_{12}^2\|_\infty = h(t). \end{aligned}$$

Temos que $h(0) = \theta a(0) + a^{'}(0) > 0$ se $a(0) \neq 0$ ou $a^{'}(0) \neq 0$, pois $a \geq 0$. Logo, pela continuidade de h, $g \geq h \geq 0$ numa vizinhança de $t = 0$.

Se $a(0) = 0 = a^{'}(0)$ e $a^{''}(0) \neq 0$, então $a^{''}(0) > 0$, desde que $a \geq 0$. Neste caso, $h(0) = 0$ e $h^{'}(0) = a^{''}(0) - \alpha\|b_{11}^2 + b_{12}^2\|_\infty$. Se $\|b_{11}^2 + b_{12}^2\|_\infty = 0$, então $g \geq h \geq 0$ numa vizinhança de $t = 0$, pois $h^{'}(0) > 0$. Se $\|b_{11}^2 + b_{12}^2\|_\infty > 0$, então tome $0 < \alpha < \frac{a^{''}(0)}{(\|b_{11}^2 + b_{12}^2\|_\infty)}$ e logo $h^{'}(0) > 0$. Portanto, $g \geq h \geq 0$ numa vizinhança de $t = 0$. ∎

Nós diremos que um operador diferencial tem a propriedade de **unicidade forte** se todo operador com a mesma parte principal tem unicidade de solução.

Nos próximos dois corolários, suporemos que em (2.5) as matrizes B, C e D são diagonais. Nestas condições, temos um resultado de não-unicidade

análogo ao de [2] que segue também pelos teoremas devido à S. Nakane(veja [10] e [11]).

Corolário 2.2.2 *Se $a = a(t)$ tem um zero finito de ordem $k \geq 3$ em $t = 0$, então o problema de Cauchy* (2.5)-(2.6) *não tem a propriedade de unicidade forte.*

A partir dos dois corolários acima temos:

Corolário 2.2.3 *O sistema* (2.5) *com $a = a(t)$ tem a propriedade de unicidade forte se, e somente se, a condição* (2.9) *se verifica numa vizinhança de $t = 0$.*

2.3 Sistemas Estritamente Hiperbólicos

Nesta seção regularizaremos os dados do problema (2.5)-(2.6). Então faremos uma perturbação do sistema (2.5) de modo a torná-la estritamente hiperbólico. Finalmente enunciamos uma desigualdade básica para o problema estritamente hiperbólico. Esta estratégia segue análoga ao trabalho de Oleinik([14]). Para isto, consideremos as seguintes duas etapas:

Etapa 1

Sejam $0 \leq \varphi, \tilde{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que

$$\int \varphi(x)dx = 1, \int \tilde{\varphi}(\sigma)d\sigma = 1 \quad \text{e} \quad supp(\varphi) \subset [-1,1],\ supp(\tilde{\varphi}) \subset [0,1].$$

Com $\epsilon > 0$ consideremos as funções $\varphi_\epsilon(x) = \epsilon^{-1}\varphi(x/\epsilon)$ e $\tilde{\varphi}_\epsilon(x) = \epsilon^{-1}\tilde{\varphi}(x/\epsilon)$ e introduzimos os seguintes operadores de regularização

$$P_\epsilon[v](x,t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_\epsilon(x-y)v(y,t)dy,$$

$$Q_\epsilon[v](x,t) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi}_\epsilon(\tau - t)P_\epsilon[v](x,\tau)d\tau.$$

Agora nós consideraremos as seguintes funções:

$$\begin{aligned} &\phi_\epsilon^j = P_\epsilon[\phi_j],\ \psi_\epsilon^j = P_\epsilon[\psi_j],\ f_\epsilon^j = Q_\epsilon[f_j], \\ &a_\epsilon = Q_\epsilon[a],\ b_\epsilon^{ij} = Q_\epsilon[b_{ij}],\ c_\epsilon^{ij} = Q_\epsilon[c_{ij}],\ d_\epsilon^{ij} = Q_\epsilon[d_{ij}]. \end{aligned} \tag{2.10}$$

a) Estas funções estão bem definidas em $G^\epsilon = \{0 \le t \le T - \epsilon, x \in \mathbb{R}\}$. De fato, se v está definida em G, então

$$\begin{aligned} Q_\epsilon[v](x,t) &= \epsilon^{-2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi}(\frac{\tau - t}{\epsilon}) \varphi(\frac{x-y}{\epsilon}) v(y,\tau) dy d\tau \\ &= \int_0^1 \int_{-1}^1 \tilde{\varphi}(\sigma)\varphi(z) v(x - \epsilon z, t + \epsilon\sigma) dz d\sigma, \end{aligned}$$

esta definida para $0 \le t + \epsilon\sigma \le T$, e portanto $t + \epsilon \le T$ e $0 \le t$.

b) As funções em (2.10) tem as seguintes regularidades: 1) Como $\phi_j \in H^{k+p+4}$ e $\psi_j \in H^{k+p+3}$, ambas com suporte compacto, então $\phi_\epsilon^j, \psi_\epsilon^j \in C_0^\infty(G^\epsilon)$. 2) Também $\|f\|^2_{G_\tau;0,k} < \infty$, então $f_j \in L^2([0,T], H^k(\mathbb{R})) \subset L^1_{loc}(G)$. Como f tem suporte compacto em x, logo $f_\epsilon \in C^\infty(G^\epsilon)$ e tem suporte compacto em x. 3) Por hipótese $a, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij} \in L^\infty(G) \subset L^1_{loc}(G)$, então $a_\epsilon, b_\epsilon^{ij}, c_\epsilon^{ij}, d_\epsilon^{ij} \in C^\infty(G^\epsilon)$. As derivadas da forma $\partial_x^l \partial_t^\rho$ de $a_\epsilon, \partial_x a_\epsilon, B_\epsilon, C_\epsilon, \partial_t C_\epsilon, D_\epsilon$, são limitadas em G, isto para $l + \rho \le k - 2$, e se $\rho = 0$, $l \le k$. Além disso as derivadas da forma $\partial_x^l \partial_t^\rho$ de $a_\epsilon, \partial_x a_\epsilon, B_\epsilon, C_\epsilon, D_\epsilon$, com $\rho \le p$ e $\rho + l \le p + k + 2$ são limitadas em $t = 0$, e as derivadas da forma $\partial_x^l \partial_t^\rho$, destas mesmas funções, com $\rho \le p + 1$, $l \le k$, são limitadas para $0 \le t \le t_0$. 5) É claro que se $a \ge 0$, então $a_\epsilon \ge 0$.

Etapa 2

Se a condição (2.7) é satisfeita, então as desigualdades

$$\begin{aligned} \alpha t((b_\epsilon^{11})^2 + (b_\epsilon^{12})^2) &\le \theta a_\epsilon + \partial_t a_\epsilon, \\ \alpha t((b_\epsilon^{22})^2 + (b_\epsilon^{21})^2) &\le \theta a_\epsilon + \partial_t a_\epsilon. \end{aligned} \tag{2.11}$$

valem em G^ϵ. De fato, aplicando o operador Q_ϵ no lado esquerdo e no lado

direito das desigualdades (2.7) obtemos

$$Q_\epsilon[\alpha t b_{11}^2] + Q_\epsilon[\alpha t b_{12}^2] \leq \theta Q_\epsilon[a] + Q_\epsilon[\partial_t a]$$

$$Q_\epsilon[\alpha t b_{22}^2] + Q_\epsilon[\alpha t b_{21}^2] \leq \theta Q_\epsilon[a] + Q_\epsilon[\partial_t a].$$

Mas pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e com $t \in [0, t_0]$

$$\begin{aligned}\alpha_1 t(b_\epsilon^{ij})^2 = \alpha_1 t(Q_\epsilon[b_{ij}])^2 &= \alpha_1 t(\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi}_\epsilon(\tau - t)\varphi_\epsilon(x - y)b_{ij}(y, \tau)dyd\tau)^2 \\ &\leq (\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \tilde{\varphi}_\epsilon(\tau - t)\varphi_\epsilon(x - y)\alpha_1 t b_{ij}^2(y, \tau)dyd\tau).1 \\ &\leq \int_0^1 \int_{-1}^1 \tilde{\varphi}(\sigma)\varphi(z)(t + \epsilon\sigma)\alpha_1 b_{ij}^2(x - \epsilon z, t + \epsilon\sigma)dzd\sigma = Q_\epsilon[\alpha_1 t b_{ij}^2].\end{aligned}$$

Obtemos desigualdade análoga para $t \in [t_0, T - \epsilon]$. Ainda,

$$Q_\epsilon[a_t](x, t) = \int_0^1 \int_{-1}^1 \tilde{\varphi}(\sigma)\varphi(z)\partial_t a(x - \epsilon z, t + \epsilon\sigma)dzd\sigma = \partial_t Q_\epsilon[a](x, t) = \partial_t a_\epsilon(x, t),$$

e portanto a condição (2.11) esta satisfeita para $t \leq T - \epsilon$.

Antes de enunciarmos o lema básico, precisamos do seguinte lema:

Lema 2.3.1 *Existem $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ de modo que o sistema*

$$L_\epsilon = I\partial_t^2 - \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 \end{pmatrix} \partial_x^2 - \partial_x(a_\epsilon I\partial_x) + B_\epsilon\partial_x + C_\epsilon\partial_t + D_\epsilon \qquad (2.12)$$

é estritamente hiperbólico em $G^\epsilon = \{0 \leq t \leq T - \epsilon, x \in \mathbb{R}\}$.

Demonstração: O sistema acima é estritamente hiperbólico se este puder ser transformado num sistema de primeira ordem estritamente hiperbólico. Com λ_1 e λ_2 números reais a serem escolhidos, podemos escrever

$$\partial_t \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \partial_t u_1 \\ \partial_x u_1 \\ \partial_t u_2 \\ \partial_x u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_\epsilon + \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_\epsilon + \epsilon_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_x \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \partial_t u_1 \\ \partial_x u_1 \\ \partial_t u_2 \\ \partial_x u_2 \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda_2 \\ -d_\epsilon^{11} & -d_\epsilon^{12} & -c_\epsilon^{11} & \partial_x a_\epsilon - b_\epsilon^{11} & -c_\epsilon^{12} & -b_\epsilon^{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d_\epsilon^{21} & -d_\epsilon^{22} & -c_\epsilon^{21} & -b_\epsilon^{21} & -c_\epsilon^{22} & \partial_x a_\epsilon - b_\epsilon^{22} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \partial_t u_1 \\ \partial_x u_1 \\ \partial_t u_2 \\ \partial_x u_2 \end{pmatrix}$$

Aqui os autovalores da matriz

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_\epsilon + \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_\epsilon + \epsilon_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

são $\lambda_j, \pm\sqrt{a_\epsilon + \epsilon_j}$, j=1,2. Se tomarmos $\epsilon_1 = \epsilon \neq \frac{\epsilon}{2} = \epsilon_2$ e constantes $\lambda_1 \neq \lambda_2$ reais e distintos de forma que $\lambda_1, \lambda_2 \notin imagem\{\pm\sqrt{a_\epsilon + \epsilon_j}\}$, segue a afirmação. ∎

Para o problema regularizado e estritamente hiperbólico temos:

Lema 2.3.2 *Seja $U_\epsilon(x,t)$ solução do problema de Cauchy*

$$L_\epsilon U_\epsilon = f_\epsilon, \tag{2.13}$$

$$U_\epsilon|_{t=0} = \Phi_\epsilon(x),\ \partial_t U_\epsilon|_{t=0} = \Psi_\epsilon(x). \tag{2.14}$$

em $G^\epsilon = \{0 \leq t \leq T - \epsilon, x \in \mathbb{R}\}$. Então para $0 \leq \tau \leq T - \epsilon$ a seguinte desigualdade é satisfeita

$$\|U_\epsilon\|^2_{\tau;k} \leq M_2\{\|\Phi_\epsilon\|^2_{0;k+p+4} + \|\Psi_\epsilon\|^2_{0;k+p+3} + \|f_\epsilon\|^2_{G_\tau;0,k} + \|f_\epsilon\|^2_{\tau;k-2} + \sum_{\rho\leq p} \|f_\epsilon\|^2_{0;\rho,p+k+2-\rho} + \max_{0\leq\sigma\leq t_0} \|f_\epsilon\|^2_{\sigma;p+1,k+p+1}\}. \tag{2.15}$$

Antes de fazermos a longa prova deste teorema no próximo capítulo, façamos duas observações.

Observação 2.3.1 *Aqui M_2 é uma constante independente de $\epsilon > 0$ dependendo do módulo máximo em G^ϵ das derivadas da forma $\partial_x^l \partial_t^\rho$ de $a_\epsilon, \partial_x a_\epsilon$, B_ϵ, C_ϵ,$\partial_t C_\epsilon$, D_ϵ, $l + \rho \leq k - 2$, e se $\rho = 0$, $l \leq k$, $k \geq 2$. Além disso, depende das derivadas da forma $\partial_x^l \partial_t^\rho$ de $a_\epsilon, \partial_x a_\epsilon, B_\epsilon, C_\epsilon, D_\epsilon$, com $\rho \leq p$ e $\rho + l \leq p + k + 2$ em $t = 0$, e das derivadas da forma $\partial_x^l \partial_t^\rho$, destas mesmas funções, com $\rho \leq p + 1, l \leq k$, para $0 \leq t \leq t_0$.*

Observação 2.3.2 *Do fato de $\Phi_\epsilon, \Psi_\epsilon, f_\epsilon$ terem suporte compacto em x e o sistema ser estritamente hiperbólico, o mesmo ocorre para U_ϵ. Mais precisamente, existe $R > 0$ tal que $S(U_\epsilon) \subset \{(x,t); |x| < R,\ t \in [0,T]\}$,$\forall \epsilon < 1$. De fato, como existe $r > 0$ tal que $S(\Phi_\epsilon), S(\Psi_\epsilon), S(f_\epsilon(.,t)) \subset \{x, |x| < r\}$, $\forall \epsilon < 1$ e $\forall t \in [0,T]$, consideremos as curvas características $(x_1^\epsilon(t), t)$ e $(x_2^\epsilon(t), t)$ dadas por*

$$\frac{dx_1^\epsilon}{dt} = \sqrt{a_\epsilon(x_1^\epsilon(t), t) + \epsilon},\ x_1^\epsilon(0) = r,$$
$$\frac{dx_2^\epsilon}{dt} = -\sqrt{a_\epsilon(x_2^\epsilon(t), t) + \epsilon},\ x_2^\epsilon(0) = -r.$$

Desde que $a_\epsilon, \partial_x a_\epsilon \in L^\infty(G) \bigcap C^\infty$, temos que existem únicas soluções x_1^ϵ e x_2^ϵ definidas para todo $0 \leq t \leq T$. Ainda, como $\sqrt{a_\epsilon + \epsilon} \leq M, \forall \epsilon \leq 1$, temos que $|x_j^\epsilon(t)| \leq r + TM$, para todo $0 \leq t \leq T$, $j = 1, 2$, o que implica a afirmação.

Capítulo 3

Estimativa das soluções do problema Estritamente Hiperbólico

Ao invés de provarmos estimativas diretamente para as soluções U_ϵ do problema de Cauchy $(2.13) - (2.14)$, vamos considerar a expansão de Taylor de U_ϵ até ordem $p+2$ em $t=0$

$$V_p = \Phi_\epsilon + \Psi_\epsilon t + \frac{t^2}{2!}\partial_t^2 U_\epsilon|_{t=0} + ... + \frac{t^{p+2}}{(p+2)!}\partial_t^{p+2} U_\epsilon|_{t=0}, \tag{3.1}$$

e provaremos estimativas para a função $U = U_\epsilon - V_p$. Na equação (3.1) as derivadas de U_ϵ em $t=0$ são obtidas a partir da equação (2.13) e por derivadas com respeito a t da mesma, e usando ainda os dados iniciais (2.14). Por indução podemos provar que V_p depende das derivadas $\partial_x^l \partial_t^\rho$ de $a_\epsilon, \partial_x a_\epsilon, B_\epsilon, C_\epsilon, D_\epsilon, f_\epsilon$, com $l + \rho \leq p$, em $t = 0$, e das derivadas ∂_x^l de Φ_ϵ e Ψ_ϵ, com $l \leq p+2$ e $l \leq p+1$, respectivamente.

Aplicando o operador L_ϵ em U obtemos

$$L_\epsilon(U) = f_\epsilon - L_\epsilon(V_p) = \mathcal{F}(x,t). \tag{3.2}$$

Temos que $\partial_t^{(j)}\mathcal{F}(x,t)|_{t=0} = 0$, $0 \leq j \leq p$. De fato, pela expansão de Taylor até a ordem $p+3$ em $t=0$ de U_ϵ temos

$$U_\epsilon(x,t) = \sum_0^{p+2} \frac{\partial_t^{(j)} U_\epsilon(x,0)}{j!} t^j + O(t^{p+3}).$$

Logo

$$U = U_\epsilon - V_p = O(t^{p+3}),$$

o que prova a afirmação.

Com $U = (u_1, u_2)$, façamos

$$W = (w_1, w_2) = (\int_t^\tau u_1(x,\sigma)d\sigma, \int_t^\tau u_2(x,\sigma)d\sigma).$$

Multiplicando (3.2) por $We^{\theta t}$ e integrando em G_τ obtemos

$$[L_\epsilon(U), We^{\theta t}]_{G_\tau} = [\mathcal{F}, We^{\theta t}]_{G_\tau}. \tag{3.3}$$

Estamos interessados em estimar as derivadas $\partial_x^l \partial_t^\rho U$, $l + \rho \leq k$. Nas seções 3.1, 3.2 e 3.3 estimares U, $\partial_x^l U$, $l \leq k$ e $\partial_x^l \partial_t^\rho U$, para $l+\rho \leq k$, respectivamente.

Finalmente, na seção 3.4 provaremos o Lema 2.3.2. Também o Teorema 2.2.1 será provado utilizando o Lema 2.3.2.

3.1 Estimativas para U

Lema 3.1.1 *Para $0 \leq \tau \leq t_0$ temos que*

$$(U, Ue^{\theta\tau})_{t=\tau} \leq M_3 \tau^{2p+6} \|\mathcal{F}\|^2_{p+1,t_0}, \tag{3.4}$$

em que M_3 é uma constante uniforme em ϵ dependendo de $\partial_x B_\epsilon, C_\epsilon, \partial_t C_\epsilon, D_\epsilon$ e t_0. Aqui

$$\|\mathcal{F}\|^2_{p+1,t_0} = \sum_1^2 \max_{0\leq\sigma\leq t_0} (\partial_t^{(p+1)}\mathcal{F}_j, \partial_t^{(p+1)}\mathcal{F}_j)|_{t=\sigma}.$$

Demonstração: A demonstração do lema será feita em três etapas. Nas duas primeiras etapas estimaremos os lados esquerdo e direito de (3.3), respectivamente. Na terceira etapa provaremos a estimativa (3.4), usando o lema de Gronwall .

Etapa 1

Usando integração por partes nós escreveremos cada termo do lado esquerdo de (3.3) de modo que possua a menor ordem de derivação possível. Para tal, usaremos o fato de $\partial_t^{(\rho)} u_j|_{t=0} = 0; \forall \rho \leq p+2$, $w_j(x,\tau) = 0$ e de u_j e w_j terem suporte compacto em x para $j = 1, 2$. Com $0 \leq t \leq t_0$ obtemos as seguintes igualdades:

$$[\partial_t^2 U, We^{\theta t}]_{G_\tau} = \frac{1}{2}(U, Ue^{\theta t})_{t=\tau} + [Ue^{\theta t}, \theta^2 W - \frac{3}{2}\theta U]_{G_\tau},$$

$$[\epsilon_j \partial_x^2 u_j, e^{\theta t} w_j]_{G_\tau} = -\frac{\epsilon_j}{2}(\partial_x w_j, e^{\theta t}\partial_x w_j)_{t=0} - \frac{\epsilon_j}{2}[\partial_x w_j, \theta e^{\theta t}\partial_x w_j]_{G_\tau},$$

$$[\partial_x(a_\epsilon U_x), We^{\theta t}]_{G_\tau} = -\frac{1}{2}(W_x, a_\epsilon W_x)|_{t=0} - \frac{1}{2}[W_x, (\theta a_\epsilon + \partial_t a_\epsilon)W_x e^{\theta t}]_{G_\tau}.$$

Obtemos ainda que

$$[C_\epsilon \partial_t U, We^{\theta t}]_{G_\tau} = \sum_1^2 [u_j, c_\epsilon^{jj} e^{\theta t} u_j - \partial_t(c_\epsilon^{jj} e^{\theta t}) w_j]_{G_\tau}$$
$$+[u_2, c_\epsilon^{12} e^{\theta t} u_1 - \partial_t(c_\epsilon^{12} e^{\theta t}) w_1]_{G_\tau} + [u_1, c_\epsilon^{21} e^{\theta t} u_2 - \partial_t(c_\epsilon^{21} e^{\theta t}) w_2]_{G_\tau}.$$

Por definição

$$[B_\epsilon \partial_x U, We^{\theta t}]_{G_\tau} = \sum_1^2 [b_\epsilon^{jj}\partial_x u_j, w_j e^{\theta t}]_{G_\tau} + [b_\epsilon^{12}\partial_x u_2, w_1 e^{\theta t}]_{G_\tau}$$
$$+[b_\epsilon^{21}\partial_x u_1, w_2 e^{\theta t}]_{G_\tau}. \tag{3.5}$$

Os dois primeiros termos do lado direito de (3.5) satisfazem

$$|[b_\epsilon^{jj}\partial_x u_j, w_j e^{\theta t}]_{G_\tau}| \leq M_4 \tau^2 [u_j, t^{-1} u_j e^{\theta t}]_{G_\tau} + \tfrac{1}{2}\alpha [t b_\epsilon^{jj}\partial_x w_j, b_\epsilon^{jj}\partial_x w_j e^{\theta t}]_{G_\tau}$$
$$+\tfrac{1}{2\alpha}[u_j, t^{-1} u_j e^{\theta t}]_{G_\tau}, \tag{3.6}$$

em que M_4 é uma constante dependendo do $\max_{G_\tau}|\partial_x B_\epsilon|$. De fato, fazendo $u = u_j$, $w = w_j$, $b = b_\epsilon^{jj}$ e integrando por partes em x obtemos

$$\begin{aligned}[bu_x, we^{\theta t}]_{G_\tau} &= \int_0^\tau \{ubwe^{\theta t}|_{\partial S(u)} - \int_{\mathbb{R}^n} u\partial_x(bwe^{\theta t})dx\}dt \\ &= -[u\partial_x b, we^{\theta t}]_{G_\tau} - [b\partial_x w, ue^{\theta t}]_{G_\tau}.\end{aligned}$$

Mas como $xy \leq \frac{1}{2}(\alpha x^2 + \frac{1}{\alpha}y^2)$ segue que

$$\begin{aligned}|[bw_x, ue^{\theta t}]_{G_\tau}| &= |\int_{G_\tau} (t\alpha)^{1/2} bw_x e^{\frac{\theta t}{2}} ue^{\frac{\theta t}{2}} (t\alpha)^{-1/2} dxdt| \\ &\leq \frac{1}{2}\int_{G_\tau} t\alpha b^2 w_x^2 e^{\theta t} + (t\alpha)^{-1}u^2 e^{\theta t} dxdt \\ &= \frac{1}{2}\alpha[tbw_x, bw_x e^{\theta t}]_{G_\tau} + \frac{1}{2\alpha}[u, t^{-1}ue^{\theta t}]_{G_\tau}\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}|\int_0^\tau u(x,t)b_x(x,t)e^{\theta t}w(x,t)dt| &= |\int_0^\tau u(x,t)b_x(x,t)e^{\theta t}\int_t^\tau u(x,\sigma)d\sigma dt| \\ &= |\int_0^\tau\int_0^\sigma u(x,t)(\frac{\sigma}{t})^{1/2}e^{\frac{\theta(t-\sigma)}{2}}u(x,\sigma)(\frac{t}{\sigma})^{1/2}e^{\frac{\theta(t+\sigma)}{2}}b_x dtd\sigma| \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^\tau\int_0^\sigma u^2(x,t)\sigma t^{-1}e^{\theta(t-\sigma)}|b_x| + u^2(x,\sigma)t\sigma^{-1}e^{\theta(t+\sigma)}|b_x|dtd\sigma \\ &\leq M_4\tau^2\int_0^\tau u^2(x,t)t^{-1}e^{\theta t}dt.\end{aligned}$$

Logo segue a desigualdade (3.6). Quanto aos termos mistos em (3.5) provaremos as desigualdades:

$$\begin{aligned}[b_\epsilon^{21}\partial_x u_1, w_2 e^{\theta t}]_{G_\tau} \leq \frac{1}{2}\alpha[tb_\epsilon^{21}\partial_x w_2, b_\epsilon^{21}\partial_x w_2 e^{\theta t}]_{G_\tau} + \frac{1}{2\alpha}[u_1, t^{-1}u_1 e^{\theta t}]_{G_\tau} \\ +\frac{1}{2}[u_1, \partial_x(b_\epsilon^{21})^2 u_1 e^{\theta t}]_{G_\tau} + M_5\tau^2[u_2, t^{-1}u_2 e^{\theta t}]_{G_\tau}, \quad (3.7)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}[b_\epsilon^{12}\partial_x u_2, w_1 e^{\theta t}]_{G_\tau} \leq \frac{1}{2}\alpha[tb_\epsilon^{12}\partial_x w_1, b_\epsilon^{12}\partial_x w_1 e^{\theta t}]_{G_\tau} + \frac{1}{2\alpha}[u_2, t^{-1}u_2 e^{\theta t}]_{G_\tau} \\ +\frac{1}{2}[u_2, (\partial_x b_\epsilon^{12})^2 u_2 e^{\theta t}]_{G_\tau} + M_6\tau^2[u_1, t^{-1}u_1 e^{\theta t}]_{G_\tau}. \quad (3.8)\end{aligned}$$

De fato, como U tem suporte compacto em x, integração por partes em x produz

$$[b_\epsilon^{21}\partial_x u_1, w_2 e^{\theta t}]_{G_\tau} = -\int_G u_1 \partial_x (b_\epsilon^{21} w_2) e^{\theta t} dx dt.$$

Usando a desigualdade elementar para números reais, $yz \leq \frac{1}{2}(y^2 + z^2)$ temos

$$[u_1, \partial_x(w_2) b_\epsilon^{21} e^{\theta t}]_{G_\tau} \leq \frac{1}{2}\alpha [t b_\epsilon^{21} \partial_x w_2, b_\epsilon^{21} \partial_x w_2 e^{\theta t}]_{G_\tau} + \frac{1}{2\alpha}[u_1, t^{-1} u_1 e^{\theta t}]_{G_\tau}.$$

Por outro lado

$$[u_1 \partial_x b_\epsilon^{21}, w_2 e^{\theta t}]_{G_\tau} \leq \frac{1}{2}[u_1, (\partial_x b_\epsilon^{21})^2 e^{\theta t} u_1]_{G_\tau} + \frac{1}{2}[w_2, w_2 e^{\theta t}]_{G_\tau}.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e o fato de $2xy \leq x^2 + y^2$ nós obtemos

$$\begin{aligned}
[w_2, w_2 e^{\theta t}]_{G_\tau} &= \int_{\mathbb{R}} \int_0^\tau (\int_t^\tau u_2(x,\sigma) d\sigma)(\int_t^\tau u_2(x,\gamma) d\gamma) e^{\theta t} dt dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \int_0^\tau \int_t^\tau (\int_t^\tau u_2^2(x,\sigma) e^{\theta t} d\sigma)^{1/2} (\int_t^\tau u_2^2(x,\gamma) e^{\theta t} d\sigma)^{1/2} d\gamma dt dx \\
&\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \int_0^\tau \int_t^\tau \{\int_t^\tau u_2^2(x,\sigma) e^{\theta t} d\sigma + \int_t^\tau u_2^2(x,\gamma) e^{\theta t} d\sigma\} d\gamma dt dx \\
&\leq C\tau^2 \{\int_{\mathbb{R}} \int_0^\tau u_2^2(x,\sigma)\sigma^{-1} e^{\theta\sigma} d\sigma + \int_{\mathbb{R}} \int_0^\tau u_2^2(x,\gamma)\gamma^{-1} e^{\theta\gamma} d\gamma\} \\
&\leq M_5 \tau^2 \int_{\mathbb{R}} \int_0^\tau u_2^2(x,t) t^{-1} e^{\theta t} dt.
\end{aligned}$$

Logo segue (3.7). De modo análogo tem-se a desigualdade (3.8).

Etapa 2

Agora daremos uma estimativa para $[\mathcal{F}, W e^{\theta t}]_{G_\tau}$.

a) Integrando por partes em t obtemos

$$\begin{aligned}
[\mathcal{F}_j, w_j e^{\theta t}]_{G_\tau} &= \int_{\mathbb{R}} \int_0^\tau \mathcal{F}_j(x,t) \partial_t \{-\int_t^\tau w_j(x,s) e^{\theta s} ds\} dt dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \{\mathcal{F}_j W_1^j|_0^\tau - \int_0^\tau \partial_t(\mathcal{F}_j) W_1^j dt\} dx
\end{aligned}$$

em que $W_1^j = \int_t^\tau w_j e^{\theta s} ds$. Mas como $\mathcal{F}_j(x,0) = W_1^j(x,\tau) = 0$, segue que

$$[\mathcal{F}_j, w_j e^{\theta t}]_{G_\tau} = \int_{\mathbb{R}} \int_0^\tau \partial_t(\mathcal{F}_j) W_1^j dt dx.$$

Em geral, desde que $\partial_t^{(l)}\mathcal{F}_j(x,0) = W_\nu^j(x,\tau) = 0, \forall l \leq p$, temos

$$[\mathcal{F}_j, w_j e^{\theta t}]_{G_\tau} = [\partial_t^{p+1}\mathcal{F}_j, W_{p+1}^j]_{G_\tau},$$

em que $W_0 = We^{\theta t}$ e

$$W_{\nu+1}^j = \int_t^\tau W_\nu^j(x,\sigma)d\sigma, \ \nu = 0,1,...,p.$$

b) As funções W_{p+1}^j satisfazem a seguinte estimativa

$$|W_{p+1}^j|^2 \leq \tau^{2p+3}e^{2\theta T}\int_0^\tau u_j^2(x,\sigma)d\sigma.$$

De fato, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}|W_0^j|^2 &\leq e^{2\theta T}(\int_t^\tau |u_j(x,\sigma)|d\sigma)^2 \leq e^{\theta T}\int_t^\tau |u_j^2(x,\sigma)|d\sigma \int_t^\tau 1 d\sigma \\ &\leq \tau e^{2\theta T}\int_0^\tau |u_j(x,\sigma)|^2 d\sigma.\end{aligned}$$

Assumindo que vale a estimativa para W_q^j, e novamente usando a estimativa de Cauchy-Schwarz temos

$$\begin{aligned}|W_{q+1}^j|^2 &= |\int_t^\tau W_q^j(x,\sigma)d\sigma|^2 \leq \int_t^\tau |W_q^j(x,\sigma)|^2 d\sigma \int_t^\tau 1 d\sigma \\ &\leq \tau\int_t^\tau [\tau^{2(q-1)+3}e^{2\theta T}\int_0^\tau u_j^2(x,\sigma')d\sigma']d\sigma \\ &\leq \tau^2\tau^{2(q-1)+3}e^{2\theta T}\int_0^\tau u_j^2(x,\sigma')d\sigma' \leq \tau^{2q+3}e^{2\theta T}\int_0^\tau u_j^2(x,\sigma')d\sigma',\end{aligned}$$

donde segue a afirmação.

c) Segue de b) que

$$|[\mathcal{F}, We^{\theta t}]_{G_\tau}| \leq \sum_1^2 \delta[u_j, t^{-1}u_j e^{\theta t}]_{G_\tau} + \frac{e^{\theta t}\tau^{2p+6}}{4\delta}\|\mathcal{F}\|_{p+1,t_0}^2, \tag{3.9}$$

em $\delta =$ constante e

$$2(\alpha^{-1}+\delta) < 2p+6, \quad \|\mathcal{F}\|_{p+1,t_0}^2 = \sum_1^2 \max_{0\leq\sigma\leq t_0}(\partial_t^{(p+1)}\mathcal{F}_j, \partial_t^{(p+1)}\mathcal{F}_j)|_{t=\sigma}.$$

De fato, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$|[\mathcal{F}_j, w_j e^{\theta t}]_{G_\tau}| \leq \int_{G_\tau} |\partial_t^{(p+1)}(\mathcal{F}_j) W_{p+1}^j| dxdt$$
$$\leq (\int_{G_\tau} |\partial_t^{(p+1)} \mathcal{F}_j|^2 dxdt)^{1/2} (\int_{G_\tau} |W_{p+1}^j|^2 dxdt)^{1/2}.$$

Mas

$$\int_{G_\tau} |W_{p+1}^j|^2 dxdt \leq \int_{G_\tau} \tau^{2p+3} e^{2\theta T} \int_0^\tau u_j^2(x,\sigma) d\sigma dxdt$$
$$= \tau^{2p+3} e^{2\theta T} \tau \int_{\mathbb{R}} \int_0^\tau u_j^2(x,\sigma) \sigma e^{\theta\sigma} (\sigma e^{\theta\sigma})^{-1} d\sigma dx$$
$$\leq \tau^{2p+3} e^{2\theta T} \tau^2 \int_{\mathbb{R}} \int_0^\tau u_j^2(x,\sigma) e^{\theta\sigma} \sigma^{-1} d\sigma dx$$

Por outro lado,

$$\int_{G_\tau} |\partial_t^{(p+1)} \mathcal{F}_j|^2 dxdt \leq \int_{\mathbb{R}} \max_{0\leq\sigma\leq t_0} |\partial_t^{(p+1)} \mathcal{F}_j(x,\sigma)|^2 \tau dx$$
$$\leq \tau \max_{0\leq\sigma\leq t_0} (\partial_t^{(p+1)} \mathcal{F}_j, \partial_t^{(p+1)} \mathcal{F}_j)|_{t=\sigma} = \tau \|\mathcal{F}_j\|_{p+1,t_0}^2.$$

Logo, usando o fato de que $xy \leq \delta x^2 + \frac{y^2}{4\delta}$, segue que

$$|[\mathcal{F}_j, w_j e^{\theta t}]_{G_\tau}| \leq (\tau \|\mathcal{F}_j\|_{p+1,t_0}^2)^{1/2} (\tau^{2p+3} e^{2\theta T} \tau^2 [u_j, t^{-1} u_j e^{\theta t}])^{1/2}$$
$$\leq \delta [u_j, t^{-1} u_j e^{\theta t}] + \frac{\tau^{2p+6} e^{\theta T}}{4\delta} \|\mathcal{F}_j\|_{p+1,t_0}^2.$$

Logo segue a estimativa (3.9).

Etapa 3

Usando as estimativas obtidas para os termos individuais de (3.3) e pela condição (2.11), segue de (3.3) que para $\tau \leq t_0 < 1$

$$(U, Ue^{\theta t}) \leq 2(\delta + \alpha^{-1})[U, t^{-1} U e^{\theta t}]_{G_\tau}$$
$$+ M_7 \tau [U, t^{-1} U e^{\theta t}]_{G_\tau} + M_8 \tau^{2p+6} \|\mathcal{F}\|_{p+1,t_0}^2.$$

onde M_7 depende do módulo máximo em G_{t_0} de $\partial_x B_\epsilon, C_\epsilon, \partial_t C_\epsilon, D_\epsilon$ e em T, e $M_8 = \frac{e^{\theta T}}{4\delta}$. Se escrevermos $y(\tau) = [U, t^{-1} U e^{\theta t}]_{G_\tau}$, e como $\partial_t^\rho U|_{t=0} = 0, \forall\ \rho \leq p + 2 (p \geq -1)$ segue que

$$\tau y'(\tau) = \tau \frac{d}{d\tau} (\int_{\mathbb{R}} \int_0^\tau \sum_1^2 u_j^2 t^{-1} e^{\theta t} dt dx) = (U, Ue^{\theta t})_{t=\tau}.$$

Portanto, temos a desigualdade

$$\tau y^{'}(\tau) \leq 2(\delta + \alpha^{-1})y(\tau) + M_7\tau y(\tau) + M_8\tau^{2p+6}\|\mathcal{F}\|^2_{p+1,t_0}. \tag{3.10}$$

Usando uma técnica similar usada para provar o lema de Gronwall, a saber, multiplicando (3.10) por $e^{-[2(\alpha^{-1}+\delta)\ln\tau + M_7\tau]}$ obtemos que

$$\begin{aligned}(y(\tau)e^{-[2(\alpha^{-1}+\delta)\ln\tau+M_7\tau]})' &= [y^{'}(\tau) - (\frac{2(\alpha^{-1}+\delta)}{\tau} + M_7)y(\tau)]e^{-[2(\alpha^{-1}+\delta)\ln\tau+M_7\tau]} \\ &\leq M_8\tau^{2p+6-1}\|\mathcal{F}\|^2_{p+1,t_0}e^{-[2(\alpha^{-1}+\delta)\ln\tau+M_7\tau]}.\end{aligned}$$

Integrando em τ temos

$$y(\tau)\tau^{-2(\alpha^{-1}+\delta)}e^{-M_7\tau} \leq \int_0^\tau M_8 s^{2p+6-1}\|\mathcal{F}\|^2_{p+1,t_0}e^{-M_7 s}s^{-2(\alpha^{-1}+\delta)}ds.$$

Como $2(\alpha^{-1}+\delta) < 2p+6$, logo $2p+6-2(\alpha^{-1}+\delta)-1 > -1$, donde

$$\begin{aligned} y(\tau) &\leq \tau^{2(\alpha^{-1}+\delta)}e^{M_7\tau}\|\mathcal{F}\|^2_{p+1,t_0}M_9 s^{2p+6-2(\alpha^{-1}-\delta)}|_0^\tau \\ &= M_{10}\tau^{2p+6}\|\mathcal{F}\|^2_{p+1,t_0}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Assim por (3.10) e (3.11) temos

$$\begin{aligned}(U, Ue^{\theta\tau})_{t=\tau} &= 2(\delta+\alpha^{-1})M_{10}\tau^{2p+6}\|\mathcal{F}\|^2_{p+1,t_0} + M_7\tau M_{10}\tau^{2p+6}\|\mathcal{F}\|^2_{p+1,t_0} \\ &\quad + M_8\tau^{2p+6}\|\mathcal{F}\|^2_{p+1,t_0}.\end{aligned}$$

∎

3.2 Estimativas do tipo $\partial_x^l U, l \leq k$

Lema 3.2.1 *Para $l \leq k$ e $0 \leq \tau \leq t_0$ temos que*

$$(\partial_x^l U, \partial_x^l U e^{\theta\tau})_{t=\tau} \leq E_l\tau^{2p+6}\sum_{\beta\leq k}\|\partial_x^\beta\mathcal{F}\|^2_{p+1,t_0}, \tag{3.12}$$

em que E_l é uma constante uniforme em ϵ dependendo do módulo máximo das derivadas ∂_x^l de $a_\epsilon, \partial_x a_\epsilon, B_\epsilon$ $C_\epsilon, \partial_t C_\epsilon, D_\epsilon$ para $l \leq k$.

Demonstração: Usaremos indução sobre k. Com θ_1 uma constante positiva a ser escolhida mais tarde consideremos a igualdade

$$[\partial_x^k L_\epsilon(U), \partial_x^k W e^{\theta_1 t}]_{G_\tau} = [\partial_x^k \mathcal{F}, \partial_x^k W e^{\theta_1 t}]_{G_\tau}. \tag{3.13}$$

Provaremos o lema em duas etapas.Na primeira etapa, transformaremos via integração por partes os termos em (3.13) análogo ao feito para obter (3.4). Na segunda etapa a estimativa (3.12) segue usando o lema de Gronwall e a hipótese de indução.

Etapa 1

Temos que:

$$|[\partial_x^k \mathcal{F}, \partial_x^k W e^{\theta t}]_{G_\tau}| \leq \sum_1^2 \delta[\partial_x^k u_j, t^{-1}\partial_x^k u_j e^{\theta t}]_{G_\tau} + M_{11}\tau^{2p+6}\|\partial_x^k \mathcal{F}\|^2_{p+1,t_0},$$

$$\begin{aligned}[\partial_x^k \partial_t^2 U, \partial_x^k W e^{\theta_1 t}]_{G_\tau} &= \frac{1}{2}(\partial_x^k U, \partial_x^k U e^{\theta_1 t})_{t=\tau} \\ &+ [\partial_x^k U e^{\theta_1 t}, \theta_1^2 \partial_x^k W - \frac{3}{2}\theta_1 \partial_x^k U]_{G_\tau},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\epsilon_j \partial_x^k \partial_x^2 u_j, e^{\theta_1 t}\partial_x^k w_j]_{G_\tau} &= -\frac{\epsilon_j}{2}(\partial_x^{k+1} w_j, e^{\theta_1 t}\partial_x^{k+1} w_j)_{t=0} \\ &-\frac{\epsilon_j}{2}[\partial_x^{k+1} w_j, \theta_1 e^{\theta_1 t}\partial_x^{k+1} w_j]_{G_\tau},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\partial_x^k (a_\epsilon u_x)_x, e^{\theta_1 t}\partial_x^k w]_{G_\tau} &= -\frac{1}{2}(a_\epsilon \partial_x^k w_x, e^{\theta_1 t}\partial_x^k w_x)_{t=0} \\ &- \frac{1}{2}[(\theta_1 a_\epsilon + \partial_t a_\epsilon)\partial_x^k w_x, e^{\theta_1 t}\partial_x^k w_x]_{G_\tau} \\ &+ \sum_{1\leq\beta\leq k} C_\beta [\partial_x^\beta (a_\epsilon)\partial_x^{k-\beta} u_x, e^{\theta_1 t}\partial_x^k w_x]_{G_\tau}, \end{aligned} \tag{3.14}$$

onde C_β são constantes. Vamos estimar os termos da última soma em (3.14). Para $\beta = 1$ a integral

$$[\partial_x (a_\epsilon)\partial_x^{k-1} u_x, e^{\theta_1 t}\partial_x^k w_x]_{G_\tau}$$

pode ser estimada usando a desigualdade de Glaeser([4]), a saber, para cada $t \in [0,T]$

$$|\partial_x(a_\epsilon)(x,t)|^2 \leq M a_\epsilon(x,t) \tag{3.15}$$

com $M = \sup_G |\partial_x^2 a_\epsilon|$. Como $xy \leq \frac{x^2}{4} + y^2$ e por (3.15) obtemos

$$|[\partial_x(a_\epsilon)\partial_x^{k-1}u_x, e^{\theta_1 t}\partial_x^k w_x]_{G_\tau}| \leq |A_1| + M[a_\epsilon \partial_x^k w_x, e^{\theta_1 t}\partial_x^k w_x]_{G_\tau}.$$

Aqui como no que segue A_j denota as integrais satisfazendo as estimativas

$$|A_j| \leq N_j \sum_{\beta \leq k} \tau[\partial_x^\beta U, t^{-1}\partial_x^\beta U e^{\theta_1 t}]_{G_\tau},$$

onde N_j são constantes dependendo dos coeficientes da equação (2.13). Integrando por partes transformaremos as integrais do último termo em (3.14) correspondendo a $\beta \geq 2$. Temos que

$$\sum_{2\leq\beta\leq k} C_\beta[\partial_x^\beta(a_\epsilon)\partial_x^{k-\beta}u_x, e^{\theta_1 t}\partial_x^k w_x]_{G_\tau} = -\sum_{2\leq\beta\leq k} C_\beta[(\partial_x^\beta(a_\epsilon)\partial_x^{k-\beta}u_x)_x, e^{\theta_1 t}\partial_x^k w]_{G_\tau} = A_2,$$

em que N_2 depende do módulo máximo das derivadas ∂_x^l de $a_\epsilon, \partial_x a_\epsilon$, com $l \leq k$.

Por definição

$$\begin{aligned}[\partial_x^k(B_\epsilon \partial_x U), e^{\theta_1 t}\partial_x^k W]_{G_\tau} &= \sum_1^2 [\partial_x^k(b_\epsilon^{jj}\partial_x u_j), e^{\theta_1 t}\partial_x^k w_j]_{G_\tau} \\ &+ [\partial_x^k(b_\epsilon^{21}\partial_x u_1), e^{\theta_1 t}\partial_x^k w_2]_{G_\tau} + [\partial_x^k(b_\epsilon^{12}\partial_x u_2), e^{\theta_1 t}\partial_x^k w_1]_{G_\tau}\end{aligned} \tag{3.16}$$

Para os dois primeiros termos do lado direito de (3.16) temos

$$\begin{aligned}|[\partial_x^k(b_\epsilon^{jj}\partial_x u_j), e^{\theta_1 t}\partial_x^k w_j]_{G_\tau}| &\leq |[b_\epsilon^{jj}\partial_x^k\partial_x u_j, e^{\theta_1 t}\partial_x^k w_j]_{G_\tau} + A_3| \\ &\leq |[b_\epsilon^{jj}\partial_x^k u_j, e^{\theta_1 t}\partial_x^{k+1} w_j]_{G_\tau} + A_4| \\ \leq |A_4| + \frac{\alpha}{2}[t b_\epsilon^{jj}\partial_x^{k+1}w_j, e^{\theta_1 t}b_\epsilon^{jj}\partial_x^{k+1}w_j]_{G_\tau} &+ \frac{1}{2\alpha}[\partial_x^k u_j, t^{-1}e^{\theta_1 t}\partial_x^k u_j]_{G_\tau}\end{aligned}$$

em que N_4 depende do módulo máximo das derivadas $\partial_x^l b_\epsilon^{jj}$, com $l \leq k$. Para um dos termos misto em (3.16) temos

$$[\partial_x^k(b_\epsilon^{12}\partial_x u_2), e^{\theta_1 t}\partial_x^k w_1]_{G_\tau} = [b_\epsilon^{12}\partial_x^{k+1}u_2, e^{\theta_1 t}\partial_x^k w_1]_{G_\tau} + \sum_1^k [\partial_x^\beta(b_\epsilon^{12})\partial_x^{k+1-\beta}u_2, e^{\theta_1 t}\partial_x^k w_1]_{G_\tau}$$

Como anteriormente temos

$$[b_\epsilon^{12}\partial_x^{k+1}u_2, e^{\theta_1 t}\partial_x^k w_1]_{G_\tau} \leq \frac{\alpha}{2}[tb_\epsilon^{12}\partial_x^{k+1}w_1, b_\epsilon^{12}e^{\theta_1 t}\partial_x^{k+1}w_1]_{G_\tau} + \frac{1}{2\alpha}[\partial_x^k u_2, t^{-1}e^{\theta_1 t}\partial_x^k u_2]_{G_\tau}$$
$$+ \frac{1}{2}[\partial_x^k u_2, e^{\theta_1 t}(\partial_x b_\epsilon^{12})^2\partial_x^k u_2]_{G_\tau} + \frac{1}{2}[\partial_x^k w_1, e^{\theta_1 t}\partial_x^k w_1]_{G_\tau}.$$

Ainda

$$\sum_1^k [\partial_x^\beta(b_\epsilon^{12})\partial_x^{k+1-\beta}u_2, e^{\theta_1 t}\partial_x^k w_1]_{G_\tau} \leq |A_5|,$$

com N_5 dependendo de $\partial_x^l b_\epsilon^{12}$ para $l \leq k$. Como podemos provar uma desigualdade análoga para o termo $[\partial_x^k(b_\epsilon^{21}\partial_x u_1), e^{\theta_1 t}\partial_x^k w_2]_{G_\tau}$ em (3.16) obtemos

$$[\partial_x^k(B_\epsilon\partial_x U), e^{\theta_1 t}\partial_x^k W]_{G_\tau} \leq \sum_1^2 \frac{\alpha}{2}[tb_\epsilon^{jj}\partial_x^{k+1}w_j, e^{\theta_1 t}b_\epsilon^{jj}\partial_x^{k+1}w_j]_{G_\tau}$$
$$+\sum_1^2 \frac{1}{\alpha}[\partial_x^k u_j, t^{-1}e^{\theta_1 t}\partial_x^k u_j]_{G_\tau} + \frac{\alpha}{2}[tb_\epsilon^{12}\partial_x^{k+1}w_1, b_\epsilon^{12}e^{\theta_1 t}\partial_x^{k+1}w_1]_{G_\tau}$$
$$+\frac{\alpha}{2}[tb_\epsilon^{21}\partial_x^{k+1}w_2, b_\epsilon^{21}e^{\theta_1 t}\partial_x^{k+1}w_2]_{G_\tau} + |A_6|. \qquad (3.17)$$

em que N_6 depende de $\partial_x^l B_\epsilon$, com $l \leq k$.

Por definição

$$[\partial_x^k(C_\epsilon\partial_t U), \partial_x^k W e^{\theta_1 t}]_{G_\tau} = \sum_1^2 [\partial_x^k(c_\epsilon^{jj}\partial_t u_j), \partial_x^k w_j e^{\theta_1 t}]_{G_\tau} + [\partial_x^k(c_\epsilon^{12}\partial_t u_2), \partial_x^k w_1 e^{\theta t}]_{G_\tau}$$
$$+ [\partial_x^k(c_\epsilon^{21}\partial_t u_1), \partial_x^k w_2 e^{\theta t}]_{G_\tau} \qquad (3.18)$$

Para os dois primeiros termos do lado direito de (3.18) temos

$$[\partial_x^k(c_\epsilon^{jj}\partial_t u_j), \partial_x^k w_j e^{\theta_1 t}]_{G_\tau} = [\partial_x^k(\partial_t(c_\epsilon^{jj}u_j) - u_j\partial_t c_\epsilon^{jj}), e^{\theta_1 t}\partial_x^k w_j]_{G_\tau}$$
$$= [\partial_x^k(c_\epsilon^{jj}u_j), e^{\theta_1 t}(\partial_x^k u_j - \theta_1\partial_x^k w_j]_{G_\tau} - [\partial_x^k(u_j\partial_t c_\epsilon^{jj}), e^{\theta_1 t}\partial_x^k w_j]_{G_\tau} = A_7.$$

Para o primeiro termos misto em (3.18) temos

$$[\partial_x^k(c_\epsilon^{12}\partial_t u_2), \partial_x^k w_1 e^{\theta_1 t}]_{G_\tau} = [\partial_x^k(c_\epsilon^{12}u_2), e^{\theta_1 t}(\partial_x^k u_2 - \theta_1\partial_x^k w_1]_{G_\tau}$$
$$- [\partial_x^k(u_2\partial_t c_\epsilon^{12}), e^{\theta_1 t}\partial_x^k w_1]_{G_\tau} = A_8.$$

Podemos provar uma desigualdade análoga para o termo $[\partial_x^k(c_\epsilon^{21}\partial_t u_1), \partial_x^k w_2 e^{\theta t}]_{G_\tau}$. Portanto,

$$[\partial_x^k(C_\epsilon \partial_t U), \partial_x^k W e^{\theta t}]_{G_\tau} = A_9.$$

em que N_9 depende das derivadas ∂_x^l de C_ϵ e $\partial_t C_\epsilon$ com $l \leq k$.

Finalmente

$$[\partial_x^k(D_\epsilon U), e^{\theta_1 t}\partial_x^k U]_{G_\tau} = A_{10},$$

com N_{10} dependendo de $\partial_x^l D_\epsilon$ para $l \leq k$.

Etapa 2

Usando as estimativas obtidas para os termos individuais de (3.13) assim como pela condição (2.11), com $\theta = \theta_1 - 2M$, escolhendo a constante θ_1 suficientemente grande, e usando a hipótese de indução (3.12), obtemos por (3.13)

$$\begin{aligned}(\partial_x^k U, \partial_x^k U e^{\theta_1 t})_{t=\tau} &\leq 2(\delta + \alpha^{-1}) y_k(\tau) + \tau K y_k(\tau) \\ &+ \tau^{2p+6}\tilde{K}\sum_{\beta\leq k}\|\partial_x^\beta \mathcal{F}\|^2_{p+1,t_0}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

em que $y_k(\tau) = [\partial_x^k U, t^{-1}\partial_x^k U e^{\theta_1 t}]_{G_\tau}$, com as constantes $K, \tilde{K}$ dependendo do módulo máximo das derivadas ∂_x^l de $a_\epsilon, \partial_x a_\epsilon$, B_ϵ, $C_\epsilon, \partial_t C_\epsilon, D_\epsilon$ para $l \leq k$, e das derivadas ∂_x^l de a_ϵ e $\partial_x a_\epsilon$, para $l \leq 2$ quando $k = 1$. Como

$$\tau y_k^{'}(\tau) = (\partial_x^k U, \partial_x^k U e^{\theta_1 t})_{t=\tau},$$

segue de (3.19) e do lema de Gronwall

$$y_k(\tau) \leq \tilde{\tilde{K}}\tau^{2p+6}\sum_{\beta\leq k}\|\partial_x^\beta \mathcal{F}\|^2_{p+1,t_0}.$$

Portanto para $l \leq k$ temos

$$(\partial_x^l U, \partial_x^l U e^{\theta_1 t})_{t=\tau} \leq 2(\delta+\alpha^{-1})\tilde{\tilde{K}}\tau^{2p+6}\sum_{\beta\leq k}\|\partial_x^\beta \mathcal{F}\|^2_{p+1,t_0} + \tau K\tilde{\tilde{K}}\tau^{2p+6}\sum_{\beta\leq k}\|\partial_x^\beta \mathcal{F}\|^2_{p+1,t_0}$$

$$+ \tau^{2p+6}\tilde{K}\sum_{\beta\leq k}\|\partial_x^\beta \mathcal{F}\|^2_{p+1,t_0} \leq E_l\tau^{2p+6}\sum_{\beta\leq k}\|\partial_x^\beta \mathcal{F}\|^2_{p+1,t_0}.$$

∎

3.3 Estimativas do tipo $\partial_x^l \partial_t^\rho U, \rho + l \leq k$

Lema 3.3.1 *Para $l \leq k-1$ e $0 \leq \tau \leq t_0$ temos*

$$(\partial_x^l U_t, e^{-\theta_2 t}\partial_x^l U_t)_{t=\tau} \leq M_{12}\{\tau^{2p+6}\sum_{\beta\leq k}\|\partial_x^\beta \mathcal{F}\|^2_{p+1,t_0} + \sum_{\gamma\leq k-1}[\partial_x^\gamma \mathcal{F}, \partial_x^\gamma \mathcal{F}]_{G_\tau}\} \quad (3.20)$$

em que M_{12} é uma constante uniforme em ϵ dependendo das derivadas ∂_x^l de $a_\epsilon, \partial_x a_\epsilon, B_\epsilon, C_\epsilon, \partial_t C_\epsilon, D_\epsilon$ para $l \leq k$.

Demonstração: Para estimar derivadas da forma $\partial_x^l U_t$ para $l \leq k-1$, vamos considerar a seguinte igualdade

$$[\partial_x^l L_\epsilon(U), e^{-\theta_2 t}\partial_x^l U_t]_{G_\tau} = [\partial_x^l \mathcal{F}, e^{-\theta_2 t}\partial_x^l U_t]_{G_\tau}, \quad (3.21)$$

em que $\theta_2 = constante > 0$. Faremos a demonstração em duas etapas. Na primeira etapa estimaremos o lado direito de (3.21) e usando integração por partes reescreveremos os termos do lado esquerdo de (3.21) de modo a obtermos a menor ordem de derivação possível em U. Na segunda etapa a estimativa (3.20) segue usando a técnica de Gronwall.

Etapa 1

Integrando por partes obtemos

$$[\partial_x^l \mathcal{F}, e^{-\theta_2 t}\partial_x^l U_t]_{G_\tau} \leq \frac{1}{2}([\partial_x^l \mathcal{F}, e^{-\theta_2 t}\partial_x^l \mathcal{F}]_{G_\tau} + [\partial_x^l U_t, e^{-\theta_2 t}\partial_x^l U_t]_{G_\tau}),$$

$$[\partial_x^l \partial_t^2 U, e^{-\theta_2 t}\partial_x^l U_t]_{G_\tau} = \frac{1}{2}(\partial_x^l U_t, e^{-\theta_2 t}\partial_x^l U_t)_{t=\tau} + \frac{1}{2}[\partial_x^l U_t, \theta_2 e^{-\theta_2 t}\partial_x^l U_t]_{G_\tau},$$

$$\begin{aligned}[\epsilon_j \partial_x^l \partial_x^2 u_j, e^{-\theta_2 t}\partial_x^l \partial_t u_j]_{G_\tau} &= -\frac{\epsilon_j}{2}(\partial_x^{l+1} u_j, e^{-\theta_2 t}\partial_x^{l+1} u_j)_{t=\tau} \\ &- \frac{\epsilon_j}{2}[\partial_x^{l+1} u_j, \theta_2 e^{-\theta_2 t}\partial_x^{l+1} u_j]_{G_\tau},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\partial_x^l (a_\epsilon U_x)_x, e^{-\theta_2 t}\partial_x^l U_t]_{G_\tau} &= -\frac{1}{2}(a_\epsilon \partial_x^{l+1} U, e^{-\theta_2 t}\partial_x^{l+1} U)_{t=\tau} \\ &+ \frac{1}{2}[\partial_x^{l+1} U, (\partial_t a_\epsilon - \theta_2 a_\epsilon)e^{-\theta_2 t}\partial_x^{l+1} U]_{G_\tau} \\ &+ \sum_{1\leq\gamma\leq l}\tilde{\beta}_\gamma[(\partial_x^\gamma (a_\epsilon)\partial_x^{l-\gamma} U_x)_x, e^{-\theta_2 t}\partial_x^l U_t]_{G_\tau}\end{aligned}$$

em que $\tilde{\beta}_\gamma$ são constantes.

Por definição

$$[\partial_x^l(B_\epsilon\partial_x U), \partial_x^l U_t e^{-\theta_2 t}]_{G_\tau} = \sum_1^2 [\partial_x^l(b_\epsilon^{jj}\partial_x u_j), e^{-\theta_2 t}\partial_x^l\partial_t u_j]_{G_\tau} \\ + [\partial_x^l(b_\epsilon^{12}\partial_x u_2), e^{-\theta_2 t}\partial_x^l\partial_t u_1]_{G_\tau} + [\partial_x^l(b_\epsilon^{21}\partial_x u_1), e^{-\theta_2 t}\partial_x^l\partial_t u_2]_{G_\tau} \tag{3.22}$$

Para os dois primeiros termos do lado direito de (3.22) temos

$$[\partial_x^l(b_\epsilon^{jj}\partial_x u_j), e^{-\theta_2 t}\partial_x^l\partial_t u_j]_{G_\tau} \leq \frac{1}{4}[\partial_x^l(b_\epsilon^{jj}\partial_x u_j), e^{-\theta_2 t}\partial_x^l(b_\epsilon^{jj}\partial_x u_j)]_{G_\tau}$$

$$+ [\partial_x^l\partial_t u_j, e^{-\theta_2 t}\partial_x^l\partial_t u_j]_{G_\tau} \leq [\partial_x^l\partial_t u_j, e^{-\theta_2 t}\partial_x^l\partial_t u_j]_{G_\tau} + M_{13}\sum_{\gamma\leq l+1}[\partial_x^\gamma u_j, e^{-\theta_2 t}\partial_x^\gamma u_j]_{G_\tau}.$$

em que M_{13} depende das derivadas $\partial_x^l b_\epsilon^{jj}$, para $l \leq k-1$. Provando estimativas análoga para os termos mistos em (3.22), obtemos que

$$\begin{aligned}[\partial_x^l(B_\epsilon\partial_x U), \partial_x^l U_t e^{-\theta_2 t}]_{G_\tau} &\leq [\partial_x^l\partial_t U, e^{-\theta_2 t}\partial_x^l\partial_t U]_{G_\tau} \\ &+ M_{14}\sum_{\gamma\leq l+1}[\partial_x^\gamma U, e^{-\theta_2 t}\partial_x^\gamma U]_{G_\tau},\end{aligned} \tag{3.23}$$

em que M_{14} depende das derivadas $\partial_x^l B_\epsilon$ para $l \leq k-1$.

Finalmente obtemos

$$[\partial_x^l(C_\epsilon\partial_t U), e^{-\theta_2 t}\partial_x^l\partial_t U]_{G_\tau} \leq M_{15}\sum_{\gamma\leq l}[\partial_x^\gamma U_t, e^{-\theta_2 t}\partial_x^\gamma U_t]_{G_\tau},$$

$$[\partial_x^l(D_\epsilon U), e^{-\theta_2 t}\partial_x^l\partial_t U]_{G_\tau} \leq M_{16}[\partial_x^l U, e^{-\theta_2 t}\partial_x^l U]_{G_\tau} + [\partial_x^l U_t, e^{-\theta_2 t}\partial_x^l U_t],$$

em que M_{15} e M_{16} dependem das derivadas $\partial_x^l C_\epsilon$ e $\partial_x^l D_\epsilon$, $l \leq k-1$, respectivamente.

Etapa 2

Usando as estimativas obtidas para os termos individuais de (3.21) e considerando a desigualdade (3.12), com a constante θ_2 suficientemente grande, nós obtemos por (3.21), usando a hipótese de indução sobre l, que para $l \leq k-1$

$$\begin{aligned}(\partial_x^l U_t, e^{-\theta_2 t}\partial_x^l U_t)_{t=\tau} &\leq M_{17}\{[\partial_x^l U_t, e^{-\theta_2 t}\partial_x^l U_t]_{G_\tau} + \tau^{2p+6}\textstyle\sum_{\beta\leq k}\|\partial_x^\beta\mathcal{F}\|^2_{p+1,t_0}\} \\ &+ \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{\gamma\leq k-1}[\partial_x^\gamma\mathcal{F}, \partial_x^\gamma\mathcal{F}]_{G_\tau}\end{aligned} \tag{3.24}$$

onde M_{17} depende das derivadas ∂_x^l de $a_\epsilon, \partial_x a_\epsilon, B_\epsilon\ C_\epsilon, \partial_t C_\epsilon, D_\epsilon,\ l \leq k$. Pelo lema de Gronwall a estimativa (3.20) segue de (3.24). ∎

Lema 3.3.2 *Para $\rho \geq 0, l+\rho \leq k-2,\ e\ 0 \leq \tau \leq t_0$ temos*

$$\begin{aligned}(\partial_x^l \partial_t^{\rho+2} U, \partial_x^l \partial_t^{\rho+2} U)_{t=\tau} &\leq M_{18}\{\tau^{2p+6} \sum_{\beta \leq k} \|\partial_x^\beta \mathcal{F}\|^2_{p+1,t_0} + \sum_{\gamma \leq k-1} [\partial_x^\gamma \mathcal{F}, \partial_x^\gamma \mathcal{F}]_{G_\tau}\} \\ &+ \sum_{l+\rho \leq k-2} (\partial_x^l \partial_t^\rho f_\epsilon, \partial_x^l \partial_t^\rho f_\epsilon)_{t=\tau} \qquad (3.25)\end{aligned}$$

em que M_{18} depende das derivadas $\partial_x^l \partial_t^\rho$ de $a_\epsilon, \partial_x a_\epsilon, B_\epsilon, C_\epsilon, \partial_t C_\epsilon, D_\epsilon$ para $l+\rho \leq k-2$ e se $\rho = 0$, $l \leq k$.

Demonstração: Basta aplicar o operador $\partial_x^l \partial_t^\rho$ na equação (3.2) e então obtemos equações de modo que as derivadas $\partial_x^l \partial_t^{\rho+2}$ são expressas pelas derivadas estimadas acima. ∎

3.4 Prova do Lema 2.3.2 e do Teorema 2.2.1

Primeiramente provaremos o Lema 2.3.2 e então obtemos a prova do Teorema 2.2.1 a partir do Lema 2.3.2.

Demonstração:(Lema 2.3.2) A demonstração do lema será realizada em duas etapas. Na primeira etapa, utilizaremos as estimativas já obtidas para obter (2.15) para $\tau \leq t_0$. Na segunda etapa provaremos a estimativa (2.15) para $t_0 \leq \tau \leq T - \epsilon$.

Etapa 1

Para $U = U_\epsilon - V_p$ obtemos que

$$\begin{aligned}\|U_\epsilon\|^2_{\tau;k} &= \sum_{\rho+l \leq k} (\partial_x^l \partial_t^\rho U_\epsilon, \partial_x^l \partial_t^\rho U_\epsilon)_{t=\tau} = \sum_{\rho+l \leq k} (\partial_x^l \partial_t^\rho (U+V_p), \partial_x^l \partial_t^\rho (U+V_p))_{t=\tau} \\ &= \sum_{\rho+l \leq k} \{(\partial_x^l \partial_t^\rho U, \partial_x^l \partial_t^\rho U)_{t=\tau} + 2(\partial_x^l \partial_t^\rho U, \partial_x^l \partial_t^\rho V_p)_{t=\tau} + (\partial_x^l \partial_t^\rho V_p, \partial_x^l \partial_t^\rho V_p)_{t=\tau}\}.\end{aligned}$$

Temos dois casos a considerar:

a) Para $\rho = 0$ e $l \leq k$, por (3.2) e (3.12) temos que

$$(\partial_x^l U, \partial_x^l U)_{t=\tau} \leq E_l \tau^{2p+6} \sum_{\beta \leq k} \|\partial_x^\beta \mathcal{F}\|^2_{p+1,t_0}$$
$$= E_l \tau^{2p+6} \sum_{\beta \leq k} \max_{0 \leq \sigma \leq t_0} (\partial_x^\beta \partial_t^{(p+1)}(f_\epsilon - L_\epsilon V_p), \partial_x^\beta \partial_t^{(p+1)}(f_\epsilon - L_\epsilon V_p))|_{t=\sigma}.$$

Mas

$$\max_{0 \leq \sigma \leq t_0} (\partial_x^\beta \partial_t^{(p+1)} L_\epsilon V_p, \partial_x^\beta \partial_t^{(p+1)} L_\epsilon V_p))|_{t=\sigma} \leq M_{19}\{\|\Phi_\epsilon\|^2_{0;k+p+4} + \|\Psi_\epsilon\|^2_{0;k+p+3}$$
$$+ \sum_{\rho \leq p} \|f_\epsilon\|^2_{0;\rho,p+k+2-\rho}\},$$

em que M_{19} depende das derivadas $\partial_x^l \partial_t^\rho$ de $a_\epsilon, \partial_x a_\epsilon, B_\epsilon, C_\epsilon, D_\epsilon$ para $\rho \leq p$ e $\rho + l \leq p + k + 2$ em $t = 0$, e suas derivadas da forma $\partial_x^l \partial_t^\rho$, $\rho \leq p + 1$ e $l \leq k$ em $0 \leq \tau \leq t_0$. Portanto,

$$\begin{aligned}(\partial_x^l U, \partial_x^l U)_{t=\tau} &\leq M_{20}\{\|\Phi_\epsilon\|^2_{0;k+p+4} + \|\Psi_\epsilon\|^2_{0;k+p+3} \\ &+ \sum_{\rho \leq p} \|f_\epsilon\|^2_{0;\rho,p+k+2-\rho} + \max_{0 \leq \sigma \leq t_0} \|f_\epsilon\|^2_{\sigma;p+1,k+p+1}\}, \quad (3.26)\end{aligned}$$

em que M_{20} é uma constante dependendo de E_l e M_{19}.

b) Os outros termos a considerar são $\partial_x^l U_t$, $l \leq k - 1$ e $\partial_x^l \partial_t^{\rho+2}$, $l + \rho \leq k - 2$, os quais são ambos limitados pelo lado direito de (3.25). Mas

$$\sum_{\gamma \leq k-1} [\partial_x^\gamma \mathcal{F}, \partial_x^\gamma \mathcal{F}]_{G_\tau} \leq \tau M_{21}\{\|f_\epsilon\|^2_{G_\tau;0,k-1} + \|\Phi_\epsilon\|^2_{0;k+p+4} + \|\Psi_\epsilon\|^2_{0;k+p+3}$$
$$+ \sum_{\rho \leq p} \|f_\epsilon\|^2_{0;\rho,p+k+2-\rho}\},$$

onde a constante M_{21} depende das derivadas $\partial_x^l \partial_t^\rho$ de $a_\epsilon, \partial_x a_\epsilon, B_\epsilon, C_\epsilon, D_\epsilon$ para $\rho \leq p$ e $\rho + l \leq p + k + 2$ em $t = 0$, assim como das derivadas ∂_x^l destas mesmas funções para $l \leq k$ em $0 \leq t \leq t_0$.

Dê *a*) e *b*) segue (2.15) para for $\tau \leq t_0$.

Etapa 2

Vamos estimar (2.15) para $t_0 \leq \tau \leq T - \epsilon$ de modo similar. Para estimar $(U,U)_{t=\tau}$ vamos considerar (3.3) e transformar os termos do lado esquerdo do mesmo modo que para $\tau \leq t_0$. Mas ao invés de (3.6), (3.7) e (3.8) vamos considerar as desigualdades

$$|[b_\epsilon^{jj}\partial_x u_j, w_j e^{\theta t}]_{G_\tau}| \leq M_{22}[u_j, u_j e^{\theta t}]_{G_\tau} + \tfrac{\alpha_1}{2}[tb_\epsilon^{jj}\partial_x w_j, b_\epsilon^{jj}\partial_x w_j e^{\theta t}]_{G_{t_0}} +$$
$$\tfrac{1}{2\alpha_1}[u_j, t^{-1}u_j e^{\theta t}]_{G_{t_0}} + \tfrac{\lambda}{2}[b_\epsilon^{jj}\partial_x w_j, b_\epsilon^{jj}\partial_x w_j e^{\theta t}]_{G_\tau \setminus G_{t_0}} + \tfrac{1}{2\lambda}[u_j, u_j e^{\theta t}]_{G_\tau \setminus G_{t_0}} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned}
[b_\epsilon^{21}\partial_x u_1, w_2 e^{\theta t}]_{G_\tau} &\leq \frac{\alpha_1}{2}[tb_\epsilon^{21}\partial_x w_2, b_\epsilon^{21}\partial_x w_2 e^{\theta t}]_{G_{t_0}} + \frac{1}{2\alpha_1}[u_1, t^{-1}u_1 e^{\theta t}]_{G_{t_0}} \\
&+ \frac{\lambda}{2}[b_\epsilon^{21}\partial_x w_2, b_\epsilon^{21}\partial_x w_2 e^{\theta t}]_{G_\tau \setminus G_{t_0}} + \frac{1}{2\lambda}[u_1, u_1 e^{\theta t}]_{G_\tau \setminus G_{t_0}} \\
&+ \frac{1}{2}[u_1, \partial_x (b_\epsilon^{21})^2 u_1 e^{\theta t}]_{G_\tau} + \frac{1}{2}[w_2, w_2 e^{\theta t}]_{G_\tau}, \qquad (3.28)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
[b_\epsilon^{12}\partial_x u_2, w_1 e^{\theta t}]_{G_\tau} &\leq \frac{\alpha_1}{2}[tb_\epsilon^{12}\partial_x w_1, b_\epsilon^{12}\partial_x w_1 e^{\theta t}]_{G_{t_0}} + \frac{1}{2\alpha_1}[u_2, t^{-1}u_2 e^{\theta t}]_{G_{t_0}} \\
&+ \frac{\lambda}{2}[b_\epsilon^{12}\partial_x w_1, b_\epsilon^{12}\partial_x w_1 e^{\theta t}]_{G_\tau \setminus G_{t_0}} + \frac{1}{2\lambda}[u_2, u_2 e^{\theta t}]_{G_\tau \setminus G_{t_0}} \\
&+ \frac{1}{2}[u_2, \partial_x (b_\epsilon^{12})^2 u_2 e^{\theta t}]_{G_\tau} + \frac{1}{2}[w_1, w_1 e^{\theta t}]_{G_\tau}. \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

em que $\lambda \leq \alpha_2 t$ para $t \geq t_0$. De fato, para provar (3.27) façamos $u = u_j$, $w = w_j$ e $b = b_\epsilon^{jj}$.

$$[bu_x, we^{\theta t}]_{G_\tau} = -[u\partial_x b, we^{\theta t}]_{G_\tau} - [b\partial_x w, ue^{\theta t}]_{G_\tau}.$$

Mas

$$[b\partial_x w, ue^{\theta t}]_{G_\tau} = \int_{\mathbb{R}} \{\int_0^{t_0} b\partial_x(w)ue^{\theta t}dt + \int_{t_0}^{\tau} b\partial_x(w)ue^{\theta t}dt\}dx.$$

Como $xy \leq \frac{1}{2}(\alpha x^2 + \frac{1}{\alpha}y^2)$ segue que

$$\begin{aligned}
[bw_x, ue^{\theta t}]_{G_\tau} &= \frac{\alpha_1}{2}[tb\partial_x w, b\partial_x w e^{\theta t}]_{G_{t_0}} + \frac{1}{2\alpha_1}[u, t^{-1}ue^{\theta t}]_{G_{t_0}} \\
&+ \frac{\lambda}{2}[b\partial_x w, b\partial_x w e^{\theta t}]_{G_\tau \setminus G_{t_0}} + \frac{1}{2\lambda}[u, ue^{\theta t}]_{G_\tau \setminus G_{t_0}}.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$[u\partial_x b, we^{\theta t}]_{G_\tau} \leq M_{23}[u, ue^{\theta t}]_{G_\tau},$$

donde segue (3.27). De modo análogo obtemos (3.28) e (3.29).

Nós usaremos a estimativa (3.11) para $y(t_0) = [U, t^{-1}Ue^{\theta t}]_{G_{t_0}}$ e estimaremos o lado direito de (3.3) por

$$|[\mathcal{F}, e^{\theta t}W]_{G\tau}| \leq [\mathcal{F}, e^{\theta t}\mathcal{F}]_{G\tau} + M_{24}[U, e^{\theta t}U]_{G\tau},$$

onde a constante M_{24} depende somente em T. Se fazermos

$$z(\tau) = [U, Ue^{\theta t}]_{G_\tau},\ t_0 \leq \tau \leq T - \epsilon$$

e escolhendo θ suficientemente grande, para $\tau \geq t_0$ e por (3.3) obtemos

$$z^{'}(\tau) \leq M_{25}z(\tau) + M_{26}\|\mathcal{F}\|^2_{p+1,t_0} + M_{27}[\mathcal{F}, \mathcal{F}]_{G_{T-\epsilon}}, \tag{3.30}$$

onde M_{25}, M_{26} e M_{27} dependem do módulo máximo de B_ϵ, C_ϵ, $\partial_t C_\epsilon$, D_ϵ e em t_0. Desde que $z^{'}(\tau) = (U, e^{\theta t}U)_{t=\tau}$, então por (3.30) obtemos

$$(U, e^{\theta t}U)_{t=\tau} \leq M_{28}\{\|\mathcal{F}\|^2_{p+1,t_0} + [\mathcal{F}, \mathcal{F}]_{G_{T-\epsilon}}\}. \tag{3.31}$$

De modo similar obtemos estimativas para $(\partial_x^l U, \partial_x^l U)_{t=\tau}$, $l \leq k$ e $\tau \geq t_0$. As derivadas da forma $\partial_x^l U_t$, $l \leq k-1$, e $\partial_x^l \partial_t^{\rho+2}$, $\rho \geq 0$, $l + \rho + 2 \leq k$, para $\tau \geq t_0$ são estimados do mesmo modo que para $\tau \leq t_0$.

A partir das estimativa de U e da relação $U = U_\epsilon - V_p$, obtemos (2.15) para U_ϵ. ∎

Agora provaremos o Teorema 2.2.1.

Demonstração:(Teorema 2.2.1) Vamos considerar três etapas para a demonstração. Na primeira, obtemos uma função U como limite das funções U_ϵ obtidas

no Lema2.3.2. Nas duas últimas provaremos a existência e a unicidade de solução, respectivamente.

Etapa 1

O problema de Cauchy para o sistema (2.13) com coeficientes definidos por (2.10), e condições iniciais (2.14) tem solução $U_\epsilon \in C^\infty(G^\epsilon, \mathbb{R}^2)$ e satisfaz (2.15). Logo, $U_\epsilon \in H^k(G, \mathbb{R}^2)$ é uma seqüência limitada, donde pelo Teorema de Rellich, possui uma subseqüência U_{ϵ_j} que converge para uma função U em $H^t(G, \mathbb{R}^2)$, $t < s$. Por outro lado, como $H^k(G)$ é um espaço reflexivo e U_{ϵ_j} é uma seqüência limitada, logo possui uma subseqüência $U_{\epsilon_{jl}}$ fracamente convergente para uma função $V \in H^k(G, \mathbb{R}^2)$ a qual também satisfaz a estimativa (2.15). Portanto, pela unicidade do limite temos que $U = V \in H^k(G, \mathbb{R}^2)$.

Etapa 2

Seja U dado pela Etapa 1.

a) Desde que $U_\epsilon|_{t=0} = \Phi_\epsilon \to \Phi$ em $H^{k+p+4}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ e como $U_{\epsilon_j} \to U$ em $H^{k-1}(G, \mathbb{R}^2)$, então $U|_{t=0} = \Phi$ em $H^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$. Analogamente mostra-se que $U_t|_{t=0} = \Psi$ em $H^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$.

b) Provemos que $U \in H^k(G, \mathbb{R}^2)$ satisfaz $LU = f$ em $\mathcal{D}'(G, \mathbb{R}^2)$. De fato, dado $\varphi \in C_0^\infty(G, \mathbb{R}^2)$ temos que

$$\langle L_{\epsilon_j} U_{\epsilon_j}, \varphi \rangle = \langle f_{\epsilon_j}, \varphi \rangle \to \langle f, \varphi \rangle,$$

pois $f_\epsilon \to f$ em $L^2(G)$.

Por outro lado temos que $\langle L_{\epsilon_j} U_{\epsilon_j}, \varphi \rangle \to \langle LU, \varphi \rangle$. De fato, vamos consider somente dois termos padrões que aparecem no lado esquerdo. Para o primeiro termo temos

$$\langle \partial_t^2 U_{\epsilon_j}, \varphi \rangle = \langle U_{\epsilon_j}, \partial_t^2 \varphi \rangle \to \langle U, \partial_t^2 \varphi \rangle = \langle \partial_t^2 U, \varphi \rangle,$$

desde que $\langle U_{\epsilon_j}, \varphi\rangle \to \langle U, \varphi\rangle, \forall \varphi \in C_0^\infty \subset H^{1-k}(G)$. E para o segundo termo

$$\begin{aligned}\langle \partial_x(a_{\epsilon_j}\partial_x U_{\epsilon_j}) - \partial_x(a\partial_x U), \varphi\rangle &= -\langle a_{\epsilon_j}\partial_x U_{\epsilon_j} - a\partial_x U, \partial_x\varphi\rangle \\ &= -\langle a_{\epsilon_j}\partial_x U_{\epsilon_j} - a\partial_x U_{\epsilon_j} + a\partial_x U_{\epsilon_j} - a\partial_x U, \partial_x\varphi\rangle \\ &= \langle U_{\epsilon_j} - U, \partial_x(a\partial_x\varphi)\rangle - \langle (a_{\epsilon_j} - a)\partial_x U_{\epsilon_j}, \partial_x\varphi\rangle.\end{aligned}$$

Como $\|\partial_x^l a\|_\infty \leq M, \forall l \leq k$, logo $\partial_x(a\partial_x\varphi) \in H^{1-k}$ e $\langle U_{\epsilon_j} - U, \partial_x(a\partial_x\varphi)\rangle \to 0$. Ainda, temos que

$$\langle (a_{\epsilon_j} - a)\partial_x U_{\epsilon_j}, \partial_x\varphi\rangle \leq \|\partial_x U_{\epsilon_j}\|_{L^2}\|(a_{\epsilon_j} - a)\partial_x\varphi\|_{L^2} \to 0.$$

De fato, por hipótese $\partial_x^l a \in L^\infty, \forall l \leq k$ logo $a\chi_{S(\varphi)} \in L^\infty \cap L^p, \forall p$. Portanto $(a_{\epsilon_j} - a)\chi_{S(\varphi)} \to 0$ em $L^p, \forall 1 \leq p < \infty$, em que $\chi_{S(\varphi)}$ é a função característica no $S(\varphi)$. Como $k \geq 2$ então $\|\partial_x U_{\epsilon_j}\|_{L^2} \leq \|U_{\epsilon_j}\|_k \leq M\ \forall \epsilon_j$ e a afirmação vale.

Analogamente temos que $\langle B_{\epsilon_j}\partial_x U_{\epsilon_j}, \varphi\rangle \to \langle B\partial_x U, \varphi\rangle, \langle C_{\epsilon_j}\partial_t U_{\epsilon_j}, \varphi\rangle \to \langle C\partial_t U, \varphi\rangle$, e $\langle D_{\epsilon_j} U_{\epsilon_j}, \varphi\rangle \to \langle DU, \varphi\rangle$.

Então $U \in H^k(G, \mathbb{R}^2)$ verifica $LU = f$ em $\mathcal{D}'(G, \mathbb{R}^2)$. Desde que $f_j \in L^2([0,T], H^k(\mathbb{R}))$, a igualdade vale em $L^2([0,T], H^{k-2}(\mathbb{R}))$.

Etapa 3

A unicidade de solução do problema de Cauchy (2.5)-(2.6) segue da estimativa (3.4), a qual permanece válida para a função limite U. ∎

Capítulo 4

Sistemas 2x2 de primeira ordem fracamente hiperbólicos

4.1 Introdução

Neste capítulo vamos considerar o problema de Cauchy não-característico

$$PU = I\partial_t U - A(x,t)\partial_x U + A_1(x,t)U = f(x,t) \tag{4.1}$$

$$U(x,0) = \Phi(x), \tag{4.2}$$

em $G = \{0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}\}$.

Aqui A and A_1 são matrizes 2×2, os coeficientes de A são reais e os de A_1 podem ser complexos, $f = (f_1, f_2)$ e $\Phi = (\phi_1, \phi_2)$ são funções vetoriais. Vamos assumir que

$$(a_{11} + a_{22})^2 - 4det(A) \geq 0. \tag{4.3}$$

Nestas hipóteses o sistema (4.1) é dito fracamente hiperbólico, veja por exemplo Kreiss-Lorenz([8]).

Assumiremos as seguintes hipóteses de regularidade para o problema: Seja $k \geq 2$ e $p \geq -1$, assume que:

1) $A \in C^1(G, M_2(\mathbb{R}))$, as derivadas $\partial_x^l \partial_t^\rho$ de A, A_1, $l + \rho \leq k - 1$ são limitadas em G e para $\rho = 0$, $l \leq k + 1$

2) A restrição para $t = 0$ das derivadas $\partial_x^l \partial_t^\rho$ de A e A_1, $\rho \leq p+1$, $\rho+l \leq p+k+3$ são limitadas.

3) Para $0 < t_0 < T$, as derivadas $\partial_x^l \partial_t^\rho$ de A e A_1, $l \leq k + 1$, $\rho \leq p + 2$, são limitadas para $0 \leq t \leq t_0$.

4) $\phi_j \in H^{k+p+4}(G)$ tem suporte compacto para $j = 1, 2$.

5) f_j para $j = 1, 2$ tem suporte compacto em x com regularidade a ser descrita, a saber, que as normas em (2.8) são finitas, com k substituído por $k + 1$.

Como em Nishitani([12]), numa vizinhança de $t = 0$ podemos assumir que $tr(A) = 0$(traço de A). De fato, façamos a mudança de coordenadas numa vizinhança de $t = 0$

$$\varphi(x, t) = (\varphi_0(x, t), t) = (y, s),$$

em que $\varphi_0 : G \to \mathbb{R}^2 \in C^1$ é a única solução da equação

$$2\partial_t \varphi_0 - (a_{11} + a_{22})\partial_x \varphi_0 = 0 \tag{4.4}$$

e com condição inicial $\varphi_0(x, 0) = x$. Assim, nas novas variáveis o sistema (4.1) toma a forma

$$I\partial_s \tilde{U} - \tilde{A}(y, s)\partial_y \tilde{U} + \tilde{A}_1(y, s)\tilde{U} = \tilde{f}(y, s), \tag{4.5}$$

em que $\tilde{A}_1(y, s) = A_1(\varphi^{-1}(y, s))$, $\tilde{f}(y, s) = f(\varphi^{-1}(y, s))$ e

$$\tilde{A}(y, s) = \begin{pmatrix} a_{11}\partial_x \varphi_0 - \partial_t \varphi_0 & a_{12}\partial_x \varphi_0 \\ a_{21}\partial_x \varphi_0 & a_{22}\partial_x \varphi_0 - \partial_t \varphi_0 \end{pmatrix} (\varphi^{-1}(y, s)).$$

Segue de (4.4) que $tr(\tilde{A}) = 0$. Logo

$$tr(\tilde{A})^2 - 4det\tilde{A} = -4det\tilde{A} = ((a_{11} + a_{22})^2 - 4detA)(\partial_x\varphi_0)^2 \geq 0,$$

por (4.3). Portanto (4.3) é satisfeito para (4.5).

Ainda, como $f(x,t) = \tilde{f}(\varphi_0(x,t),t)$ segue do fato de f ter suporte compacto em x e de $\varphi_0 \in C^0$ que $\tilde{f}$ tem a mesma propriedade. De fato, como $\varphi_0 \in C^0$, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|\varphi_0(x,t) - \varphi_0(x,0)| = |\varphi_0(x,t) - x| \leq \epsilon,$$

se $|t| \leq \delta$. Por outro lado $f(x,t) = \tilde{f}(\varphi_0(x,t),t) = 0$ para $|x| \geq R$. Daí

$$|\varphi_0(x,t)| = |\varphi_0 - x + x| \geq |x| - |\varphi_0 - x| \geq R - \epsilon.$$

Logo $\tilde{f}(y,t) = 0$ se $|y| \geq R - \epsilon$, o que prova que $\tilde{f}$ tem suporte compacto. A mesma conclusão vale para $\tilde{\Phi}(y,s) = \Phi(\varphi^{-1}(y,s))$.

A partir de agora assumiremos que

$$A(x,t) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix} \quad \text{e } a(x,t) = -detA \geq 0 \ \text{ em } \ G. \tag{4.6}$$

Seja $B = (b_{ij})$ dada por

$$B = \begin{pmatrix} -\partial_t a_{11} + a_{11}\partial_x a_{11} + a_{21}\partial_x a_{12} & -a_{11}\partial_x a_{12} - \partial_t a_{12} + a_{12}\partial_x a_{11} \\ -\partial_t a_{21} + a_{11}\partial_x a_{21} - a_{21}\partial_x a_{11} & \partial_t a_{11} + a_{11}\partial_x a_{11} + a_{12}\partial_x a_{21} \end{pmatrix} + AA_1.$$

Nosso primeiro resultado de unicidade é:

Teorema 4.1.1 *Assuma que*

$$\begin{aligned} \alpha t(|b_{11}|^2 + |b_{12}|^2) &\leq \theta a + \partial_t a, \\ \alpha t(|b_{21}|^2 + |b_{22}|^2) &\leq \theta a + \partial_t a, \end{aligned} \tag{4.7}$$

em G. Aqui θ é uma constante, $\alpha(t) = \alpha_1\chi_{[0,t_0]} + \alpha_2\chi_{[t_0,T]}$, em que t_0, α_1 e α_2 são constantes positivas, χ a função característica e $\frac{\alpha_1}{2} > (2p+6)^{-1}$. Então o problema de Cauchy (4.1)-(4.2) *tem uma única solução $U \in H^k(G, \mathbb{R}^2)$.*

Observação 4.1.1 *A condição* (4.7) *não é necessária para a conclusão do Teorema* 4.1.1. *De fato, se A é simétrica então a unicidade de solução segue independentemente dos termos de ordem inferior, ver Cossi-dos Santos Filho ([3]). Por exemplo, tome g dado por* $g(t) = e^{-1/t}$ *para* $t > 0$ *e* $g(t) = 0$ *para* $t \leq 0$, *o sistema simétrico*

$$A(t) = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & -g \end{pmatrix}$$

é fracamente hiperbólico. Para $A_1 = 0$ *nós obtemos*

$$B(t) = \begin{pmatrix} -g^{'}(t) & 0 \\ 0 & g^{'}(t) \end{pmatrix}$$

Assim para qualquer escolha de θ *e* α

$$\alpha t[b_{11}^2 + b_{12}^2] = \alpha t(g^{'})^2 > \theta(g)^2 + 2gg^{'} = \theta a + a_t$$

para $t > 0$ *suficientemente pequeno. Então* (4.7) *não vale numa vizinhança de* $t = 0$.

Observação 4.1.2 *Se substituirmos k por* $k + 1$, *o Teorema* 4.1.1 *também se verifica para sistemas semi-lineares* 2×2 *de primeira ordem, uma vez que supondo a existência de solução, pela expansão de Taylor de ordem um de f em* $(x, t, 0, 0)$, *temos que* $f(x, t, U) = A_1(x, t)U$.

Seja $\tilde{B} = (\tilde{b}_{ij})$ dado por

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \partial_t a_{11} + a_{11}\partial_x a_{11} + a_{21}\partial_x a_{12} & -a_{11}\partial_x a_{12} + \partial_t a_{12} + a_{12}\partial_x a_{11} \\ \partial_t a_{21} + a_{11}\partial_x a_{21} - a_{21}\partial_x a_{11} & -\partial_t a_{11} + a_{11}\partial_x a_{11} + a_{12}\partial_x a_{21} \end{pmatrix} + A_1 A$$

Também temos um teorema de existência de solução:

Teorema 4.1.2 *Assuma que*

$$\begin{aligned} \alpha t(|\tilde{b}_{11}|^2 + |\tilde{b}_{12}|^2) &\leq \theta a + \partial_t a, \\ \alpha t(|\tilde{b}_{22}|^2 + |\tilde{b}_{21}|^2) &\leq \theta a + \partial_t a, \end{aligned} \tag{4.8}$$

em G. Aqui θ é uma constante, $\alpha(t) = \alpha_1\chi_{[0,t_0]} + \alpha_2\chi_{[t_0,T]}$, em que t_0, α_1 e α_2 são constantes positivas como $\frac{\alpha_1}{2} > (2p+6)^{-1}$. Então existe uma solução $U \in H^{k-1}(G, \mathbb{R}^2)$ do problema de Cauchy (4.1)-(4.2).

Observação 4.1.3 *Pelo exemplo dado por C. Min-You, veja [9], para termos existência de solução do problema de Cauchy fracamente hiperbólico, em espaços de funções com grau de regularidade finito , algumas condições sobre os termos de ordem inferior devem ser impostas. Isto justifica que as condições* (4.7) *e* (4.8) *não podem ser removidas para o problema de Cauchy ser bem posto. Mais precisamente, considere*

$$u_{tt} - t^2 u_{xx} = bu_x, \ t > 0, \ 0 \leq x \leq 1,$$

com as condições iniciais

$$u|_{t=0} = \mu(x), \ u_t|_{t=0} = 0,$$

em que $b = 4n+1$, $n \geq 0$ é um inteiro. A única solução tem a forma

$$u(x,t) = \sum_{l=0}^{n} \frac{\sqrt{\pi} t^{2l}}{l!(n-l)!\Gamma(l+\frac{1}{2})} \partial_x^l \mu(x + \frac{1}{2}t^2).$$

Observemos que a distribuição u perde regularidade com n. Agora para o sistema de primeira ordem na forma (4.1) *associado a esta equação escalar de segunda ordem, nós temos $a_{11} = 0 = a_{22}$, $a_{12} = 1$ e $a_{21} = t^2$. Logo $a(t) = -detA = t^2$. No Teorema* 4.1.2 *temos então que $\tilde{b}_{11} = 0 = \tilde{b}_{12}$, $\tilde{b}_{21} = 2t$, e $\tilde{b}_{22} = 4n+1$, assim a condição* (4.8) *toma a forma $\alpha t[(\tilde{b}_{21})^2 + (\tilde{b}_{22})^2] \leq \theta a + a_t$, a qual esta satisfeita para $\alpha \leq \frac{2}{(4n+1)^2}$. Assim se $\alpha > (2p+6)^{-1}$, então*

$(4n+1) < [2(2p+6)]^{1/2}$ *o que mostra que* p *tende para o infinito com* n*, aqui* p *mede o grau de regularidade do dado inicial.*

Pelos teoremas 4.1.1 e 4.1.2 temos as seguintes conseqüências:

Corolário 4.1.1 *Se* $A = A(t)$*,* $A_1 = 0$ *e* (4.7) *se verifica, então existe uma única solução* $U \in H^{k-1}(G, \mathbb{R}^2)$ *do problema de Cauchy* (4.1)-(4.2)*.*

Isto segue pois neste caso as condições (4.7) e (4.8) são as mesmas.

O próximo resultado é análogo ao Corolário 2.2.1

Corolário 4.1.2 *Se os dados do problema* (4.1)-(4.2) *são suficientemente regulares e*

$$a^{(j)}(0) \neq 0 \text{ para algum } j \leq 2, \tag{4.9}$$

em que, em (4.6)*,* $a = a(t)$*, então existe uma única solução* $U \in H^{k-1}(G, \mathbb{R}^2)$ *do problema de Cauchy* (4.1)-(4.2) *numa vizinhança de* $t = 0$*.*

Isto segue do fato da hipótese (4.9) implicar (4.7) e (4.8) numa vizinhança de $t = 0$.

Exemplo 4.1.1 *Se* A_1 *for suficientemente regular, por exemplo* $A_1 \in C^\infty$*, o sistema não simetrizável*

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t^2 & 0 \end{pmatrix}$$

satisfaz as hipóteses do Corolário 4.1.2, pois $a(t) = t^2$*, logo valem as conclusões do corolário.*

Se assumirmos que

$$a_{12}(x,t) \neq 0 \text{ e } a_{21}(x,t) \neq 0 \forall (x,t) \tag{4.10}$$

obtemos um teorema de existência e unicidade de solução:

Teorema 4.1.3 *Assuma que*

$$\begin{aligned} \alpha t|\tfrac{a_{21}\partial_t a_{11}-a_{11}\partial_t a_{21}+a_{21}tr(AA_1)}{a_{21}}|^2 \leq \theta a+\partial_t a, \\ \alpha t|\tfrac{-a_{12}\partial_t a_{11}-a_{11}\partial_t a_{12}+a_{12}tr(AA_1)}{a_{12}}|^2 \leq \theta a+\partial_t a. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Então existe uma única solução $U \in H^{k-1}(G, \mathbb{R}^2)$ *do problema de Cauchy* (4.1)-(4.2). *Aqui* θ *é uma constante,* $\alpha(t) = \alpha_1\chi_{[0,t_0]} + \alpha_2\chi_{[t_0,T]}$, *em que* t_0, α_1 *e* α_2 *constantes positivas,* χ *a função característica e* $\frac{\alpha_1}{2} > (2p+6)^{-1}$.

No último teorema (4.11) substitui (4.7) e (4.8).

4.2 Demonstração dos Teoremas

Primeiramente provaremos o Teorema 4.1.1.

Demonstração:(**Teorema 4.1.1**) Consideraremos duas etapas para a demonstração. Na primeira etapa aplicaremos um operador(transposto do co-fator da parte principal do operador P) no lado esquerdo do sistema (4.1) obtendo um sistema na forma (2.5). Na segunda etapa o teorema segue pelo Teorema 2.2.1.

Etapa 1

Considere

$$Q = I\partial_t + A\partial_x \tag{4.12}$$

Desde que a matriz $A(x,t)$ tem a propriedade de $A^2(x,t) = a(x,t)I$, então obtemos o sistema de ordem dois

$$(Q \circ P)U = I\partial_t^2 U - \partial_x(aI\partial_x U) + B\partial_x U + C\partial_t U + DU = Qf, \tag{4.13}$$

em que $C = A_1$, $D = QA_1$, e

$$B = \begin{pmatrix} -\partial_t a_{11} + a_{11}\partial_x a_{11} + a_{21}\partial_x a_{12} & -a_{11}\partial_x a_{12} - \partial_t a_{12} + a_{12}\partial_x a_{11} \\ -\partial_t a_{21} + a_{11}\partial_x a_{21} - a_{21}\partial_x a_{11} & \partial_t a_{11} + a_{11}\partial_x a_{11} + a_{12}\partial_x a_{21} \end{pmatrix} + AA_1.$$

Sejam ainda as condições iniciais

$$U(x,0) = \Phi(x),\ (\partial_t U)(x,0) = \Psi(x), \tag{4.14}$$

em que $\psi_j \in C_0^\infty(G)$.

Etapa 2

Por (4.7) o problema de Cauchy (4.13)-(4.14) satisfaz as hipóteses do Teorema 2.2.1. Então temos uma única solução $U \in H^k(G, \mathbb{R}^2)$ do problema de Cauchy (4.1)-(4.2). De fato, se existissem soluções distintas $U_1, U_2 \in H^k(G, \mathbb{R}^2)$ do problema de Cauchy (4.1)-(4.2), então $U_1, U_2 \in H^k(G, \mathbb{R}^2)$ seriam soluções distintas de (4.13)-(4.14), o que é uma contradição com o Teorema 2.2.1. . ∎

Agora provaremos o Teorema 4.1.2:

Demonstração:(**Teorema 4.1.2**) Aplicando o operador Q no lado direito de P obtemos o sistema de ordem dois

$$I\partial_t^2 U - \partial_x(aI\partial_x U) + \tilde{B}\partial_x U + A_1\partial_t U = f, \tag{4.15}$$

em que

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \partial_t a_{11} + a_{11}\partial_x a_{11} + a_{21}\partial_x a_{12} & -a_{11}\partial_x a_{12} + \partial_t a_{12} + a_{12}\partial_x a_{11} \\ \partial_t a_{21} + a_{11}\partial_x a_{21} - a_{21}\partial_x a_{11} & -\partial_t a_{11} + a_{11}\partial_x a_{11} + a_{12}\partial_x a_{21} \end{pmatrix} + A_1 A.$$

Com as condições iniciais

$$U(x,0) = 0,\ (\partial_t U)(x,0) = \Phi(x) \tag{4.16}$$

Por (4.8) segue do Teorema 2.2.1 que existe uma única solução $U \in H^k(G, \mathbb{R}^2)$ do problema de Cauchy (4.15)-(4.16). Logo $QU \in H^{k-1}(G, \mathbb{R}^2)$ é uma solução do problema de Cauchy (4.1)-(4.2). ∎

Como em Nishitani([12]), provaremos o Teorema 4.1.3, usando ao invés de Q dado em (4.12) o operador

$$Q = I\partial_t + A\partial_x - A_x + ({}^{co}A_1)^t + E \tag{4.17}$$

aqui $({}^{co}A_1)^t$ denota a transposta da matriz co-fatora de A_1 e $A_x = \partial_x A$. Daí

$$P \circ Q = I\partial_t^2 - aI\partial_x^2 + (A_t - AE + tr(AA_1)I)\partial_x$$

$$+(A_1 + ({}^{co}A_1)^t + E - A_x)\partial_t + P(E + ({}^{co}A_1)^t - A_x)$$

pois $A_1A - A({}^{co}A_1)^t = A_1A + ({}^{co}(A_1A))^t = tr(AA_1)I$. Com $E = (e_{ij})$ a matriz $A_t - AE + tr(AA_1)I$ toma a forma

$$\begin{pmatrix} \partial_t a_{11} - a_{11}e_{11} - a_{12}e_{21} + tr(AA_1) & \partial_t a_{12} - a_{11}e_{12} - a_{12}e_{22} \\ \partial_t a_{21} + a_{11}e_{21} - a_{21}e_{11} & a_{11}e_{22} - \partial_t a_{11} - a_{21}e_{12} + tr(AA_1) \end{pmatrix}$$

Queremos determinar e_{ij} de modo que tal matriz seja diagonal. Como $a_{12}(x,t) \neq 0$ e $a_{21}(x,t) \neq 0$ $\forall (x,t)$, tome $e_{12} = 0$, $e_{21} = 0$ e

$$e_{11} = \partial_t a_{21}/a_{21}, \quad e_{22} = \partial_t a_{12}/a_{12}.$$

Fazendo

$$Y(x,t) = a_{21}\partial_t a_{11} - a_{11}\partial_t a_{21} + a_{21}tr(AA_1),$$

$$Z(x,t) = -a_{12}\partial_t a_{11} + a_{11}\partial_t a_{12} + a_{12}tr(AA_1)$$

segue o seguinte lema:

Lema 4.2.1 *Dado Q como em* (4.17) *e tomando E dado acima então*

$$P \circ Q = \partial_t^2 - aI\partial_x^2 + B\partial_x + R\partial_t + S$$

em que

$$B = diag(\frac{Y(t,x)}{a_{21}}, \frac{Z(t,x)}{a_{12}}), \ R = E - A_x + A_1 + ({}^{co}A_1)^t$$

e $S = P(E) + P(({}^{co}A_1)^t - A_x)$.

De modo análogo ao lema anterior obtemos:

Lema 4.2.2 *Se*

$$\tilde{Q} = I\partial_t + A\partial_x + A_x + ({}^{co}A_1)^t + \tilde{E}$$

onde

$$\tilde{E} = -diag(\frac{\partial_t a_{12}}{a_{12}}, \frac{\partial_t a_{21}}{a_{21}}),$$

então

$$\tilde{Q} \circ P = \partial_t^2 - \partial_x(aI\partial_x) + \tilde{B}\partial_x + \tilde{R}\partial_t + \tilde{S}$$

com

$$\tilde{B} = diag(\frac{Z(t,x)}{a_{12}}, \frac{Y(t,x)}{a_{21}}),\ \tilde{R} = \tilde{E} + A_x + A_1 + ({}^{co}A_1)^t, \tilde{S} = \tilde{Q}(A_1).$$

Demonstração: Note que $a_x = A_x A + AA_x$ e $AA_1 - ({}^{co}A_1)^t A = tr(AA_1)I$. O restante da prova é similar ao lema anterior. ∎

Assim obtemos:

Demonstração:(**Teorema 4.1.3**) Por (4.11) e pelos lemas 4.2.1 e 4.2.2 o resultado segue do Teorema 2.2.1. ∎

4.3 O resultado de Nishitani-Spagnolo

Assumindo que valham (4.1)-(4.2) e (4.6), suponhamos que além disso A e A_1 sejam independentes de t, $\Phi(x) = 0$ e que

$$A_1(x) = \begin{pmatrix} \delta_1(x) & \beta_1(x) \\ \beta_2(x) & \delta_2(x) \end{pmatrix}$$

No que segue, por simplicidade, assumiremos que os coeficientes das matrizes A e A_1 são C^∞ com derivadas de todas as ordens limitadas em $\mathbb{R}$.

Exemplo 4.3.1 *Consideremos o caso de sistemas simétricos*

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & -a_{11} \end{pmatrix}.$$

Assim temos que sob as hipóteses acima $a(x) = -detA = a_{11}^2 + a_{12}^2 \geq 0$, $a_{11}^2 \leq a$ *e* $a_{12}^2 \leq a$. *Como*

$$tr(AA_1) = a_{11}(\delta_1 - \delta_2) + a_{12}(\beta_1 + \beta_2)$$

segue que existe θ *tal que*

$$[tr(AA_1)]^2 \leq \theta a(x).$$

Daí

$$\alpha t[tr(AA_1)]^2 \leq \theta a(x), \tag{4.18}$$

sendo esta justamente a desigualdade que se reduz a condição (4.11) *do Teorema 4.1.3, logo as conclusões do Teorema 4.1.3 valem.*

Por outro lado T. Nishitani e S. Spagnolo (em [13]) assumiram que existe uma constante $M > 0$ tal que

$$a_{12}a_{21} \geq 0,\ |a_{12}(x)\beta_2(x)| \leq M\sqrt{a_{12}(x)a_{21}(x)} \text{ e } |a_{21}(x)\beta_1(x)| \leq M\sqrt{a_{12}(x)a_{21}(x)} \tag{4.19}$$

Usando o método de desigualdades de energia eles demonstraram (ver Teorema 5.1 de [13]):

Teorema 4.3.1 *Se vale a condição* (4.19) *com* A *e* A_1 *como acima, então o problema de Cauchy* (4.1)-(4.2) *é bem posto em* C^∞.

Pela proposição seguinte e do Exemplo 4.3.2 veremos que (4.19) é mais restritiva que a condição (4.18).

Proposição 4.3.1 (4.19) *implica em* (4.18).

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned} |tr(AA_1)|^2 &= |a_{11}(\delta_1 - \delta_2) + a_{12}\beta_2 + a_{21}\beta_1|^2 \\ &\leq \frac{3}{2}[\|(\delta_1 - \delta_2)^2\|_\infty a_{11}^2 + |a_{12}\beta_2|^2 + |a_{21}\beta_1|^2] \end{aligned}$$

Mas como $a = a_{11}^2 + a_{12}a_{21}$ e $a_{12}(x)a_{21}(x) \geq 0$ então $a_{11}^2 \leq a_{11}^2 + a_{12}a_{21} = a$. Pelas duas últimas desigualdades de (4.19) obtemos que $|tr(AA_1)|^2 \leq Ma(x)$, do que segue (4.18). ∎

A seguir apresentamos um exemplo em que as hipótese do Teorema 4.1.3 estão satisfeitas, logo o problema de Cauchy (4.1)-(4.1) é bem posto no sentido de (2.8) mas não se verifica (4.19).

Exemplo 4.3.2 *Seja $b(x)$ uma função não-nula, de classe C^∞ e com todas as derivadas limitadas. Considere*

$$A(x) = \begin{pmatrix} b(x) & b(x) \\ -b(x) & -b(x) \end{pmatrix}$$

do que segue $a(x) = -detA = 0$. Tomemos $A_1(x)$ de modo que $tr(AA_1) = 0$, o que implica $\delta_1 + \beta_2 = \beta_1 + \delta_2$. Logo (4.18) *se verifica. Entretanto a condição* (4.19) *não vale, pois existe um x de modo que $a_{12}(x)a_{21}(x) = -b^2(x) < 0$.*

Referências Bibliográficas

[1] Chazarain, Jacques and Piriou, Alain. **Introduction To The Theory Of Linear Partial Differential Equations**. North-Holland, 1982.

[2] Colombini, Ferruccio and Spagnolo, Sergio: A Non-Uniqueness Result for the Operators with Principal Part $\partial_t^2 + a(t)\partial_x^2$. **Progr. Nonl. Diff. Eq. Appl.** 1989, (1), 331-353, Birkhäuser Boston, Boston, MA.

[3] Cossi, Lúcia and dos Santos Filho, José Ruidival: Uniqueness of the Cauchy problem for Systems of Partial Differential Equations. **Mat. Contemp.** 2000, (18), 77-96.

[4] Glaeser, Georges: Racine Carrée D'une fonction différentiable. **Ann. Inst. Fourier** 1963, Grenoble, 13, (2), 203-210.

[5] Hadamard, J., Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations, Yale University Press, 1923.

[6] Hounie, J. **Introdução aos Operadores Pseudo-Diferenciais**. Impa, 16 Colóquio Brasileiro de Matemática, 1987 .

[7] Hounie, J., Dos Santos, J. R. Well-posed Cauchy problems for complex nonlinear equations must be semilinear, **Math. Ann.**, 294 (1992), pp 439-447

[8] Kreiss, Heinz-Otto and Lorenz, Jens: **Initial-Boundary Value Problems and the Navier-Stokes Equations** 1989, Academic Press, Inc.

[9] Min-You, Chi: On the Cauchy problem for a class of hyperbolic equations with initial data on the parabolic degenerating line. **Acta Math. Sinica** 1958, 8(14), 521-529.

[10] Nakane, Shizuo: Non-uniqueness in the Cauchy problem for partial differential operators with multiple characteristics I. **Comm. In P.D.E.** 1984, 9(1), 63-106.

[11] Nakane, Shizuo: Uniqueness and non-uniqueness in the Cauchy problem for a class of operators of degenerate type-II. **Proc. Japan Acad.** 1983, (59), 318-320.

[12] Nishitani, Tatsuo: Hyperbolicity of two by two systems with two independent variables. **Comm. in Partial Differential Equations** 1998, 23(5 and 6), 1061-1110.

[13] Nishitani, Tatsuo and Spagnolo, Sergio: An extension of Glaeser inequality and its applications. **Osaka J. Math** 2004, 41 (1).

[14] Oleinik, O. A.: On the Cauchy Problem for Weakly Hyperbolic Equations. **Comm. On Pure And Applied Math.** 1970, (XXIII), 569-586.

[15] Oleinik, O. A. and Radkevic, E. V.: **Second order equations with nonnegative characteristic form** 1973, AMS and Plenum Press.

[16] Treves, François. **Basic Linear Partial Differential Equations**. Academic Press, 1975.