8ª Lista de Exercícios

1. Sejam M um espaço topológico Hausdorff e N uma variedade topológica conexa e $F : M \to N$ um homeomorfismo local. Mostre:

(i) Se existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $\#F^{-1}(p) = n$ para cada $p \in N$, então F é um recobrimento topológico.

(ii) Se N é compacta, então F é um recobrimento topológico de finitas folhas se e somente se M é compacta.

2. Uma aplicação $\pi : M \to N$ diferenciável se chama um *recobrimento diferenciável* se ela é sobrejetora e se cada ponto $p \in N$ tem uma vizinhança U aberta tal que π restrita a cada componente de $\pi^{-1}(U)$ é um difeomorfismo a U. Mostre que

(i) Um recobrimento diferenciável é um difeomorfismo local e uma submersão.

(ii) Um recobrimento diferenciável injetor é um difeomorfismo.

(iii) Um recobrimento topológico é um recobrimento diferenciável se e somente se ele é um difeomorfismo local.

3. Mostre que a aplicação $\pi : \mathbb{R} \to S^1 \subset \mathbb{C}$ definida por $\pi(t) = e^{it}$ é um recobrimento diferenciável.

4. Mostre que $\pi : S^n \to \mathbb{R}P^n; (x_0, \dots, x_n) \mapsto [x_0 : \dots : x_n]$ é um recobrimento diferenciável.

5. Sejam M um espaço topológico, N^n uma variedade diferenciável conexa e $\pi : M \to N$ um recobrimento topológico. Mostre que M é uma variedade topológica de dimensão n e tem uma única estrutura diferencial tal que π é um recobrimento diferenciável.